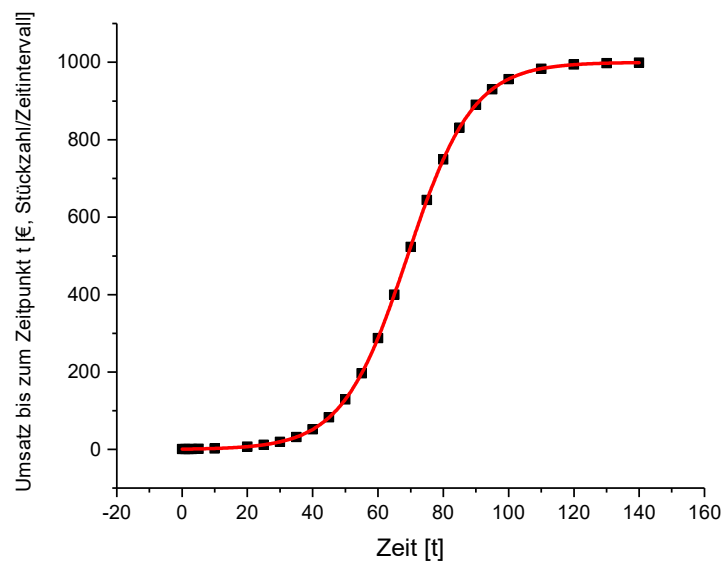




Wachstums funktionen



Wegweiser

Seite	
3	1. Wachstum
4	2. Differentialgleichungen und Funktionen
4	2.1 Die logistische Funktion
8	2.2 Wachstumsfunktion mit Dämpfung nach einer e-Potenz
8	2.3 Die Funktion von Albach
9	2.4 Die Gauß-Kurve
9	3. Beispiele
9	3.1 Hefewachstum
10	3.2 Photovoltaik. Ausbau und Stromerzeugung
11	3.3 Wachstum der Weltbevölkerung
11	3.4 Kompaktkameras
12	3.5 Gründungsdaten von Klöstern der Zisterzienser
13	3.6 Geburtsdaten von Renaissance-Künstlern
14	4. Komplexere Wachstumszusammenhänge
14	4.1 Periodische Schwankung / Modulation
15	4.2 Bakterien. Wachstumsfunktion und Enterotoxin-Produktion
16	4.2 Phasen einer Bakterienkultur. Negative logistische Funktion
17	Zusammenfassung
18	Anhang
19	A1. Kurvenform: Lineare und halblogarithmische Darstellung
19	A2. Verlaufsprognose: Stufen- oder Glockenfunktion?
21	Literatur

1. Wachstum

Wachstum kann unterschiedlichen Mustern folgen und nach mehreren Modellen beschrieben werden (NN 1).

In wirtschaftlichen, sozialen oder biologischen Systemen findet man, über der Zeit aufgetragen, häufig einen S-förmigen Kurvenverlauf, der asymptotisch einem Grenzwert zustrebt (NN 2). Mit dieser Kurve wird auch die sog. Diffusion charakterisiert, also der Verlauf von Prozessen, die durch Verbreitung von Innovationen ausgelöst werden (Holwegler, 2000; NN 3; NN4). Eine S-Kurve kann auch das Leistungspotenzial einer Technologie veranschaulichen, in Abhängigkeit von den aufgewendeten Mitteln [Gabler Wirtschaftslexikon (2014)]. Die Zahl der Unternehmer, die eine Innovation innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls übernehmen, wird oft durch eine Gaußsche Glockenkurve wiedergegeben (NN 4; NN 5).

Stabilisiert sich eine wachsende Population auf einem höheren Niveau, dann ist die Einhüllende der jährlichen Zuwachsdaten in etwa glockenförmig. Die Folge jährlicher Umsätze bei einem Wirtschaftsunternehmen kann einerseits einen S-förmigen Verlauf nehmen, wenn sich der Umsatz von Jahr zu Jahr steigert und sich auf einem neuen Niveau stabilisiert, oder aber eine glockenähnliche Form aufweisen, wie zum Beispiel bei einem vorübergehenden Modetrend. Eine kulturhistorische Entwicklung, charakteristisch für eine bestimmte Epoche, folgt oft dem Glockenmuster. An der zahlenmäßigen Entwicklung von Mikroorganismen werden vier Abschnitte unterschieden, wobei nach dem Anstieg und einer längeren stabilen Phase die Population wieder gegen null absinkt.

Zur Charakterisierung und Voraussage von Entwicklungen wird häufig die logistische Funktion

$$P(t) = \frac{K}{1 + A \cdot \exp(-k \cdot t)}$$

eingesetzt (Sigmoidfunktion, Schwanenhalsfunktion, S-Funktion). Sie wurde von Pierre-François Verhulst (1838) zur Beschreibung des Bevölkerungswachstums eingeführt und von May (1976) mit biologischen Wachstumsvorgängen in Zusammenhang gebracht. Als eines der vielen Anwendungsbeispiele beschreibt Fischer (2001) damit das Wachstum von Fichten. Funktionen im Zusammenhang mit dem Wachstum wurden auch von Albach oder Lohmöller vorgeschlagen [Simon (1976)]. Die Kondratew-Zyklen (NN 6) beschreiben einen periodischen Verlauf. Anfangs überzogene Erwartungen können einen Hype-Zyklus (NN 7) auslösen.

Im Folgenden wird auch eine analytische Funktion diskutiert, in der Form ähnlich der S-Kurve, bei der die Wachstumsrate durch eine e-Potenz modifiziert ist.

2. Differentialgleichungen und Funktionen

2.1 Die logistische Funktion

Eine Population findet günstige Lebensbedingungen vor, in der Folge erhöht sich ihre Mitgliederzahl P . Die Änderung dP pro Zeitintervall dt lautet

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot k$$

EQ 1

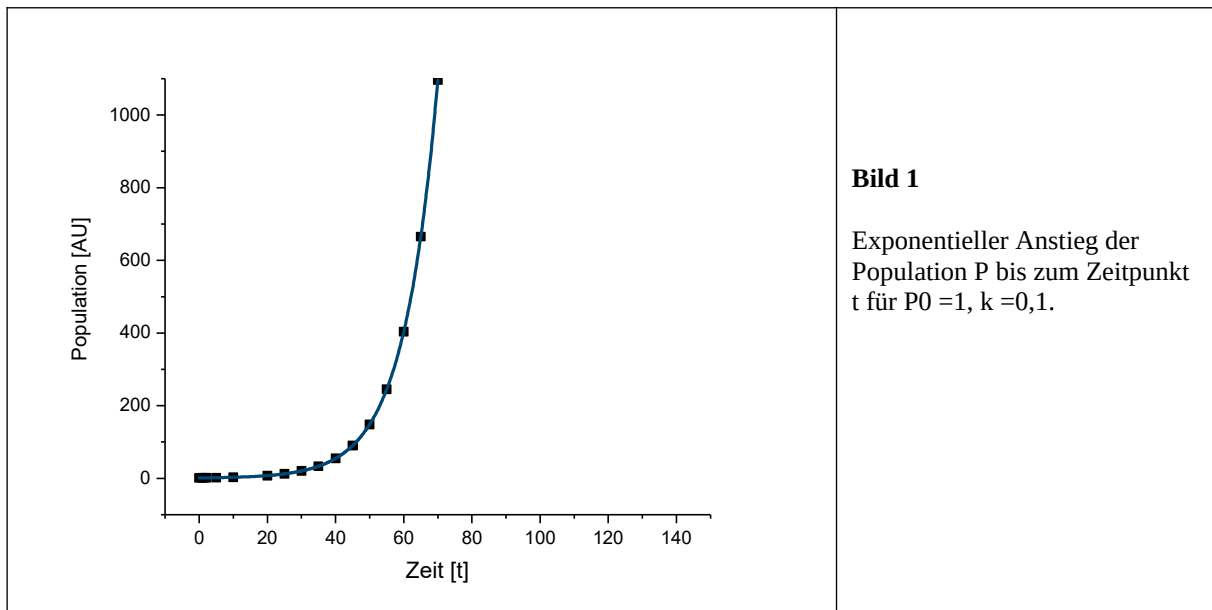
mit k als der „intrinsic Wachstumsrate“ (NN 8). Die Lösungsfunktion ergibt einen exponentiellen Anstieg (Bild 1):

$$dP = P \cdot k \cdot dt; \quad \int \frac{dP}{P} = \int k \cdot dt;$$

$$\ln P = k \cdot t + C; \quad \text{für } t \rightarrow 0: P \rightarrow P_0; C = \ln P_0;$$

$$P(t) = P_0 \cdot \exp(k \cdot t)$$

EQ 2



Praktisch verringert sich jedoch bald die Anstiegsgeschwindigkeit, es tritt eine allmähliche Sättigung ein. Dazu muss die Größe k im Exponenten der e -Funktion mit steigendem P abnehmen, etwa nach einer linearen Funktion von P , wie sie von Verhulst (1838) für das Bevölkerungswachstum formuliert wurde:

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot k \left[1 - \frac{P}{K} \right]$$

EQ 3

K ist der maximale Wert, den P erreichen kann und P/K ist der Dämpfungsterm. Diesen Ausdruck kann man prüfen, indem man $K = \infty$ setzt. Der Korrekturterm wird zu null, man

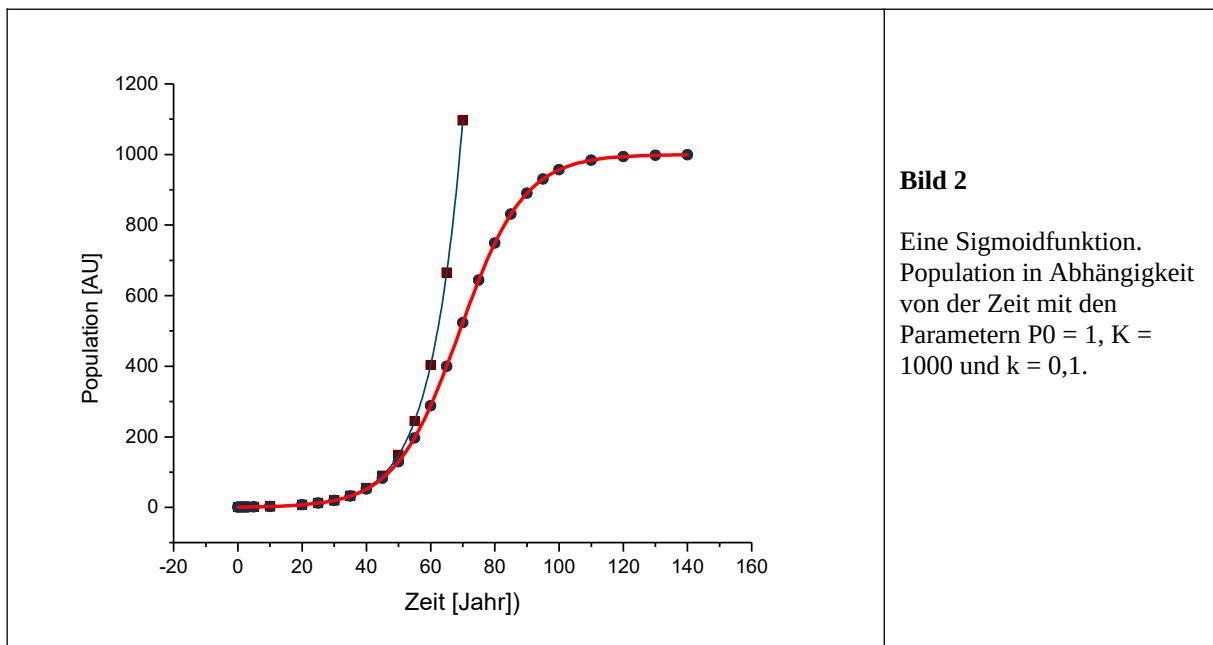
erhält wieder die Gleichung, die zu einem rein exponentiellen Anstieg führt (EQ 2). Für ein endliches K ergibt die Lösung der DGL

$$P(t) = \frac{P_0 \cdot K \cdot \exp(k \cdot t)}{[K + P_0 \cdot (\exp(k \cdot t) - 1)]} \quad \text{EQ 4}$$

P0 ist die Anfangspopulation. Durch Erweiterung dieser Funktion mit $e^{-\alpha \cdot t}$ erhält man die etwas einfachere Form, wie sie in der Literatur oft üblich ist:

$$P(t) = \frac{K}{[1 + A \cdot e^{-k \cdot t}]} \quad \text{mit} \quad A = \frac{P_{max} - P_0}{P_0} \quad \text{EQ 5}$$

Im Folgenden wird an der Form nach EQ 4 festgehalten. In der grafischen Darstellung von EQ 4 (Bild 2) wurden P0=1, K=1000 und k=0,1 gewählt. Sie zeigt die Inversionssymmetrie einer Sigmoidfunktion (NN 9).

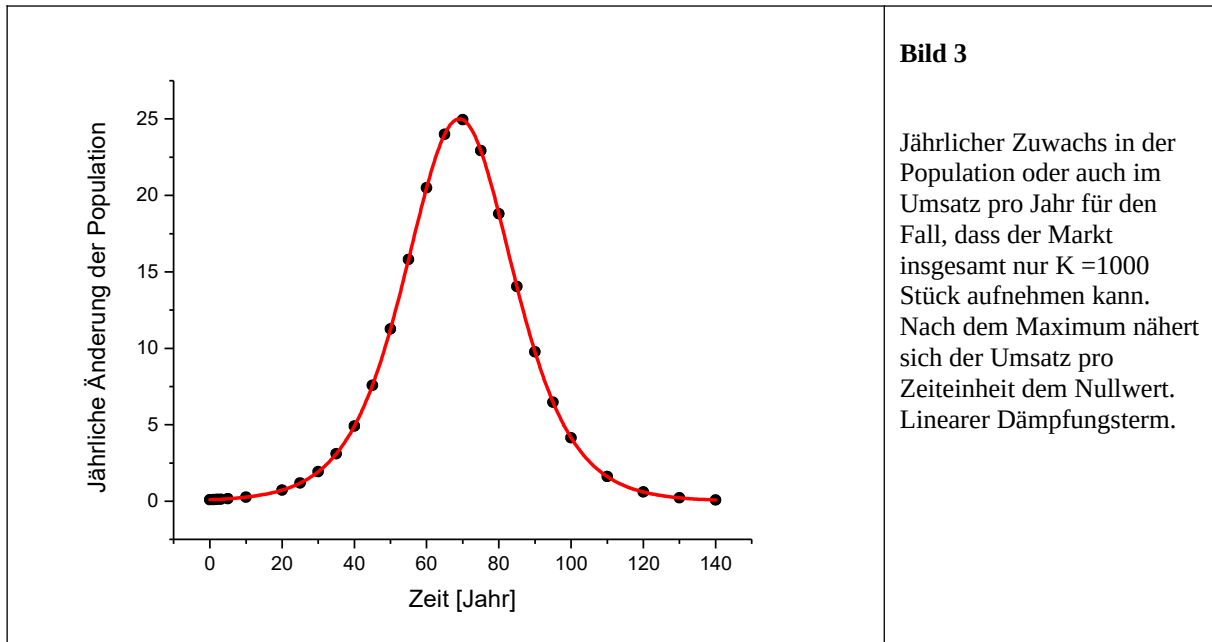


Die erste Ableitung

$$\frac{dP}{dt} = \frac{k \cdot P_0 \cdot K \cdot \exp(k \cdot t) \cdot [K - P_0]}{[K + P_0 \cdot (\exp(k \cdot t) - 1)]^2} \quad \text{EQ 6}$$

gibt den jährlichen Bevölkerungszuwachs wieder (Bild 3). Diese Kurve wird im Folgenden als Glockenfunktion bezeichnet (es handelt sich nicht um die Gauß-Funktion; auf diese wird eigens hingewiesen).

In der Wirtschaft können die Diagramme in Bild 2 und 3 auch den Verlauf des „jährlichen Umsatzes“ wiedergeben. Bild 2 zeigt dann, dass der Umsatz (Stück, €/Jahr) von Jahr zu Jahr ansteigt und sich dann auf einem gleichmäßig hohen Niveau K stabilisiert. Bild 3 gibt dann den jährlichen Umsatz eines Produkts mit zeitlich begrenzter Lebensdauer wieder, etwa eines Modeartikels oder eines Automodells, das durch einen Nachfolger ersetzt wird. Die Der Fall, dass nach dem Anstieg erst nach einer längeren stabilen Phase der Funktionswert wieder abnimmt, wird in Abschnitt 4 (Komplexere Wachstumszusammenhänge) behandelt.



Weicht der Exponent des Dämpfungsterms P/K von 1 ab, dann ist die einem Grenzwert zustrebende Kurve nicht mehr inversionssymmetrisch (Bild 4). Diese Varianten werden im Weiteren generell als Stufenfunktionen bezeichnet. Die Ableitungen (ähnlich einer Glockenkurve) weisen eine zunehmend asymmetrische Form auf (Bild 5).

Für eine beliebige Potenz n des Dämpfungsterms lautet die Differentialgleichung

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot k \cdot \left[1 - \frac{P^n}{K^n} \right] \quad \text{EQ 7}$$

Die Lösungsfunktion ist

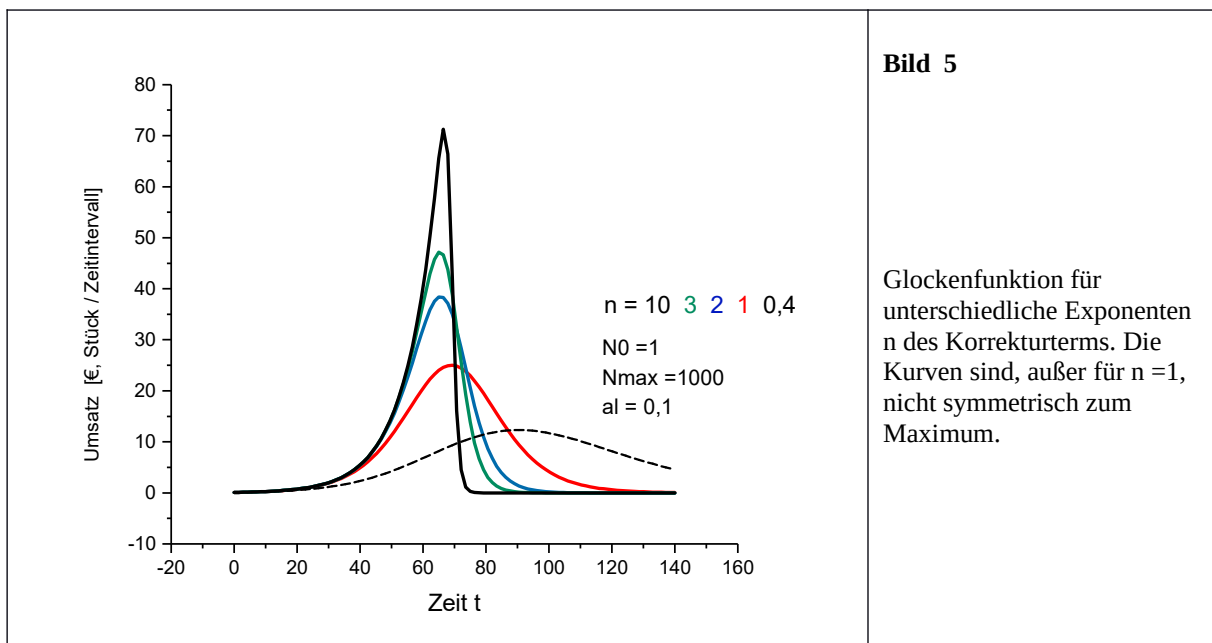
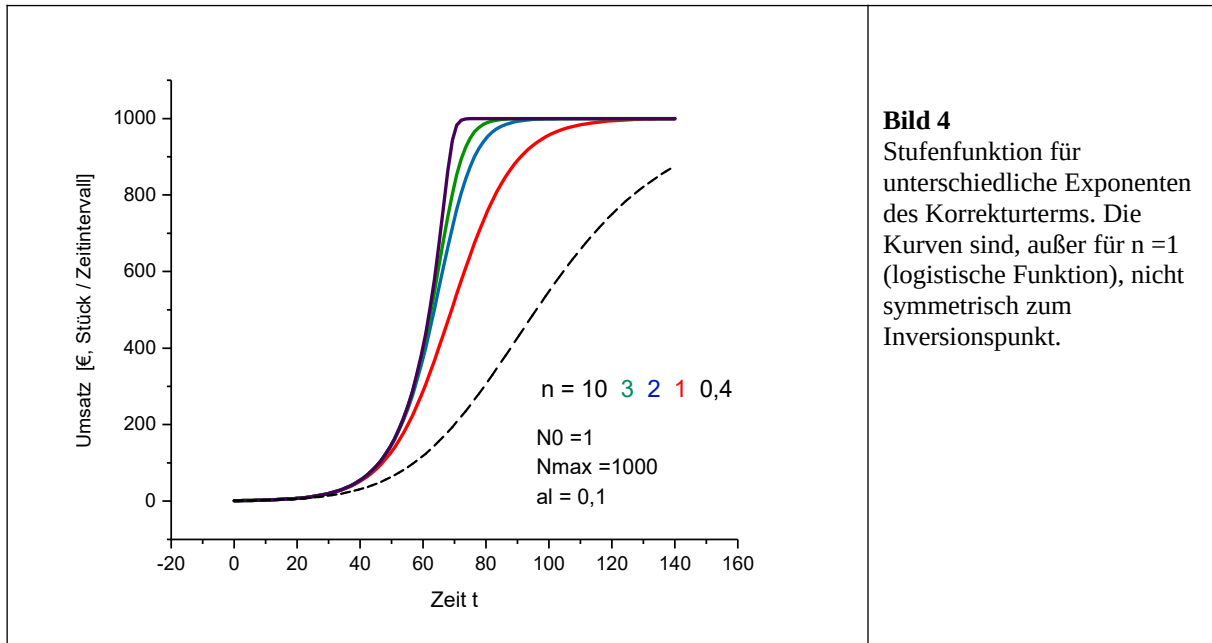
$$R(t) = \frac{P_0 \cdot K \cdot \exp(k \cdot t)}{\left[K^n + P_0^n \cdot (\exp(n \cdot k \cdot t) - 1) \right]^{\frac{1}{n}}} \quad \text{EQ 8}$$

und ihre erste Ableitung

$$\frac{dR}{dt} = \frac{k \cdot P_0 \cdot K \cdot \exp(k \cdot t) \cdot [K^n - P_0^n]}{[K^n + P_0^n \cdot (\exp(n \cdot k \cdot t) - 1)]^{1 + \frac{1}{n}}}$$

EQ 9

Die Bilder 4 und 5 zeigen eine Zusammenstellung der Kurven mit dem Exponenten des Dämpfungsterms $n = 0,4, 1, 2, 3$ und 10 .



2.2 Wachstumsfunktion mit Dämpfung nach einer e-Potenz

Zur Unterscheidung der einzelnen Funktionen voneinander haben ihre Parameter jeweils eigene Bezeichnungen, auch wenn deren Bedeutung fallweise dieselbe ist. So wird in dieser Funktion die intrinsische Wachstumsrate mit up bezeichnet (in der S-Funktion mit k). Man geht wieder aus von der exponentiellen Wachstumsfunktion $y = A \cdot e^{up \cdot t}$, mit A gleich der Startpopulation. Die differentielle Form lautet $dy = A \cdot up \cdot e^{up \cdot t} dt$ oder

$dy = y \cdot up \cdot dt$. Nun wird up um eine fallende e-Potenz erweitert:

$$dy = y \cdot (up \cdot e^{-t}) dt; \quad \frac{dy}{y} = up \cdot e^{-t} dt; \quad \ln y = -up \cdot e^{-t} + C;$$

$$C(t \rightarrow 0) = \ln y_0 + up; \quad \ln \frac{y}{y_0} = up \cdot (1 - e^{-t}) \quad \text{und mit } y_0 = A:$$

$$y = A \cdot e^{up(1-e^{-t})};$$

$$y = A \cdot e^{up(1-e^{-B \cdot t})}$$

EQ 10

Es wurde noch der Parameter B eingefügt, der die Zeit gleichsam streckt oder staucht. Der Verlauf ist der S-Kurve zwar ähnlich, aber nicht inversionssymmetrisch zum Punkt der größten Steigung. Sie verflacht im oberen Teil langsamer als sie am Beginn ansteigt.

Differenzieren von EQ 10 ergibt (mit $B = A \cdot T$):

$$y = A \cdot B \cdot up \cdot e^{-B \cdot t} \cdot e^{up \cdot [1 - e^{-B \cdot t}]}$$

EQ 11

Der Verlauf ist glockenähnlich.

2.3 Die Funktion von Albach

Diese Funktion

$$a * t^b * e^{-c * t}$$

EQ 12

zeigt ebenfalls glockenähnlichen Verlauf [Albach (1989)]. Der Anstieg erfolgt nach einer Potenz der Zeit (Wachstumsterm b), wird aber durch einen Faktor von der Form einer e-Potenz gedämpft. Bild 6 zeigt die jährliche Anzahl verkaufter iPods von 2002 bis 2014 (NN 10). Daran angepasst sind 4 unterschiedliche Funktionen.

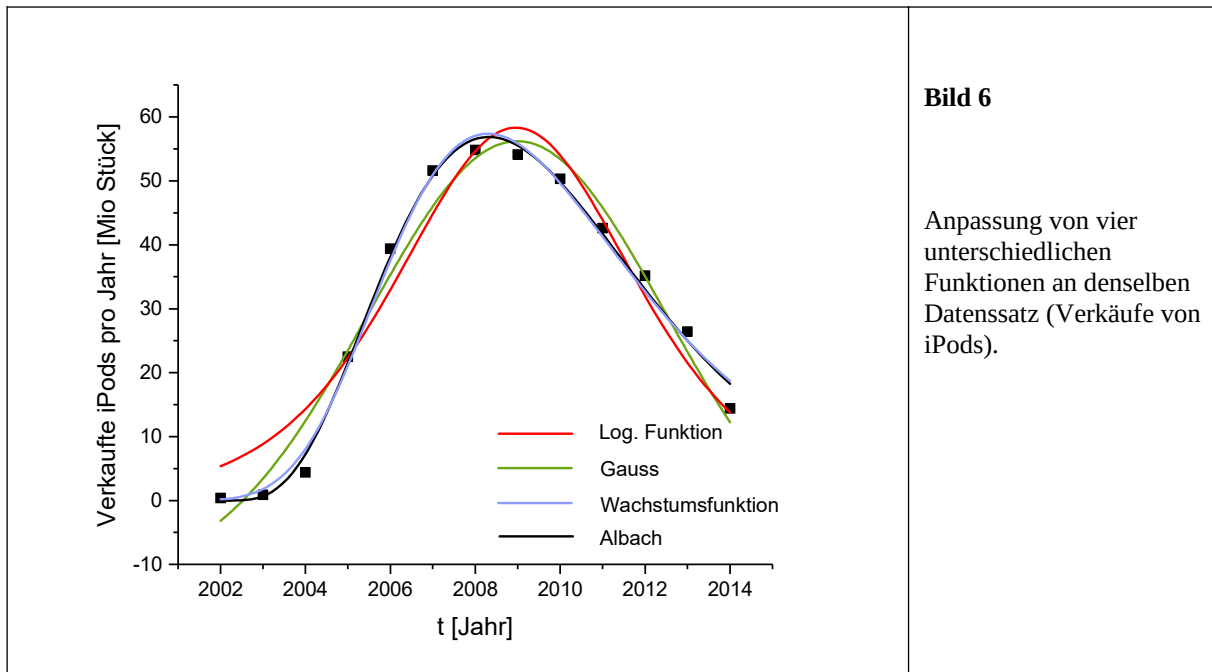


Bild 6

Anpassung von vier unterschiedlichen Funktionen an denselben Datensatz (Verkäufe von iPods).

2.4 Die Gaußkurve

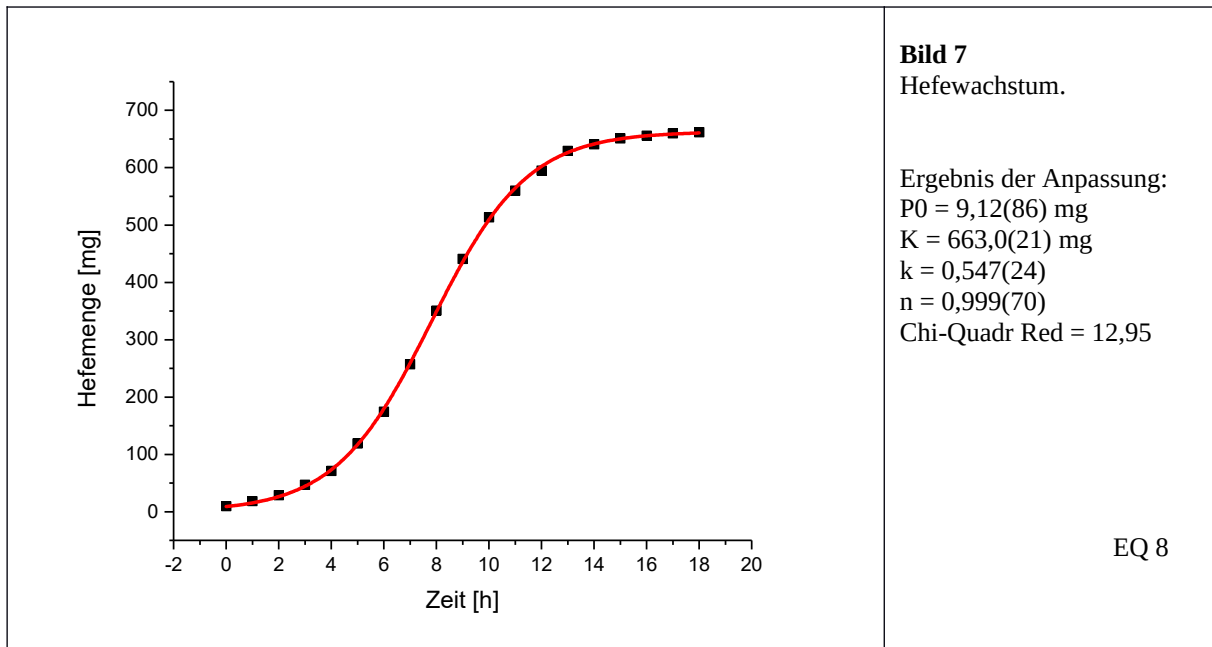
Die Gauß- oder Normalverteilung (NN 5) ist eigentlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dennoch wird die Gauß-Funktion, über einer Zeitachse, auch zur Darstellung einer wirtschaftlichen Entwicklung verwendet (NN 4). Die bisher behandelten Funktionen beruhen auf einer deterministischen Annahme, nämlich dass *über einen gewissen Zeitraum Marktmechanismen wirksam sind*, die die *zeitliche* Entwicklung einer Wertschöpfung oder eines Umsatzes bestimmen. Die Zeitkoordinate bildet dabei die unabhängige Variable. Eine klassische Gaußkurve beschreibt die *Wahrscheinlichkeit* als Funktion der *Abweichungen vom Mittelwert* unter der Voraussetzung, dass nur zufällige, also voneinander unabhängige Ereignisse diese Abweichungen bewirken. Die Abweichung vom Mittelwert bildet also die unabhängige Variable.

3. Beispiele

3.1 Hefewachstum

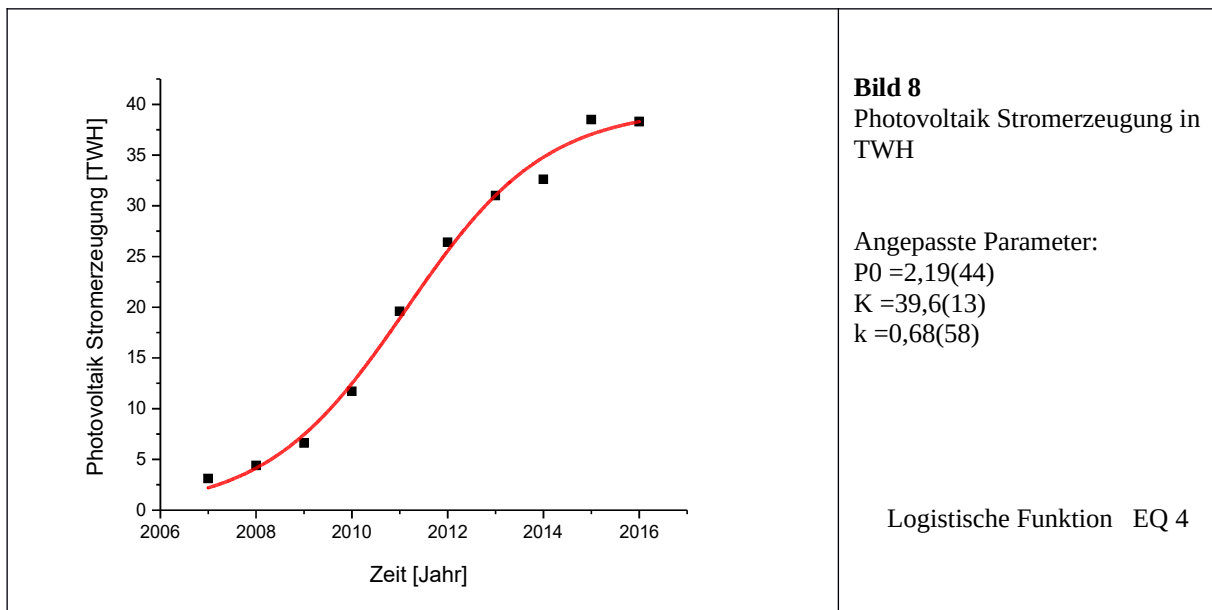
Der Vermehrung von Hefepilzen ist durch die zunehmende Ethanolkonzentration mit der Folge einer Dehydrierung eine Grenze gesetzt, die Gesamtmasse steigt erst exponentiell an und nähert sich dann einem Maximum.

Aus Messdaten (Hefemenge in Gramm als Funktion der Zeit; Werte aus Reichert (2012)) wurde mit Hilfe von EQ 8 die Parameter P_0 , K , k sowie der Exponent n angepasst. Für diesen erhält man einen Wert von fast genau 1,0. Der errechnete Maximalwert von 663,0(21) mg liegt noch etwas über dem letzten gemessenen (661,8 mg).



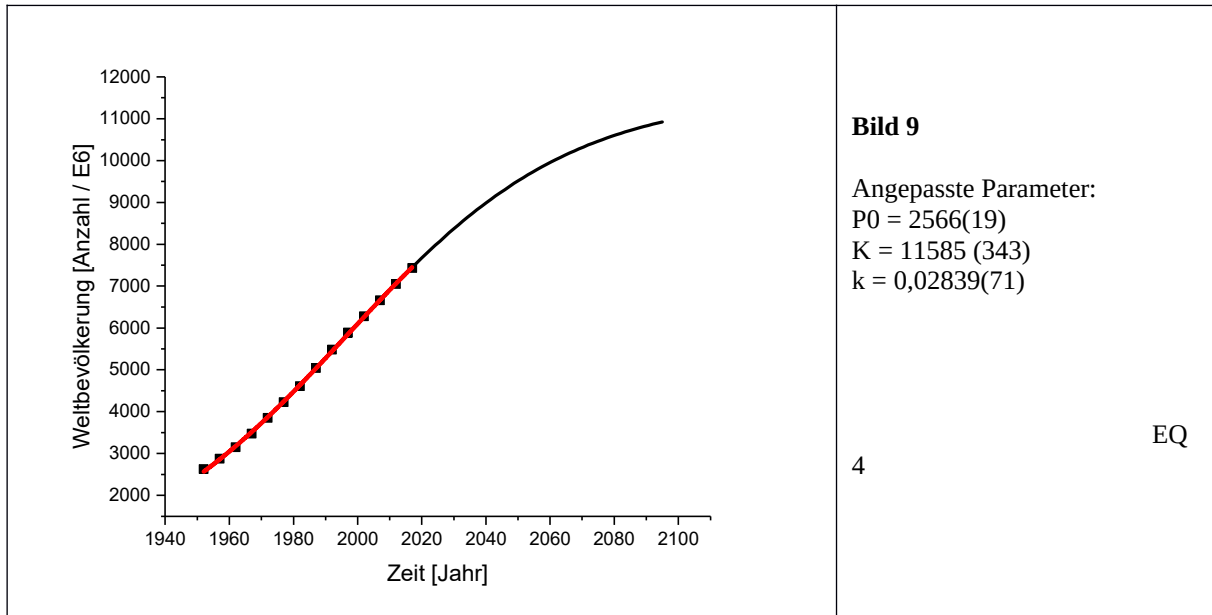
3.2 Photovoltaik. Ausbau und Stromerzeugung

Der geförderte Ausbau der Stromerzeugung aus Photovoltaik, zu Beginn stark ansteigend, verflachte in den letzten Jahren (Bild 8; Daten: NN 11)



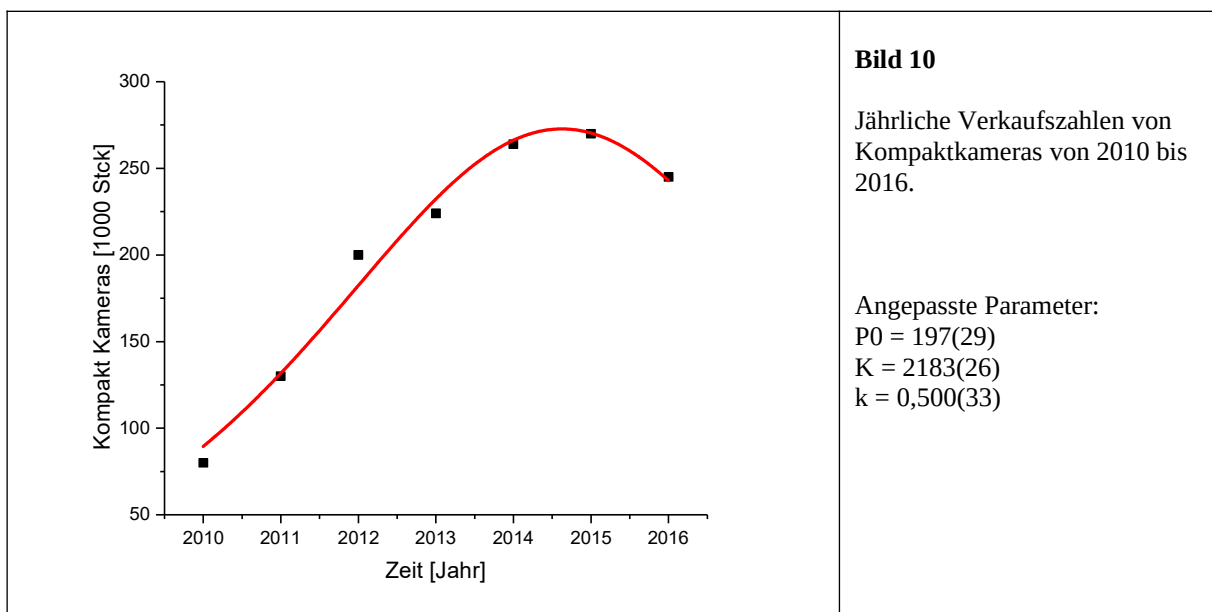
3.3 Wachstum der Weltbevölkerung

Diese scheint in Zukunft bei der Zunahme etwas flacher zu verlaufen (Bild 9; NN 12). Die Grafik zeigt die Weltbevölkerung in Millionen. Angepasst wurden die Bevölkerungszahlen von 1952 bis 2017, in Intervallen von 5 Jahren. Extrapolation bis zum Jahr 2095.



3.4 Kompaktkameras 2010-2016

Ein technisches Produkt wird meist allmählich von einem andern abgelöst. Von 2010 bis 2016 wurden bei Kompaktkameras pro Jahr die in Bild 10 gezeigten Stückzahlen verkauft (NN 13).



3.5 Gründungsdaten von Klöstern der Zisterzienser

Im 12. Und 13. Jahrhundert wurden in Italien zahlreiche Kapuziner- und Kapuzinerinnen-Klöster gegründet (NN 14). In Bild 11 sind 87 Gründungen eingetragen, zusammengefasst zu Intervallen von je 20 Jahren zwischen 1120 und 1400. Obwohl die Werte stark streuen, lässt die kumulierte Auftragung eine Stufenfunktion erkennen (Bild 12). Dabei wurden alle bis zu einem bestimmten Zeitpunkt erfolgten Gründungen addiert.

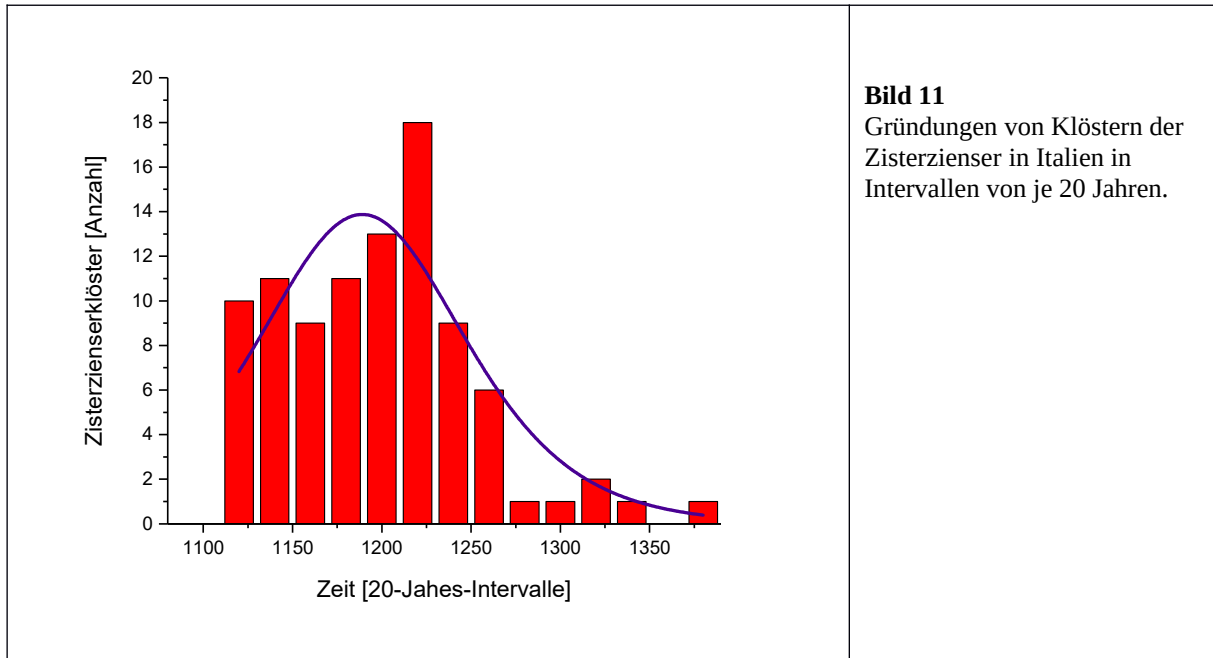


Bild 11
Gründungen von Klöstern der Zisterzienser in Italien in Intervallen von je 20 Jahren.

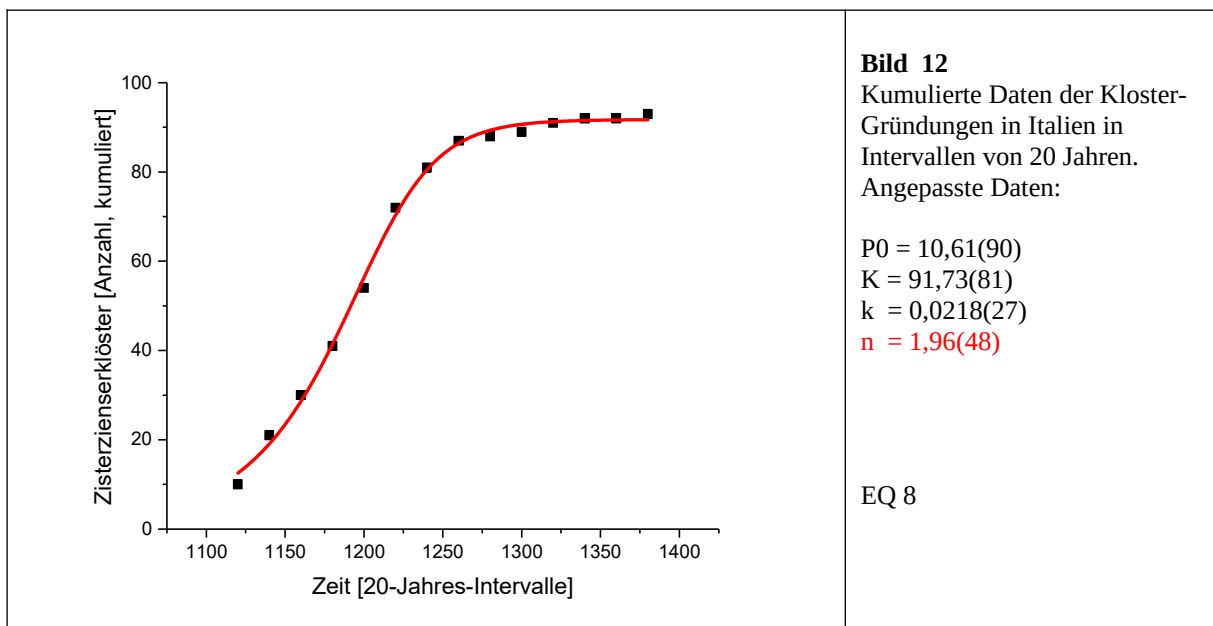


Bild 12
Kumulierte Daten der Kloster-Gründungen in Italien in Intervallen von 20 Jahren. Angepasste Daten:

$P_0 = 10,61(90)$
 $K = 91,73(81)$
 $k = 0,0218(27)$
 $n = 1,96(48)$

EQ 8

3.6 Geburtsjahr von Renaissance-Künstlern

Das Jahr der Geburt von 82 Renaissance-Künstlern (NN 15) zwischen 1422 (Posellino Francesco di Stafano) und 1601 (Jacob van Oost d. Ä.) wurde zu Intervallen von je 10 Jahren zusammengefasst. So wurden 28 Künstler zwischen 1480 und 1489 geboren (Bild 13).

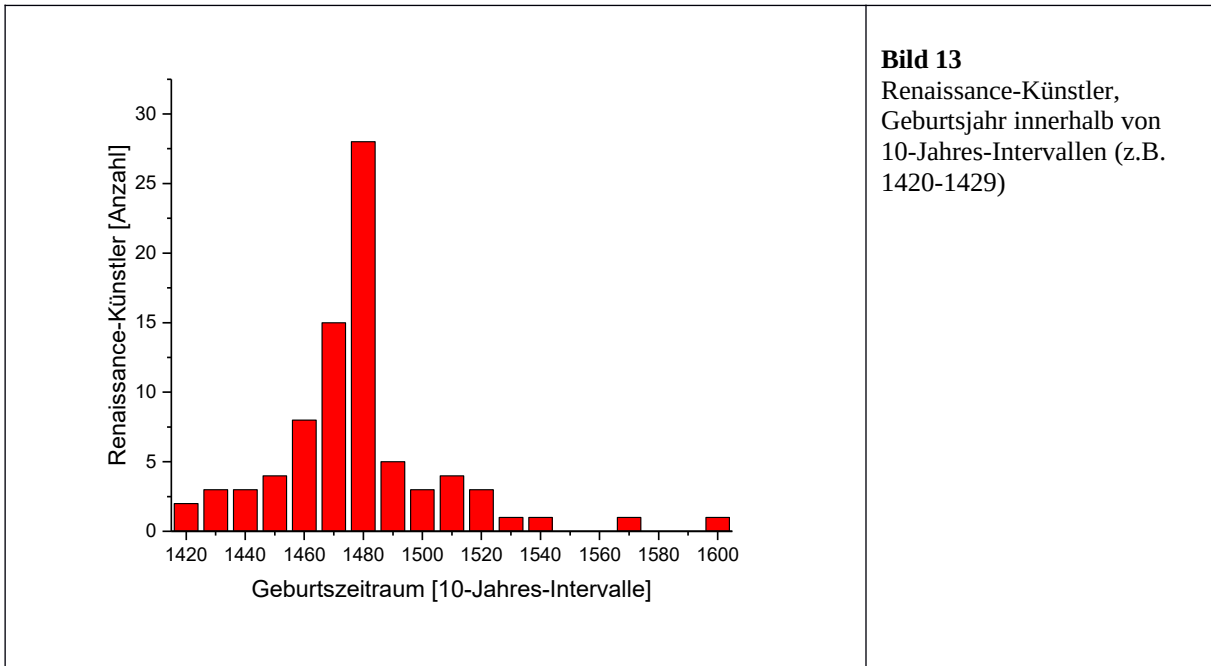


Bild 13
Renaissance-Künstler,
Geburtsjahr innerhalb von
10-Jahres-Intervallen (z.B.
1420-1429)

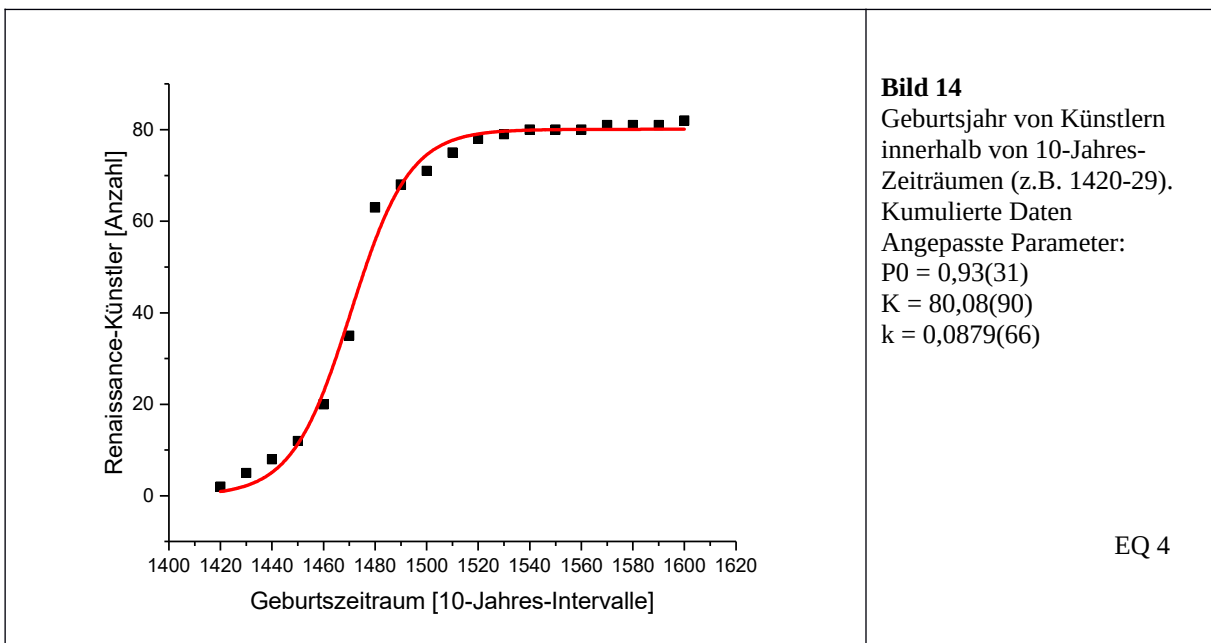


Bild 14
Geburtsjahr von Künstlern
innerhalb von 10-Jahres-
Zeiträumen (z.B. 1420-29).
Kumulierte Daten
Angepasste Parameter:
 $P_0 = 0,93(31)$
 $K = 80,08(90)$
 $k = 0,0879(66)$

EQ 4

Addiert man die Zahlen aus den einzelnen 10-Jahres-Abschnitten, dann erhält man das in Bild 14 wiedergegebene Diagramm. Die Parameter folgen aus der Anpassung von EQ 4.

4. Komplexere Wachstumszusammenhänge

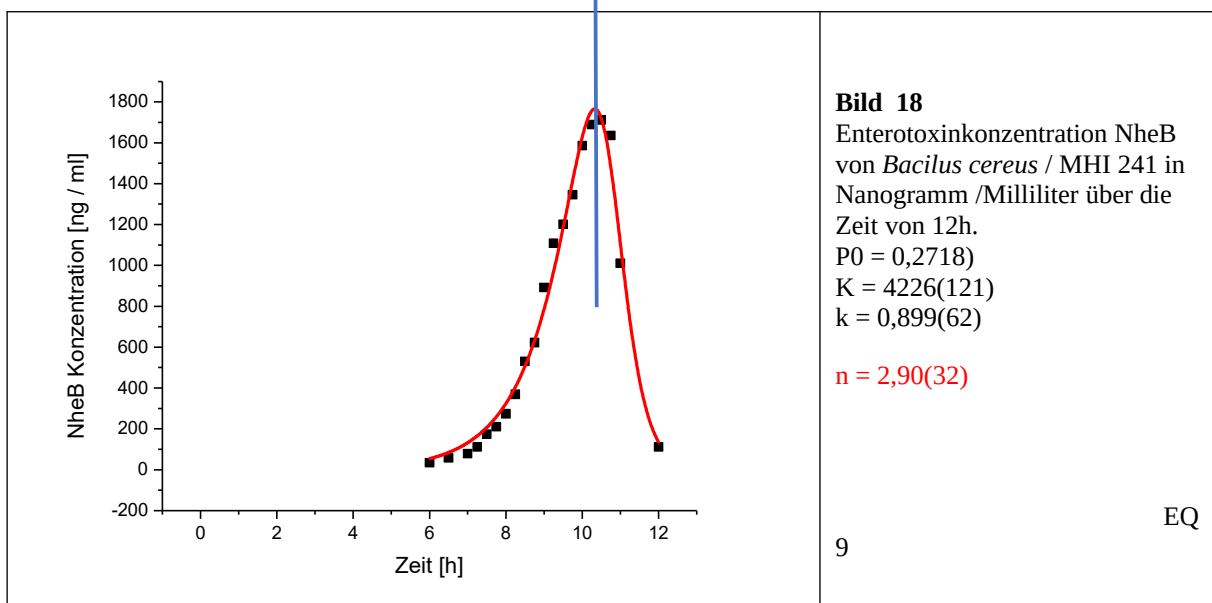
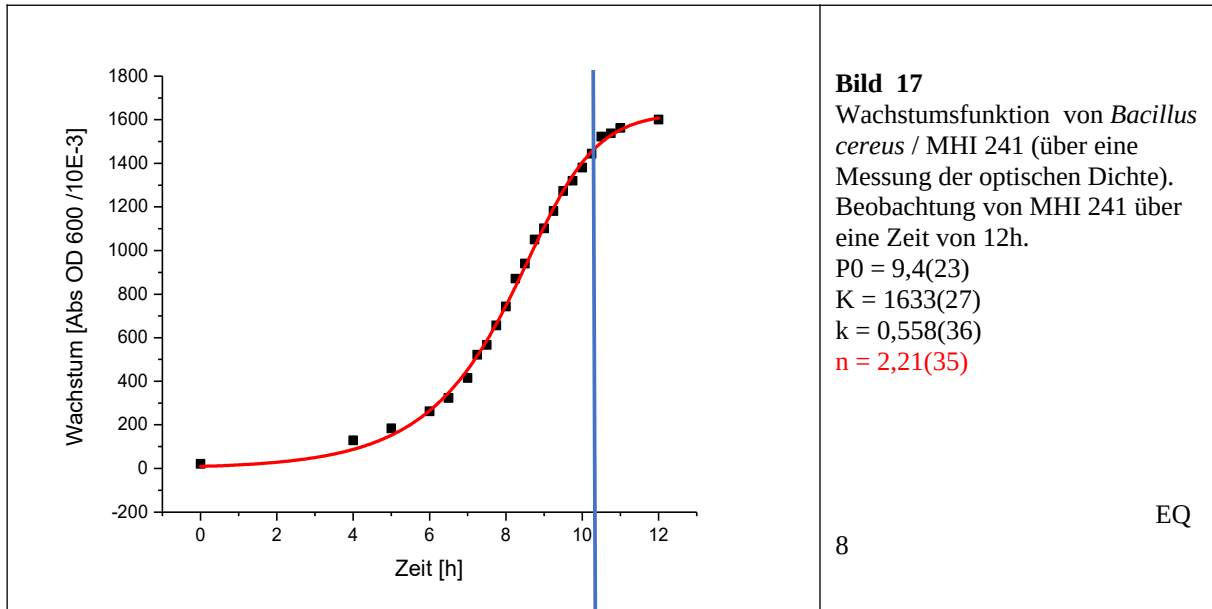
4.1 Periodische Schwankungen / Modulation

Die Umsatzentwicklung des Apple-Konzerns (Bild 15) zeigt auffallende Schwankungen, mit einem Maximum im ersten Quartal (NN 16). In Bild 16 ist eine logistische Funktion angepasst. Eine überlagerte Sinusfunktion (Modulation) gibt auch die saisonalen Schwankungen wieder (Bild 16). Der Ausdruck lautet: $(EQ\ 4) * [1 + D * \sin(\omega * (t - 2005) - \phi)]$.

	<p>Bild 15 Umsatz des Apple-Konzerns zwischen 2008 und 2014. Funktion EQ 4 Angepasste Parameter: $P_0 = 1,62(88)$ $K = 63,3(48)$ $k = 0,526(92)$</p> <p style="text-align: right;">EQ 4</p>
	<p>Bild 16 Das erste Quartal weist stets einen höheren Umsatz auf.</p> <p>Angepasste Parameter: $P_0 = 1,63(54)$ $K = 64,2(31)$ $k = 0,520(56)$ $D = 0,267(40)$ $\omega = 6,176(49)$ $\phi = 7,04(51)$</p> <p>Funktion: $(EQ\ 4) * [1 + D * \sin(\omega * (t - 2005) - \phi)]$</p>

4.2 Bakterien. Wachstumsfunktion und Enterotoxin-Produktion

Unterschiedliche Aspekte desselben Systems können oft durch unterschiedliche Funktionen charakterisiert werden; auch der Dämpfungsausdruck kann von 1 abweichen, wie bei der Produktion von Enterotoxinen durch den Verderbniserreger *Bacillus cereus* unter anaeroben Bedingungen (Krause, 2007). Der Wachstumsverlauf des Stamms MHI 241 folgt einer Stufenkurve (Gleichung EQ 8; Bild 17), die Konzentration der vom Bakterium produzierten Substanz NheB jedoch einer Glockenfunktion (Gleichung EQ 9; Bild 18), mit einem Peak kurz vor Erreichen der Maximalpopulation. Die Anpassung ergibt für den Exponenten des Dämpfungsterms mit n (Wachstum) = 2,21(35) und n (NheB) = 2,90(32) ähnliche Werte.



4.2 Phasen einer Bakterienkultur. Negative logistische Funktion

Bei Bakterien liegt oft zwischen dem Ende des Wachstums und dem Absterben der Kultur eine Phase konstanter Population (Bild 19). [Peled, Salvadori](#), Peled, and [Kidby](#) (1971) untersuchten den Rückgang der Population („Absterbephase“) an einer Kultur von *Candida utilis* (strain Y 60). Dieser kann ebenfalls durch eine logistische Funktion – mit negativem Vorzeichen – beschrieben werden (Bild 20). In diesem Fall wurde eine Stufenfunktion (EQ 4), die an die Messdaten angepasst wurde, vom Höchstwert (1,0 = 100%) abgezogen.

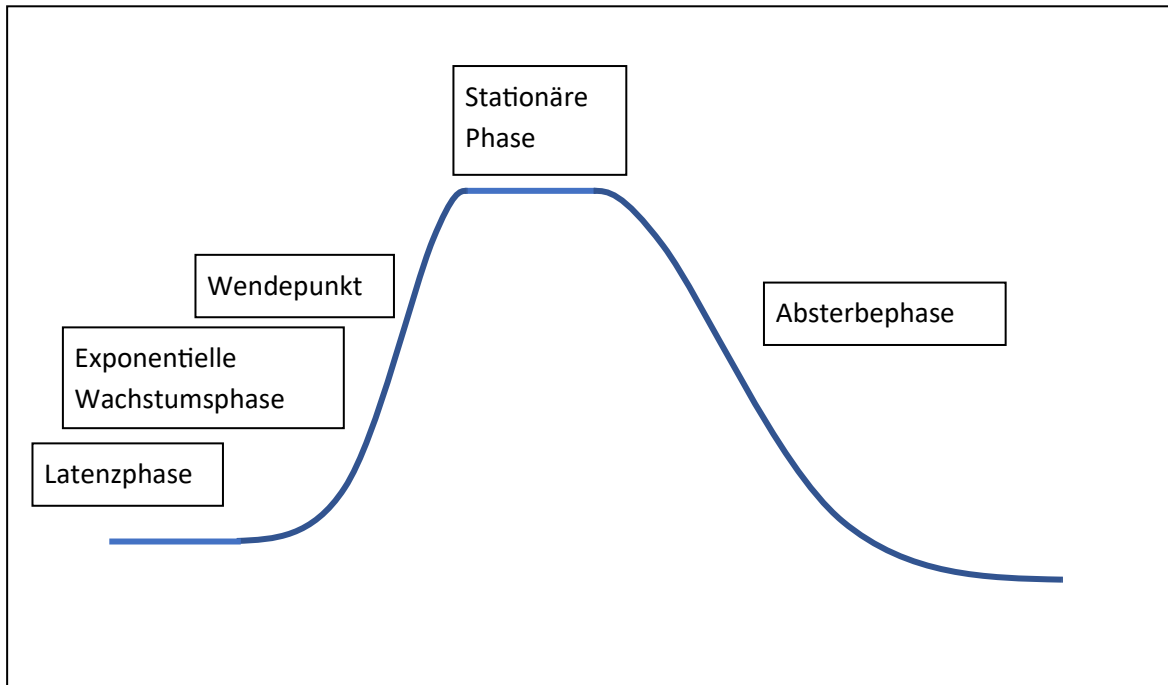
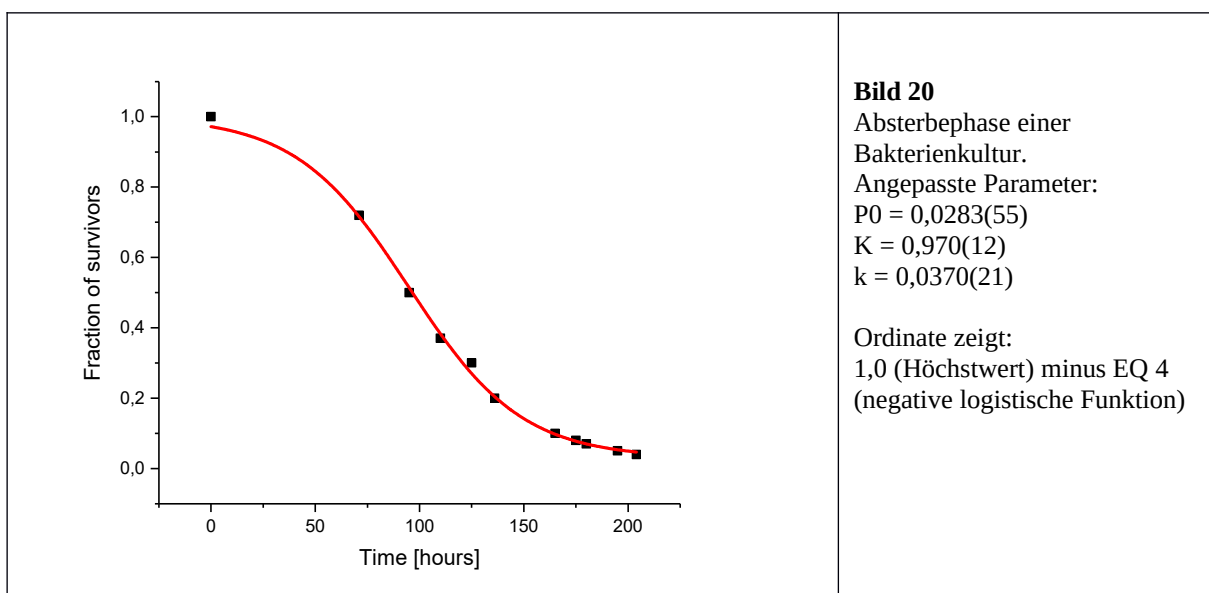


Bild 19 Die Phasen des Bakterienwachstums. Wird vertikal die Masse der Bakterien linear aufgetragen, dann liegt die exponentielle Wachstumsphase im Krümmungsbereich (Anhang: lineare und exponentielle y-Achse).



Zusammenfassung

Unbegrenzt exponentielles Wachstum einer Population ist nicht möglich. In der logistischen Funktion wird dem Rechnung getragen durch einen Term, der proportional ist zur bereits vorhandenen Population, gebrochen durch die maximal mögliche Population. Man erhält eine S-förmige Wachstumskurve, eine Sigmoidfunktion. Ein Beispiel ist der Wachstumsverlauf der Weltbevölkerung.

Der jährliche Umsatz eines neuen Produkts kann nach derselben Kurve ansteigen und sich einem Grenzwert nähern (Beispiel: Photovoltaik und Stromerzeugung). Findet ein Produkt nur vorübergehenden Absatz, dann erscheint die erste Ableitung der logistischen Funktion (glockenförmige Kurve) zur Beschreibung des Umsatzverlaufs geeignet (jährlicher Absatz von Kompaktkameras).

Beispiele aus der Mikrobiologie zeigen, dass die Vermehrung von Hefepilzen einer logistischen Funktion folgt. Bei der Entwicklung eines Bakterienstamms findet man nach der Wachstumsphase eine stationäre und schließlich eine Absterbephase. In dem hier geschilderten Fall kann diese durch eine negative logistische Funktion angenähert werden.

Ereignisse kunst- oder anderer kulturhistorischer Entwicklungen können ebenfalls einen Verlauf zeigen, der in etwa einer Glockenfunktion entspricht. Die kumulierten Daten folgen in guter Näherung einer logistischen Kurve.

Periodische Schwankungen innerhalb eines Jahres können durch eine überlagerte Sinusfunktion dargestellt werden.

Anhang

A1. Kurvenform: Lineare und halblogarithmische Darstellung

Die Auftragung der Funktionswerte entlang der y-Achse – linear bzw. logarithmisch – hat entscheidenden Einfluss auf die Form der Kurve. Bei linearer Auftragung ist der exponentielle Teil gekrümmt, bei logarithmischer Auftragung gerade. In Bild A1 sind die logistische Funktion sowie ihre erste Ableitung (Glockenkurve) links mit linearer, rechts mit logarithmischer y-Achse gezeigt. Die Auftragung der Zeit auf der horizontalen Achse bleibt linear.

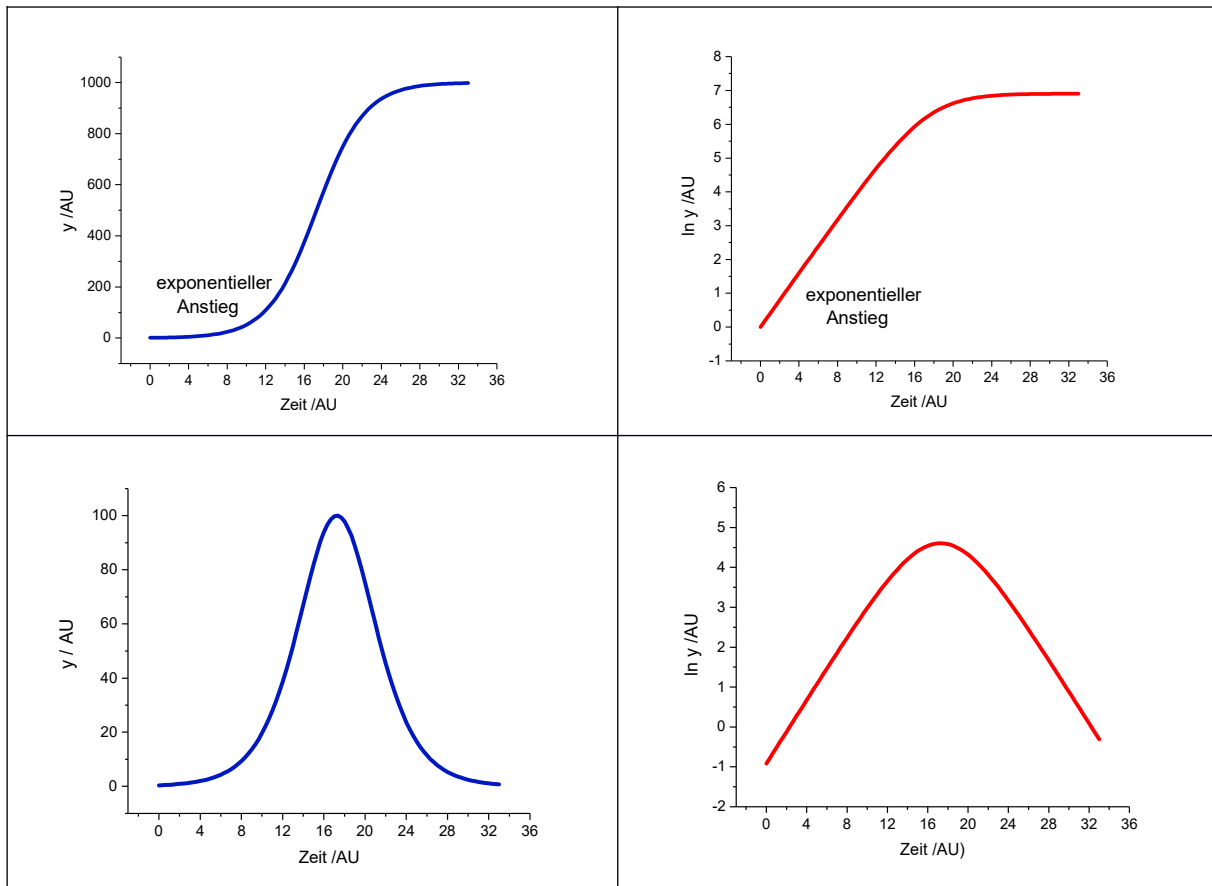
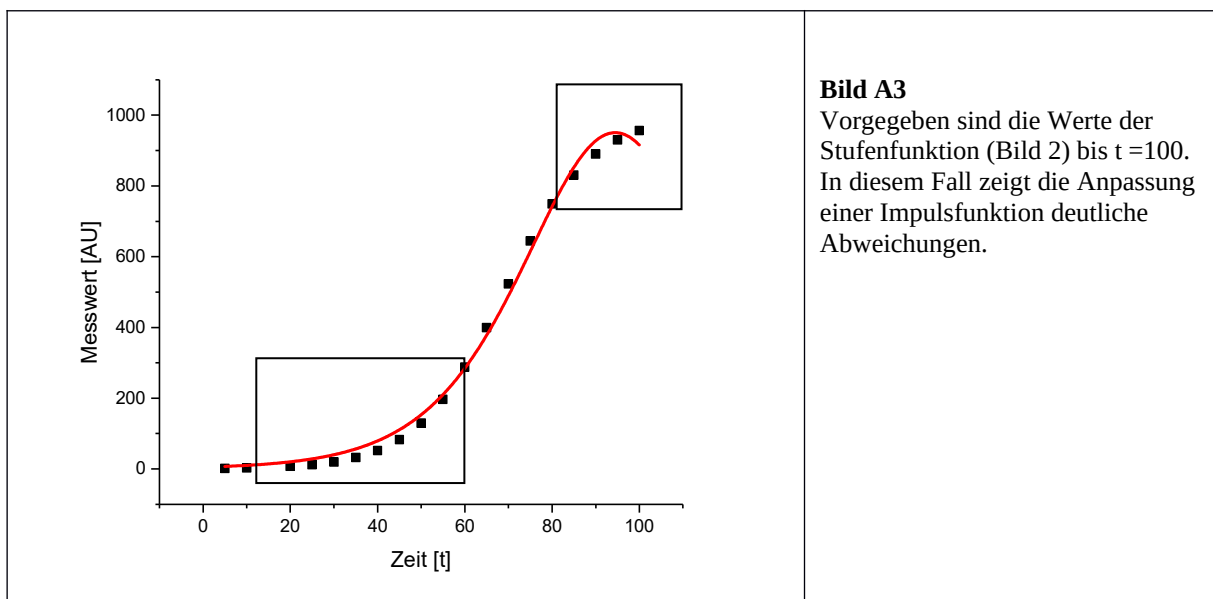
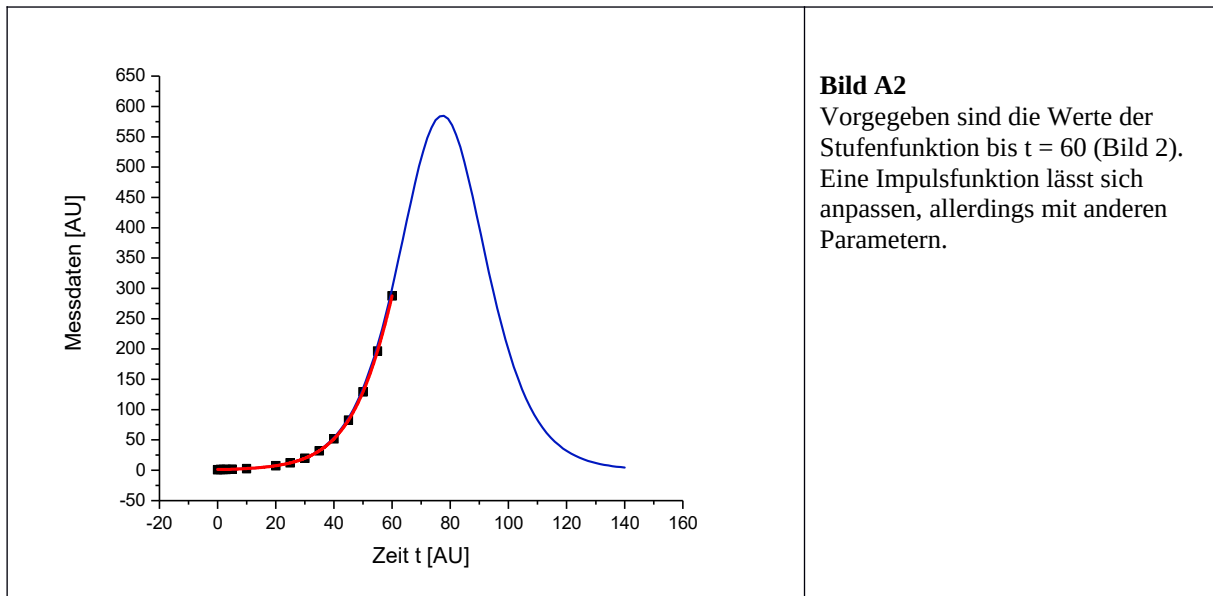


Bild A1 Lineare (links) bzw. logarithmische (rechts) Skala an der y-Achse. Oben die Stufen-, unterhalb die Glockenform. Parameter: $P_0 = 1$, $K = 1000$, $k = 0.4$ und $n = 1$. In der linearen Auftragung (blaue Kurven) ist der exponentielle Teil der der stärksten Krümmung. Dieser Bereich ist rechts linear.

In der Mikrobiologie wird die Masse der Kultur (= Anzahl der Organismen) meist als der natürliche Logarithmus des Zahlenwerts aufgetragen („Diagramm mit halblogarithmische Auftragung“).

A2. Verlaufsprognose: Stufen- oder Glockenfunktion?

Zeigen Messdaten eine exponentielle Entwicklung, dann ist erst noch nicht zu erkennen, ob sich der weitere Verlauf nach einer logistischen Funktion oder nach ihrer ersten Ableitung entwickelt, sich also eine dauerhafte Veränderung ankündigt oder nicht. Das ist erst möglich, wenn der Wendepunkt deutlich überschritten ist. So etwa am Datensatz des ersten Beispiels ($N_0 = 1$, $N_{max} = 1000$, $a_1 = 0,1$): In den Bildern A2 und A3 sind die Ordinatenwerte der Stufenfunktion aufgetragen (bis $t = 60$ bzw. $t = 100$). Nur im zweiten Fall lässt sich die Glockenfunktion nicht anpassen und für den weiteren Verlauf ausschließen. Die Bilder A4 und A5 zeigen den komplementären Fall:



In Bild A4 sind die Anfangswerte der Glockenfunktion aus Bild 3 (vor dem Wendepunkt) bis $t = 45$ eingetragen. Daran lässt sich eine Stufenfunktion leicht anpassen. Erst wenn die vorgegebenen Werte das Maximum der Impulsfunktion überschreiten wird klar, dass die Werte keiner Stufenfunktion entsprechen (Bild A5).

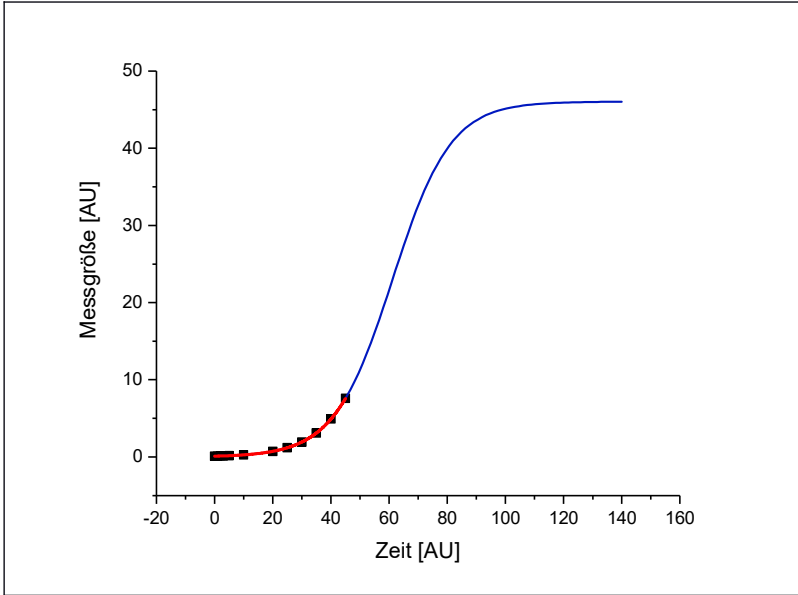


Bild A4

Vorgegeben sind die Werte der Glockenfunktion (Bild 3) bis $t = 45$. An diese lässt sich eine Stufenfunktion problemlos anpassen, allerdings mit anderen Werten der Parameter.

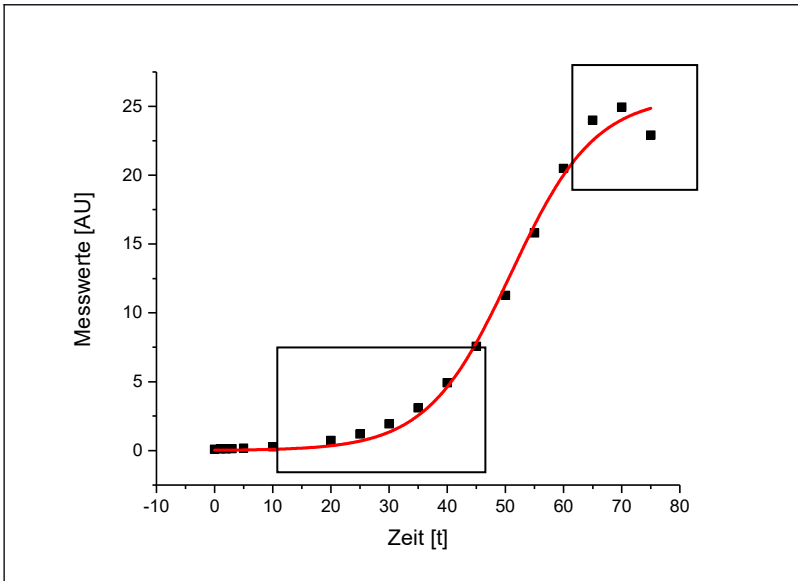


Bild A5

Vorgegeben sind die Werte der Impulsfunktion (Bild 3) bis $t = 75$. Die Anpassung einer Stufenfunktion zeigt deutliche Abweichungen.

Literatur

Albach, H, de Pay, D und Rojas, R (1989). Innovation bei kulturspezifisch innovationsfreudigen Konsumenten. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, Ergänzungsheft 1/89.

Fischer, P (2001). Wachstumsfunktionen – Beispiel Fichtenwachstum.
http://www.math-tech.at/Beispiele/upload/fisch_Fichten.PDF.
Aufgerufen am 02. 05. 2018.

Gabler (2014). Wirtschaftslexikon. 18. Auflage. Gabler-Verlag.
<http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/s-kurven-konzept.html>

Holwegler, B. (2000). *Implikationen der Technologiediffusion für technologische Arbeitslosigkeit*. Dissertation Universität Hohenheim.

Krause, NS (2007). Produktion von Bacillus cereus Enterotoxinen unter verschiedenen Wachstumsbedingungen. Dissertation Ludwig-Maximilians-Universität.
https://edoc.ub.uni-muenchen.de/7363/1/krause_nora.pdf

May R (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics.
Nature, 261, 459–467.

NN 1 [https://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum_(Mathematik)) Gesehen am 28. 06. 2018.

NN 2. <http://de.wikipedia.org/wiki/S-Kurven-Konzept> Gesehen am 16. 05. 2018.

NN 3. <http://de.wikipedia.org/wiki/Diffusionstheorie> Gesehen am 16. 05. 2018.

NN 4. <http://www.daswirtschaftslexikon.com/d/diffusion/diffusion.htm> Gesehen am: 16. 05. 2018.

NN 5. <https://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung> Gesehen am 14. 06. 2018

NN 6. <http://de.wikipedia.org/wiki/Kondratjew-Zyklus> Gesehen am 16. 05. 2018.

NN 7. <http://de.wikipedia.org/wiki/Hype-Zyklus> Gesehen am 16. 05. 2018.

NN 8. <https://www.imise.uni-leipzig.de/Lehre/Semester/2006/EMIB/Populationsdynamik.pdf> Modelle der Populationsdynamik Gesehen am 17. 05. 2018.

NN 9 <https://de.wikipedia.org/wiki/Sigmoidfunktion> Gesehen am 18. 06. 2018.

NN 10 <https://de.statista.com/infografik/10474/apple-ipod-absatz/> Gesehen am 17. 05. 2018

NN 11 Photovoltaik und Stromerzeugung.
<https://1-stromvergleich.com/strom-report/photovoltaik/#photovoltaik-stromerzeugung-2016>
Gesehen am 17. 05. 2018.

NN 12 <http://pdwb.de/nd02.htm> Gesehen am 17. 05. 2018.

NN 13 <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/326343/umfrage/entwicklung-der-verkaufszahlen-von-kompakt-kameras-weltweit/> Gesehen am 17. 05. 2018.

NN 14: [https://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Ehemaliges_Zisterzienserkloster_in_Italien](https://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Ehemaliges_Zisterzienserkloster_in_Italien;);
https://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Zisterzienserkloster_in_Italien
Gesehen am 10. 05. 2018.

NN 15 https://www.kunstkopie.de/a/renaissance.html?pgn_page=1&INCLUDE=LIST&pgn_items=100
Gesehen am 17. 05. 2018.

NN 16 <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/12799/umfrage/weltweiter-umsatz-von-apple-inc-nach-quartalen-seit-2005/> Gesehen am 17. 05. 2018.

Peled, O N, Salvadori, A, Peled, U N, and Kidby, D K (1971). Death of microbial cells: rate constant calculations. *J Bacteriol.*, 129, 1648–1650.
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC235154/?page=2>

Reichert K (2012). Logistisches Wachstum am Beispiel einer Hefekultur.
<http://www.fvss.de/assets/media/jahresarbeiten/mathe/logistik.pdf>.
Gesehen am 26. 04. 2018.

Simon H (1976). *Beiträge zur betriebswirtschaftlichen Forschung 46. Preisstrategien für neue Produkte*. Springer science + business media.

Verhulst, P-F (1838). https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Fran%C3%A7ois_Verhulst.
Gesehen am 26. 04. 2018.