

ÜBER GLOBALE UND LOKALE EINBETTUNGEN

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat.
der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
der Universität Ulm

vorgelegt von JENS DITTRICH geboren in LAUCHHAMMER

2007

Name des Amtierenden Dekan: Prof. Dr. Frank Stehling

Erstgutachter: Prof. Dr. Friedmar Schulz

Zweitgutachter: Prof. Dr. Werner Balsler

externer Gutachter: Prof. Dr. Friedrich Sauvigny

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 2007

FÜR KURT UND ELLA BEUTHAN

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	5
1 Einleitung	7
1.1 Bezeichnungen	7
1.2 Motivation und grundsätzliche Herangehensweise	10
1.3 Die Geschichte globaler Einbettungen	13
1.4 Die Geschichte lokaler Einbettungen	15
1.5 Resultate	16
2 Differentialgeometrische Grundlagen	19
2.1 Ein System partieller Differentialgleichungen	19
2.2 Kurven	25
2.3 Kurven auf Flächen	32
3 Weiterführende Differentialgeometrie	37
3.1 Flächen	37
3.2 Die Integralformeln Minkowskis	45
3.3 Asymptotenlinien	49
4 Quadratische Differentialformen	53
4.1 Transformationsgesetze für Differentialformen	53
4.2 Die Fundamentalformen	60
4.3 Elliptisch gekrümmte Flächen	63
4.4 Hyperbolisch gekrümmte Flächen	66
5 Resultate und Korollare	71
5.1 Ein Existenzproblem und a-priori Abschätzungen	71
5.2 Hyperbolische Systeme	81
5.3 Globale Diffeomorphismen	96
5.4 Ein Existenzsatz für hyperbolische Flächen	102
5.5 Ausblick	112

Literaturverzeichnis	115
6 Danksagung und Formalien	119
6.1 Danksagung	119
6.2 Eidesstattliche Erklärung zur eingereichten Dissertation	120
6.3 Lebenslauf	121
6.4 Vorträge	123
6.5 English Abstract	124

Kapitel 1

Einleitung

In diesem Kapitel werden wir unsere Existenzprobleme motivieren. Anschließend erläutern wir kurz die Methoden, mit denen wir diese Probleme angehen werden. Zunächst sei dazu gesagt, dass wir uns aus mehreren Bereichen der Mathematik bedienen werden. Einerseits benutzen wir - da wir Flächen im drei-dimensionalen Raum betrachten - sehr viele bekannte und auf überraschend kurze Art und Weise dargestellte Aussagen der elementaren Differentialgeometrie in drei Raumdimensionen. Andererseits ist unser Urbildbereich zwei-dimensional und wir benutzen, zumindest indirekt, die hervorragenden Methoden der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen. Insbesondere sei dazu der Riemannsche Abbildungssatz in verschiedenen Verallgemeinerungen erwähnt. Schließlich soll die Potentialtheorie, verbunden mit der Theorie der elliptischen partiellen Differentialgleichungen, nicht vergessen werden. Als Gegenstück dazu müssen wir die bekannte Theorie der hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen für unsere lokalen Existenzsätze anpassen. Doch zunächst beginnen wir mit einleitenden Bezeichnungen.

1.1 Bezeichnungen

Wir werden hier unsere grundlegenden Bezeichnungen, die wir im Folgenden verwenden werden, festlegen. Zunächst bezeichnen wir durch \mathbb{N}_0 , \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} die natürlichen Zahlen mit der Null, die natürlichen Zahlen ohne Null, die rationalen Zahlen, die reellen und schließlich die komplexen Zahlen. Zu einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit \mathbb{R}^n den n -dimensionalen reellen Vektorraum. Häufig werden wir Vektoren im anschaulichen Raum \mathbb{R}^3 verwenden; wir werden diese durch einen fettgedruckten, lateinischen Buchstaben, etwa durch \mathbf{X} , bezeichnen. Als Basis des \mathbb{R}^3 wählen wir die kanonische Basis aus orthonormalen Einheitsvektoren und bezeichnen die Komponenten unseres Vektors bezüglich dieser Basis zunächst durch untere Indizes, also etwa $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)^T$. Haben wir zwei Vektoren

$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^3$, so erklären wir ein Skalarprodukt durch

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 + \mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{X}_3 \mathbf{Y}_3 \quad (1.1)$$

und der \mathbb{R}^3 wird durch dieses Skalarprodukt zu einem euklidischen Vektorraum. Außerdem erklären wir noch ein äußeres Produkt durch

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} := (\mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_3 - \mathbf{X}_3 \mathbf{Y}_2, \mathbf{X}_3 \mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_3, \mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_2 - \mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_1)^T. \quad (1.2)$$

Mit einem weiteren Vektor $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^3$ erklären wir eine normierte, total antisymmetrische Multilinearform, die Determinante, durch

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) := (\mathbf{X}, \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}). \quad (1.3)$$

Schließlich bezeichnen wir durch

$$|\mathbf{X}| := \sqrt{(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \quad (1.4)$$

den Betrag oder die Länge des Vektors \mathbf{X} . Allerdings kann die Schreibweise (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) auch ein Tupel von zwei Vektoren, welche wir zu einem von uns betrachteten Objekt zusammenfügen wollen, bezeichnen. Dies geht aber klar aus dem Zusammenhang hervor.

Unsere Vektoren sind meist sogar vektorwertige Funktionen, d.h. $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ oder $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(u, v)$, wobei die unabhängigen Variablen t oder (u, v) aus einem angegebenen oder aus dem Zusammenhang klar werdenden Urbildbereich stammen. Dementsprechend sind die damit gebildeten Determinanten, Skalar- und äußeren Produkte ebenfalls wieder Funktionen. Wir werden diese Konstrukte auch nur zwischen vektorwertigen Funktionen mit dem gleichen Definitionsbereich bilden, so dass der Definitionsbereich der Konstrukte keiner weiteren Bemerkung mehr bedarf.

Im Fall einer unabhängigen Variablen ist der Urbildbereich meist ein offenes oder abgeschlossenes Intervall oder sogar ganz \mathbb{R} . Haben wir es mit zwei unabhängigen Veränderlichen zu tun, handelt es sich bei der Urbildmenge meist um eine einfach-zusammenhängende offene oder abgeschlossene Menge, welche aber eine echte Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist. Da der Riemannsche Abbildungssatz gilt, ist es für viele Fälle hilfreich, sich nur auf die offene oder abgeschlossene Einheitskreisscheibe $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ oder $\bar{B} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$ zu beschränken. Im Fall von zwei unabhängigen Variablen werden wir diese automatisch durch eine komplexe Zahl identifizieren, also etwa $w = w^1 + iw^2 = u + iv \in \mathbb{C}$ oder $z = z^1 + iz^2 = x + iy \in \mathbb{C}$. Manchmal gehen uns die Buchstaben aus und wir verwenden dann auch noch $\gamma = \gamma^1 + i\gamma^2 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ als weitere Bezeichnung. Da wir gerade die komplexen Zahlen streifen, definieren wir auch hier ein reelles Skalarprodukt

$$(z, w) := z^1 w^1 + z^2 w^2 = xu + yv \quad (1.5)$$

und ein äußeres Produkt durch

$$z \wedge w := z^1 w^2 - z^2 w^1 = xv - yu. \quad (1.6)$$

Wenn wir durch ein Strich die komplex-konjugierte Zahl \bar{z} bezeichnen, so können wir die beiden Produkte in der bemerkenswerten Relation

$$\bar{z}w = (z, w) + iz \wedge w \quad (1.7)$$

schreiben.

Wir kommen zu den Funktionen zurück. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und

$$f : \Omega \rightarrow \Theta \quad (1.8)$$

eine reell-, komplex- oder vektorwertige Funktion. Dann handelt es sich in unseren Betrachtungen meistens um auf Ω stetige oder k -mal stetig differenzierbare Funktionen. Bezeichnen wir durch $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ einen Multiindex und durch $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$ seinen Betrag. Dann schreiben wir für $j \in \mathbb{N}$ die j -ten Ableitungen an der Stelle $x = (x_1, \dots, x_n)^T \subset \Omega$

$$\partial_\beta f(x) := \frac{\partial^{|\beta|} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x^{\beta_1} \dots \partial x^{\beta_n}} \quad \text{mit } |\beta| = j. \quad (1.9)$$

Im Falle von k -mal stetig differenzierbaren Funktionen existieren alle Ableitungen der Form $\partial_\beta f(x)$ für $1 \leq |\beta| \leq k$ und alle $x \in \Omega$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sprechen wir immer von k -mal stetig differenzierbaren Funktionen, auch wenn es sich im Fall $k = 0$ nur um stetige Funktionen handelt. Wir bezeichnen die ersten, zweiten und dritten gewöhnlichen Ableitungen einer Funktion f abhängig von nur einer Variable t , so sie existieren, durch \dot{f} , \ddot{f} und $\ddot{\ddot{f}}$. Die entsprechenden Ableitungen nach einer anderen Variable s bezeichnen wir durch f' , f'' und f''' . Im Kontext der Differentialgeometrie wird die Variable s die Bogenlänge einer betrachteten Kurve bezeichnen. Entsprechend werden Ableitungen nach der Bogenlänge durch Striche und Ableitungen nach einem allgemeinen Parameter durch Punkte bezeichnet. Im weiteren Verlauf werden wir häufig die ersten oder zweiten partiellen Ableitungen durch einen oder zwei untere Indizes bezeichnen, so steht etwa f_{ij} für die gemischten zweiten Ableitungen nach der i -ten und der j -ten unabhängigen Veränderlichen. Bei Größen, die wir ohnehin schon indizieren, trennen wir die Ableitungen von den restlichen Indizes durch ein Komma ab, so etwa bedeutet $g_{ij,k}$ die erste partielle Ableitung nach der k -ten Variablen der Größe g_{ij} . Nicht zu verwechseln sind diese ersten partiellen Ableitungen mit den Komponenten eines Vektors. Genau genommen handelt es sich immer um partielle Ableitungen, es sei denn, wir notieren etwas anderes.

Wir definieren die folgenden Normen:

$$\|f\|_\Omega^k := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sum_{j=1}^k \sum_{\beta: |\beta|=j} \sup_{x \in \Omega} |\partial_\beta f(x)|, \quad (1.10)$$

hierbei sei Ω eine offene Menge. Bezeichnen wir durch $\bar{\Omega}$ den Abschluß von Ω , so schreiben wir $f \in C^k(\bar{\Omega})$, falls die Ungleichung $\|f\|_\Omega^k < \infty$. Gilt andererseits $\|f\|_{\mathcal{O}}^k < \infty$ für jede in Ω kompakt enthaltene Menge \mathcal{O} , notiert durch die Schreibweise $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$ für $\bar{\mathcal{O}} \subset \Omega$,

so schreiben wir $f \in C^k(\Omega)$. Sei nun $\alpha \in (0, 1)$, und wir nennen eine Funktion $f \in C^0(\Omega)$ hölderstetig zum Exponenten α , wenn für alle $x, y \in \Omega$ eine Konstante $H \in (0, +\infty)$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq H|x - y|^\alpha. \quad (1.11)$$

Gilt die obige Bedingung für $\alpha = 1$, so nennen wir f lipschitzstetig oder hölderstetig zum Exponenten $\alpha = 1$. Gilt $f \in C^k(\Omega)$ und sind alle k -ten Ableitungen hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$, so nennen wir f (k, α) -stetig. Dabei reihen sich die k -mal stetig differenzierbaren Funktionen ein durch die Wahl von $\alpha = 0$. Auch hier definieren wir zu $\alpha \in (0, 1]$ eine Norm

$$\|f\|_\Omega^{k,\alpha} := \|f\|_\Omega^k + \sum_{j=1}^k \sum_{\beta:|\beta|=j} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\partial_\beta f(x) - \partial_\beta f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad (1.12)$$

für $\alpha = 0$ schreiben wir $\|f\|_\Omega^{k,0} := \|f\|_\Omega^k$. Gilt nun für $\alpha \in [0, 1]$ die Ungleichung $\|f\|_\Omega^{k,\alpha} < \infty$, so schreiben wir wieder $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Man beachte hierbei, dass nach obiger Definition $C^{k,0}(\bar{\Omega}) = C^k(\bar{\Omega})$ gilt. Gilt wieder $\|f\|_\mathcal{O}^{k,\alpha} < \infty$ für jede kompakt enthaltene Menge $\mathcal{O} \subset \subset \Omega$ so schreiben wir $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Schließlich führen wir noch für reellwertiges $f \in C^1(\Omega)$ die Bezeichnung $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ ein. Wir bezeichnen durch $\partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$ den Rand der offenen Menge Ω und sagen $\partial\Omega$ ist ein $C^{k,\alpha}$ Rand, wenn er sich lokal als Graph einer (k, α) -stetigen Funktion schreiben lässt. Schließlich bezeichnen wir noch die Wirtinger-Operatoren für $w = u + iv$ durch

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right). \quad (1.13)$$

1.2 Motivation und grundsätzliche Herangehensweise

Wir wollen hier unser Existenzproblem motivieren und es beschreiben. Nach der Motivierung werden wir auch einen kurzen Abriss über unseren Ansatz geben.

Zunächst betrachten wir die differentialgeometrisch reguläre Fläche - was das genau ist, werden wir später exakt aufschreiben.¹ Sei also

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^3(\Omega) \quad (1.14)$$

eine differentialgeometrische reguläre Fläche mit einer Einheitsnormalen \mathbf{N} . Wir bezeichnen die Tangentialvektoren durch \mathbf{X}_u und \mathbf{X}_v . Dann gilt für die Normale

$$\mathbf{N}(u, v) := \frac{\mathbf{X}_u(u, v) \wedge \mathbf{X}_v(u, v)}{|\mathbf{X}_u(u, v) \wedge \mathbf{X}_v(u, v)|} \quad \text{für } (u, v) \in \Omega. \quad (1.15)$$

¹Zunächst genügt es zu wissen, dass in jedem Punkt eine Einheitsnormale bis auf ein Vorzeichen eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen zunächst reguläre Kurven in der Fläche \mathbf{X} betrachten. Diese sollen in Ω parametrisiert werden, also etwa durch

$$w = w(t) = (u(t), v(t)) = (u^1(t), u^2(t)) : [0, T] \rightarrow \Omega \in C^3[0, T]. \quad (1.16)$$

Wir erhalten dann die Kurve $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \circ w$. Nun hängt die Länge der Kurve \mathbf{Y} allein von den Tangentialvektoren von \mathbf{X} , nicht aber von \mathbf{N} ab:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{Y}) &= \int_0^T |\dot{\mathbf{Y}}(\tau)| d\tau \\ &= \int_0^T \sqrt{\mathbf{X}_u^2 \dot{u}^2 + 2(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v) \dot{u} \dot{v} + \mathbf{X}_v^2 \dot{v}^2} d\tau \\ &= \int_0^T \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} d\tau. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Hierbei sind die Größen $g_{ij}(u, v) := (\mathbf{X}_i(w), \mathbf{X}_j(w)) = (\mathbf{X}_{u^i}(u, v), \mathbf{X}_{u^j}(u, v))$ erklärt. Das bedeutet, die Angabe der Größen g_{ij} definiert abstrakt eine Entfernungsmessung auf Flächen, wir möchten somit die Größe

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (1.18)$$

als Riemannsche Metrik bezeichnen. Wir bemerken, dass dazu keine Kenntnis eines Normalenvektors vonnöten ist, es handelt sich also um eine Frage der inneren Geometrie.

Man kann sich nun die Frage stellen, ob es zu gegebener Riemannscher Metrik eine Fläche $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^3$ gibt, so dass die Tangentialvektoren von \mathbf{X} den Gleichungen $g_{ij} = (\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$ im Definitionsbereich von g_{ij} genügen. Ist das der Fall, so sagen wir, wir können die durch g_{ij} definierte Metrik realisieren und bezeichnen \mathbf{X} als Realisierung von ds^2 . Ist die Realisierung zusätzlich injektiv, so nennen wir \mathbf{X} eine Einbettung von ds^2 . Im Jahre 1916 stellte Hermann Weyl [We] die Frage: Kann man eine auf S^2 definierte Riemannsche Metrik mit positiver innerer Krümmung einbetten? Es bleibt nicht aus, den Einbettungssatz von Whitney [Wh] zu erwähnen, nach dem wir eine Riemannsche Metrik in den \mathbb{R}^4 einbetten können.

Davon ganz abgesehen ist die Frage nach einer Realisierung einer gegebenen Metrik ds^2 schon interessant genug. Das läuft wie eben gesehen, auf das Lösen der Differentialgleichung

$$(d\mathbf{X})^2 = ds^2 \quad (1.19)$$

hinaus und so betrachten wir in dieser Arbeit eben genau diese Differentialgleichung und dazu passende Rand- bzw. Anfangswertaufgaben.

Es muss zunächst festgestellt werden, dass wir auf Grund der Thematik genau zwischen der intrinsischen Geometrie und der Geometrie der Realisierung unterscheiden müssen. Wie bereits angedeutet, werden wir unter der intrinsischen Geometrie alle Objekte verstehen, die ausschließlich von unserer gegebenen Metrik, also den Daten unserer Differentialgleichung, abhängen. Als Geometrie der Realisierung werden wir alle anderen geometrischen Objekte verstehen. Aus diesem Grund werden wir auch durchgehend in dieser Arbeit eine zunächst

lästige, aber bei genauerer Betrachtung doch sehr erhellende Unterscheidung zwischen diesen beiden Arten von Größen machen.

Nun stellt man fest, dass es eine intrinsische oder innere Krümmung einer Metrik gibt. Wir wollen diese mit K bezeichnen und unterscheiden den lokal konvexen Fall $K > 0$ und den hyperbolischen Fall $K < 0$. Im ersten Fall werden wir durchgehend auf quasilineare elliptische Differentialgleichungen mit dem Laplace-Operator als Hauptteil geführt. Folglich betrachten wir hier Randwertprobleme. Im zweiten Fall erhalten wir durchgehend quasilineare hyperbolische Differentialgleichungen in hyperbolischer Normalform und wir betrachten "Anfangswertprobleme". Allerdings sollten wir es vermeiden, in eine der Veränderlichen eine Bedeutung der Zeit hineininterpretieren zu wollen.

Die Lösung der Rand- und Anfangswertprobleme ist ein Problem der Analysis partieller Differentialgleichungen. Aus geometrischer Sicht stellen sich beide Fälle völlig analog da. Gerade deshalb werden wir uns sehr intensiv mit den differentialgeometrischen Grundlagen beschäftigen. Da wir Rand- und Anfangswertaufgaben betrachten, werden wir zunächst die Differentialgeometrie der Kurven und deren differentialgeometrische Invarianten betrachten. Aus dem Normalenbündel einer Kurve wählen wir dann zwei Normalenschnitte und transformieren die entsprechenden Invarianten ineinander. Wenn wir die beiden Normalenschnitte unserem Problem angemessen wählen, können wir sehr elegant von den Invarianten der Kurve zu den Invarianten der Fläche übergehen.

Das ist der Haupttrick. Es war bisher nicht bekannt, welchen Gleichungen die Invarianten der Fläche genügen müssen, damit Rand- oder Anfangsdaten angenommen werden. In den Augen des Autors ist das der Grund, warum man in diesen Fragen seit den sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts keine weiteren Antworten finden konnte. In dieser Arbeit erhalten wir ein viel tieferes Verständnis für diese Probleme.

Um nun diese Probleme zu lösen, führen wir spezielle Parameter in unsere Flächen ein - im elliptische Fall sind das die konjugiert-konformen Parameter, im hyperbolischen Fall die Asymptotenlinienparameter - und erhalten für die jeweiligen Parametertransformationen geeignete elliptische Randwert- oder hyperbolische Anfangswertprobleme. Diese dem Geschlecht der Differentialgleichung angepassten Probleme für die Parametertransformationen werden es uns schließlich ermöglichen, auch die Ausgangsprobleme zu lösen. Im elliptischen Fall beweisen wir globale a-priori Abschätzungen für das Dirichletproblem der Differentialgleichung (1.19). Im hyperbolischen Fall können wir einen lokalen Existenzsatz für das Anfangswertproblem der Differentialgleichung (1.19) beweisen. Eine globale Aussage erscheint sehr schwierig, da man dafür die Jakobische der entsprechenden Parametertransformation, welche eine Lösung einer hyperbolischen Differentialgleichung ist, global in den Griff bekommen müsste.

1.3 Die Geschichte globaler Einbettungen

Hier wollen wir einen geschichtlichen Überblick geben, welche globalen Lösungen mit welchen Methoden ermittelt wurden. Im Großen und Ganzen kann man zwei grundsätzliche Herangehensweisen unterscheiden. Westeuropäische und amerikanische Autoren haben einen eher analytischen Zugang benutzt. Sowjetische Autoren haben einen eher geometrischen Zugang benutzt.

Wir wollen die Frage nach der globalen Einbettbarkeit einer positiv-definiten Riemannschen Metrik als *Weylsches Einbettungsproblem* bezeichnen.

Zunächst wurde dieses Problem 1916 von Hermann Weyl [We] formuliert für eine analytische Metrik, welche auf der S^2 definiert ist. Er hat es dann gelöst für Metriken, welche in einem durch ihn präzisierten Sinne in einer Umgebung der Metrik der Sphäre liegen. Er benutzte die Kontinuitätsmethode in Form einer formalen Potenzreihenentwicklung, zeigte die Konvergenz der Reihe jedoch nur in einer Umgebung der sphärischen Metrik. Kurz vor seiner Einberufung zum Wehrdienst im Rahmen des ersten Weltkrieges hat er alles aufgeschrieben, um es der Nachwelt zu hinterlassen. Hermann Weyl hat uns in seiner Arbeit die nach ihm benannte Ungleichung hinterlassen. Diese wird hier in Satz 5.1.10 neu bewiesen.

Den ersten vollständigen Beweis im Fall einer analytischen Metrik lieferte Hans Lewy [Le38], indem er die im Weylschen Beweis fehlenden a-priori Abschätzungen ergänzte. Lewy überführte das Einbettungsproblem in Parametern äquivalent in elliptische Monge-Ampère-Gleichungen. Dann führte er in diesen charakteristische Parameter ein. Das ergibt dann für die Parametertransformation gewisse quasilineare elliptische Systeme mit quadratischem Wachstum im Gradienten, für welche er zuvor a-priori Abschätzungen in [Le35, '36 und '37] einer Norm nach oben und die Jakobische im Inneren nach unten abgeschätzt hatte.

Im Jahre 1953 konnte Louis Nirenberg [Ni] den Beweis von Lewy auf viermal stetig differenzierbare Metriken verallgemeinern. Er benutzte dabei von ihm entwickelte, bahnbrechende Abschätzungen von vollständig nichtlinearen gleichmäßig elliptischen Differentialgleichungen in zwei Veränderlichen.

Wir kommen nun zu einem völlig anderen Zugang zum Weylschen Einbettungsproblem. Im Jahre 1942 bewies Aleksandre Danilovich Aleksandrov [Al42, deutsche Version '55] einen allgemeineren Existenzsatz. Er benutzte polyedrische Metriken und realisierte diese. Anschließend kontrollierte er den Grenzübergang und erhielt verallgemeinerte Lösungen des Weylschen Einbettungsproblems. Erst 1949 konnte Aleksei Vasilevich Pogorelov [Po49] in seinen drei hier zitierten Arbeiten aus diesem Jahr die Regularität der Aleksandrovschen Lösung zeigen. Wir möchten an dieser Stelle noch eine Zusammenstellung der Beweise der sowjetischen Mathematiker in einer deutschen Übersetzung im Buch von Nikolai Vladimirovich Efimov [Ef] aus dem Jahre 1953 mit einem Nachtrag von Rembs und Grotemeyer dazu empfehlen.

In den Jahren 1955 und 1957 konnten die bereits hier zitierten sowjetischen Mathema-

tiker Aleksandre Danilovich Aleksandrov [Al55] und Aleksei Vasilevich Pogorelov [Po57] berandete konvexe Flächen, deren Rand auf einer Ebene aufsitzt, realisieren. Dieser Zugang erfolgte mit Hilfe der Monge-Ampèreschen Gleichungen und der Aleksandrov'schen Methoden der polyedrischen Realisierung mit Grenzübergang. Allerdings benötigten sie dazu nicht so tiefe Einblicke in die Randdaten, wie sie in der vorliegenden Arbeit erreicht werden.

Wir kommen nun zum westeuropäischen und amerikanischen Zugang zurück. In den fünfziger und sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts forschte Erhard Heinz am Weylschen Einbettungsproblem [He57, '60 und '66] und konnte Einbettungssätze für dreimal stetig differenzierbare nicht geschlossene Metriken beweisen. Dabei mußte er die Bedingung $\kappa_g \geq 0$ annehmen. Hierbei bezeichnet die Größe κ_g die geodätische Krümmung der Randkurve. Wenn man sich die Methode ansieht, so erscheint diese Bedingung aus geometrischer Sicht unnatürlich. Außerdem machte er keine Aussagen über die Randkurve der durch seine Methode konstruierten Fläche. Schließlich konnte Friedmar Schulz [Sch82] im Jahre 1982 die Voraussetzungen auf $ds^2 \in C^{2,\alpha}$ abschwächen.

Bisher wurden nur lokal konvexe Metriken, also Metriken mit positiver Gaußkrümmung, eingebettet. Der Fall nicht-negativer Gaußkrümmung wurde zuerst im Jahre 1992 von Joseph Iaia [Ia] betrachtet. In dieser Arbeit, welche wieder geschlossene Metriken behandelt, wurde die Existenz von Einbettungen für viermal stetig differenzierbare Metriken mit isolierten Nullstellen in der Gaußschen Krümmung gezeigt. Im Jahre 1994 verallgemeinerten Pengfei Guan und Yan Yan Lin [GL] diesen Satz für viermal stetig differenzierbare Metriken mit nichtnegativer Gaußscher Krümmung.

Eine Verallgemeinerung in eine etwas andere Richtung hat 1990 Thomas Herb [He] bewiesen. Er verallgemeinerte im wesentlichen die Arbeit von Heinz [He66] dahingehend, dass er nicht geschlossene Metriken nicht nur in den euklidischen \mathbb{R}^3 sondern in allgemeine Riemannsche Räume einbettete. Diese Arbeit bietet das Potential, neue Existenzresultate auch in diese Richtung zu verallgemeinern.

Das sind die letzten mir bekannten Existenzsätze im Fall $K \geq 0$. Die Frage der Eindeutigkeit wurde bereits von Weyl in [We] für geschlossene analytische Metriken (also solche, die auf S^2 definiert sind) behandelt. Dieses Resultat konnte später bis auf zweimalige stetige Differenzierbarkeit abgeschwächt werden. Eindeutigkeitsfragen sollen in dieser Arbeit nicht behandelt werden. Die Arbeit von Guan und Li [GL] gibt einen kurzen Überblick und Zitate für die Eindeutigkeitsresultate.

Im Jahre 1996 gab Erhard Heinz [He96] einen Überblick über das Weylsche Einbettungsproblem und offene Fragen. Das war eine modifizierte Version seines Vortrages vom 19. September 1995 auf der DMV-Tagung in Ulm. Wir möchten in dieser Arbeit auf zwei der drei dort formulierten offenen Fragen eingehen:

- Man behandle Randwertaufgaben für das System $ds^2 = (d\mathbf{X})^2$ in zwei Veränderlichen.
- Man lasse die Voraussetzung $\kappa_g \geq 0$ in [He66] fallen.

1.4 Die Geschichte lokaler Einbettungen

In der Vergangenheit ist das Problem der lokalen Einbettung recht häufig studiert worden. Allerdings wurde gerade die Frage der hier betrachteten Anfangswertprobleme kaum behandelt. Wir werden dies an den folgenden Referenzen angeben.

Zunächst wurden im Jahre 1894 die ersten Impulse von Gaston Darboux [Da] in Livre V, Chapitre IV und V gelegt. Im zitierten Kapitel IV leitete er mehrere zum Problem der Realisierung einer Metrik äquivalente partielle Differentialgleichungen her. Namentlich handelt es sich dabei um Monge-Ampère Gleichungen, welche auch noch von weiteren Autoren studiert wurden. Es ist nicht klar, ob er für diese Differentialgleichung auch Anfangswertprobleme lösen konnte. Jedenfalls tat er das nicht in seinem zitierten Kapitel IV. Im zitierten Kapitel V betrachtete er das Problem der Verbiegung von Flächen, welches ähnlich geartet ist. Unter der Annahme, dass alle Größen reell-analytisch sind, zeigte er hier einen Existenzsatz. Gaston Darboux hat ebenfalls die nach ihm benannte Darboux'sche Differentialgleichung in diesen Kapiteln hergeleitet. Abbildungen, welche in einer Fläche Asymptotenlinienparameter einführen, genügen dieser Differentialgleichung. Allerdings hat er keine Anfangswertprobleme für diese Gleichung betrachtet.

In den fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts beschäftigten sich Aurel Wintner und Philip Hartman mit dem Problem der lokalen Einbettung. Beispielsweise haben sie in ihren Arbeiten [HW50] und [HW51] dieses Problem betrachtet und auch gelöst. Leider hat sich der hyperbolische Fall in [HW52] als falsch herausgestellt. Aurel Wintner allein hat eine weitere Arbeit [Wi] geschrieben, welche allerdings eher Regularitätsfragen diskutiert. Allen diesen Arbeiten gemeinsam ist, dass zwar hyperbolische Anfangswertprobleme für gewisse ebene Systeme gelöst werden, die geometrische Relevanz und Interpretation der Anfangswerte jedoch völlig fehlt.

Eine weitere Arbeit zum Thema der lokalen Realisierbarkeit einer Metrik lieferte Howard Jacobowitz 1973 in [Ja] ab. Allerdings bettete er in den vier-dimensionalen Raum ein. Als Korollar erhält Jacobowitz einen lokalen Einbettungssatz für eine Metrik mit positiver innerer Krümmung in den drei-dimensionalen Raum. Er erhält dies als Folgerung aus dem Satz von Cauchy-Kowalewski. Wie in allen anderen Arbeiten fehlt auch hier ein Kommentar über die Anfangswerte der Fläche. Ebenso wie Hartman und Wintner löste er wieder direkt die Monge-Ampère Gleichung.

Es blieb wieder einige Jahre ruhig um das Problem der lokalen Einbettung, bis es 1985/86 Chang-Shou Lin in den beiden Arbeiten [Li85] und [Li86] wieder betrachtet hatte. Dort löste er es zunächst für Metriken mit nicht-negativer innerer Krümmung und dann auch für Metriken, bei denen die innere Krümmung auf ganz bestimmte Art und Weise einen Vorzeichenwechsel erlebt. Da sich der Charakter der Monge-Ampère Gleichung nach dem Vorzeichen der inneren Krümmung richtet², sind diese Arbeiten besonders schwierig und sie erschließen

²Hierbei führen $K < 0$, $K = 0$ und $K > 0$ auf hyperbolische, parabolische und elliptische Monge-Ampère

sich zunächst nicht mit unserer Methode. Er löste sie direkt mit einer gewissen schwachen Methode. Da seine Methode Voraussetzungen an die Anfangsdaten stellt, benutzte er in seinem Beweis die Freiheit die Anfangsdaten zu wählen. Auf die geometrische Relevanz ging er jedoch nicht ein.

Die letzten beiden mir bekannten Arbeiten zu diesem Thema lieferten Qing Han et. al. im Jahre 2003 in [HHL03] und Qing Han allein im Jahre [Ha05]. In der ersten Arbeit wird eine Metrik mit nicht-positiver Krümmung eingebettet. Der Zugang ist hier ein anderer. Es wird nicht eine Monge-Ampère Gleichung gelöst, sondern Integrationbedingungen - namentlich die Codazzi-Mainardi Gleichungen - werden direkt gelöst. Diese Methode ähnelt der unseren viel mehr. Unsere Lösungen der hier auftretenden nicht-linearen Systeme sind nämlich äquivalent zu den Codazzi-Mainardi Gleichungen. Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, unsere Resultate auf diese Methoden anzuwenden, um weitergehende Aussagen über die Anfangsdaten der Einbettungen selbst zu erhalten. Denn auch Han hat dazu keine Aussage getroffen. Die zweite Arbeit von Han liefert das zuvor zitierte Resultat von Lin mit einer einfacheren Methode.

Eine zum Einbettungsproblem völlig windschiefe Arbeit lieferte 1938 Franz Rellich [Re]. Er realisierte Flächen vorgeschriebener innerer Krümmung entlang eines Streifens. Dabei betrachtete er vor allem den Fall $K < 0$. Darüber hinaus hat er auch Eindeutigkeitsresultate bewiesen.

1.5 Resultate

In diesem Abschnitt wollen wir kurz die Hauptresultate dieser Arbeit notieren. Das eigentliche Hauptresultat kann man schwer in eine konkrete Aussage stecken, da es eigentlich das tiefere Verständnis in die geometrische Zusammenhänge ist.

Zunächst wird in den Kapiteln über die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen ein Verfahren angegeben, um aus der Parameterdarstellung einer Kurve die zweite Fundamentalform einer Fläche zu ermitteln, welche diese Kurve enthält. Dieses Verständnis ist das eigentliche Hauptresultat dieser Arbeit, weil es überhaupt erst den Zugang zu Rand- und Anfangswertproblemen ermöglicht. Wir werden dann daraus zwei Konsequenzen ziehen, welche komplett die Monge-Ampere Gleichungen vermeiden und sich ausschließlich aus entsprechenden ebenen Systemen ergeben. Der folgende Satz liefert a-priori Abschätzungen für ein globales Problem.

Satz 1.5.1. *Sei $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ eine positiv-definite Riemannsche Metrik mit Koeffizienten $g_{ij} : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R} \in C^{3,\alpha}(\bar{B}) \cap C^{4,\alpha}(B)$ mit der inneren Krümmung $K = K(ds^2)$ und der geodätischen Krümmung der Randkurve $\kappa_g = \kappa_g(\partial B, ds^2)$. Sei weiter $\mathbf{Y} : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^{4,\alpha}(\mathbb{R})$ eine geschlossene Kurve mit dem Wegelement $\dot{\mathbf{Y}}^2 = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ und der Krümmung κ .*

Gleichungen

Zu einer Konstante $c > 0$ gelten die Abschätzungen

$$\|g_{ij}\|_{3,\alpha}^B \leq c, \quad \inf_B K \geq \frac{1}{c} \quad \text{und} \quad \inf_B \det(g_{ij}) \geq \frac{1}{c} \quad (1.20)$$

und

$$\|\mathbf{Y}\|_{4,\alpha}^{\partial B} \leq c \quad \text{und} \quad \inf_{\partial B} \kappa^2 - \kappa_g^2 \geq \frac{1}{c}. \quad (1.21)$$

Dann gibt es eine Konstanten $C = C(c) \in (0, \infty)$, so dass für jede Lösung des Dirichletproblems

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(x, y) : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^3(\bar{B}, \mathbb{R}^3) \quad (1.22)$$

$$(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = g_{ij} \quad \text{in} \quad B \quad (1.23)$$

$$\mathbf{X}|_{\partial B} = \mathbf{Y} \quad (1.24)$$

die Aussage $\mathbf{X} \in C^{3,\alpha}(\bar{B}) \cap C^{4,\alpha}(B)$ gilt und die Abschätzung

$$\|\mathbf{X}\|_{3,\alpha}^B \leq C(c) \quad (1.25)$$

richtig ist.

Im folgenden Satz erhalten wir die lokale Existenz von Lösungen, verbunden mit einer Aussage über die Anzahl der Lösungen.

Satz 1.5.2. Sei $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ eine positiv-definite Riemannsche Metrik mit Koeffizienten $g_{ij} : U(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R} \in C^4(U(x_0, y_0))$ und der inneren Krümmung $K = K(ds^2)$. Sei weiter eine viermal stetig differenzierbare Kurve $\Gamma \subset U(x_0, y_0)$ mit $(x_0, y_0) \in \Gamma$ und ihrer geodätischen Krümmung $\kappa_g = \kappa_g(\Gamma, ds^2)$ gegeben. Gegeben sei außerdem durch $\mathbf{Y} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^4(\Gamma)$ eine Kurve mit dem Wegelement $\dot{\mathbf{Y}}^2 = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ und der Krümmung κ .

Unter den Voraussetzungen

$$K < 0, \quad \det(g_{ij}) > 0 \quad \text{und} \quad \kappa^2 - \kappa_g^2 > 0 \quad (1.26)$$

hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(x, y) : U'(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^3(U'(x_0, y_0), \mathbb{R}^3) \quad (1.27)$$

$$(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = g_{ij} \quad \text{in} \quad U'(x_0, y_0) \quad (1.28)$$

$$\mathbf{X}|_{\Gamma \cap U'(x_0, y_0)} = \mathbf{Y} \quad (1.29)$$

in einer (möglicherweise kleineren) Umgebung $U'(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$ genau zwei (möglicherweise identische) bis auf isometrische Transformationen bestimmte Lösungen.

Der erste dieser beiden Sätze ist mit dem komplett formulierten Problem auf den Seiten 72 f. zu finden. Der zweite der beiden Sätze, inklusive des entsprechenden Problems, ist auf den Seiten 102 f. zu finden. Schließlich führen wir auch noch eine quantitative Analyse durch, welche auf den Seiten 104 f. zu finden ist.

Kapitel 2

Differentialgeometrische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen alle differentialgeometrischen Grundlagen geschaffen werden. Da wir einen ganz besonderen Zugang zu der Theorie der Kurven, Streifen und Flächen benötigen, welcher in der Literatur, soweit mir bekannt ist, im allgemeinen nicht dargestellt wird, werde ich die benötigten Werkzeuge einfach beweisen. Als Meta-Aussage kann dieser Zugang etwa dem Buch [BL] entnommen werden, jedoch erfordert dies ein Studium von mehreren Dutzend Seiten und ist auch nicht so offensichtlich dargestellt wie hier aufgeschrieben. Sei es drum, wir beginnen zunächst mit einigen Hilfsaussagen über parameterabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen, welche uns helfen, die auftretenden Systeme partieller Differentialgleichungen zu lösen. Außerdem erhalten wir darüber Eindeutigkeitsaussagen. Dieser Abschnitt ist rein technischer Natur; die darin bewiesenen Aussagen sind für einen erfahrenen Analytiker nicht wirklich überraschend, weswegen er auch übersprungen werden kann. Er ist ebenfalls dem zitierten Werk von Blaschke zu entnehmen.

Dann leiten wir invariante Gleichungen für Kurven und Streifen her - die genaue Definition folgt später - und bestimmen alle Lösungen dieser Gleichungen. Anschließend führen wir das Konzept der Flächen ein und betrachten Kurven, die in einer Fläche liegen. Dabei wird uns die Theorie der Streifen helfen, die Invarianten der Kurve durch die Invarianten der Fläche auszudrücken.

2.1 Ein System partieller Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir zu $i = 1, \dots, m$ und $j, k = 1, \dots, n$ die stetig differenzierbaren Koeffizientenfunktionen

$$a_{ij}^k = a_{ij}^k(x) = a_{ij}^k(x_1, \dots, x_m) : I(x^0) \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(I(x^0)), \quad (2.1)$$

welche in einem offenen Rechteck

$$I(x^0) = \{y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_i^0 - r_i^- < y_i < x_i^0 + r_i^+, i = 1, \dots, m\} \quad (2.2)$$

mit $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ und $r_i^\pm > 0$ für $i = 1, \dots, m$ definiert sind. Mit diesen Koeffizientenfunktionen untersuchen wir nun notwendige und hinreichende Integrationsbedingungen für das System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k(x) u_k(x) \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad \text{und } j = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

hierbei soll die Lösung $u = u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x)) : I(x^0) \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^2(I(x^0))$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung sein. Doch zunächst beweisen wir die folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 2.1.1. *Es seien $r^\pm > 0$, $x^0 \in \mathbb{R}$ und $I(x^0) = (x^0 - r^-, x^0 + r^+)$ definiert. Dann besitzt das System von n linearen homogenen Differentialgleichungen*

$$\frac{du_j}{dx} = \sum_{k=1}^n a_j^k(x) u_k(x) \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad \text{und } x \in I(x^0) \quad (2.4)$$

mit $a_j^k(x) : I(x^0) \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(I(x^0))$ für $j, k = 1, \dots, n$ für alle Anfangsdaten $u_j(x^0) = c_j \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $u : I(x^0) \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1(I(x^0), \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Da die rechte Seite in jeder kompakten Teilmenge $K \subset I(x^0)$ mit $x^0 \in K$ einer Lipschitzbedingung genügt, existiert nach einem wohlbekanntem Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen genau eine Lösung des Anfangswertproblems $u_j(x^0) = c_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, n$ für die Differentialgleichung (2.4) in K . Ein Ausschöpfungsargument liefert schließlich die eindeutige Lösbarkeit auf der gesamten offenen Menge $I(x^0)$. \square

Hilfssatz 2.1.2. *Wir betrachten das System gewöhnlicher Differentialgleichungen*

$$\frac{du_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{d\bar{x}_1} = \sum_{k=1}^n a_j^k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) u_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad \text{für } \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in I(\bar{x}^0), \quad (2.5)$$

mit in $I(\bar{x}^0) \subset \mathbb{R}^2$ stetigen Funktionen $a_j^k(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ für $j, k = 1, \dots, n$. Hierbei sei die Notation (2.2) entsprechend angepasst. Außerdem seien die a_j^k für $j, k = 1, \dots, n$ stetig partiell nach \bar{x}_2 differenzierbar. Weiter seien die stetig differenzierbaren Funktionen $d_j = d_j(\bar{x}_2) : (\bar{x}_2^- - \bar{r}_2^-, \bar{x}_2^0 + \bar{r}_2^+) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann hat die gemäß Hilfssatz 2.1.1 existierende und eindeutig bestimmte Lösung $u = u(\bar{x}) = (u_1(\bar{x}), u_2(\bar{x})) : I(\bar{x}^0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ die folgenden Eigenschaften:

- i) u ist stetig und darüber hinaus auch stetig partiell differenzierbar in $I(\bar{x}^0)$.
- ii) Die gemischten zweiten partiellen Ableitungen existieren und stimmen überein.

Beweis:

i) Wir formen das Anfangswertproblem um in das Integralgleichungsproblem

$$u_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = d_j(\bar{x}_2) + \int_{\bar{x}_1^0}^{\bar{x}_1} \sum_{k=1}^n a_j^k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) u_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_1 \quad (2.6)$$

und beachten den Banachschen Fixpunktsatz, welcher uns die stetig differenzierbare Abhängigkeit vom Parameter \bar{x}_2 der Lösung u liefert.

ii) Gemäß i) dürfen wir das Integral nach \bar{x}_2 durchdifferenzieren und wir erhalten

$$\frac{\partial u_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial \bar{x}_2} = \frac{dd_j(\bar{x}_2)}{d\bar{x}_2} + \int_{\bar{x}_1^0}^{\bar{x}_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_j^k}{\partial \bar{x}_2} u_k + a_j^k \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_2} \right) d\bar{x}_1. \quad (2.7)$$

Somit folgt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(\frac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_2} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_j^k}{\partial \bar{x}_2} u_k + a_j^k \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_2} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left(\sum_{k=1}^n a_j^k u_k \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_1} \right).$$

□

Hilfssatz 2.1.3. Die Differentialgleichung (2.3) im Rechteck $I(x^0) \subset \mathbb{R}^m$ gemäß (2.2) mit den Koeffizientenfunktionen (2.1) habe zu allen Anfangswerten $u(x^1) = c \in \mathbb{R}^n$ mit $x^1 \in I(x^0)$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung $u = u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x)) : I(x^0) \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^2(I(x^0))$. Dann folgen für die Koeffizientenfunktionen notwendig die Gleichungen

$$\frac{\partial a_{ij}^k(x)}{\partial x_l} + \sum_{p=1}^n a_{ij}^p(x) a_{lp}^k(x) = \frac{\partial a_{lj}^k(x)}{\partial x_i} + \sum_{p=1}^n a_{lj}^p(x) a_{ip}^k(x), \quad x \in I(x^0), \quad (2.8)$$

für alle $i, l = 1, \dots, m$ und $j, k = 1, \dots, n$.

Beweis: Da die Lösung zweimal stetig differenzierbar ist, existieren die gemischten zweiten partiellen Ableitungen und stimmen nach dem Satz von Schwarz überein. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{k=1}^n a_{ij}^k(x) u_k(x) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}^k(x)}{\partial x_l} u_k(x) + a_{ij}^k(x) \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_l} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}^k(x)}{\partial x_l} u_k(x) + a_{ij}^k(x) \sum_{p=1}^n a_{lp}^p(x) u_p(x) \right) \\ &= \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}^p(x)}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^n a_{ij}^k(x) a_{lk}^p(x) \right) u_p(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Vertauschen wir die Indizes i und l , so liefert eine analoge Rechnung die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_l} \right) = \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial a_{lj}^p(x)}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^n a_{lj}^k(x) a_{ik}^p(x) \right) u_p(x). \quad (2.10)$$

Nun liefert der Satz von Schwarz, verbunden mit der Beliebigkeit der $u_m(x)$, die Behauptung. \square

Hilfssatz 2.1.4. *Auf dem Rechteck $I(x^0) \subset \mathbb{R}^m$ gemäß (2.2) seien die Koeffizientenfunktionen (2.1) mit der Bedingung*

$$\frac{\partial a_{ij}^k(x)}{\partial x_l} + \sum_{p=1}^n a_{ij}^p(x) a_{lp}^k(x) = \frac{\partial a_{lj}^k(x)}{\partial x_i} + \sum_{p=1}^n a_{lj}^p(x) a_{ip}^k(x), \quad x \in I(x^0), \quad (2.11)$$

für $i, l = 1, \dots, m$ und $j, k = 1, \dots, n$ gegeben. Dann hat das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k(x) u_k(x) \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad \text{und } j = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

zu den Anfangswerten $u_j(x^0) = c_j$ für $j = 1, \dots, n$ genau eine Lösung $u = u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x)) : I(x^0) \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^2(I(x^0))$.

Beweis: Mittels vollständiger Induktion über m werden wir diese Aussage beweisen. Zunächst sei $m = 1$ und die Bedingung (2.11) ist trivial erfüllt. Hilfssatz 2.1.1 liefert die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung u . Beachten wir nun noch, dass die Funktionen $a_{ij}^k(x)$ stetig differenzierbar sind, so folgt die Eigenschaft $u \in C^2(I(x^0))$. Damit ist der Induktionsanfang erfüllt.

Wir nehmen nun an, die Behauptung gelte für ein $m \in \mathbb{N}$. Nun sei \bar{u}_j die gemäß Hilfssatz 2.1.1 existierende und eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\bar{u}_j(x_{m+1})}{dx_{m+1}} = \sum_{k=1}^n a_{(m+1)j}^k(x_1^0, \dots, x_m^0, x_{m+1}) \bar{u}_k(x_{m+1}) \quad (2.13)$$

zu den Anfangsdaten $\bar{u}(x_{m+1}^0) = c$. Dies ist als Anfangswertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Unbekannten x_{m+1} zu den Parametern (x_1^0, \dots, x_m^0) aufzufassen. Wir definieren $d_j(x_{m+1}) = \bar{u}_j(x_{m+1})$ und betrachten mit u_j die gemäß Induktionshypothese existierende, eindeutig bestimmte und zweimal partiell stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems für $x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$

$$\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) u_k(x) \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad (2.14)$$

zu den Anfangsdaten $u_j(x_1^0, \dots, x_m^0, x_{m+1}) = d_j(x_{m+1})$. Dies ist als Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen in den Unbekannten (x_1, \dots, x_m) zum Parameter x_{m+1} aufzufassen. Mittels Hilfssatz 2.1.2 sehen wir die Existenz und Vertauschbarkeit der gemischten zweiten partiellen Ableitungen ein, wenn wir mit den dortigen Bezeichnungen $\bar{x}_1 = x_i$, $\bar{x}_2 = x_{m+1}$ und $a_{ij}^k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = a_{ij}^k(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_1, x_{i+1}, \dots, x_m, \bar{x}_2)$ für $i = 1, \dots, m$ setzen.

Auch hier fassen wir $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$ als Parameter auf. Unter Ausnutzung der Gleichungen (2.11) berechnen wir für $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_{m+1}} - \sum_{k=1}^n a_{(m+1)j}^k u_k \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_{(m+1)j}^k}{\partial x_i} + \sum_{p=1}^n a_{(m+1)j}^p a_{ip}^k \right) u_k \\
&= \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} \left(\sum_{k=1}^n a_{ij}^k u_k \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}^k}{\partial x_{m+1}} + \sum_{p=1}^n a_{ij}^p a_{(m+1)p}^k \right) u_k \\
&= \sum_{p=1}^n a_{ij}^p \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_{m+1}} - \sum_{k=1}^n a_{(m+1)p}^k u_k \right) \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in I(x^0).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Wir definieren nun die Hilfsfunktion

$$v_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_{m+1}} - \sum_{k=1}^n a_{(m+1)j}^k u_k \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in I(x^0), \tag{2.16}$$

welche wegen (2.15) dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sum_{p=1}^n a_{ij}^p(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) v_p \tag{2.17}$$

für $x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in I(x^0)$ und $i = 1, \dots, m$ und wegen (2.13) den Anfangsdaten $v_j(x_1^0, \dots, x_m^0, x_{m+1}^0) = 0$ genügt. Wegen der Induktionshypothese folgt jetzt $v_j \equiv 0$ und somit

$$\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_{m+1}} = \sum_{k=1}^n a_{(m+1)j}^k(x) u_k(x) \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \quad \text{und } j = 1, \dots, n. \tag{2.18}$$

Damit ist auch der Induktionsschluß erbracht. Nach der Methode der vollständigen Induktion ist die so konstruierte Funktion u die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (2.12) zu den Anfangsdaten $u(x^0) = c \in \mathbb{R}^n$. \square

Hilfssatz 2.1.4 sagt also aus, dass die notwendigen Integrationsbedingungen gemäß Hilfssatz 2.1.3 auch hinreichend sind. Wir werden dies später ausnutzen, indem wir die Integrationsbedingungen für differentialgeometrisch reguläre Flächen bestimmen und zur Lösung unseres Problems geeignet setzen. Wir verallgemeinern Hilfssatz 2.1.4 auf einfach-zusammenhängende Gebiete. Wir bemerken ferner, dass der Aufpunkt x^0 nicht notwendig der Mittelpunkt eines Rechteckes sein muss.

Hilfssatz 2.1.5. *Auf dem einfach-zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ seien die Koeffizientenfunktionen*

$$a_{ij}^k(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(\Omega) \tag{2.19}$$

für $i, l = 1, \dots, m$ und $j, k = 1, \dots, n$ gegeben. Dann hat das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k(x) u_k(x) \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad \text{und } j = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

für $x \in \Omega$ mit den Anfangswerten $u(x^0) = c \in \mathbb{R}^n$ zu einem $x^0 \in \Omega$ höchstens eine Lösung $u = u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1(\Omega)$.

Beweis: Seien u und \bar{u} zwei Lösungen unseres Anfangswertproblems. Dann betrachte $v = u - \bar{u}$, welches Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k(x) v_k(x) \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad \text{und } j = 1, \dots, n \quad (2.21)$$

zu den Anfangsdaten $v(x^0) = 0$ ist. Wir zeigen nun $v \equiv 0$ in Ω . Zunächst wählen wir ein Rechteck $I(x^0) \subset \Omega$ und erhalten mit der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen $v \equiv 0$ in $I(x^0)$. Dazu sei $i = 1$ und wir fassen unser Anfangswertproblem als Anfangswertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen nach der Variablen x_1 und den Parametern x_2^0, \dots, x_m^0 auf. Es folgt zunächst $v(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) \equiv 0$ für alle x_1 . Wir fahren induktiv fort und erhalten mit dieser Methode $v \equiv 0$ in $I(x^0)$. Schöpfen wir Ω durch Rechtecke aus, so erhalten wir $v \equiv 0$ in ganz Ω . \square

Satz 2.1.6. Auf dem einfach-zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ seien die Koeffizientenfunktionen

$$a_{ij}^k(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\Omega) \quad (2.22)$$

mit der Bedingung

$$\frac{\partial a_{ij}^k(x)}{\partial x_l} + \sum_{p=1}^n a_{ij}^p(x) a_{lp}^k(x) = \frac{\partial a_{lj}^k(x)}{\partial x_i} + \sum_{p=1}^n a_{lj}^p(x) a_{ip}^k(x), \quad x \in \Omega \quad (2.23)$$

für $i, l = 1, \dots, m$ und $j, k = 1, \dots, n$ gegeben. Dann hat das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k(x) u_k(x) \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad \text{und } j = 1, \dots, n \quad (2.24)$$

für $x \in \Omega$ mit den Anfangswerten $u(x^0) = c \in \mathbb{R}^n$ zu einem $x^0 \in \Omega$ genau eine Lösung $u = u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^2(\Omega)$.

Beweis:

- i) Sei $x^1 \in \Omega$ ein beliebiger Punkt und $\pi \subset \Omega$ ein Weg, der x^0 mit x^1 verbindet. Dann wählen wir endlich viele offene Rechtecke $I_1, \dots, I_N \subset \Omega$ mit $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ für $k = 1, \dots, N-1$, welche π überdecken. Weiter gelten $x^0 \in I_1$ und $x^1 \in I_N$. Gemäß

Satz 2.1.4 existiert in I_1 genau eine Lösung u^1 des Anfangswertproblems 2.24 zu den Anfangsdaten $u^1(x^0) = c$. Da nun $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ richtig ist, gibt es einen Punkt $x_2 \in I_1 \cap I_2$ und wir können nun das Anfangswertproblem 2.24 zu den Anfangsdaten $u^2(x^2) = u^1(x^2)$ eindeutig lösen. Wegen der Eindeutigkeitsaussage gilt $u^2 \equiv u^1$ auf $I_1 \cap I_2$. Nach endlich vielen Schritten haben wir mit dieser Methode x^1 erreicht. Somit ist $u_\pi(x) := u^k(x)$ für $x \in I_k$ eine Lösung in $\bigcup_{k=1}^N I_k$.

- ii) Es bleibt die Unabhängigkeit von der Wahl des Weges zu zeigen. Wir bezeichnen durch $\pi_i(s) \subset \Omega$ zwei Wege mit $\pi_i(0) = x^0$ und $\pi_i(1) = x^1$ für $i = 0, 1$. Da Ω einfach-zusammenhängend ist, sind alle geschlossenen Wege homotop zu einer Punktcurve. Mithin sind die beiden Wege π_i homotop. Wir finden also eine stetige Abbildung $\Pi(s, t) \subset \Omega$ mit $\Pi(s, i) \equiv \pi_i(s)$ und $\Pi(j, t) \equiv x^j$ für $i, j = 0, 1$ und alle $0 \leq s, t \leq 1$. Da Ω beschränkt ist, können wir $\Pi([0, 1] \times [0, 1])$ durch endlich viele offene Rechtecke I_1, \dots, I_N überdecken. Wir betrachten nun zu festem $s_0 \in [0, 1]$ den Weg $\Pi(s_0, t)$ und die Teilmenge der I_k , welche diesen Weg überdecken. In diesen Rechtecken I_k konstruieren wir mit der Methode aus Teil i) dieses Beweises eine Lösung \bar{u}_{s_0} unseres Anfangswertproblems zum Anfangswert $\bar{u}_{s_0} = u_{\pi_0}(\Pi(s_0, 0))$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder gilt $\bar{u}_{s_0}(\Pi(s_0, 1)) = u_{\pi_1}(\Pi(s_0, 1))$ oder $\bar{u}_{s_0}(\Pi(s_0, 1)) \neq u_{\pi_1}(\Pi(s_0, 1))$. Wir betrachten die Menge

$$\Gamma = \{s_0 \in [0, 1] \mid \bar{u}_{s_0}(\Pi(s_0, 1)) = u_{\pi_1}(\Pi(s_0, 1))\}, \quad (2.25)$$

welche wegen $0 \in \Gamma$ nicht leer ist. Auch ist diese Menge offen, denn zu $s_0 \in \Gamma$ finden wir eine Umgebung $U(s_0)$, so dass für alle $s \in U(s_0)$ die Rechtecke I_k aus der Überdeckung von $\Pi(s_0, t)$ auch eine Überdeckung von $\Pi(s, t)$ sind. Dann liefert die Eindeutigkeitsaussage $s \in \Gamma$ für alle $s \in U(s_0)$. Wir wählen eine Folge $\{s_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{l \rightarrow \infty} s_l = s_0$ und $s_l \in \Gamma$. Zu einer Überdeckung von $\Pi(s_0, t)$ durch endlich viele I_k gibt es ein hinreichend großes L , so dass diese I_k auch Überdeckung von $\Pi(s_l, t)$ für $l \geq L$ sind, und es folgt $s_0 \in \Gamma$. Die nicht-leere, zusammenhängende Menge Γ ist also sowohl offen als auch abgeschlossen, es folgt somit $\Gamma = [0, 1]$ und damit $u_{\pi_0}(x^1) = u_{\pi_1}(x^1)$. Da der Weg π_1 beliebig gewählt war, wurde die Unabhängigkeit von der Auswahl des Weges gezeigt.

□

2.2 Kurven

In diesem Abschnitt betrachten wir die geometrischen Invarianten von Kurven und leiten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen her, welche eben diese Kurven charakterisieren. Wir beginnen zunächst mit der folgenden

Definition 2.2.1. Es seien $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 1]^1$ und $T > 0$. Wir nennen eine Abbildung $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)^T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^{k, \alpha}([0, T])$ mit der Bedingung $|\dot{\mathbf{Y}}(t)| \neq 0$ eine **reguläre Kurve der Klasse $C^{k, \alpha}$** . Hierbei bezeichnet der Punkt $\dot{\cdot}$ die Differentiation nach der unabhängigen Variablen t .

Eine reguläre Kurve \mathbf{Y} der Klasse $C^{k, \alpha}$, welche periodisch (k, α) -mal stetig fortgesetzt werden kann (d.h. es gelten neben $\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ auch noch $\frac{d^l \mathbf{Y}(0)}{dt^l} = \frac{d^l \mathbf{Y}(T)}{dt^l}$ für alle $0 \leq l \leq k$ und die k -ten Ableitungen genügen einer Hölderbedingung der Ordnung α in diesem Punkt) nennen wir eine **geschlossene reguläre Kurve der Klasse $C^{k, \alpha}$** .

Wir nennen ein Tupel (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) aus einer regulären Kurve \mathbf{Y} der Klasse $C^{k, \alpha}$ und einer Normalen $\mathbf{N} = (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3)^T : [0, T] \rightarrow S^2 \in C^{k-1, \alpha}([0, T])$ (d.h. es gilt $(\dot{\mathbf{Y}}(t), \mathbf{N}(t)) = 0$ für alle $t \in [0, T]$) einen **Streifen der Klasse $C^{k, \alpha}$** .

Ist (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) ein Streifen der Klasse $C^{k, \alpha}$ und \mathbf{Y} eine geschlossene reguläre Kurve der Klasse $C^{k, \alpha}$, so nennen wir das Tupel (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) einen **geschlossenen Streifen der Klasse $C^{k, \alpha}$** , wenn zusätzlich \mathbf{N} im oben angegebenen Sinne periodisch $(k-1, \alpha)$ -mal stetig differenzierbar² fortgesetzt werden kann.

Wir führen nun eine ganz besondere Parametrisierung ein, die Bogenlängenparametrisierung.

Satz 2.2.2. Sei (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) ein (geschlossener) Streifen der Klasse $C^{k, \alpha}$, dann gibt es eine Parametertransformation $t = t(s) : [0, S] \rightarrow [0, T] \in C^{k, \alpha}([0, S])$ mit $t'(s) > 0$ für alle $s \in [0, S]$, so dass das Tupel $(\bar{\mathbf{Y}}(s), \bar{\mathbf{N}}(s)) := (\mathbf{Y} \circ t(s), \mathbf{N} \circ t(s))$ ein (geschlossener) Streifen der Klasse $C^{k, \alpha}$ ist und der Bedingung $|\bar{\mathbf{Y}}'(s)| = 1$ für alle $s \in [0, S]$ genügt.

Beweis:

i) Wir zeigen zunächst die Existenz der behaupteten Parametertransformation. Es sei

$$s(t) := \int_0^t |\dot{\mathbf{Y}}(\tau)| d\tau \quad \text{für } t \in [0, T] \quad (2.26)$$

und wir setzen $S = s(T)$. Wir erkennen $\dot{s} > 0$ für alle $t \in [0, T]$, da \mathbf{Y} eine reguläre Kurve ist. Also ist $s : [0, T] \rightarrow [0, S] \in C^{k, \alpha}([0, T])$ nach einem bekannten Satz invertierbar, es existiert $t = t(s) : [0, S] \rightarrow [0, T] \in C^{k, \alpha}([0, S])$ mit der Ableitung

$$t'(s) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{Y}}(t(s))|}. \quad (2.27)$$

Schließlich erhalten wir für die in der Behauptung definierte Abbildung $\bar{\mathbf{Y}}$ die Gleichung $|\bar{\mathbf{Y}}'| \equiv 1$ in $[0, S]$. Weiter gilt $(\bar{\mathbf{Y}}'(s), \bar{\mathbf{N}}(s)) = t'(s)(\dot{\mathbf{Y}}(t), \mathbf{N}(t))_{t=t(s)} = 0$ für alle

¹Der Fall $\alpha = 0$ bedeutet, dass die Abbildungen keiner Hölderbedingung genügen, also $C^{k, 0} = C^k$.

²Im Fall $k = 1$ ist es als (hölder-)stetig zu lesen.

$s \in [0, S]$. Ist der Streifen periodisch, dann gelten $\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t)$ und $\mathbf{N}(t+T) = \mathbf{N}(t)$. Wir beachten ferner

$$\begin{aligned} s(t) + S &= \int_0^t |\dot{\mathbf{Y}}(\tau)| d\tau + \int_0^T |\dot{\mathbf{Y}}(\tau)| d\tau \\ &= \int_0^{t+T} |\dot{\mathbf{Y}}(\tau)| d\tau = s(t+T), \end{aligned} \quad (2.28)$$

dies hat dann für die auf ganz \mathbb{R} fortgesetzte Parametertransformation

$$t(s+S) = t(s) + T \quad (2.29)$$

zur Folge. Damit erhalten wir schließlich

$$\bar{\mathbf{Y}}(s+S) = \mathbf{Y}(t(s+S)) = \mathbf{Y}(t(s)+T) = \mathbf{Y}(t(s)) = \bar{\mathbf{Y}}(s), \quad (2.30)$$

und auch eine analoge Aussage für $\bar{\mathbf{N}}$.

- ii) Wir zeigen jetzt die Regularität des transformierten Streifens. Da t in der Regularitätsklasse $C^{k,\alpha}([0, S])$ enthalten ist, sind die Verkettungen $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} \circ t$ mit \mathbf{Y} aus der Regularitätsklasse $C^{k,\alpha}([0, T])$ bzw. $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \circ t$ mit \mathbf{N} aus der Regularitätsklasse $C^{k-1,\alpha}([0, T])$ in den Regularitätsklassen $C^{k,\alpha}([0, S])$ bzw. $C^{k-1,\alpha}([0, S])$ enthalten. Also ist $(\bar{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{N}})$ zusammen mit i) ein Streifen der Klasse $C^{k,\alpha}$. Ist (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) sogar ein geschlossener Streifen der Klasse $C^{k,\alpha}$, so folgt zunächst $\frac{d^l t(0)}{ds^l} = \frac{d^l t(S)}{ds^l}$ für alle $0 \leq l \leq k$ und die k -ten Ableitungen von t genügen einer Hölderbedingung der Ordnung α . Induktiv sieht man sehr leicht ein, dass die l -te Ableitung von $\bar{\mathbf{Y}}$ ein Bruch ist, dessen Zähler eine analytische Kombination aller Ableitungen von \mathbf{Y} bis einschließlich der l -ten ist und dessen Nenner eine Potenz von $|\dot{\mathbf{Y}}|$ ist. Also folgt damit auch $\frac{d^l \bar{\mathbf{Y}}(0)}{ds^l} = \frac{d^l \bar{\mathbf{Y}}(S)}{ds^l}$ für $0 \leq l \leq k$ und $\bar{\mathbf{Y}}$ wird eine geschlossene Kurve $C^{k,\alpha}$. Die Gültigkeit der Hölderbedingung entnimmt man dazu der Darstellung der k -ten Ableitungen. Analog sieht man auch ein, dass $\bar{\mathbf{N}}$ periodisch $(k-1, \alpha)$ -mal differenzierbar fortgesetzt werden kann. □

Definition 2.2.3. Das Integral (2.26) rechtfertigt die Bezeichnung der **Bogenlängenparametrisierung** für eine (geschlossene) Kurve \mathbf{Y} oder für einen (geschlossenen) Streifen (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) der Klasse $C^{k,\alpha}$ mit $|\bar{\mathbf{Y}}'| \equiv 1$. Wir bezeichnen nun das **begleitende orthonormale Dreibein** eines Streifens in Bogenlängenparametrisierung mit

$$\mathbf{T}(s) := \mathbf{Y}'(t(s)), \quad \mathbf{N}(s) := \mathbf{N}(t(s)) \quad \text{und} \quad \mathbf{M}(s) := \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) \quad \text{für} \quad s \in [0, S],$$

hierbei ist $t(s)$ die Parametertransformation aus Satz (2.2.2). Wir bezeichnen mit $\mathbf{Z}_i(s) = (\mathbf{T}_i(s), \mathbf{N}_i(s), \mathbf{M}_i(s))^T$ für $i = 1, 2, 3$ das **adjungierte orthonormale Dreibein** aus den Komponenten des begleitenden orthonormalen Dreibeins.

Hilfssatz 2.2.4. *Es sei (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) ein Streifen der Klasse $C^{k,\alpha}$ in Bogenlängenparametrisierung. Dann genügt das adjungierte orthonormale Dreibein gemäß Definition 2.2.3 dem folgenden linearen System gewöhnlicher Differentialgleichungen:*

$$\mathbf{Z}'_i(s) = \mathbf{K}(s) \times \mathbf{Z}_i(s) \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad \text{und } s \in [0, S], \quad (2.31)$$

mit der Abbildung

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(s) = (\mathbf{K}_1(s), \mathbf{K}_2(s), \mathbf{K}_3(s))^T : [0, S] \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^{k-1,\alpha}([0, S]) \quad (2.32)$$

mit

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{M}') = -(\mathbf{N}', \mathbf{M}), \quad \mathbf{K}_2 = (\mathbf{T}', \mathbf{M}) = -(\mathbf{T}, \mathbf{M}') \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_3 = -(\mathbf{T}', \mathbf{N}) = (\mathbf{T}, \mathbf{N}').$$

Bemerkung 2.2.5. *In der klassischen Differentialgeometrie wird das System (2.31) auch als **Frenétsche Formel** bezeichnet. Dabei werden im Krümmungsvektor $\mathbf{K} = (-\tau, \kappa_n, -\kappa_g)^T$ die Größen τ als geodätische Windung, κ_n als Normalenkrümmung und κ_g als gedätische Krümmung bezeichnet.*

Außerdem ist der Vektor \mathbf{K} invariant unter orthogonalen Transformationen des Streifens im folgenden Sinne: Sei $\mathbf{O} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Transformation, und definieren wir zu einem Streifen (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) der Klasse $C^{k,\alpha}$ in Bogenlängenparametern die Abbildungen $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{O}(\mathbf{Y})$ und $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{O}(\mathbf{N})$. Dann ist $(\bar{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{N}})$ ein Streifen der Klasse $C^{k,\alpha}$ in Bogenlängenparametern. Außerdem gilt die Gleichheit

$$\bar{\mathbf{K}} \equiv \mathbf{K}, \quad (2.33)$$

der Vektor \mathbf{K} ist also invariant unter orthogonalen Transformationen.

Wir wollen nun noch den Krümmungsvektor in eine allgemeine Parametrisierung umrechnen. Sei also auf $[0, T]$ der Streifen (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) gegeben. Dieser liege nicht notwendig in Bogenlängenparametern vor. Dann überführen wir ihn mit der Abbildung $t = t(s) : [0, S] \rightarrow [0, T]$ gemäß Satz 2.2.2 in den Streifen $(\bar{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{N}})$, welcher in Bogenlängenparametrisierung vorliegt. Wir beachten nun $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} \circ t$ und $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \circ t$, woraus dann

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}} &= \bar{\mathbf{Y}}' = \dot{\mathbf{Y}}t' = \frac{\dot{\mathbf{Y}}}{|\dot{\mathbf{Y}}|}, \\ \bar{\mathbf{T}}' &= \ddot{\mathbf{Y}}(t')^2 + \dot{\mathbf{Y}}t'' = \frac{\ddot{\mathbf{Y}}}{\dot{\mathbf{Y}}^2} - \frac{(\dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}})\dot{\mathbf{Y}}}{(\dot{\mathbf{Y}}^2)^2}, \\ \bar{\mathbf{N}}' &= \dot{\mathbf{N}}t' = \frac{\dot{\mathbf{N}}}{|\dot{\mathbf{Y}}|}, \\ \bar{\mathbf{M}} &= \bar{\mathbf{T}}(s) \times \bar{\mathbf{N}}(s) = \frac{\dot{\mathbf{Y}} \times \mathbf{N}}{|\dot{\mathbf{Y}}|} \end{aligned}$$

folgen. Das hat für die Komponenten des Krümmungsvektors wiederum

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= -(\overline{\mathbf{N}}', \overline{\mathbf{M}}) = -\left(\frac{\dot{\mathbf{N}}}{|\dot{\mathbf{Y}}|}, \frac{\dot{\mathbf{Y}} \times \mathbf{N}}{|\dot{\mathbf{Y}}|} \right) = -\frac{(\mathbf{N}, \dot{\mathbf{N}}, \dot{\mathbf{Y}})}{\dot{\mathbf{Y}}^2} \\
&= (\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M}}') = \frac{(\mathbf{M}, \dot{\mathbf{Y}}, \dot{\mathbf{M}})}{\dot{\mathbf{Y}}^2} = -\frac{(\mathbf{M}, \dot{\mathbf{M}}, \dot{\mathbf{Y}})}{\dot{\mathbf{Y}}^2}, \\
\mathbf{K}_2 &= (\overline{\mathbf{T}}', \mathbf{M}) = \left(\frac{\ddot{\mathbf{Y}}}{\dot{\mathbf{Y}}^2} - \frac{(\dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}})\dot{\mathbf{Y}}}{(\dot{\mathbf{Y}}^2)^2}, \frac{\dot{\mathbf{Y}} \times \mathbf{N}}{|\dot{\mathbf{Y}}|} \right) = \frac{(\ddot{\mathbf{Y}}, \mathbf{M})}{\dot{\mathbf{Y}}^2} = \frac{(\ddot{\mathbf{Y}}, \dot{\mathbf{Y}}, \mathbf{N})}{|\dot{\mathbf{Y}}|^3} = -\frac{(\mathbf{N}, \dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}})}{|\dot{\mathbf{Y}}|^3}, \\
\mathbf{K}_3 &= -(\overline{\mathbf{T}}', \overline{\mathbf{N}}) = -\frac{(\ddot{\mathbf{Y}}, \mathbf{N})}{\dot{\mathbf{Y}}^2} = \frac{(\ddot{\mathbf{Y}}, \dot{\mathbf{Y}}, \mathbf{M})}{|\dot{\mathbf{Y}}|^3} = -\frac{(\mathbf{M}, \dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}})}{|\dot{\mathbf{Y}}|^3}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

unter Beachtung von $\overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{M}} \times \overline{\mathbf{T}}$ zur Folge.

Beweis von Hilfssatz 2.2.4: Wir drücken die Ableitung eines jeden Vektors des begleitenden orthogonalen Dreibeins in Termen dieses orthogonalen Dreibeins aus. Exemplarisch tun wir dies für $\mathbf{T}' = a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{N} + a_3 \mathbf{M}$. Zunächst adjungieren wir an diese Gleichung \mathbf{T} . Da \mathbf{T} ein Einheitsvektor ist, folgt $a_1 \equiv 0$. Adjungieren wir nun \mathbf{N} und schließlich \mathbf{M} , so erhalten wir $a_2 = (\mathbf{T}', \mathbf{N})$ und $a_3 = (\mathbf{T}', \mathbf{M})$. Beachten wir außerdem auch noch, dass die Vektoren des begleitenden orthonormalen Dreibeins überall aufeinander senkrecht stehen, erhalten wir darüberhinaus $a_2 = -(\mathbf{T}, \mathbf{N}')$ und $a_3 = -(\mathbf{T}, \mathbf{M}')$. Fahren wir mit diesem Verfahren fort, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}' &= -\mathbf{K}_3 \mathbf{N} + \mathbf{K}_2 \mathbf{M}, \\
\mathbf{N}' &= \mathbf{K}_3 \mathbf{T} - \mathbf{K}_1 \mathbf{M}, \\
\mathbf{M}' &= -\mathbf{K}_2 \mathbf{T} + \mathbf{K}_1 \mathbf{N}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Fassen wir nun diese Gleichung komponentenweise auf, so können wir dieses System in der oben angegebenen Form (2.31) schreiben. \square

Wir wollen nun einen Krümmungsvektor \mathbf{K} aus der Regularitätsklasse $C^{k-2, \alpha}$ vorgeben und aus einer Lösung des Systems (2.31) einen Streifen (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) der Klasse $C^{k, \alpha}$ in Bogenlängenparametern konstruieren.

Satz 2.2.6. *Sei $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3)^T : [0, S] \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^{k-1, \alpha}([0, S])$ eine Abbildung. Dann definiert dieser Krümmungsvektor einen Streifen (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) der Klasse $C^{k, \alpha}$ in Bogenlängenparametern eindeutig bis auf Drehungen und Verschiebungen.*

Beweis: Zunächst zeigen wir die Existenz. Mittels Hilfssatz 2.1.1 lösen wir das System

$$\mathbf{Z}'_i = \mathbf{K} \times \mathbf{Z}_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \tag{2.36}$$

zu den Anfangsdaten $\mathbf{Z}_i(s_0) = e_i$ für ein $s_0 \in (0, S)$. Die Größen e_i sind die kanonischen Einheitsvektoren im \mathbb{R}^3 . Da \mathbf{K} in der Regularitätsklasse $C^{k-1, \alpha}$ enthalten ist, folgt $\mathbf{Z}_i \in$

$C^{k,\alpha}$. Weiter sind die \mathbf{Z}_i paarweise orthonormal, da ja gilt

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j) = (\mathbf{K} \times \mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j) + (\mathbf{Z}_i, \mathbf{K} \times \mathbf{Z}_j) = (\mathbf{K}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j) - (\mathbf{K}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j) = 0, \quad (2.37)$$

also $(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j) \equiv (e_i, e_j)$. Damit erhalten wir aus Stetigkeitsgründen ebenfalls

$$(\mathbf{Z}_1(s), \mathbf{Z}_2(s), \mathbf{Z}_3(s)) = 1 \quad \text{für } s \in [0, S] \quad (2.38)$$

und die \mathbf{Z}_i sind ein adjungiertes orthonormales Dreibein eines Streifens. Nach Konstruktion (man vergleiche den Beweis von Hilfssatz 2.2.4) hat dieser Streifen auch den Krümmungsvektor \mathbf{K} .

Wir müssen nun noch die Eindeutigkeitsaussage zeigen. Sei \mathbf{W}_i ebenfalls eine Lösung von (2.36) mit $(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j) \equiv (e_i, e_j)$ und $(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3) \equiv 1$, dann folgt ebenso $(\mathbf{W}_i, \mathbf{Z}_j) \equiv \text{const}$. Wir finden eine orthogonale Transformation \mathbf{O} mit $\mathbf{W}_i(s_0) = \mathbf{O}(\mathbf{Z}_i(s_0))$, also gilt $\mathbf{W}_i(s) = \mathbf{O}(\mathbf{Z}_i(s))$ für alle $s \in [0, S]$. Damit überführt eine orthogonale Transformation das durch \mathbf{W}_i definierte begleitende orthonormale Dreibein eines Streifens in das durch \mathbf{Z}_i definierte begleitende orthonormale Dreibein des anderen Streifens. \square

Bemerkung 2.2.7. *Es ist völlig unklar, unter welchen Voraussetzungen an \mathbf{K} das System (2.36) ein periodisches Fundamentalsystem hat. Eine Kenntnis davon würde es eventuell ermöglichen, später weitere Gleichungen zu ersetzen.*

Wir werden nun noch untersuchen, wie sich der Krümmungsvektor \mathbf{K}_1 des Streifens $(\mathbf{Y}, \mathbf{N}_1)$ der Klasse $C^{k,\alpha}$ in den Krümmungsvektor \mathbf{K}_2 des Streifens $(\mathbf{Y}, \mathbf{N}_2)$ der Klasse $C^{k,\alpha}$ transformiert.

Hilfssatz 2.2.8. *Sei \mathbf{Y} eine reguläre Kurve der Klasse $C^{k,\alpha}$ in Bogenlängenparametrisierung, welche mit den beiden Normalenabbildungen $\mathbf{N}_i : [0, S] \rightarrow S^2 \in C^{k-1,\alpha}([0, S])$ die Streifen $(\mathbf{Y}, \mathbf{N}_i)$ der Klasse $C^{k,\alpha}$ in Bogenlängenparametrisierung für $i = 1, 2$ bildet. Dann transformieren sich die gemäß Hilfssatz 2.2.4 gebildeten Krümmungsvektoren \mathbf{K}^1 und \mathbf{K}^2 folgendermaßen:*

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^1 &= \mathbf{K}_1^2 + \phi', \\ \mathbf{K}_2^1 &= \cos \phi \mathbf{K}_2^2 + \sin \phi \mathbf{K}_3^2, \\ \mathbf{K}_3^1 &= -\sin \phi \mathbf{K}_2^2 + \cos \phi \mathbf{K}_3^2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

hierbei ist ϕ der orientierte Winkel zwischen den beiden Normalen \mathbf{N}_1 und \mathbf{N}_2 .

Beweis: Wir beachten, dass für die begleitenden orthonormalen Dreibeine unserer beider Streifen die Transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{T}_2, \\ \mathbf{N}_1 &= \cos \phi \mathbf{N}_2 - \sin \phi \mathbf{M}_2, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{M}_1 = \sin \phi \mathbf{N}_2 + \cos \phi \mathbf{M}_2 \quad (2.41)$$

mit einem Winkel $\phi = \phi(s) : [0, S] \rightarrow \mathbb{R} \in C^{k-1, \alpha}([0, S])$ gilt. Wenn wir nun die Darstellung von Hilfssatz 2.31 benutzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^1 &= -(\mathbf{N}'_1, \mathbf{M}_1) \\ &= -(\cos \phi \mathbf{N}'_2 - \sin \phi \mathbf{M}'_2 - \phi'(\sin \phi \mathbf{N}_2 + \cos \phi \mathbf{M}_2), \sin \phi \mathbf{N}_2 + \cos \phi \mathbf{M}_2) \quad (2.42) \\ &= \mathbf{K}_1^2 + \phi' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^1 &= -(\mathbf{T}'_1, \mathbf{M}_1) = -(\mathbf{T}'_2, \sin \phi \mathbf{N}_2 + \cos \phi \mathbf{M}_2) = \cos \phi \mathbf{K}_2^2 + \sin \phi \mathbf{K}_3^2, \\ \mathbf{K}_3^1 &= -(\mathbf{T}'_1, \mathbf{N}_1) = -(\mathbf{T}'_2, \cos \phi \mathbf{N}_2 - \sin \phi \mathbf{M}_2) = -\sin \phi \mathbf{K}_2^2 + \cos \phi \mathbf{K}_3^2. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfssatz 2.2.8 ist dann die folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.2.9. *Es sei \mathbf{Y} eine reguläre Kurve in Bogenlängenparametrisierung der Klasse $C^{k, \alpha}$. Dann nennen wir die Größe*

$$\kappa := |\mathbf{Y}''| = \sqrt{\mathbf{K}_2^2 + \mathbf{K}_3^2} \quad (2.43)$$

die **Krümmung der Kurve \mathbf{Y}** , wobei das zweite Gleichheitszeichen nur gültig ist, falls es einen Streifen (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) der Klasse $C^{k, \alpha}$ gibt.

Beispiel 2.2.10. Es sei $k \geq 3$ und \mathbf{Y} eine reguläre Kurve der Klasse $C^{k, \alpha}$ in Bogenlängenparametrisierung mit der Krümmung $\kappa > 0$. Dann folgt

$$(\mathbf{Y}'')^2 = \kappa^2 > 0, \quad (2.44)$$

und der Streifen $(\mathbf{Y}, \frac{\mathbf{Y}''}{|\mathbf{Y}''|})$ der Klasse $C^{k-2, \alpha}$ ist wohldefiniert. Das begleitende orthonormale Dreibein lautet $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{M}) = (\mathbf{Y}', \frac{\mathbf{Y}''}{|\mathbf{Y}''|}, \frac{\mathbf{Y}' \times \mathbf{Y}''}{|\mathbf{Y}''|})$ und wir erhalten für den Krümmungsvektor

$$\begin{aligned} \tau &= -\mathbf{K}_1 = (\mathbf{N}', \mathbf{M}) = \left(\frac{d}{ds} \frac{\mathbf{Y}''}{|\mathbf{Y}''|}, \mathbf{Y}', \frac{\mathbf{Y}''}{|\mathbf{Y}''|} \right) = \frac{(\mathbf{Y}', \mathbf{Y}'', \mathbf{Y}''')}{(\mathbf{Y}'')^2}, \\ \kappa_n &= \mathbf{K}_2 = (\mathbf{T}', \mathbf{M}) = \frac{(\mathbf{Y}'', \mathbf{Y}', \mathbf{Y}'')}{(\mathbf{Y}'')^2} = 0, \\ \kappa_g &= -\mathbf{K}_3 = -(\mathbf{T}', \mathbf{N}) = |\mathbf{Y}''| = \kappa. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Der Krümmungsvektor ist hier in der Regularitätsklasse $C^{k-3, \alpha}$ enthalten. Wir drücken unseren Krümmungsvektor schließlich noch in allgemeinen Parametern gemäß Bemerkung 2.2.5 aus. Zunächst gilt

$$\kappa^2 = \kappa \frac{(\dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}}, \mathbf{M})}{|\dot{\mathbf{Y}}|^3} = \kappa \frac{(\dot{\mathbf{Y}} \times \ddot{\mathbf{Y}}, \frac{\dot{\mathbf{Y}}}{|\dot{\mathbf{Y}}|} \times \frac{\ddot{\mathbf{Y}}}{|\ddot{\mathbf{Y}}|})}{|\dot{\mathbf{Y}}|^2} = \kappa \frac{(\dot{\mathbf{Y}} \times \ddot{\mathbf{Y}})^2}{|\mathbf{Y}''|(\dot{\mathbf{Y}}^2)^3} = \frac{(\dot{\mathbf{Y}} \times \ddot{\mathbf{Y}})^2}{(\dot{\mathbf{Y}}^2)^3}. \quad (2.46)$$

Mit

$$\bar{\mathbf{Y}}''' = \frac{\ddot{\mathbf{Y}}}{|\dot{\mathbf{Y}}|^3} + a\ddot{\mathbf{Y}} + b\dot{\mathbf{Y}}, \quad (2.47)$$

wobei die Größen a und b nicht näher interessieren, folgt dann außerdem

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}})}{(\mathbf{Y}'')^2(\dot{\mathbf{Y}}^2)^3} = \frac{(\dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}})}{(\dot{\mathbf{Y}} \times \ddot{\mathbf{Y}})^2}. \quad (2.48)$$

2.3 Kurven auf Flächen

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst die elementaren differentialgeometrischen Grundlagen für die Theorie der Flächen legen. Dann werden wir Kurven betrachten, welche auf einer Fläche liegen. Ab diesem Abschnitt benutzen wir die Einsteinsche Summationskonvention, d.h. bei gleichlautenden oben und unten stehenden Indizes wird automatisch über alle möglichen Werte summiert.

Definition 2.3.1. *Es seien $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\alpha \in [0, 1]$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet. Wir nennen eine Abbildung*

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v) = (\mathbf{X}_1(u, v), \mathbf{X}_2(u, v), \mathbf{X}_3(u, v))^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^{k, \alpha}(\Omega) \quad (2.49)$$

mit $|\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)| \neq 0$ für alle $(u, v) \in \Omega$ eine **reguläre Fläche**. Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{M}(u, v) = \frac{\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)}{|\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)|} \quad \text{für } (u, v) \in \Omega \quad (2.50)$$

die **äußere Normale der regulären Fläche \mathbf{X}** . Wir definieren schließlich drei quadratische Differentialformen³. Die **erste Fundamentalform** lautet

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d\mathbf{X})^2 = \mathbf{X}_u^2 du^2 + 2(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v) du dv + \mathbf{X}_v^2 dv^2 \\ &= E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2 \\ &= g_{ij} du^i du^j. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Aus der Identität von Lagrange folgt $\det(g_{ij}) = EG - F^2 = |\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|^2 > 0$, die Matrix g_{ij} ist invertierbar und wir bezeichnen ihre Inverse mit g^{kl} . Die **zweite Fundamentalform** ist definiert durch

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= -(d\mathbf{X} d\mathbf{M}) = -(\mathbf{X}_u, \mathbf{M}_u) du^2 - ((\mathbf{X}_u, \mathbf{M}_v) + (\mathbf{X}_v, \mathbf{M}_u)) du dv - (\mathbf{X}_v, \mathbf{M}_v) dv^2 \\ &= (\mathbf{X}_{uu}, \mathbf{M}) du^2 + 2(\mathbf{X}_{uv}, \mathbf{M}) du dv + (\mathbf{X}_{vv}, \mathbf{M}) dv^2 \\ &= L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2 \\ &= l_{ij} du^i du^j. \end{aligned} \quad (2.52)$$

³Eine quadratische Differentialform ist nicht zu verwechseln mit einer Differentialform im Sinne von Cartan.

Schließlich erklären wir noch die **dritte Fundamentalform** durch

$$\begin{aligned} ds_M^2 &= (d\mathbf{M})^2 = \mathbf{M}_u^2 du^2 + 2(\mathbf{M}_u, \mathbf{M}_v) du dv + \mathbf{M}_v^2 dv^2 \\ &= P(u, v) du^2 + 2Q(u, v) du dv + R(u, v) dv^2 \\ &= p_{ij} du^i du^j. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Abschließend definieren wir noch das **orientierte Oberflächenelement**

$$e_{ij} = (\mathbf{M}, \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \quad \text{und} \quad e^{ij} = \frac{(\mathbf{M}, \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)}{EG - F^2}, \quad (2.54)$$

welches einige Rechnungen sehr vereinfacht⁴.

Wir werden nun ein Analogon zu Hilfssatz 2.2.4 beweisen, welches uns ermöglicht, Kurven auf Flächen eingehender zu untersuchen.

Hilfssatz 2.3.2. *Es sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche der Klasse $C^{k,\alpha}$. Dann genügen die Ableitungsvektoren und der Normalenvektor dem linearen System partieller Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{ij} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k + l_{ij} \mathbf{M} \\ \mathbf{M}_i &= -l_{ij} g^{jk} \mathbf{X}_k, \end{aligned} \quad (2.55)$$

hierbei sind die Größen

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right) = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \quad (2.56)$$

die Christoffelsymbole.

Beweis: Da unsere Fläche regulär ist, bilden die Vektoren $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$ und \mathbf{M} eine Basis des \mathbb{R}^3 . Wir drücken zunächst die zweiten Ableitungen unserer Fläche als Linearkombination dieser Basis aus

$$\mathbf{X}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k + l_{ij} \mathbf{M} \quad (2.57)$$

und sehen durch Adjungieren von \mathbf{M} , dass der Koeffizient l_{ij} tatsächlich auch mit dem entsprechenden Koeffizienten der zweiten Fundamentalform übereinstimmt. Anschließend adjungieren wir \mathbf{X}_l an diese Gleichung und erhalten mit

$$\Gamma_{ij}^k g_{kl} = (\mathbf{X}_{ij}, \mathbf{X}_l) = \frac{1}{2} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}), \quad (2.58)$$

die angegebene Darstellung für die Christoffelsymbole. Nun stellen wir die Ableitung von \mathbf{M} in Termen unserer Basis dar und erhalten

$$\mathbf{M}_i = \alpha_i^k \mathbf{X}_k + \beta_i \mathbf{M}. \quad (2.59)$$

⁴Man beachte, dass $e_{ij}e^{jk} = -\delta_i^k$ gilt. Dafür gelten aber so häufig verwendete Identitäten wie $e^{ij}a_{jk} = \frac{\det a}{\det g} a^{ij} e_{jk}$ für jede symmetrische und positiv-definite Matrix $a = (a_{ij})$.

Wenn wir hier \mathbf{M} adjungieren, erhalten wir sofort $\beta_i = 0$. Schließlich adjungieren wir \mathbf{X}_j und erhalten

$$-l_{ij} = (\mathbf{M}_i, \mathbf{X}_j) = \alpha_i^k g_{kj}, \quad (2.60)$$

was schließlich die behauptete Darstellung der α_i^k liefert. \square

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen den drei Fundamentalformen untersuchen. Dazu zunächst eine weitere

Definition 2.3.3. *Es sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche und $T_{\mathbf{X}}$ der Tangentialraum, welcher von den Vektoren \mathbf{X}_u und \mathbf{X}_v aufgespannt wird. Wir bezeichnen die lineare Abbildung*

$$\mathcal{G} : T_{\mathbf{X}} \rightarrow T_{\mathbf{X}} \quad (2.61)$$

mit $\mathcal{G} \circ \mathbf{X}_i = -\mathbf{M}_i$ als den **Gestaltoperator** oder die **Weingartenabbildung**. Gemäß Hilfssatz 2.3.2 können wir \mathcal{G} mit der Matrix $(-l_{ij}g^{jk})$ identifizieren. Wir nennen

$$H = \frac{1}{2} \text{Spur}(l_{ij}g^{jk}) = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \quad (2.62)$$

die **mittlere Krümmung von \mathbf{X}** und

$$\bar{K} = \det(l_{ij}g^{jk}) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (2.63)$$

die **Gaußsche Krümmung von \mathbf{X}** . Als letzte Krümmungsgröße sei die **innere Krümmung von ds^2** definiert durch

$$K = -\frac{(g_{11,22} - 2g_{12,12} + g_{22,22}) + 2(\Gamma_{11}^l \Gamma_{22}^k - \Gamma_{12}^l \Gamma_{12}^k)g_{kl}}{2(EG - F^2)^2}. \quad (2.64)$$

Wir werden später die Gleichheit $\bar{K} = K$ zeigen, aber trotz allem sollten wir diese beiden Definitionen zunächst unterscheiden, da K lediglich von den Koeffizienten von ds^2 abhängt.

Hilfssatz 2.3.4. *Es sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche, dann gilt die Gleichung*

$$0 = p_{ij} - 2Hl_{ij} + \bar{K}g_{ij} \quad (2.65)$$

für $i, j = 1, 2$.

Beweis: Wir beachten zunächst

$$p_{im} = (\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_m) = l_{ij}g^{jk}l_{km}, \quad (2.66)$$

weiter ist die Matrix $(l_{ij}g^{jk})$ Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms

$$0 = l_{ij}g^{jn}l_{nm}g^{mk} - 2Hl_{ij}g^{jk} + \bar{K}\delta_i^k. \quad (2.67)$$

Wenn wir diese Gleichung mit g_{kp} multiplizieren und (2.66) beachten, so folgt die Behauptung. \square

Nun können wir Kurven auf Flächen betrachten.

Beispiel 2.3.5. Es sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche der Klasse $C^{k,\alpha}$ mit Parametergebiet Ω . Sei weiter

$$w = w(t) = (u(t), v(t)) : [0, T] \rightarrow \Omega \in C^{k,\alpha}([0, T]) \quad (2.68)$$

eine Kurve im Parameterbereich unserer Fläche mit $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 > 0$ für alle $t \in [0, T]$. Wir erklären nun die Abbildung

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \circ w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^{k,\alpha}, \quad (2.69)$$

welche

$$\dot{\mathbf{Y}}^2 = g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j =: W^2 > 0 \quad (2.70)$$

erfüllt. Erklären wir noch $\mathbf{N}(t) = \mathbf{M}(w(t)) \times \dot{\mathbf{Y}}(t)$ für $t \in [0, T]$, so ist (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) ein Streifen der Klasse $C^{k,\alpha}$. Gemäß Bemerkung 2.2.5 gilt für die Komponenten des Krümmungsvektors unseres Streifens

$$\begin{aligned} \tau_n &= -\mathbf{K}_1 = \frac{(\mathbf{M}, \dot{\mathbf{M}}, \dot{\mathbf{Y}})}{\dot{\mathbf{Y}}^2} = \frac{(\mathbf{M}, \mathbf{M}_i\dot{u}^i, \mathbf{X}_m\dot{u}^m)}{W^2} = -\frac{l_{ij}g^{jk}(\mathbf{M}, \mathbf{X}_k, \mathbf{X}_m)\dot{u}^i\dot{u}^m}{W^2} \\ &= -\frac{\dot{u}^i l_{ij}g^{jk}e_{km}\dot{u}^m}{W^2}, \\ \kappa_n &= \mathbf{K}_2 = -\frac{(\dot{\mathbf{Y}}, \dot{\mathbf{M}})}{\dot{\mathbf{Y}}^2} = -\frac{(\mathbf{X}_i\dot{u}^i, \mathbf{M}_j\dot{u}^j)}{W^2} = \frac{l_{jk}g^{km}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_m)\dot{u}^i\dot{u}^j}{W^2} \\ &= \frac{\dot{u}^i l_{ij}\dot{u}^j}{W^2}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \kappa_g &= -\mathbf{K}_3 = \frac{(\mathbf{M}, \dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}})}{|\dot{\mathbf{Y}}|^3} = \frac{(\mathbf{M}, \mathbf{X}_k\dot{u}^k, \mathbf{X}_i\ddot{u}^i + \mathbf{X}_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)}{W^3} \\ &= \frac{(\mathbf{M}, \mathbf{X}_k\dot{u}^k, (\ddot{u}^l + \Gamma_{ij}^l\dot{u}^i\dot{u}^j)\mathbf{X}_l + l_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\mathbf{M})}{W^3} \\ &= \frac{\dot{u}^k e_{kl}(\ddot{u}^l + \Gamma_{ij}^l\dot{u}^i\dot{u}^j)}{W^3}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Schließlich wollen wir noch einen Zusammenhang zwischen den Krümmungen unserer Fläche gemäß Definition 2.3.3 und dem Krümmungsvektor unseres Streifens ermitteln. Wir beachten Hilfssatz 2.3.4 und berechnen

$$\kappa_n^2 + \tau_n^2 = (\overline{\mathbf{M}}')^2 = \frac{\dot{\mathbf{M}}^2}{\dot{\mathbf{Y}}^2} = \frac{\dot{u}^i p_{ij}\dot{u}^j}{W^2} = 2H \frac{\dot{u}^i l_{ij}\dot{u}^j}{W^2} - \overline{K} \frac{\dot{u}^i g_{ij}\dot{u}^j}{W^2} = 2H\kappa_n - \overline{K} \quad (2.73)$$

bzw.

$$H = \frac{\overline{K} + \kappa_n^2 + \tau_n^2}{2\kappa_n}, \quad (2.74)$$

falls $\kappa_n \neq 0$ richtig ist.

Wegen des Beispiels 2.3.5 ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.3.6. Es sei $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ eine symmetrische, positiv-definite quadratische Differentialform der Klasse $C^{k,\alpha}$ mit Parametergebiet Ω . Sei weiter

$$w = w(t) = (u(t), v(t)) : [0, T] \rightarrow \Omega \in C^{k,\alpha}([0, T]) \quad (2.75)$$

eine Kurve im Parameterbereich Ω mit $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 > 0$ für alle $t \in [0, T]$. Dann heißt die Größe

$$L = L(w, ds^2) = \int_0^T \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt \quad (2.76)$$

die Länge der Kurve w bezüglich der Metrik ds^2 und die Größe

$$\kappa_g = \kappa_g(w, ds^2) = \frac{\dot{u}^k e_{kl} (\ddot{u}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i \dot{u}^j)}{(\dot{u}^p g_{pq} \dot{u}^q)^{3/2}} \quad (2.77)$$

die geodätische Krümmung der Kurve w bezüglich der Metrik ds^2 .

Sehr einfach beweist man den folgenden

Hilfssatz 2.3.7. Es sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche der Klasse $C^{k,\alpha}$ und \mathbf{Y} eine Kurve auf der Fläche \mathbf{X} gemäß Beispiel 2.3.5 mit $\kappa_n \neq 0$. Dann gelten für die zweite Fundamentalform von \mathbf{X} entlang der Kurve \mathbf{Y} die Gleichungen

$$l_{ij} \dot{u}^j = (\kappa_n g_{ij} - \tau_n e_{ij}) \dot{u}^j \quad (2.78)$$

und

$$l_{ij} = \frac{\dot{u}^k \dot{u}^l}{\kappa_n W^2} (-\bar{K} e_{ik} e_{lj} + (\kappa_n g_{ik} - \tau_n e_{ik})(\kappa_n g_{lj} + \tau_n e_{lj})). \quad (2.79)$$

Beweis: Zum Beweis der ersten Formel erkennen wir, dass die Gleichungen (2.71) ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $l_{ij} \dot{u}^j$ sind mit der Determinante $\frac{EG-F^2}{W^2} > 0$. Man prüft leicht nach, dass die in der Behauptung angegebenen Größen die Lösung dieses Gleichungssystems sind.

Zum Beweis der zweiten Identität betrachte man das durch die eine Gleichung (2.62) und die beiden weiteren Gleichungen (2.71) definierte lineare Gleichungssystem für die drei Unbekannten l_{ij} mit der Determinante der Koeffizientenmatrix $W^4 > 0$. Unter Beachtung von (2.74) erkennen wir, dass die in der Behauptung erklärten Größen auch wirklich eine Lösung dieses Gleichungssystems sind. \square

Kapitel 3

Weiterführende Differentialgeometrie

Wir setzen hier die Überlegungen des vorherigen Kapitels fort. Insbesondere setzen wir hier die Theorie der Flächen fort. Es wird nicht ausbleiben, wohlbekannte Aussagen - etwa die Integrationsbedingungen oder den Satz von Gauß und Bonnet - neu darzustellen. Zwei Verallgemeinerungen des Fundamentalsatzes der Flächentheorie stellen wir ebenfalls bereit. Da es bereits Arbeiten gibt [Sch90], welche die Integralformeln von Minkowski für Flächen mit Rand verwenden, stellen wir auch diese bereit, ohne sie jedoch weiter zu benutzen. Anschließend betrachten wir sogenannte Asymptotenlinien bei hyperbolisch gekrümmten Flächen als Vorarbeit für spätere Aussagen.

3.1 Flächen

Zunächst führen wir nun auch in eine positiv-definite quadratische Differentialform eine besondere Parametrisierung ein, welche ebenso wie die Bogenlängenparametrisierung wesentliche Dinge vereinfacht, nämlich die sogenannte isotherme Parametrisierung.

Satz 3.1.1. *Es seien $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach-zusammenhängendes $C^{k,\alpha}$ -Gebiet. Weiter sei in $\bar{\Omega}$ eine Riemannsche Metrik*

$$ds^2 = A(u, v) du^2 + 2B(u, v) du dv + C(u, v) dv^2 = a_{ij} du^i du^j \quad (3.1)$$

mit $AC - B^2 > 0$ in ganz $\bar{\Omega}$ und $a_{ij} \in C^{k-1,\alpha}(\bar{\Omega})$ erklärt. Dann gibt es einen Diffeomorphismus

$$w = w(z) = w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) : \bar{B} \rightarrow \bar{\Omega} \in C^{k,\alpha}(\bar{B}), \quad (3.2)$$

welcher ds^2 in die isotherme Form

$$ds^2 = \mathcal{A}(x, y)(dx^2 + dy^2) \quad (3.3)$$

mit einer Funktion $A(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in \bar{B}$ aus der Regularitätsklasse $C^{k-1, \alpha}(\bar{B})$ überführt.

Beweis: Dieser Satz wurde mehrfach bewiesen. Beispielsweise ist der Fall $m = 2$ dem Buch [Sa05], Kapitel XII, §§7,8, bewiesen mit einer Kontinuitätsmethode, zu entnehmen. Der allgemeine Fall, hier mit einer Variationsmethode bewiesen, ist etwa dem Artikel [HM] zu entnehmen. \square

Satz 3.1.2. *Es seien $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet. Weiter sei in Ω eine Riemannsche Metrik*

$$ds^2 = A(u, v) du^2 + 2B(u, v) du dv + C(u, v) dv^2 = a_{ij} du^i dv^j \quad (3.4)$$

mit $AC - B^2 > 0$ in ganz Ω und $a_{ij} \in C^{k-1, \alpha}(\Omega)$ erklärt. Dann gibt es einen Diffeomorphismus

$$w = w(z) = w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) : B \rightarrow \Omega \in C^{k, \alpha}(B), \quad (3.5)$$

welcher ds^2 in die isotherme Form

$$ds^2 = A(x, y)(dx^2 + dy^2) \quad (3.6)$$

mit einer Funktion $A(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in B$ aus der Regularitätsklasse $C^{k-1, \alpha}(B)$ überführt.

Hilfssatz 3.1.3. *Es sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche der Klasse $C^{k, \alpha}$ mit $k \geq 3$. Dann gilt die Identität*

$$\bar{K} = K. \quad (3.7)$$

Beweis: Wir berechnen mit Hilfe des Multiplikationssatzes für Determinanten und der Formel $\Gamma_{ij}^l g_{lk} = (\mathbf{X}_{ij}, \mathbf{X}_k)$

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{1}{EG - F^2} ((\mathbf{X}_{uu}, \mathbf{M})(\mathbf{X}_{vv}, \mathbf{M}) - (\mathbf{X}_{uv}, \mathbf{M})^2) \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} ((\mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v)(\mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v) - (\mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v)^2) \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left(\begin{vmatrix} (\mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_{22}) & (\mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_1) & (\mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_2) \\ (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{22}) & (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) & (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \\ (\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{22}) & (\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1) & (\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (\mathbf{X}_{12}, \mathbf{X}_{12}) & (\mathbf{X}_{12}, \mathbf{X}_1) & (\mathbf{X}_{12}, \mathbf{X}_2) \\ (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{12}) & (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) & (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \\ (\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{12}) & (\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1) & (\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2) \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left(\begin{vmatrix} (\mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_{22}) - \mathbf{X}_{12}^2 & \Gamma_{11}^i g_{i1} & \Gamma_{11}^i g_{i2} \\ \Gamma_{22}^i g_{i1} & g_{11} & g_{12} \\ \Gamma_{22}^i g_{i2} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \Gamma_{12}^i g_{i1} & \Gamma_{12}^i g_{i2} \\ \Gamma_{12}^i g_{i1} & g_{11} & g_{12} \\ \Gamma_{12}^i g_{i2} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

Mit dem Entwicklungssatz für Determinanten und der Formel

$$(\mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_{22}) - \mathbf{X}_{12}^2 = -\frac{1}{2}(g_{11,22} - 2g_{12,12} + g_{22,22}) \quad (3.8)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\bar{K} &= -\frac{g_{11,22} - 2g_{12,12} + g_{22,22}}{2(EG - F^2)} \\
&\quad - \frac{1}{(EG - F^2)^2} \Gamma_{11}^i \Gamma_{22}^j (g_{22}g_{i1}g_{j1} + g_{11}g_{i2}g_{j2} - g_{12}g_{i1}g_{j2} - g_{12}g_{i2}g_{j1}) \\
&\quad + \frac{1}{(EG - F^2)^2} \Gamma_{11}^i \Gamma_{12}^j (g_{22}g_{i1}g_{j1} + g_{11}g_{i2}g_{j2} - g_{12}g_{i1}g_{j2} - g_{12}g_{i2}g_{j1}) \\
&= -\frac{(g_{11,22} - 2g_{12,12} + g_{22,22}) + 2(\Gamma_{11}^i \Gamma_{22}^j - \Gamma_{11}^i \Gamma_{12}^j)g_{ij}}{2(EG - F^2)} \\
&= K.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Formel

$$\begin{aligned}
g_{22}g_{i1}g_{j1} + g_{11}g_{i2}g_{j2} - g_{12}g_{i1}g_{j2} - g_{12}g_{i2}g_{j1} &= g_{i1}(g_{22}g_{j1} - g_{12}g_{j2}) + g_{i2}(g_{11}g_{j2} - g_{12}g_{j1}) \\
&= g_{ij}(EG - F^2)
\end{aligned}$$

benutzt. □

Beispiel 3.1.4. Es sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche der Klasse $C^{k,\alpha}$ mit $k \geq 3$, außerdem schreibt sich die erste Fundamentalform

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2) \quad (3.9)$$

in der isothermen Form. Dann gilt

$$K = -\frac{1}{2E} \Delta \log E. \quad (3.10)$$

Wir beachten Hilfssatz 3.1.3 und die folgende Darstellung der Christoffelsymbole

$$\begin{aligned}
\frac{E_u}{2E} &= \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 \\
\frac{E_v}{2E} &= \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2.
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun ein wesentliches Resultat, welches uns die Einsicht erlaubt, dass die unten notierte Formel keine weiteren notwendigen Bedingungen an ein später zu formulierendes Problem stellt.

Satz 3.1.5. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.1.1 mit $k \geq 3$ erfüllt. Dann gilt für die innere Krümmung K der quadratischen Differentialform ds^2 und die geodätische Krümmung $\kappa_g = \kappa_g(\partial\Omega, ds^2)$ der Randkurve $\partial\Omega$ bezüglich ds^2 gemäß Definition 2.3.6 der Satz von Gauß-Bonnet*

$$\iint_{\Omega} K d\sigma_{\Omega} + \int_{\partial\Omega} \kappa_g ds_{\partial\Omega} = 2\pi. \quad (3.11)$$

Hierbei bezeichnet $d\sigma_{\Omega}$ das Oberflächenelement, $ds_{\partial\Omega}$ das Wegelement auf $\partial\Omega$.

Beweis: Mit Hilfe von Satz 3.1.1 überführen wir die erste Fundamentalform in die isotherme Form. Das heißt, es gilt

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2) \quad (3.12)$$

mit einer Funktion $E > 0$ für alle $(u, v) \in \bar{B}$ und $E \in C^{k-1, \alpha}(\bar{B})$. Weiter schreibt sich die geodätische Krümmung der Randkurve als Parameterinvariante eines Streifens gemäß Beispiel 2.3.5 Formel (2.72) mit der Parametrisierung von ∂B durch $(u(t), v(t)) = (\cos t, \sin t)$:

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \frac{\dot{u}^k e_{kl} (\ddot{u}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i \dot{u}^j)}{(\dot{u}^p g_{pq} \dot{u}^q)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\dot{u} \left(\ddot{v} + \frac{-E_v \dot{u}^2 + 2E_u \dot{u} \dot{v} + E_v \dot{v}^2}{2E} \right) - \dot{v} \left(\ddot{u} + \frac{E_u \dot{u}^2 + 2E_v \dot{u} \dot{v} - E_v \dot{v}^2}{2E} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(1 + \frac{E_u u + E_v v}{2E} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \log E \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wir erhalten somit

$$\kappa_g ds_{\partial B} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \log E \right) dt \quad (3.14)$$

und nach Beispiel 3.1.4

$$K d\sigma_B = -\frac{1}{2} \Delta \log E du dv. \quad (3.15)$$

Wir wenden nun den Gauß'schen Integralsatz auf das Vektorfeld $f = \frac{1}{2} \nabla \log E$ an und erhalten

$$\begin{aligned} 2\pi &= \iint_B -\operatorname{div} f du dv + \int_{\partial B} (f, \nu) dt + \int_{\partial B} dt \\ &= \iint_B K d\sigma_B + \int \kappa_g ds_{\partial B} \\ &= \iint_{\Omega} K d\sigma_{\Omega} + \int_{\partial \Omega} \kappa_g ds_{\partial \Omega}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da alle auftretenden Integrale parameterinvariant sind. \square

Die Gültigkeit dieses Satzes folgt also nicht aus der Existenz einer eventuellen Realisierung der Metrik ds^2 , sondern allein aus den innergeometrischen Zusammenhängen.

Hilfssatz 3.1.6. *Sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche der Klasse $C^{k, \alpha}$ mit $k \geq 3$. Dann gelten die Codazzi-Mainardi Gleichungen*

$$\begin{aligned} L_v - M_u &= \Gamma_{12}^1 L + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) M - \Gamma_{11}^2 N, \\ M_v - N_u &= \Gamma_{22}^1 L + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) M - \Gamma_{12}^2 N \end{aligned}$$

und das Theorema Egregium

$$\bar{K} = K.$$

In ihrer Gesamtheit wollen wir die Integrationsbedingungen auch als Gauß-Codazzi-Mainardi Gleichungen bezeichnen.

Beweis:

- i) Wir betrachten das folgende durch Hilfssatz 2.3.2 nahegelegte System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_i &= \mathbf{Y}_i, \\ \mathbf{Y}_{i,j} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{Y}_i + l_{ij} \mathbf{M}, \\ \mathbf{M}_i &= -l_{ij} g^{jk} \mathbf{Y}_k,\end{aligned}\tag{3.17}$$

differenzieren nun jede der Gleichungen und wenden den Satz von Schwarz an.

- ii) Es gilt

$$0 = \mathbf{X}_{ij} - \mathbf{X}_{ji} = \mathbf{Y}_{i,j} - \mathbf{Y}_{j,i} = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \mathbf{Y}_k + (l_{ij} - l_{ji}) \mathbf{M}.\tag{3.18}$$

Diese Gleichung liefert keine neuen Bedingungen, da sowohl die Christoffelsymbole in den unteren Indizes als auch die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform symmetrisch sind. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{Y}_{i,jk} - \mathbf{Y}_{i,kj} \\ &= (\Gamma_{ij,k}^l - \Gamma_{ik,j}^l) \mathbf{Y}_l + \Gamma_{ij}^l \mathbf{Y}_{lk} - \Gamma_{ik}^l \mathbf{Y}_{lj} + (l_{ij,k} - l_{ik,j}) \mathbf{M} + l_{ij} \mathbf{M}_k - l_{ik} \mathbf{M}_j \\ &= (\Gamma_{ij,k}^l - \Gamma_{ik,j}^l + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l - (l_{ij} l_{km} - l_{ik} l_{jm}) g^{ml}) \mathbf{Y}_l \\ &\quad + (l_{ij,k} - l_{ik,j} + \Gamma_{ij}^m l_{mk} - \Gamma_{ik}^m l_{mj}) \mathbf{M}.\end{aligned}$$

Da $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{M}$ eine Basis bilden, folgen die Gleichungen

$$l_{ij,k} - l_{ik,j} = \Gamma_{ik}^m l_{mj} - \Gamma_{ij}^m l_{mk}\tag{3.19}$$

und

$$\begin{aligned}l_{ij} l_{km} - l_{ik} l_{jm} &= g_{ml} (\Gamma_{ij,k}^l - \Gamma_{ik,j}^l + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l) \\ &= (\Gamma_{ij}^l g_{lm})_{,k} - \Gamma_{ij}^l (g_{lm,k} - \Gamma_{lk}^p g_{pm}) \\ &\quad - (\Gamma_{ik}^l g_{lm})_{,j} + \Gamma_{ik}^l (g_{lm,j} - \Gamma_{lj}^p g_{pm}) \\ &= \frac{1}{2} (g_{im,jk} + g_{jm,ik} - g_{ij,mk} - g_{im,kj} - g_{km,ij} + g_{ik,mj}) \\ &\quad - (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{mj}^p - \Gamma_{ij}^l \Gamma_{mk}^p) g_{pl} \\ &= \frac{1}{2} (g_{jm,ik} - g_{ij,mk} - g_{km,ij} + g_{ik,mj}) - (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{mj}^p - \Gamma_{ij}^l \Gamma_{mk}^p) g_{pl}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Unter Beachtung von $g_{,m}^{kl} = -\Gamma_{mp}^k g^{pl} - \Gamma_{mp}^l g^{pk}$ erhalten wir aus der dritten Bedingung

$$\begin{aligned}0 &= -\mathbf{M}_{ij} + \mathbf{M}_{ji} \\ &= ((l_{ik,j} - l_{jk,i}) g^{km} + l_{ik} g_{,j}^{km} - l_{jk} g_{,i}^{km} + l_{ik} g^{kn} \Gamma_{nj}^m - l_{jk} g^{kn} \Gamma_{ni}^m) \mathbf{Y}_m \\ &\quad (l_{ik} g^{km} l_{mj} - l_{jk} g^{km} l_{mi}) \mathbf{M}.\end{aligned}$$

Das hat wiederum die Gleichung

$$l_{ik}g^{km}l_{mj} - l_{jk}g^{km}l_{mi} = p_{ij} - p_{ji} = 0 \quad (3.21)$$

zur Folge, welche keine zusätzlichen Informationen liefert, da die Koeffizienten der dritten Fundamentalform symmetrisch sind. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} l_{ik,j} - l_{jk,i} &= l_{jp}(g_{,i}^{pm} + g^{pn}\Gamma_{ni}^m)g_{mk} - l_{ip}(g_{,j}^{km} + g^{pn}\Gamma_{nj}^m)g_{mk} \\ &= l_{ip}g^{pn}(g_{nk,j} - \Gamma_{nj}^m g_{mk}) - l_{jp}g^{pn}(g_{nk,i} - \Gamma_{ni}^m g_{mk}) \\ &= \Gamma_{kj}^p l_{pi} - \Gamma_{ki}^p l_{pj}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Bei geeigneter Umbenennung der Summationsindizes ist aber gerade das die Gleichung (3.19).

- iii) Wir betrachten zunächst die acht Gleichungen (3.19). Diese sind antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes j und k , daher handelt es sich nur um zwei unabhängige Gleichungen, nämlich die Codazzi-Mainardi Gleichungen. Man setze dazu $i = 1 = j$ und $k = 2$ bzw. $i = 2 = k$ und $j = 1$. Nun betrachten wir die sechzehn Gleichungen (3.20). Sowohl die linke als auch die rechte Seite dieser Gleichungen sind antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes i und m bzw. j und k . Sie reduzieren sich also auf eine wesentliche Gleichung, etwa mit $i = 1 = j$ und $k = 2 = m$ und wir erhalten das Theorema Egregium. □

Beispiel 3.1.7. Es sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche der Klasse $C^{k,\alpha}$ mit $k \geq 3$. Wegen Hilfssatz 3.1.6 gelten nun die Gauß-Codazzi-Mainardi Gleichungen, welche wir in etwas anderer Form schreiben werden. Wir beachten zunächst

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \log \sqrt{EG - F^2} = \Gamma_{ik}^k, \quad (3.23)$$

was wir durch eine elementare Rechnung leicht bestätigen können. Wir definieren nun $\lambda_{ij} = \frac{l_{ij}}{\sqrt{EG - F^2}}$, bzw. $\lambda = \lambda_{11}$, $\mu = \lambda_{12}$ und $\nu = \lambda_{22}$ und die Codazzi-Mainardi Gleichungen transformieren sich zu

$$\lambda_{ik,j} - \lambda_{jk,i} = \Gamma_{kj}^p \lambda_{pi} - \Gamma_{ki}^p \lambda_{pj} - \Gamma_{jp}^p \lambda_{ik} + \Gamma_{ip}^p \lambda_{jk} \quad (3.24)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \lambda_v - \mu_u &= -\Gamma_{22}^2 \lambda + 2\Gamma_{12}^2 \mu - \Gamma_{11}^2 \nu, \\ \nu_u - \mu_v &= -\Gamma_{22}^1 \lambda + 2\Gamma_{12}^1 \mu - \Gamma_{11}^1 \nu. \end{aligned}$$

Außerdem lautet das Theorema Egregium $K = \lambda\nu - \mu^2$. Liegt nun $d\sigma^2$ in isothermer Form vor, so lauten die Gleichungen neben $\sqrt{K} = \lambda = \nu$, $\mu = 0$ noch

$$K_i + 2(\Gamma_{11}^i + \Gamma_{22}^i)K = 0. \quad (3.25)$$

Liegt andererseits $d\sigma^2$ in charakteristischer Form vor, so lauten die Gleichungen neben $\pm\sqrt{|K|} = \mu$, $\lambda = 0 = \nu$ noch

$$K_u + 4\Gamma_{12}^2 K = 0 \quad \text{und} \quad K_v + 4\Gamma_{12}^1 K = 0. \quad (3.26)$$

Wir sind nun im Stande, unser erstes Existenzresultat zu beweisen.

Satz 3.1.8. (Fundamentalsatz der Flächentheorie mit Randbedingung)

Voraussetzungen:

- i) Sei Ω ein einfach-zusammenhängendes beschränktes Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega$ in der Regularitätsklasse $C^{k,\alpha}$ mit $k \geq 3$ enthalten ist.
- ii) Es seien die quadratischen Differentialformen

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (3.27)$$

und

$$d\sigma^2 = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = l_{ij} du^i du^j \quad (3.28)$$

mit Koeffizienten $g_{ij} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \in C^{k-1,\alpha}(\bar{\Omega})$ und $l_{ij} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \in C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega})$ mit $k \geq 3$ gegeben.

- iii) Die Form ds^2 sei positiv-definit in $\bar{\Omega}$, d.h. es gelten in $\bar{\Omega}$ die Ungleichungen $EG - F^2 > 0$ und $E > 0$. Außerdem gelten weiter in Ω die Gleichungen

$$\begin{aligned} L_v - M_u &= \Gamma_{12}^1 L + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)M - \Gamma_{11}^2 N, \\ M_v - N_u &= \Gamma_{22}^1 L + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1)M - \Gamma_{12}^2 N \end{aligned}$$

und

$$LN - M^2 = K(EG - F^2),$$

wobei K die innere Krümmung von ds^2 bezeichnet.

- iv) Auf dem Rand $\partial\Omega$ gelte

$$\dot{u}^i l_{ij} = \dot{u}^i (\bar{\kappa}_n g_{ij} + \bar{\tau}_n e_{ij}) \quad (3.29)$$

mit gegebenen Funktionen $\bar{\kappa}_n, \bar{\tau}_n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^{k-2,\alpha}(\partial\Omega)$. Dabei ist u^i eine hinreichend reguläre Parametrisierung von $\partial\Omega$.

Behauptung: Es gibt dann eine bis auf Drehungen und Translationen eindeutig bestimmte reguläre Fläche \mathbf{X} der Klasse $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ mit der Normalen \mathbf{M} , für welche in Ω die Gleichungen

$$ds^2 = (d\mathbf{X})^2 \quad \text{und} \quad d\sigma^2 = -(d\mathbf{X}, d\mathbf{M}) \quad (3.30)$$

gelten.

Außerdem wird dem Randstreifen $(\mathbf{X}|_{\partial\Omega}, (\mathbf{M} \times \dot{\mathbf{X}})|_{\partial\Omega})^1$ der Krümmungsvektor

$$\mathbf{K} = (-\bar{\tau}_n, \bar{\kappa}_n, -\kappa_g)^T \in C^{k-2, \alpha}(\partial\Omega) \quad (3.31)$$

mit der geodätischen Krümmung $\kappa_g = \kappa_g(\partial\Omega, ds^2)$ der Randkurve $\partial\Omega$ bezüglich ds^2 zugeordnet.

Beweis:

i) Zunächst betrachten wir das lineare System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{,i} &= \mathbf{Y}_i \\ \mathbf{Y}_{i,j} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{Y}_k + l_{ij} \mathbf{M} \\ \mathbf{M}_{,i} &= -l_{ij} g^{jk} \mathbf{Y}_k, \end{aligned} \quad (3.32)$$

hierbei bezeichnet das Komma eine Differentiation nach der folgenden Variablen. Nach Hilfssatz 3.1.6 hat es als notwendige Integrationsbedingungen die Gauß-Codazzi-Mainardi Gleichungen gemäß Voraussetzung iii). Zu den Anfangsdaten $(\mathbf{X}^0, \mathbf{Y}_1^0, \mathbf{Y}_2^0, \mathbf{M}^0)$ mit $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{R}^3$ beliebig, $(\mathbf{Y}_i^0, \mathbf{Y}_j^0) = g_{ij}(w^0)$ und $\mathbf{M}^0 = \frac{\mathbf{Y}_1^0 \times \mathbf{Y}_2^0}{|\mathbf{Y}_1^0 \times \mathbf{Y}_2^0|}$ lösen wir das System (3.32) mit Hilfe von Satz 2.1.6 eindeutig, wir bezeichnen die Lösung mit $(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{M})$.

ii) Wir wollen nun zeigen, dass unsere so definierten Größen $(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{M})$ auch die vorgegebene erste und zweite Fundamentalform annehmen. Wir betrachten dazu die Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= (\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) - g_{ij} \\ \eta_i &= (\mathbf{X}_i, \mathbf{M}) \\ \zeta &= (\mathbf{M}, \mathbf{M}) - 1, \end{aligned} \quad (3.33)$$

welche dem System

$$\begin{aligned} \xi_{ij,k} &= \Gamma_{ik}^l \xi_{lj} + \Gamma_{jk}^l \xi_{li} + l_{ik} \eta_j + l_{jk} \eta_i \\ \eta_{i,k} &= \Gamma_{ik}^l \eta_l + l_{ik} \zeta - l_{km} g^{ml} \xi_{li} \\ \zeta_{,k} &= -2l_{km} g^{ml} \eta_l \end{aligned} \quad (3.34)$$

zu den Anfangsdaten $\xi_{ij}(w^0) = 0$, $\eta_i(w^0) = 0$ und $\zeta(w^0) = 0$ genügt. Nach Hilfssatz 2.1.5 ist die Nulllösung die einzige Lösung, also folgt $(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = g_{ij}$, $(\mathbf{X}_i, \mathbf{M}) = 0$ und $(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = 1$. Außerdem erlebt die Größe $e_{12} = (\mathbf{M}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ keinen Vorzeichenwechsel, da die Größe $EG - F^2 > 0$ ist. Damit ist \mathbf{M} die äußere Einheitsnormale an die Fläche und wir erhalten aus der Differentialgleichung $l_{ij} = -(\mathbf{X}_i, \mathbf{M}_j) = (\mathbf{X}_{ij}, \mathbf{M})$. Also gelten die Gleichungen

$$ds^2 = (d\mathbf{X})^2 \quad \text{und} \quad d\sigma^2 = -(d\mathbf{X}, d\mathbf{M}). \quad (3.35)$$

¹Hierbei ist $(\dot{\mathbf{X}})|_{\partial\Omega}$ im folgenden Sinne zu verstehen: Sei $w = w(t) : [0, T] \rightarrow \partial\Omega \in C^{k, \alpha}([0, T])$ bijektiv. Dann ist $(\dot{\mathbf{X}})|_{\partial\Omega} = \frac{d}{dt} \mathbf{X}(w(t))$.

iii) Wir untersuchen jetzt die Regularität dieser Fläche und das Randverhalten. Da die Größen Γ_{ij}^k und l_{ij} auf ganz $\bar{\Omega}$ ($k-2, \alpha$)-mal stetig differenzierbar sind, folgt aus der Differentialgleichung (3.32) und der Regularitätstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen $\mathbf{X}_i, \mathbf{M} \in C^{k-1, \alpha}(\bar{\Omega})$. Das hat schließlich wegen $\mathbf{X}_{i,j} = \mathbf{X}_{j,i}$ die Eigenschaft $\mathbf{X} \in C^k(\bar{\Omega})$ zur Folge. Sei $w = (u, v)$ eine reguläre Parametrisierung des Randes $\partial\Omega$. Es seien nun $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \circ w$ und $\mathbf{N} = \mathbf{M} \times \dot{\mathbf{Y}}$ erklärt. Dann ist (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) ein Streifen der Klasse $C^{k, \alpha}$ mit den gemäß Beispiel 2.3.5 gegebenen Größen des Krümmungsvektors

$$\begin{aligned}\tau_n &= -\frac{\dot{u}^i l_{ij} g^{jk} e_{km} \dot{u}^m}{W^2} = -\frac{\dot{u}^i (\bar{\kappa}_n g_{ij} + \bar{\tau}_n e_{ij}) g^{jk} e_{km} \dot{u}^m}{W^2} = \frac{\bar{\tau}_n \dot{u}^i g_{ij} \dot{u}^j}{W^2} = \bar{\tau}_n, \\ \kappa_n &= \frac{\dot{u}^i l_{ij} \dot{u}^j}{W^2} = \frac{\dot{u}^i (\bar{\kappa}_n g_{ij} + \bar{\tau}_n e_{ij}) \dot{u}^j}{W^2} = \bar{\kappa}_n\end{aligned}$$

mit $W^2 = \dot{\mathbf{Y}}^2 = \dot{u}^i g_{ij} \dot{u}^j$.

iv) Schließlich ist die Eindeutigkeit zu klären. Sei also $\bar{\mathbf{X}}$ eine weitere Fläche mit $ds^2 = (d\bar{\mathbf{X}})^2$ der äußeren Normalen $\bar{\mathbf{M}}$ und $d\sigma^2 = -(d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{M}})$. Dann gibt es eine eigentliche Bewegung des Raumes \mathbf{O} mit $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{O}(\bar{\mathbf{X}})$, $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{O}(\bar{\mathbf{M}})$, so dass wir

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(w^0) &= \tilde{\mathbf{X}}(w^0) \\ \mathbf{X}_i(w^0) &= \tilde{\mathbf{X}}_i(w^0) \\ \mathbf{M}(w^0) &= \tilde{\mathbf{M}}(w^0)\end{aligned}\tag{3.36}$$

erhalten. Damit genügen aber $(\mathbf{X}, \mathbf{X}_i, \mathbf{M})$ und $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{X}}_i, \tilde{\mathbf{M}})$ demselben System partieller Differentialgleichungen der Form (3.32) zu denselben Anfangswerten und stimmen damit wegen Hilfssatz 2.1.5 überein.

□

3.2 Die Integralformeln Minkowskis

Wir wollen in diesem Abschnitt die bekannten Integralformeln von Minkowski auf Flächen mit Rand übertragen. Dabei treten insbesondere unsere Invarianten κ_n und τ_n auf. Ist nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalgebiet und Parameterbereich einer regulären Fläche, dann kennen wir bereits eine Integralformel mit Rand, nämlich den Satz von Gauß-Bonet

$$\iint_{\Omega} K d\sigma_{\Omega} - 2\pi = - \int_{\partial\Omega} \kappa_g ds_{\partial\Omega}.\tag{3.37}$$

Wir wollen nun die bekannten Formel von Minkowski,

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} d\sigma_{\Omega} + \iint_{\Omega} H(\mathbf{M}, \mathbf{X}) d\sigma_{\Omega} &= 0, \\ \iint_{\Omega} H d\sigma_{\Omega} + \iint_{\Omega} K(\mathbf{M}, \mathbf{X}) d\sigma_{\Omega} &= 0,\end{aligned}$$

welche für geschlossene Flächen unter geeigneten Voraussetzungen an H und K gelten auch für den nicht geschlossenen Fall herleiten. Dabei werden wir auch Randintegrale erhalten. Zunächst ermitteln wir je zwei Differentialgleichungen für den Ortsvektor unserer Fläche, als auch für die Normale.

Hilfssatz 3.2.1. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v) = \mathbf{X}(u^1, u^2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^3(\Omega)$ eine reguläre Fläche. Dann genügt \mathbf{X} in Ω der Differentialgleichung*

$$D_i \left(\sqrt{EG - F^2} g^{ij} D_j \mathbf{X} \right) = 2H \mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v. \quad (3.38)$$

Gilt darüber hinaus auch noch $K \neq 0$, so existiert l^{ij} , und \mathbf{X} genügt in Ω der Differentialgleichung

$$D_i \left(K \sqrt{EG - F^2} l^{ij} D_j \mathbf{X} \right) = 2K \mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v. \quad (3.39)$$

Beweis: Wir beachten zunächst

$$\mathbf{M} \wedge \mathbf{X}_i = e_{ij} g^{jk} \mathbf{X}_k \quad (3.40)$$

und

$$\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}_i = -K e_{ij} l^{jk} \mathbf{X}_k. \quad (3.41)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{M} die kanonische Einheitsnormale von \mathbf{X} . Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} 2H \mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v &= l_{ij} g^{ij} e_{12} \mathbf{M} = l_{1j} g^{j1} \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 - l_{2j} g^{j2} \mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{X}_1 \\ &= (\mathbf{M}_2 \wedge \mathbf{X}_1) - (\mathbf{M}_1 \wedge \mathbf{X}_2) = (\mathbf{M} \wedge \mathbf{X}_1)_2 - (\mathbf{M} \wedge \mathbf{X}_2)_1 \\ &= D_i \left(\sqrt{EG - F^2} g^{ij} D_j \mathbf{X} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ebenso erhalten wir

$$2K \mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v = 2\mathbf{M}_u \wedge \mathbf{M}_v = (\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}_2)_1 - (\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}_1)_2 = D_i \left(K \sqrt{EG - F^2} l^{ij} D_j \mathbf{X} \right). \quad (3.43)$$

□

Hilfssatz 3.2.2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v) = \mathbf{X}(u^1, u^2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^3(\Omega)$ eine reguläre Fläche mit $K \neq 0$. Dann gelten für die kanonische Einheitsnormale \mathbf{M} von \mathbf{X} in Ω die beiden Differentialgleichungen*

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} D_i \left(\sqrt{EG - F^2} l^{ij} D_j \mathbf{M} \right) = -2H \mathbf{M} \quad (3.44)$$

und

$$\frac{1}{K \sqrt{EG - F^2}} D_i \left(K \sqrt{EG - F^2} p^{ij} D_j \mathbf{M} \right) = -2\mathbf{M}. \quad (3.45)$$

Hierbei bezeichnet p^{ij} die Inverse der dritten Fundamentalform.

Beweis: Man benutze Hilfssatz 3.2.1 verbunden mit den Weingartenschen Ableitungsgleichungen für die Normale und $\sqrt{EG - F^2}\mathbf{M} = \mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v$. \square

Wir benutzen nun die Formeln aus Hilfssatz 3.2.1, um unsere verallgemeinerten Integralformeln herzuleiten.

Hilfssatz 3.2.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalgebiet und $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v) = \mathbf{X}(u^1, u^2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^3(\Omega)$ eine reguläre Fläche mit der kanonischen Einheitsnormalen \mathbf{M} . Dann gilt die Integralgleichung*

$$\iint_{\Omega} d\sigma_{\Omega} + \iint_{\Omega} H(\mathbf{M}, \mathbf{X}) d\sigma_{\Omega} = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{M}, \mathbf{X}, d\mathbf{X}). \quad (3.46)$$

Beweis: Wir benutzen die erste Differentialgleichung aus Hilfssatz 3.2.1 und multiplizieren den Ortsvektor \mathbf{X} an diese Gleichung. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_i \left(\sqrt{EG - F^2} g^{ij} (D_j \mathbf{X}, \mathbf{X}) \right) &= \frac{1}{2} D_i \left(\sqrt{EG - F^2} g^{ij} D_j \mathbf{X} \right) \mathbf{X} + \frac{1}{2} \sqrt{EG - F^2} g^{ij} g_{ji} \\ &= H(\mathbf{M}, \mathbf{X}) \sqrt{EG - F^2} + \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Außerdem beachten wir, dass

$$\sqrt{EG - F^2} n_i = e_{ij} \dot{u}^j = -\dot{u}^j e_{ji} \quad (3.47)$$

mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor n_i und dem positiv orientierten Einheitstangentenvektor \dot{u}^i an $\partial\Omega$ gilt. Wenn wir nun unter Beachtung des Gaußschen Integralsatzes integrieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} d\sigma_{\Omega} + \iint_{\Omega} H(\mathbf{M}, \mathbf{X}) d\sigma_{\Omega} &= \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \sqrt{EG - F^2} g^{ij} (D_j \mathbf{X}, \mathbf{X}) n_i dt \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \dot{u}^k e_{ki} g^{ij} (D_j \mathbf{X}, \mathbf{X}) dt \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \dot{u}^k (\mathbf{M} \wedge \mathbf{X}_k, \mathbf{X}) dt \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{M}, \mathbf{X}, d\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Hierbei bezeichnet wie üblich $\mathbf{X}_k = D_k \mathbf{X}$ die Ableitung nach der k -ten Variablen. Weiter haben wir noch $\mathbf{M} \wedge \mathbf{X}_k = e_{ki} g^{ij} \mathbf{X}_j$ benutzt. \square

Hilfssatz 3.2.4. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalgebiet und $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v) = \mathbf{X}(u^1, u^2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^3(\Omega)$ eine reguläre Fläche mit $K \neq 0$ und der kanonischen Einheitsnormalen \mathbf{M} . Dann gilt die Integralgleichung*

$$\iint_{\Omega} H d\sigma_{\Omega} + \iint_{\Omega} K(\mathbf{M}, \mathbf{X}) d\sigma_{\Omega} = -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{M}, \mathbf{X}, d\mathbf{M}). \quad (3.49)$$

Beweis: Wir benutzen jetzt die zweite Differentialgleichung aus Hilfssatz 3.2.1 und multiplizieren wieder den Ortsvektor \mathbf{X} an diese Gleichung. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_i \left(K \sqrt{EG - F^2} l^{ij} (D_j \mathbf{X}, \mathbf{X}) \right) &= \frac{1}{2} D_i \left(K \sqrt{EG - F^2} l^{ij} D_j \mathbf{X} \right) \mathbf{X} + \frac{1}{2} K \sqrt{EG - F^2} l^{ij} g_{ji} \\ &= K(\mathbf{M}, \mathbf{X}) \sqrt{EG - F^2} + H \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Wieder integrieren wir unter Beachtung des Beweises von Hilfssatz 3.2.1 mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} H d\sigma_{\Omega} + \iint_{\Omega} K(\mathbf{M}, \mathbf{X}) d\sigma_{\Omega} &= \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} K \sqrt{EG - F^2} l^{ij} (D_j \mathbf{X}, \mathbf{X}) n_i dt \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} K \dot{u}^k e_{ki} l^{ij} (D_j \mathbf{X}, \mathbf{X}) dt \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{M}, \mathbf{M}_k \dot{u}^k, \mathbf{X}) dt \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$= -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{M}, \mathbf{X}, d\mathbf{M}). \quad (3.51)$$

Hierbei haben wir auch noch $\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}_k = -K e_{ki} l^{ij} \mathbf{X}_j$ beachtet. \square

Hilfssatz 3.2.5. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalgebiet und $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v) = \mathbf{X}(u^1, u^2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^3(\Omega)$ eine reguläre Fläche mit der kanonischen Einheitsnormalen \mathbf{M} . Dann gilt die Integralgleichung*

$$\iint_{\Omega} H \mathbf{M} d\sigma_{\Omega} = -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{M} \wedge d\mathbf{X}. \quad (3.52)$$

Gilt darüber hinaus auch noch $K \neq 0$, so folgt

$$\iint_{\Omega} K \mathbf{M} d\sigma_{\Omega} = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{M} \wedge d\mathbf{M}. \quad (3.53)$$

Beweis: Wir benutzen hierfür den Hilfssatz 3.2.2 und integrieren mit dem Gaußschen Integralsatz. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} H \mathbf{M} d\sigma_{\Omega} &= -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} D_i (\sqrt{EG - F^2} l^{ij} \mathbf{M}_j) du dv \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \sqrt{EG - F^2} n_i l^{ij} \mathbf{M}_j dt \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \dot{u}^k e_{ki} l^{ij} \mathbf{M}_j dt \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{M} \wedge \mathbf{X}_k \dot{u}^k dt \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{M} \wedge d\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Hierbei haben wir $\mathbf{M} \wedge \mathbf{X}_k = -e_{ki} l^{ij} \mathbf{M}_j$ benutzt. Das zweite Integral erhalten wir auf analoge Art und Weise. Wir müssen hier lediglich die zweite Differentialgleichung aus Hilfssatz 3.2.2 und $\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}_k = K e_{ki} l^{ij} \mathbf{M}_j$ beachten. \square

3.3 Asymptotenlinien

Wir untersuchen zunächst Flächen mit negativer Innerer Krümmung. Es wird sich herausstellen, dass in diesem Fall die auftretenden Probleme hyperbolischer Natur sind. Deshalb interessieren uns die Charakteristiken dieser Probleme. Es wird sich herausstellen, dass eben die Asymptotenlinien genau die charakteristischen Linien sind.

Definition 3.3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, in welchem eine reguläre Fläche \mathbf{X} der Klasse C^3 definiert ist. Diese Fläche habe gemäß Definition 2.3.1 die Normale \mathbf{M} . Eine Kurve \mathbf{Y} auf \mathbf{X} gemäß Beispiel 2.3.5 nennen wir **Asymptotenlinie**, wenn ihre Normalenkrümmung identisch verschwindet. Das heißt, es gilt

$$\kappa_n \equiv \frac{(\dot{\mathbf{Y}}, \mathbf{M})}{\dot{\mathbf{Y}}^2}. \quad (3.55)$$

Wenn jede Kurve $\mathbf{Y}_1(t_1) = \mathbf{X}(t_1, v_0)$ für $t_1 \in (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$ und jede Kurve $\mathbf{Y}_2(t_2) = \mathbf{X}(u_0, t_2)$ für $t_2 \in (v_0 - \epsilon, v_0 + \epsilon)$ Asymptotenlinie für beliebiges $(u_0, v_0) \in \Omega$ und geeignetes hinreichend kleines $\epsilon > 0$ ist, dann sagen wir \mathbf{X} liege in **Asymptotenlinienparametrisierung** vor. Eine diffeomorphe Abbildung

$$w : \Omega \rightarrow \Theta \in C^1(\Omega) \quad (3.56)$$

mit der Inversen z heißt **konjugiert-charakteristisch**, falls $\mathbf{X} \circ z$ in Asymptotenlinienparametrisierung vorliegt.

Geometrische Interpretation 3.3.2. Bei dem Begriff der Asymptotenlinie bietet sich eine geometrische Interpretation geradezu an. Sei also \mathbf{Y} eine Kurve wie in Definition 3.3.1 unter der zusätzlichen Bedingung nicht verschwindender Krümmung $\kappa \neq 0$. Wir nennen dann den Vektor

$$\mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{Y}} \wedge \ddot{\mathbf{Y}}}{|\dot{\mathbf{Y}} \wedge \ddot{\mathbf{Y}}|} \quad (3.57)$$

den Kurvennormalen- oder Binormalenvektor und die Ebene

$$S = S(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x - \mathbf{Y}(t), \mathbf{B}(t)) = 0\} \quad (3.58)$$

die Schmiegebene der Kurve im Punkt $\mathbf{Y}(t)$. Fällt nun die Schmiegebene der Kurve im Punkt $\mathbf{Y}(t)$ für alle Zeiten mit der Tangentialebene an die Fläche zusammen, gilt also $\mathbf{B} = \pm \mathbf{M}$, so nennen wir die Kurve eine **Asymptotenlinie**.

Hilfssatz 3.3.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, in welchem eine Fläche \mathbf{X} der Klasse C^3 definiert ist. Außerdem habe \mathbf{X} negative Gaußsche Krümmung, d.h. $K < 0$. Dann gibt es durch jeden Punkt $(u_0, v_0) \in \Omega$ genau zwei sich schneidende Asymptotenlinien. Liegt \mathbf{X} bereits in Asymptotenlinienparametrisierung vor, so schreibt sich die zweite Fundamentalform von \mathbf{X} in der Form

$$d\sigma^2 = M dx dy \quad (3.59)$$

mit einem $M = \pm \sqrt{-K(EG - F^2)} \neq 0$.

Beweis: Zunächst entwickeln wir die Fläche \mathbf{X} in $w^0 = (u_0, v_0) = (u_0^1, u_0^2) \in \Omega$ und erhalten

$$\mathbf{X}(u, v) = \mathbf{X}(u_0, v_0) + \mathbf{X}_i(u_0, v_0)(u^i - u_0^i) + \frac{1}{2}\mathbf{X}_{ij}(u_0, v_0)(u^i - u_0^i)(u^j - u_0^j) + R_2(u, v).$$

Wir führen in $w^0 = (u_0, v_0) \in \Omega$ eine spezielle Parametrisierung ein. Wir betrachten die Fläche als Graph über ihrer Tangentialebene im Punkt $\mathbf{X}(w_0)$. Setzen wir $x = x^1 = u - u_0$ und $y = x^2 = v - v_0$, so schreibt sich die Taylorentwicklung für $z = f(x, y)$ in der Form

$$z = \frac{1}{2}l_{ij}(w_0)x^i x^j + R'_2(x, y). \quad (3.60)$$

Dabei bezeichnet R'_2 ein geeignetes Restglied. Betrachten wir nun Kurven in \mathbf{X} , die durch $w_0 = (u_0, v_0)$ gehen, dann können wir diese Kurven geeignet parametrisieren. Wir bezeichnen den Winkel, welchen die Parametrisierung unserer Kurve mit der x^1 -Achse im Ursprung hat mit ϕ . Nach Beispiel 2.3.5 erhalten wir für die Normalenkrümmung κ_n unserer Kurve die Gleichung

$$\kappa_n = \frac{L \cos^2 \phi + 2M \cos \phi \sin \phi + N \sin^2 \phi}{E \cos^2 \phi + 2F \cos \phi \sin \phi + G \sin^2 \phi} = L \cos^2 \phi + 2M \cos \phi \sin \phi + N \sin^2 \phi, \quad (3.61)$$

da wir im Ursprung $E = (1, 0, f_x(0, 0))^2 = 1 = (1, 0, f_y(0, 0))^2 = G$ und $F = f_x(0, 0)f_y(0, 0) = 0$ erfüllt haben. Wir stellen fest: Eine Kurve \mathbf{Y} ist genau dann Asymptotenlinie, wenn für den Winkel $\phi \in [0, \pi)$ gemäß obiger Konstruktion gilt

$$0 = L \cos^2 \phi + 2M \cos \phi \sin \phi + N \sin^2 \phi. \quad (3.62)$$

Hierfür unterscheiden wir zwei Fälle, einerseits $L = 0 = N$, dann werden alle unsere möglichen Winkel durch $\cos \phi = 0$ und $\sin \phi = 0$ beschrieben, also gilt $\dot{u} = 0$ oder $\dot{v} = 0$. Im anderen Fall, sei ohne Einschränkung $L \neq 0$, dann sind unsere möglichen Winkel $\phi \in [0, \pi)$ beschrieben durch die Gleichung

$$\cot \phi = -\frac{M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L}. \quad (3.63)$$

Durch die Einschränkung $\phi \in [0, \pi)$ hat diese Gleichung genau zwei Lösungen. Da die Gleichung für κ_n eine parameterinvariante Gleichung ist, ist die Anzahl der möglichen Lösungen nicht von der ursprünglichen Wahl der Tangentialebene abhängig.²

Wir beweisen nun den zweiten Teil der Aussage des Hilfssatzes. Es liegt also \mathbf{X} in Asymptotenlinienparametern vor, und es sei $\mathbf{Y}_1(t) = \mathbf{X}(t, v_0)$ mit $t \in (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Dann folgt $\dot{u} = 1$ und $\dot{v} = 0$. Somit erhalten wir aus der Gleichung der Normalenkrümmung

$$0 = l_{ij}\dot{u}^i \dot{u}^j = L. \quad (3.64)$$

Analog zeigt man $N = 0$. Gilt das nun für alle Punkte $(u_0, v_0) \in \Omega$, so folgt die Behauptung. Der Wert von M ergibt sich bis auf das Vorzeichen aus der Gleichung $LN - M^2 = K(EG - F^2)$. \square

²Dies kann man auch einsehen, indem man $u + iv = e^{i\theta}(\tilde{u} + i\tilde{v})$ setzt, und entsprechende Formeln für $\phi + \theta$ herleitet.

Bemerkung 3.3.4. *Der Beweis des obigen Hilfssatzes offenbart, dass es im elliptischen Fall keine reellen Asymptotenlinien geben kann. Im parabolischen Fall $K = 0$ gibt es genau eine (reelle) Asymptotenlinie.*

Kapitel 4

Quadratische Differentialformen

In diesem Kapitel möchten wir uns mit quadratischen Differentialformen beschäftigen. Wir wollen zunächst zwischen positiv-definiten und indefiniten unterscheiden. Den Grenzfall der Semi-definitheit wollen wir außen vor lassen. In den beiden betrachteten Fällen werden wir zunächst Transformationsgesetze und Differentialgleichungen für die transformierenden Abbildungen ermitteln. Erst danach werden wir diese Aussagen auf den Spezialfall der geometrisch relevanten Differentialformen anwenden. Namentlich werden wir die Aussagen über positiv-definite quadratische Differentialformen auf die erste Fundamentalform einer Fläche anwenden. Ist diese elliptisch gekrümmt, hat sie also positive innere Krümmung, so können wir die ermittelten Aussagen auch auf deren zweite Fundamentalform anwenden. Wir erhalten dann elliptische Gleichungen für sogenannte konjugiert-konforme Abbildungen beziehungsweise deren Inverse. Ist unsere Fläche hingegen hyperbolisch gekrümmt, d.h. sie hat negative innere Krümmung, so wenden wir die Aussagen für indefinite quadratische Differentialformen an. Wir erhalten dann hyperbolische Gleichungen für die Asymptotenlinienparametertransformationen, also die Transformationen, welche Asymptotenlinienparameter einführen, beziehungsweise deren Inverse. In beiden Fällen, also bei elliptischen konjugiert-konformen Parametern und auch bei hyperbolischen Asymptotenlinienparametern handelt es sich um charakteristische Parametrisierungen der Flächen. Wir ermitteln in diesen Fällen das sogenannte Darboux'sche Differentialgleichungssystem als relevantes System.

4.1 Transformationsgesetze für Differentialformen

Wir betrachten in diesem Abschnitt zunächst quadratische Differentialformen. Diese sind nicht zu verwechseln mit den Differentialformen von Cartan. Für unsere quadratischen Differentialformen werden wir Transformationsgesetze herleiten. Anschließend ermitteln wir, unter hinreichenden Differenzierbarkeitsannahmen, Differentialgleichungen, denen die transformierenden Abbildungen genügen. Als Beispiele notieren wir mehrere Spezialfälle im ellip-

tischen und hyperbolischen Spezialfall. Wir beginnen zunächst mit dem fundamentalen

Hilfssatz 4.1.1. (Transformationslemma für quadratische Differentialformen)

Es sei

$$ds^2 = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2 = a_{ij} dz^i dz^j \quad (4.1)$$

eine quadratische Differentialform mit Koeffizienten $A_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(\Omega)$ und dem total antisymmetrischen Oberflächenelement $\bar{A}_{12} = \sqrt{|AC - B^2|} = -\bar{A}_{21} \neq 0$. Wir bezeichnen die Koeffizienten der zu $(A_{ij})_{i,j=1,2}$ inversen Matrix mit oberen Indizes $(A^{kl})_{k,l=1,2}$. Weiter sei

$$w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y) : \Omega \rightarrow \Theta \in C^1(\Omega) \quad (4.2)$$

eine diffeomorphe Abbildung mit $\sigma := \operatorname{sgn}(u_x v_y - u_y v_x)$, welche ds^2 transformiert zu

$$ds^2 = \mathcal{A} du^2 + 2\mathcal{B} du dv + \mathcal{C} dv^2 = \mathcal{A}_{ij} dw^i dw^j \quad (4.3)$$

mit Koeffizienten $\mathcal{A}_{ij} : \Theta \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(\Theta)$ und dem total antisymmetrischen Oberflächenelement $\bar{\mathcal{A}}_{12} = \sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|} = -\bar{\mathcal{A}}_{21}$. Dann gelten neben

$$\operatorname{sgn}(AC - B^2) = \operatorname{sgn}(\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2) \quad (4.4)$$

auch noch die Gleichungen

$$A_{ij} = (\mathcal{A}_{kl} \circ w) w_i^k w_j^l \quad \text{bzw.} \quad (\mathcal{A}^{kl} \circ w) = A^{ij} w_i^k w_j^l \quad (4.5)$$

und

$$\bar{A}_{ij} = \sigma (\bar{\mathcal{A}}_{kl} \circ w) w_i^k w_j^l \quad \text{bzw.} \quad (\bar{\mathcal{A}}^{kl} \circ w) = \sigma \bar{A}^{ij} w_i^k w_j^l. \quad (4.6)$$

Dabei sind die Gleichungen (4.5) jeweils äquivalent zu den linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{Cu_x - Bu_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} &= \sigma \frac{\mathcal{B}u_y + \mathcal{C}v_y}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}}, & \frac{Cv_x - Bv_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} &= -\sigma \frac{\mathcal{A}u_y + \mathcal{B}v_y}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}}, \\ \frac{-Bu_x + Au_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} &= -\sigma \frac{\mathcal{B}u_x + \mathcal{C}v_x}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}}, & \frac{-Bv_x + Av_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} &= \sigma \frac{\mathcal{A}u_x + \mathcal{B}v_x}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Beweis: Wir beachten zunächst $dw^k = w_i^k dx^i$ und erhalten den ersten Satz der Gleichungen durch Koeffizientenvergleich. Nun sei $A = (a_{ij})$ eine symmetrische Matrix und ξ, η zwei beliebige Vektoren. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\xi^T A \xi)(\eta^T A \eta) - (\xi^T A \eta)^2 &= \det \left(\begin{pmatrix} \xi^T \\ \eta^T \end{pmatrix} \circ (A\xi, A\eta) \right) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \xi^T \\ \eta^T \end{pmatrix} \circ A \circ (\xi, \eta) \right) \\ &= (\det A)(\det(\xi, \eta))^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Setzen wir nun $a_{ij} = \mathcal{A}_{ij} \circ w$, $\xi = (u_x, v_x)^T$ und $\eta = (u_y, v_y)^T$, so folgt

$$AC - B^2 = (\xi^T A \xi)(\eta^T A \eta) - (\xi^T A \eta)^2 = (\det A)(\det(\xi, \eta))^2 = (\mathcal{A}C - \mathcal{B}^2)(u_x v_y - u_y v_x)^2.$$

Durch Bildung des Betrages und Ziehen der Quadratwurzel unter Beachtung der Definition der überstrichenen Größen und der Definition von σ folgen schließlich die Gleichungen (4.6). Die Gleichungen für die Inversen erhalten wir durch elementare Rechnung. Indem wir nun die Transformationsrelationen als lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} A &= (\mathcal{A}u_x + \mathcal{B}v_x)u_x + (\mathcal{B}u_x + \mathcal{C}v_x)v_x, \\ B &= (\mathcal{A}u_x + \mathcal{B}v_x)u_y + (\mathcal{B}u_x + \mathcal{C}v_x)v_y, \end{aligned}$$

nach den Unbekannten $(\mathcal{A}u_x + \mathcal{B}v_x, \mathcal{B}u_x + \mathcal{C}v_x)$ bzw.

$$\begin{aligned} B &= (\mathcal{A}u_y + \mathcal{B}v_y)u_x + (\mathcal{B}u_y + \mathcal{C}v_y)v_x, \\ C &= (\mathcal{A}u_y + \mathcal{B}v_y)u_y + (\mathcal{B}u_y + \mathcal{C}v_y)v_y, \end{aligned}$$

nach den Unbekannten $(\mathcal{A}u_y + \mathcal{B}v_y, \mathcal{B}u_y + \mathcal{C}v_y)$ mit der Determinante der Koeffizientenmatrix

$$u_x v_y - u_y v_x = \sigma \frac{\sqrt{|AC - B^2|}}{\sqrt{|AC - B^2|}} \quad (4.9)$$

auffassen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{Cu_x - Bu_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} &= \sigma \frac{\mathcal{B}u_y + \mathcal{C}v_y}{\sqrt{|AC - B^2|}}, \\ \frac{-Bu_x + Au_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} &= -\sigma \frac{\mathcal{B}u_x + \mathcal{C}v_x}{\sqrt{|AC - B^2|}}, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{Cv_x - Bv_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} &= -\sigma \frac{\mathcal{A}u_y + \mathcal{B}v_y}{\sqrt{|AC - B^2|}}, \\ \frac{-Bv_x + Av_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} &= \sigma \frac{\mathcal{A}u_x + \mathcal{B}v_x}{\sqrt{|AC - B^2|}}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.2. Zunächst sollten wir einige klärende Worte zur Definition von \overline{A}_{ij} bzw. $\overline{\mathcal{A}}_{ij}$ verlieren. Betrachten wir als zulässige Klasse von Transformationen nur die positiv-orientierten Parametertransformationen, so sind diese beiden Größen parameterinvariant definiert. Im elliptischen Fall ($K > 0$), ist dies ohne Einschränkung möglich. In diesem Fall stimmt die Größe \overline{G}_{ij} (bezüglich einer ersten Fundamentalform einer Fläche) mit dem bereits im vorletzten Kapitel definierten total-antisymmetrischen Oberflächenelement e_{ij} überein. Außerdem sind dann Gleichungen in dieser Arbeit, in denen neben e_{ij} nur parameterinvariante Größen auftreten selbst parameterinvariant. Gelten sie in einem Koordinatensystem, so gelten sie in allen.

Im hyperbolischen Fall ($K < 0$) können wir uns leider nicht auf positiv-orientierte Parametertransformationen zurückziehen. Würden wir das parameterinvariante Transformationsgesetz $\bar{A}_{ij} = (\bar{A}_{kl} \circ w) w_i^k w_j^l$ fordern, so wären die Größen \bar{A}_{ij} nicht wohldefiniert, weil wir das Vorzeichen nicht ohne weiteres entscheiden könnten. Wenn wir den entsprechenden Gleichungen einen Parameterwechsel vornehmen, dann müssen wir entsprechend die Orientierung unserer Parametertransformation spendieren.

Beispiel 4.1.3. (Spezielle transformierende Abbildungen elliptischer Metriken)

1. Gilt $A_{ij} = \mathcal{A}\delta_{ij}$ mit einer positiven Funktion \mathcal{A} und ist $\sigma = 1$, so gelten die *Konformitätsrelationen für (positiv-orientierte) konforme Abbildungen*

$$\frac{A_{ij}}{\sqrt{AC - B^2}} = \frac{u_i u_j + v_i v_j}{u_x v_y - v_x u_y} = \frac{(D_i w, D_j w)}{Dw^1 \wedge Dw^2} \quad (4.10)$$

mit dem dazu äquivalenten *Cauchy-Riemann-Beltrami System für konforme Abbildungen*

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{-Bv_x + Av_y}{\sqrt{AC - B^2}}, \\ u_y &= \frac{-Cv_x + Bv_y}{\sqrt{AC - B^2}} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{Bu_x - Au_y}{\sqrt{AC - B^2}}, \\ v_y &= \frac{Cu_x - Bu_y}{\sqrt{AC - B^2}}. \end{aligned}$$

2. Gilt nun $A_{ij} = A\delta_{ij}$ mit einer positiven Funktion A und ist $\sigma = 1$, so gelten die *Konformitätsrelationen für inverse (positiv-orientierte) konforme Abbildungen*

$$(\sqrt{AC - B^2} A^{ij})|_{w=w(x,y)} = \frac{(Dw^i, Dw^j)}{Dw^1 \wedge Dw^2} \quad (4.11)$$

mit dem dazu äquivalenten *Cauchy-Riemann-Beltrami System für inverse konforme Abbildungen*

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\mathcal{B}u_y + \mathcal{C}v_y}{\sqrt{AC - \mathcal{B}^2}}, \\ u_y &= \frac{-\mathcal{B}u_x - \mathcal{C}v_x}{\sqrt{AC - \mathcal{B}^2}} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{-\mathcal{A}u_y - \mathcal{B}v_y}{\sqrt{AC - \mathcal{B}^2}}, \\ v_y &= \frac{\mathcal{A}u_x + \mathcal{B}v_x}{\sqrt{AC - \mathcal{B}^2}}. \end{aligned}$$

3. Gelten schließlich $A_{ij} = A\delta_{ij}$ und $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}\delta_{ij}$ mit positiven Funktion A und \mathcal{A} , so erhalten wir wieder unter der Bedingung $\sigma = 1$ als Konformitätsrelationen

$$u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad u_x v_x + u_y v_y = 0 \quad (4.12)$$

bzw. das dazu äquivalente Cauchy-Riemann Gleichungssystem

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (4.13)$$

für holomorphe Abbildungen.

Beispiel 4.1.4. (Spezielle transformierende Abbildungen hyperbolischer Metriken)

1. Gilt jetzt etwa $\mathcal{A} = 0 = \mathcal{C}$, so gelten die *Relationen für charakteristische Abbildungen*

$$\frac{\sigma A}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{2u_x v_x}{Dw^1 \wedge Dw^2}, \quad \frac{\sigma B}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{u_x v_y + u_y v_x}{Dw^1 \wedge Dw^2}, \quad \frac{\sigma C}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{2u_y v_y}{Dw^1 \wedge Dw^2}$$

mit dem dazu äquivalenten linearen System

$$\begin{aligned} u_x &= \sigma \frac{Bu_x - Au_y}{\sqrt{B^2 - AC}}, \\ u_y &= \sigma \frac{Cu_x - Bu_y}{\sqrt{B^2 - AC}} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} v_x &= \sigma \frac{-Bv_x + Av_y}{\sqrt{B^2 - AC}}, \\ v_y &= \sigma \frac{-Cv_x + Bv_y}{\sqrt{B^2 - AC}}. \end{aligned}$$

2. Gelten jetzt $A = 0 = C$, so folgen die *Relationen für inverse charakteristische Abbildungen*

$$\frac{\sigma A}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{2u_x u_y}{Dw^1 \wedge Dw^2}, \quad \frac{\sigma B}{\sqrt{B^2 - AC}} = -\frac{u_x v_y + u_y v_x}{Dw^1 \wedge Dw^2}, \quad \frac{\sigma C}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{2v_x v_y}{Dw^1 \wedge Dw^2}$$

mit den dazu äquivalenten linearen System

$$\begin{aligned} u_x &= \sigma \frac{Bu_x + Cv_x}{\sqrt{B^2 - AC}}, \\ u_y &= \sigma \frac{-Bu_y - Cv_y}{\sqrt{B^2 - AC}} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} v_x &= \sigma \frac{-Au_x - Bv_x}{\sqrt{B^2 - AC}}, \\ v_y &= \sigma \frac{Au_y + Bv_y}{\sqrt{B^2 - AC}}. \end{aligned}$$

3. Gelten schließlich $\mathcal{A} = 0 = \mathcal{C}$, $A = 0 = C$, so folgen zunächst

$$u_x v_x = 0 = u_y v_y, \quad B = \mathcal{B}(u_x v_y + v_x u_y). \quad (4.14)$$

Das hat dann aber wegen $\sigma \neq 0$ entweder $u_x = 0 = v_y$ oder $u_y = 0 = v_x$ und entsprechend $B = \mathcal{B}v_x u_y$ oder $B = \mathcal{B}u_x v_y$ zur Folge. Immer jedoch gilt dann die bemerkenswerte Gleichung $\operatorname{sgn} B = \sigma \operatorname{sgn} \mathcal{B}$.

Hilfssatz 4.1.5. *Es sei*

$$ds^2 = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2 = a_{ij} dz^i dz^j \quad (4.15)$$

eine quadratische Differentialform mit Koeffizienten $A_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\Omega)$ und dem total antisymmetrischen Oberflächenelement $\bar{A}_{12} = \sqrt{|AC - B^2|} = -\bar{A}_{21} \neq 0$. Weiter sei

$$w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y) : \Omega \rightarrow \Theta \in C^2(\Omega) \quad (4.16)$$

eine diffeomorphe Abbildung mit $\sigma := \operatorname{sgn}(u_x v_y - u_y v_x)$, welche ds^2 transformiert zu

$$ds^2 = \mathcal{A} du^2 + 2\mathcal{B} du dv + \mathcal{C} dv^2 = \mathcal{A}_{ij} dw^i dw^j \quad (4.17)$$

mit Koeffizienten $\mathcal{A}_{ij} : \Theta \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\Theta)$ und dem total antisymmetrischen Oberflächenelement $\bar{\mathcal{A}}_{12} = \sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|} = -\bar{\mathcal{A}}_{21}$. Dann genügt w dem System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Cu_x - Bu_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Bu_x - Au_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right) |J_w|, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Cv_x - Bv_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Bv_x - Av_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right) |J_w| \end{aligned}$$

mit der Abkürzung $|J_w| = \sigma(u_x v_y - v_x u_y) = |u_x v_y - v_x u_y|$.

Beweis: Wir beachten die Gleichungen erster Ordnung (4.7) und differenzieren und addieren sie unter Beachtung der Kettenregel. Exemplarisch führen wir dies nur für u aus. Die Gleichung für v ergibt sich analog.

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Cu_x - Bu_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} \right) - \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Bu_x - Au_y}{\sqrt{|AC - B^2|}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathcal{B}u_y + \mathcal{C}v_y}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathcal{B}u_x + \mathcal{C}v_x}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \\ &= \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} u_{yx} + \left(\frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right)_u u_x u_y + \left(\frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right)_v v_x u_y \\ &\quad + \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} v_{yx} + \left(\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right)_u u_x v_y + \left(\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right)_v v_x v_y \\ &\quad - \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} u_{yx} - \left(\frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right)_u u_y u_x - \left(\frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right)_v v_y u_x \\ &\quad - \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} v_{yx} - \left(\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right)_u u_y v_x - \left(\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right)_v v_y v_x \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right) (u_x v_y - v_x u_y). \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.1.6. (Systeme zweiter Ordnung für transformierende Abbildungen elliptischer Metriken)

1. Gilt $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}\delta_{ij}$ mit einer positiven Funktion \mathcal{A} und ist $\sigma = 1$, so gelten die Integrationsbedingungen

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0 \quad (4.18)$$

mit dem invarianten Laplace-Beltrami Operator

$$\Delta w = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{AC - B^2} A^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} w \right) \quad (4.19)$$

der Metrik $ds^2 = A_{ij} dx^i dx^j$.

2. Gilt nun $A_{ij} = A\delta_{ij}$ mit einer positiven Funktion A und ist $\sigma = 1$, so gilt das System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \Delta u &= \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right) (x_u y_v - x_v y_u), \\ \Delta v &= \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{|\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2|}} \right) (x_u y_v - x_v y_u). \end{aligned} \quad (4.20)$$

3. Gelten schließlich $A_{ij} = A\delta_{ij}$ und $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}\delta_{ij}$ mit positiven Funktion A und \mathcal{A} , so erhalten wir wieder unter der Bedingung $\sigma = 1$

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0, \quad (4.21)$$

dass die Komponenten holomorpher Abbildung harmonische Funktionen sind.

Beispiel 4.1.7. (Systeme zweiter Ordnung für transformierende Abbildungen hyperbolischer Metriken)

1. Gilt $\mathcal{A} = 0 = \mathcal{C}$, so gelten die Integrationsbedingungen

$$\square u = 0, \quad \square v = 0 \quad (4.22)$$

mit dem invarianten hyperbolischen Operator

$$\square w = \frac{1}{\sqrt{B^2 - AC}} \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{B^2 - AC} A^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} w \right) \quad (4.23)$$

der Metrik $ds^2 = A_{ij} dx^i dx^j$.

2. Gilt nun $A = 0 = C$, so ist das System zweiter Ordnung erfüllt.

$$\begin{aligned} 2u_{xy} &= -\operatorname{sgn} B \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{C}{\sqrt{|AC - B^2|}} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}} \right) |x_u y_v - x_v y_u|, \\ 2v_{xy} &= -\operatorname{sgn} B \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{A}{\sqrt{|AC - B^2|}} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}} \right) |x_u y_v - x_v y_u|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

3. Gelten schließlich $A = 0 = C$, $A = 0 = C$, so genügen die Komponenten der transformierenden Abbildung der Wellengleichung in charakteristischen Parametern

$$u_{xy} = 0, \quad v_{xy} = 0. \quad (4.25)$$

4.2 Die Fundamentalformen

In diesem Abschnitt wollen wir geometrisch relevante Differentialgleichungen und Transformationsrelationen ermitteln. Dabei betrachten wir die Integrationsbedingungen, namentlich insbesondere die Codazzi-Mainardi Gleichungen. Doch zunächst bestimmen wir das folgende Transformationsgesetz für die Christoffelsymbole.

Hilfssatz 4.2.1. *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ beschränkte, einfach-zusammenhängende Gebiete und*

$$z = x + iy = x(w) + iy(w) : \Theta \rightarrow \Omega \in C^2(\Theta) \quad (4.26)$$

ein Diffeomorphismus mit der Inversen $w = u + iv = u(z) + iv(z) : \Omega \rightarrow \Theta \in C^2(\Omega)$. Es sei weiter

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = G_{ij} dz^i dz^j \quad (4.27)$$

eine positiv-definite quadratische Differentialform mit $G_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\Omega)$ und den Christoffelsymbolen Γ_{ij}^k . Wir bezeichnen durch $\mathcal{G}_{kl} = (G_{ij} \circ z) z_k^i z_l^j$ die transformierten Koeffizienten gemäß Hilfssatz 4.1.1 mit ihren Christoffelsymbolen $\bar{\Gamma}_{kl}^m$. Dann gilt die Gleichung

$$\bar{\Gamma}_{kl}^m z_m^p = (\Gamma_{ij}^p \circ z) z_k^i z_l^j + z_{kl}^p \quad \text{in } \Theta. \quad (4.28)$$

Beweis: Wir beginnen und berechnen

$$\begin{aligned} 2\bar{\Gamma}_{kl}^m \mathcal{G}_{mn} &= \mathcal{G}_{kn,l} + \mathcal{G}_{ln,k} - \mathcal{G}_{lk,n} \\ &= G_{pq,r} z_k^p z_n^q z_l^r + G_{pg} (z_{kl}^p z_n^q + z_k^p z_{ln}^q) + G_{pq,r} z_l^p z_n^q z_k^r + G_{pg} (z_{lk}^p z_n^q + z_l^p z_{nk}^q) \\ &\quad - G_{pq,r} z_k^p z_l^q z_n^r - G_{pq} (z_{kn}^p z_l^q + z_k^p z_{ln}^q) \\ &= (G_{pq,r} + G_{rq,p} - G_{pr,q}) z_k^p z_n^q z_l^r + 2G_{pq} (z_{kl}^p z_n^q) \\ &= 2(\Gamma_{pr}^m g_{mq} z_k^p z_l^r + G_{pq} z_{kl}^p) z_n^q \\ &= 2(\Gamma_{mn}^p z_k^m z_l^n + z_{kl}^p) G_{pq} z_n^q. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Wir beachten nun mit der zu z_k^p inversen Jakobimatrix w_p^l die Gleichung

$$G_{mq}z_n^q = w_m^r z_r^p G_{pq} z_n^q = w_m^r \mathcal{G}_{rn} \quad (4.30)$$

und damit folgt die Behauptung. \square

Beispiel 4.2.2. (Differentialgleichung für konjugiert-konforme Abbildungen) Es sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche der Klasse $C^{k,\alpha}(\Omega)$ mit $k \geq 3$. Diese habe

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = G_{ij} dx^i dx^j \quad (4.31)$$

und

$$d\sigma^2 = L dx^2 + 2M dx dy + N dy^2 = L_{ij} dx^i dx^j \quad (4.32)$$

als erste bzw. zweite Fundamentalform mit Koeffizienten $G_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ bzw. $L_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^{k-2,\alpha}(\Omega)$. Hierbei seien Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole von ds^2 . Gilt $K > 0$, so überführen wir mit Hilfe von Satz 3.1.2 die zweite Fundamentalform $d\sigma^2$ in isotherme Form mit einer konjugiert-konformen Abbildung

$$w : \Omega \rightarrow B \in C^{k-1,\alpha}(\Omega) \quad (4.33)$$

und ihrer Inversen z . Es schreiben sich

$$ds^2 = \mathcal{E} du^2 + 2\mathcal{F} du dv + \mathcal{G} dv^2 = \mathcal{G}_{ij} du^i du^j \quad (4.34)$$

und

$$d\sigma^2 = \mathcal{L}(du^2 + dv^2). \quad (4.35)$$

Hierbei bezeichnen $\mathcal{K} = \frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = K \circ z$ die innere Krümmung und $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ die Christoffelsymbole von ds^2 in konjugiert-konformen Parametern. Dann gelten wegen Beispiel 3.1.7 die weiteren Integrationsbedingungen

$$\mathcal{K}_i + 2(\bar{\Gamma}_{11}^i + \bar{\Gamma}_{22}^i)\mathcal{K} = 0. \quad (4.36)$$

Transformieren wir nun die Codazzi-Mainardi Gleichungen mit z in die ursprüngliche Parametrisierung zurück, so genügt nach Hilfssatz 4.2.1 die Inverse der konjugiert-konformen Abbildung z der *Darboux-Gleichung*

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\mathcal{K}_i + 2(\bar{\Gamma}_{11}^i + \bar{\Gamma}_{22}^i)\mathcal{K} \right) z_i^r \\ &= \mathcal{K}_i z_i^r + 2(\Gamma_{pq}^r \nabla z^p \nabla z^q + \Delta z^r)\mathcal{K} \\ &= 2 \left(\sqrt{\mathcal{K}} \left(\sqrt{\mathcal{K}} z_i^r \right)_i + \mathcal{K} \Gamma_{pq}^r \nabla z^p \cdot \nabla z^q \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Beispiel 4.2.3. (Differentialgleichung für konjugiert-charakteristische Abbildungen) Es sei \mathbf{X} eine reguläre Fläche der Klasse $C^{k,\alpha}(\Omega)$ mit $k \geq 3$. Diese habe

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = G_{ij} dx^i dx^j \quad (4.38)$$

und

$$d\sigma^2 = L dx^2 + 2M dx dy + N dy^2 = L_{ij} dx^i dx^j \quad (4.39)$$

als erste bzw. zweite Fundamentalform mit Koeffizienten $G_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ bzw. $L_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^{k-2,\alpha}(\Omega)$. Hierbei seien Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole von ds^2 . Gilt $K < 0$, führen wir lokal charakteristische Parameter, etwa mit [Sa05], Kapitel XI, §3, in die zweite Fundamentalform $d\sigma^2$ mit einer konjugiert-charakteristischen Abbildung

$$w : \Omega \rightarrow B \in C^{k-1,\alpha}(\Omega) \quad (4.40)$$

und ihrer Inversen z ein. Es schreiben sich

$$ds^2 = \mathcal{E} du^2 + 2\mathcal{F} du dv + \mathcal{G} dv^2 = \mathcal{G}_{ij} du^i du^j \quad (4.41)$$

und

$$d\sigma^2 = \mathcal{M} du dv. \quad (4.42)$$

Hierbei bezeichnen $\mathcal{K} = -\frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2} = K \circ z$ die innere Krümmung und $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ die Christoffelsymbole von ds^2 in Asymptotenlinienparametern. Dann gelten wegen Beispiel 3.1.7 die weiteren Integrationsbedingungen

$$\mathcal{K}_u + 4\bar{\Gamma}_{12}^2 \mathcal{K} = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_v + 4\bar{\Gamma}_{12}^1 \mathcal{K} = 0 \quad (4.43)$$

Transformieren wir nun die Codazzi-Mainardi Gleichungen mit z in die ursprüngliche Parametrisierung zurück, so genügt nach Hilfssatz 4.2.1 die Inverse der konjugiert-charakteristischen Abbildung z der *Darboux-Gleichung*

$$\begin{aligned} 4\bar{\Gamma}_{12}^i &= 2(\bar{\Gamma}_{12}^i + \bar{\Gamma}_{21}^i) \\ &= 2(\Gamma_{pq}^r(z_1^p z_2^q + z_2^p z_1^q) + 2z_{12}^r)w_r^i. \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$(4.45)$$

Beachten wir noch

$$\mathcal{K}_m = K_n z_m^n \quad (4.46)$$

so erhalten wir

$$0 = \mathcal{K}_1 + 4\bar{\Gamma}_{12}^2 \mathcal{K} = (K_n z_1^n z_2^r + 2\mathcal{K}\Gamma_{pq}^r(z_1^p z_2^q + z_2^p z_1^q) + 4\mathcal{K}z_{12}^r)w_r^2 \quad (4.47)$$

bzw.

$$0 = \mathcal{K}_2 + 4\bar{\Gamma}_{12}^1 \mathcal{K} = (K_n z_2^n z_1^r + 2\mathcal{K}\Gamma_{pq}^r(z_1^p z_2^q + z_2^p z_1^q) + 4\mathcal{K}z_{12}^r)w_r^1. \quad (4.48)$$

Beide Gleichungen zusammen liefern

$$0 = \left(\sqrt{|\mathcal{K}|} \left(\sqrt{|\mathcal{K}|} z_1^r\right)_2 + \left(\sqrt{|\mathcal{K}|} z_2^r\right)_1 + |\mathcal{K}|\Gamma_{pq}^r(z_1^p z_2^q + z_2^p z_1^q)\right).$$

Diese beiden Beispiele motivieren uns, die folgenden Differentialgleichungen intensiver zu studieren.

Definition 4.2.4. Es sei $ds^2 = G_{ij} dx^i dx^j$ eine positiv-definite quadratische Differentialform mit Koeffizienten $G_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^3(\Omega)$ und der inneren Krümmung $K \neq 0$. Sei weiter $z : \Theta \rightarrow \Omega \in C^2(\Theta)$ eine Abbildung und $\mathcal{K} = K \circ z$. Wir definieren mit

$$\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_i^{ds^2} := (\sqrt{|\mathcal{K}|}) \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (4.49)$$

den **Darbouxschen Differentialquotienten von ds^2 bezüglich \mathbf{z}** , mit $\mathcal{D} := \mathcal{D}^{ds^2} := (\mathcal{D}_i^{ds^2})_i = (\sqrt{|\mathcal{K}|}) \nabla$ den **Darbouxschen Gradienten von ds^2 bezüglich \mathbf{z}** und mit

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(z) &:= \mathcal{Q}^{ds^2}(z) := \mathcal{D}_i(\mathcal{D}_i z^k) + \Gamma_{pq}^k \mathcal{D}z^p \cdot \mathcal{D}z^q \\ &= \mathcal{D}_w(\mathcal{D}_{\bar{w}} z^k) + \mathcal{D}_{\bar{w}}(\mathcal{D}_w z^k) + \Gamma_{pq}^k (\mathcal{D}_w z^p \mathcal{D}_{\bar{w}} z^q + \mathcal{D}_{\bar{w}} z^p \mathcal{D}_w z^q) \end{aligned} \quad (4.50)$$

den **elliptischen Darbouxschen Differentialoperator von ds^2 im Falle $K > 0$** . Gilt $K < 0$, so definieren wir mit

$$\mathcal{Q}(z) := \mathcal{Q}^{ds^2}(z) := \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2 z^k) + \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1 z^k) + \Gamma_{pq}^k (\mathcal{D}_1 z^p \cdot \mathcal{D}_2 z^q + \mathcal{D}_2 z^p \cdot \mathcal{D}_1 z^q)$$

den **hyperbolischen Darbouxschen Differentialoperator von ds^2** . Dabei ist \mathcal{Q} eine quasi-lineare Abbildung

$$\mathcal{Q} : C^2(\Theta, \Omega) \rightarrow C^0(\Theta, \Omega), \quad (4.51)$$

und $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach-zusammenhängendes beliebig gewähltes Gebiet. Wir nennen die Gleichung

$$\mathcal{Q}(z) = 0 \quad (4.52)$$

die **Darbouxsche Differentialgleichung von ds^2** .

Bemerkung 4.2.5. Genau genommen wird zur Definition von \mathcal{Q} lediglich benötigt, dass die entsprechenden Abbildungen ein Bild in Ω haben. Hier steckt also eine Freiheit im Urbildbereich.

Außerdem ist der Darbouxsche Differentialoperator genau dann gleichmäßig elliptisch, wenn $K \geq c > 0$ in Ω gilt.

4.3 Elliptisch gekrümmte Flächen

Nun motiviert uns Beispiel 4.2.2, Lösungen der Darbouxschen Differentialgleichung $\mathcal{Q}(z) = 0$ zu betrachten. Da wir sowieso in jeder Aussage zwischen $K > 0$ und $K < 0$ unterscheiden müssten, betrachten wir in diesem Abschnitt nur den ersten Fall. Deshalb beziehen wir uns in diesem Abschnitt explizit, und ohne dies jedesmal neu zu kommentieren, nur auf die elliptische Darbouxsche Differentialgleichung.

Hilfssatz 4.3.1. Sei $z : \Theta \rightarrow \Omega \in C^2(\Theta)$ eine diffeomorphe Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{Q}(z) = 0$ zu einer Metrik

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = G_{ij} dx^i dx^j \quad (4.53)$$

mit Koeffizienten $G_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^3(\Omega)$. Dann genügen die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform

$$d\sigma^2 = \mathcal{L}(du^2 + dv^2) = \sqrt{K(EG - F^2)}|_z(x_u y_v - x_v y_u)(du^2 + dv^2) = L_{ij} dx^i dx^j \quad (4.54)$$

den Integrationsbedingungen gemäß Hilfssatz 3.1.6. Hierbei sind die L_{ij} gemäß Beispiel 4.1.3, Punkt 2. definiert, also

$$\sqrt{K(EG - F^2)}L^{ij} = \frac{\nabla z^i \nabla z^j}{\nabla z^1 \times \nabla z^2} \Big|_{w=z^{-1}(z)}. \quad (4.55)$$

Beweis: Zunächst gilt $\bar{K} = K$ gemäß Definition von $d\sigma^2$, also ist das Gaußsche Theorema Egregium erfüllt. Aus $\mathcal{Q}(z) = 0$ folgt mit Beispiel 4.2.2 die Gültigkeit der Codazzi-Mainardi Gleichungen

$$\mathcal{K}_i + 2(\bar{\Gamma}_{11}^i + \bar{\Gamma}_{22}^i)\mathcal{K} = 0. \quad (4.56)$$

Da die Integrationsbedingungen in einer Parametrisierung erfüllt sind, sind sie als parameterinvariante Gleichungen in allen zulässigen erfüllt, also auch in der ursprünglichen.

□

Satz 4.3.2. *Es sei Ω ein einfach-zusammenhängendes $C^{3,\alpha}$ Gebiet und*

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = G_{ij} dx^i dx^j \quad (4.57)$$

eine in $\bar{\Omega}$ positiv-definite quadratische Differentialform mit Koeffizienten $G_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$ mit innerer Krümmung $K > 0$ in $\bar{\Omega}$. Weiter sei

$$z = z(w) = x(w) + iy(w) = x(u, v) + iy(u, v) : B \rightarrow \Omega \in C^{2,\alpha}(B) \quad (4.58)$$

eine diffeomorphe Lösung von $\mathcal{Q}(z) = 0$ in Θ unter den Randbedingungen

$$\frac{\sqrt{K}}{\kappa_n} = \frac{G_{kl} z_t^k z_t^l}{\bar{G}_{ij} z_r^i z_r^j} \quad \text{und} \quad \frac{\tau_n}{\kappa_n} = \frac{G_{kl} z_r^k z_t^l}{\bar{G}_{ij} z_r^i z_t^j} \quad (4.59)$$

mit $\kappa_n > 0$. Dabei bezeichnet z_r die Ableitung von z an $\partial\Theta$ in Richtung der äußeren Normalen und z_t die Ableitung von z an $\partial\Theta$ in Tangentialrichtung. Dabei sind die Größen G_{ij} , \bar{G}_{ij} , K , κ_n und τ_n an der Stelle $z = z(w)$ für $w \in \partial\Theta$ auszuwerten.

Dann gibt es eine bis auf Drehungen und Translationen eindeutig bestimmte reguläre Fläche \mathbf{X} der Klasse $C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$, mit der Normalen \mathbf{M} , für welche in Ω die Gleichungen

$$ds^2 = (d\mathbf{X})^2 \quad \text{und} \quad d\sigma^2 = -(d\mathbf{X}, d\mathbf{M}) \quad (4.60)$$

gelten.

Außerdem wird dem Randstreifen $(\mathbf{X}|_{\partial\Omega}, (\mathbf{M} \times \dot{\mathbf{X}})|_{\partial\Omega})^1$ der Krümmungsvektor

$$\mathbf{K} = (-\tau_n, \kappa_n, -\kappa_g)^T \in C^{k-2,\alpha}(\partial\Omega) \quad (4.61)$$

¹Hierbei ist $(\dot{\mathbf{X}})|_{\partial\Omega}$ im folgenden Sinne zu verstehen: Sei $w = w(t) : [0, T] \rightarrow \partial\Omega \in C^{k,\alpha}([0, T])$ bijektiv. Dann ist $(\dot{\mathbf{X}})|_{\partial\Omega} = \frac{d}{dt} \mathbf{X}(w(t))$.

mit der geodätischen Krümmung $\kappa_g = \kappa_g(\partial\Omega, ds^2)$ der Randkurve $\partial\Omega$ bezüglich ds^2 zugeordnet.

Beweis: Wir prüfen die Voraussetzungen von Satz 3.1.8 nach. Da z eine Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{Q}(z) = 0$ ist, folgt nach Hilfssatz 4.3.1, dass die Größen

$$L^{ij}(z) = \frac{1}{\sqrt{K(EG - F^2)}|_z} \left. \frac{(\nabla z^i, \nabla z^j)}{\nabla z^1 \times \nabla z^2} \right|_{w=z^{-1}(z)} \quad (4.62)$$

den Integrationsbedingungen genügen, namentlich den Gauß-Codazzi-Mainardi Gleichungen. Außerdem sind sie in der Regularitätsklasse $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ enthalten. Wir müssen nun noch die Gleichung

$$\dot{u}^i L_{ij} = \dot{u}^i (\kappa_n G_{ij} + \tau_n \bar{G}_{ij}) \quad (4.63)$$

nachweisen. Wir wählen dazu für die Flächeninvarianten die konjugiert-konforme Parametrisierung. Für die Randkurve $\partial\Theta$ wählen wir eine positiv-orientierte Parametrisierung mit $(\dot{u}^1)^2 + (\dot{u}^2)^2 \equiv 1$. Wir beachten, dass Gleichung (4.63) äquivalent ist zu

$$\frac{1}{\kappa_n} \left(\sqrt{\mathcal{K}} \delta_{ij} + \tau_n \epsilon_{ij} \right) \dot{u}^j = \frac{\mathcal{G}_{ij} \dot{u}^j}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}. \quad (4.64)$$

Hierbei bezeichnen die kaligraphischen Größen die invarianten Größen in konjugiert-konformen Parametern, $\epsilon_{12} = 1 = -\epsilon_{21}$ den total antisymmetrischen Einheitstensor und u^i eine reguläre Parametrisierung des Randes $\partial\Theta$. Nach Hilfssatz 4.1.1 gilt außerdem

$$\frac{\mathcal{G}_{ij}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} = \frac{G_{kl} z_i^k z_j^l}{\bar{G}_{kl} z_1^k z_2^l}. \quad (4.65)$$

Wir beachten ferner $z_i^k \dot{u}^i = z_t^k$ und $z_i^k \delta^{ij} \epsilon_{jl} \dot{u}^l = z_r^k$. Da die beiden Vektoren \dot{u}^i und $\delta^{ij} \epsilon_{jl} \dot{u}^l$ linear unabhängig sind, sind die beiden Gleichungen (4.63) äquivalent zu

$$\frac{\sqrt{\mathcal{K}}}{\kappa_n} = \frac{G_{kl} z_i^k z_j^l \dot{u}^i \dot{u}^j}{\bar{G}_{kl} z_1^k z_2^l} = \frac{G_{kl} z_t^k z_t^l}{\bar{G}_{ij} z_r^i z_t^j} \quad (4.66)$$

und

$$\frac{\tau_n}{\kappa_n} = \frac{G_{kl} z_i^k z_j^l \delta^{il} \epsilon_{ln} \dot{u}^n \dot{u}^j}{\bar{G}_{kl} z_1^k z_2^l} = \frac{G_{kl} z_r^k z_t^l}{\bar{G}_{ij} z_r^i z_t^j}. \quad (4.67)$$

Die Funktionen $\kappa_n \circ z$ und $\tau_n \circ z$ sind darüber hinaus auch in der Regularitätsklasse $C^{1,\alpha}(\partial\Theta)$ enthalten. Damit ist Satz 3.1.8 anwendbar und liefert die Behauptungen. \square

Bemerkung 4.3.3. Die Gleichungen (4.59) sind äquivalent zu einer ganzen Reihe weiterer Gleichungen. Beispielsweise sind sie zu

$$\frac{\kappa_n^2 + \tau_n^2}{\sqrt{\mathcal{K}} \kappa_n} = \frac{G_{kl} z_r^k z_r^l}{\bar{G}_{ij} z_r^i z_t^j} \quad \text{und} \quad \frac{\tau_n}{\kappa_n} = \frac{G_{kl} z_r^k z_t^l}{\bar{G}_{ij} z_r^i z_t^j} \quad (4.68)$$

oder

$$\kappa_n = \sqrt{\mathcal{K}} \frac{\bar{G}_{ij} z_r^i z_t^j}{G_{kl} z_t^k z_t^l} \quad \text{und} \quad \tau_n = \sqrt{\mathcal{K}} \frac{G_{ij} z_r^i z_t^j}{G_{kl} z_t^k z_t^l} \quad (4.69)$$

oder

$$\frac{\kappa_n}{\kappa_n^2 + \tau_n^2} = \frac{1}{\sqrt{\bar{K}}} \frac{\bar{G}_{ij} z_r^i z_t^j}{G_{kl} z_r^k z_r^l} \quad \text{und} \quad \frac{\tau_n}{\kappa_n^2 + \tau_n^2} = \frac{1}{\sqrt{\bar{K}}} \frac{G_{ij} z_r^i z_t^j}{G_{kl} z_r^k z_r^l} \quad (4.70)$$

oder

$$z_r^i = \frac{1}{\sqrt{\bar{K}}} (\tau_n z_t^i + \kappa_n G^{ij} \bar{G}_{jk} z_t^k) \quad (4.71)$$

oder auch zu

$$z_t^i = \frac{\sqrt{\bar{K}}}{\kappa_n^2 + \tau_n^2} (\tau_n z_r^i - \kappa_n G^{ij} \bar{G}_{jk} z_r^k) \quad (4.72)$$

äquivalent.

Außerdem gilt noch die Gleichung

$$\frac{G_{ij} z_r^i z_r^j}{G_{kl} z_t^k z_t^l} = \frac{\kappa_n^2 + \tau_n^2}{K}. \quad (4.73)$$

4.4 Hyperbolisch gekrümmte Flächen

In diesem Abschnitt beweisen wir die analogen Aussagen des Vorherigen im Fall $K < 0$. Ohne weiteren Kommentar werden wir dies auch durchgängig benutzen.

Hilfssatz 4.4.1. Sei $z : \Theta \rightarrow \Omega \in C^2(\Theta)$ eine diffeomorphe Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{Q}(z) = 0$ zu einer Metrik

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = G_{ij} dx^i dx^j \quad (4.74)$$

mit Koeffizienten $G_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^3(\Omega)$. Dann genügen die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform

$$d\sigma^2 = \mathcal{M} du dv = \sqrt{-K(EG - F^2)}|_z (x_u y_v - x_v y_u) du dv = L_{ij} dz^i dz^j \quad (4.75)$$

den Integrationsbedingungen gemäß Hilfssatz 3.1.6. Hierbei sind die L_{ij} gemäß Hilfssatz 4.1.4 definiert, also

$$\sqrt{-K(EG - F^2)} L^{ij} = \frac{z_u^i z_v^j + z_v^i z_u^j}{|\nabla z^1 \wedge \nabla z^2|} \Big|_{w=z^{-1}(z)}. \quad (4.76)$$

Beweis: Zunächst gilt $\bar{K} = K$ gemäß Definition von $d\sigma^2$, also ist das Gaußsche Theorema Egregium erfüllt. Aus $\mathcal{Q}(z) = 0$ folgt mit Beispiel 4.2.3 die Gültigkeit der Codazzi-Mainardi Gleichungen

$$\mathcal{K}_u + 4\bar{\Gamma}_{12}^2 \mathcal{K} = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_v + 4\bar{\Gamma}_{12}^1 \mathcal{K} = 0. \quad (4.77)$$

Da die Integrationsbedingungen in einer Parametrisierung erfüllt sind, sind sie als parameterinvariante Gleichungen in allen zulässigen erfüllt, also auch in der ursprünglichen.

□

Hilfssatz 4.4.2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet und*

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = G_{ij} dz^i dz^j \quad (4.78)$$

eine in Ω positiv-definite quadratische Differentialform mit Koeffizienten $G_{ij} = G_{ij}(z) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^3(\Omega)$ mit innerer Krümmung $K < 0$ in Ω . Wir betrachten die C^3 -Kurve $\Gamma \subset \subset \Omega$, welche wir durch

$$\zeta = \zeta(t) : [-T, T] \rightarrow \Gamma \in C^3[-T, T] \quad (4.79)$$

regulär parametrisieren. Zu den Funktionen

$$\kappa_n, \tau_n : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R} \in C^1[-T, T] \quad (4.80)$$

mit $\kappa_n \neq 0$ in Γ erklären wir die Funktion

$$\zeta'(t) = \frac{1}{\sqrt{-K(\zeta(t))}} \left(\tau_n(t) \dot{\zeta}(t) + \kappa_n(t) ((G^{1j} + iG^{2j}) \overline{G}_{jk})_{z=\zeta(t)} \dot{\zeta}^k(t) \right) \quad (4.81)$$

für $t \in [-T, T]$. Sei weiter $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, welches die Kurve $w = w(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t, -t)$ für $t \in [-T, T]$ enthält, sei weiter $\Omega' \subset \subset \Omega$ und

$$z = z(w) = x(w) + iy(w) = x(u, v) + iy(u, v) : \Theta \rightarrow \Omega' \in C^2(\Theta) \quad (4.82)$$

eine diffeomorphe Lösung von $\mathcal{Q}(z) = 0$ in Θ unter den Cauchy-Daten

$$z(w(t)) = \zeta(t) \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|_{w=w(t)} = \zeta'(t) \quad (4.83)$$

für $t \in [-T, T]$ mit $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Dann gilt für die durch z gemäß Hilfssatz 4.4.1 definierte zweite Fundamentalform $d\sigma^2 = L_{ij} dz^i dz^j$ die Gleichung

$$L_{ij} \dot{w}^j = (\kappa_n G_{ij} - \tau_n \overline{G}_{ij}) \dot{w}^j. \quad (4.84)$$

Beweis: Wir werten die Anfangsbedingungen aus und erhalten die Gleichung

$$z_\nu^i = \frac{1}{\sqrt{-\mathcal{K}}} (\tau_n z_t^i + \kappa_n G^{ij} \overline{G}_{jk} z_t^k). \quad (4.85)$$

Wir berechnen nun

$$\overline{G}_{ij} z_\nu^i z_t^j = \frac{\kappa_n}{\sqrt{-\mathcal{K}}} G_{kl} z_t^k z_t^l \quad (4.86)$$

und

$$G_{ij} z_\nu^i z_t^j = \frac{\tau_n}{\sqrt{-\mathcal{K}}} G_{kl} z_t^k z_t^l. \quad (4.87)$$

Diese beiden Gleichungen sind aber äquivalent zu

$$\sqrt{-\mathcal{K}} = \kappa_n \frac{G_{ij} z_t^i z_t^j}{G_{kl} z_\nu^k z_t^l} = -\frac{\kappa_n}{2} \frac{G_{ij} (z_u^i - z_v^i)(z_u^j - z_v^j)}{G_{kl} z_u^k z_v^l} = -\sigma \frac{\kappa_n \mathcal{E} - 2\mathcal{F} + \mathcal{G}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} \quad (4.88)$$

und

$$\tau_n = \kappa_n \frac{G_{ij} z_v^i z_t^j}{G_{kl} z_v^k z_t^l} = -\frac{\kappa_n G_{ij} (z_u^i + z_v^i)(z_u^j - z_v^j)}{2 G_{kl} z_u^k z_v^l} = -\sigma \frac{\kappa_n}{2} \frac{\mathcal{E} - \mathcal{G}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} \quad (4.89)$$

mit dem Vorzeichen der Jakobischen $\sigma = \operatorname{sgn}(x_u y_v - x_v y_u)$. Aus diesen beiden Gleichungen folgen dann

$$\begin{aligned} \sqrt{-\mathcal{K}} + \tau_n &= -\sigma \kappa_n \frac{\mathcal{E} - \mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}, \\ -\sqrt{-\mathcal{K}} + \tau_n &= -\sigma \kappa_n \frac{\mathcal{F} - \mathcal{G}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}. \end{aligned}$$

Wiederum äquivalent dazu ist

$$\begin{aligned} -\sigma \sqrt{-\mathcal{K}(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)} - \sigma \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \tau_n &= \kappa_n (\mathcal{E} - \mathcal{F}), \\ \sigma \sqrt{-\mathcal{K}(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)} - \sigma \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \tau_n &= \kappa_n (\mathcal{F} - \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Nun gelten aber $\bar{G}_{12} = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = \sigma \bar{G}_{12} (x_u y_v - x_v y_u)$ und auch $\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21} = \mathcal{M} = \sqrt{-K(EG - F^2)}_z (x_u y_v - x_v y_u) = \sigma \sqrt{-\mathcal{K}(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)}$. Beachten wir nun noch $\dot{w} = (\dot{u}^1, \dot{u}^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ und Bemerkung 4.1.2, so sind diese zwei Gleichungen gerade die behaupteten Gleichungen in Asymptotenlinienparametrisierung. \square

Jetzt folgt analog zu Satz 4.3.2 der fundamentale

Satz 4.4.3. *In der Situation von Hilfssatz 4.4.2 sei mit $\Omega' \subset \Omega$ $z : \Theta \rightarrow \Omega' \in C^2(\Theta, \Omega)$ eine diffeomorphe Lösung des Anfangswertproblems*

$$\mathcal{Q}(z) := D_v (D_u z^k) + D_u (D_v z^k) + \Gamma_{ij}^k (D_u z^i D_v z^j + D_v z^i D_u z^j) = 0 \quad \text{in } \Theta. \quad (4.90)$$

zu den Anfangsdaten

$$z(w(t)) = \zeta(t) \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|_{w=w(t)} = \zeta'(t) \quad (4.91)$$

für $t \in [-T, T]$ mit $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Dann gibt es in Ω' eine bis auf Drehungen und Translationen eindeutig bestimmte reguläre Fläche \mathbf{X} der Klasse $C^3(\Omega')$, mit der Normalen \mathbf{M} , für welche in Ω' die Gleichungen

$$ds^2 = (d\mathbf{X})^2 \quad \text{und} \quad d\sigma^2 = -(d\mathbf{X}, d\mathbf{M}) \quad (4.92)$$

gelten.

Außerdem wird dem Streifen $(\mathbf{X}|_\Gamma, \left(\frac{\mathbf{M} \times \dot{\mathbf{X}}}{|\mathbf{M} \times \dot{\mathbf{X}}|}\right)_\Gamma)^2$ der Krümmungsvektor

$$\mathbf{K} = (-\tau_n, \kappa_n, -\kappa_g)^T \in C^1(\Gamma) \quad (4.93)$$

mit der geodätischen Krümmung $\kappa_g = \kappa_g(\Gamma, ds^2)$ der Kurve Γ bezüglich ds^2 zugeordnet.

²Hierbei ist $(\dot{\mathbf{X}})|_\Gamma$ im folgenden Sinne zu verstehen: $(\dot{\mathbf{X}})|_\Gamma = \frac{d}{dt} \mathbf{X}(\zeta(t))$ für $t \in [-T, T]$.

Beweis: Wir wenden Hilfssätze 4.4.1 und 4.4.2 an und kontrollieren den Beweis von Satz 3.1.8. Zunächst erhalten wir aus Hilfssatz 4.4.1 wegen $\mathcal{Q}(z) = 0$ die Gültigkeit der Gauß-Codazzi-Mainardi Gleichungen und damit wie in Satz 3.1.8 die Existenz der behaupteten Fläche mit vorgeschriebener erster Fundamentalform ds^2 . Aus Hilfssatz 4.4.2 folgt die Gültigkeit der Gleichung

$$L_{ij}\dot{u}^j = (\kappa_n G_{ij} - \tau_n \overline{G}_{ij})\dot{u}^j. \quad (4.94)$$

Wie in Satz 3.1.8 sehen wir ein, dass unserem in den Voraussetzungen definierten Streifen der Krümmungsvektor

$$\mathbf{K} = (-\tau_n, \kappa_n, -\kappa_g)^T \in C^1(\Gamma) \quad (4.95)$$

zugeordnet wurde. \square

Bemerkung 4.4.4. *Wegen Satz 4.4.3 genügt es, um die Differentialgleichung*

$$ds^2 = (d\mathbf{X})^2 \quad (4.96)$$

in einer Umgebung einer Kurve Γ mit den Anfangsdaten $\mathbf{X}|_\Gamma = \mathbf{Y}$ zu lösen, die Anfangswertprobleme

$$\mathcal{Q}(z) = 0 \quad (4.97)$$

mit

$$z = \zeta \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} = \zeta' \quad \text{in} \quad [-T, T] \quad (4.98)$$

zu lösen. Dabei ist \mathcal{Q} ein quasi-linearer hyperbolischer Differentialoperator, dessen Koeffizienten nur von ds^2 abhängen. Die Anfangsdaten ζ und ζ' hängen nur von Γ , ds^2 und \mathbf{Y} ab.

Kapitel 5

Resultate und Korollare

In diesem Kapitel wollen wir unsere Hauptresultate beweisen. Zunächst stellen wir ein Randwertproblem für die Differentialgleichung

$$(d\mathbf{X})^2 = ds^2 \tag{5.1}$$

im Falle einer elliptischen inneren Krümmung vor. Für dieses Problem ermitteln wir a-priori Abschätzungen der $C^{3,\alpha}$ -Norm des Ortsvektors einer Lösung. Anschließend schreiben wir die Randwerte des einzigen gelösten globalen Randwertproblems, nämlich desjenigen von Pogorelov [Po49], in unserer Notation. Zwar wurden auch andere Randwertaufgaben betrachtet, jedoch nur für die konjugiert-konformen Abbildungen. Es wurde kein Zusammenhang zu der erhaltenen Fläche ermittelt.

Anschließend ermitteln wir einen (technischen) Existenzsatz für die für unsere Belange relevanten hyperbolischen Systeme. Damit wir diese Lösung in unserer Theorie verwenden können, müssen wir darüber hinaus auch noch Regularitätsaussagen beweisen. Unter geometrisch relevanten Voraussetzungen können wir eine minimale Größe eines Existenzgebietes angeben.

Schließlich geben wir einen Ausblick auf die weiteren Dinge, die einer Erforschung harren.

5.1 Ein Existenzproblem und a-priori Abschätzungen

Wir wollen in diesem Abschnitt lediglich unser Existenzproblem formulieren und a-priori Abschätzungen etablieren. Diese sind ganz entscheidend, um später ein Existenzresultat mit einer Kontinuitäts- oder Abbildungsgradmethode zu erhalten. Es ist nicht ausgeschlossen, dass diese Abschätzungen noch an der einen oder anderen Stelle verbessert werden können, jedoch ist es nicht notwendig dies zu tun in Hinblick auf unser mögliches Existenzresultat. Lediglich der Ruf nach besonderer mathematischer Eleganz macht dies notwendig. Dies gilt ebenso für Regularitätsaussagen.

Problem 1. 1. Gegeben sei in der Einheitskreisscheibe $B := \{z = x + iy; |z| < 1\}$ eine Riemannsche Metrik - in Form einer quadratischen Differentialform -

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (5.2)$$

mit Koeffizienten $g_{ij} : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R} \in C^{4,\alpha}(\bar{B})$. Für die Normen der Koeffizienten gelten mit einer Konstanten $c \in (0, \infty)$ die Ungleichungen

$$\|g_{ij}\|_B^{4,\alpha} \leq c. \quad (5.3)$$

Die quadratische Differentialform ds^2 sei positiv-definit und habe eine positive innere Krümmung K . Es gelten die Abschätzungen

$$EG - F^2 \geq \frac{1}{c} \quad \text{und} \quad K \geq \frac{1}{c} \quad \text{in} \quad \bar{B}. \quad (5.4)$$

Weiter bezeichnen wir die geodätische Krümmung der Kurve ∂B bezüglich ds^2 mit $\kappa_g(t) = \kappa_g(\partial B, ds^2)(t)$, mit einem $t \in [0, 2\pi]$, wobei wir die kanonische Parametrisierung von ∂B gewählt haben. Außerdem erklären wir mit dieser Parametrisierung das Wegelement auf ∂B durch

$$W^2(t) = (E(z) \sin^2 t - 2F(z) \sin t \cos t + G(z) \cos^2 t)_{z=(\cos t, \sin t)}. \quad (5.5)$$

2. Es sei eine geschlossene reguläre Kurve $\mathbf{Y} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^{4,\alpha}([0, 2\pi])$ gegeben mit

$$\mathbf{Y}_t^2(t) = W^2(t). \quad (5.6)$$

Wir bezeichnen die Krümmung von \mathbf{Y} an der Stelle $t \in [0, 2\pi]$ mit $\kappa(t) = \kappa(\mathbf{Y})(t)$. Es gelten ebenfalls die Abschätzungen

$$\|\mathbf{Y}\|_{[0, 2\pi]}^{4,\alpha} \leq c \quad (5.7)$$

und

$$\kappa^2(t) - \kappa_g^2(t) \geq \frac{1}{c^2} \quad \text{für} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.8)$$

3. Wir suchen nun eine Lösung $\mathbf{X} : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^4(B) \cap C^3(\bar{B})$, welche in B dem nicht-linearen System partieller Differentialgleichungen

$$(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = g_{ij} \quad (5.9)$$

und mit $(u(t), v(t)) = (\cos(t), \sin(t))$ der Randbedingung

$$\mathbf{X}(u(t), v(t)) = \mathbf{Y}(t) \quad (5.10)$$

für $t \in [0, 2\pi]$ genügt.

Wir werden den folgenden Satz beweisen.

Satz 5.1.1. *Es sei \mathbf{X} eine Lösung von Problem 1 mit der Konstanten $c \in (0, \infty)$. Dann ist*

$$\mathbf{X} \in C^{4,\alpha}(B) \cap C^{3,\alpha}(\overline{B}), \quad (5.11)$$

darüberhinaus gibt es eine Konstante $C = C(c) \in (0, \infty)$ und einen konstanten Vektor \mathbf{X}^0 mit

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^0\|_B^{3,\alpha} \leq C(c). \quad (5.12)$$

Bemerkung 5.1.2. *Der Punkt 2 von Problem 1 beinhaltet eine ganze Klasse von Randkurven. Wir nennen zwei Randkurven, \mathbf{Y}_1 und \mathbf{Y}_2 , mit $\mathbf{Y}_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^1([0, T])$ für $i = 1, 2$ zueinander äquivalent, wenn es eine bijektive Abbildung $\tau : [0, T] \rightarrow [0, T] \in C^1([0, T])$ gibt mit*

$$\mathbf{Y}_1(\tau(t)) = \mathbf{Y}_2(t) \quad \text{für } t \in [0, T]. \quad (5.13)$$

Man prüft leicht nach, dass es sich bei der so erklärten Relation tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Allerdings bestimmt die Gleichung $\mathbf{Y}_t^2(t) = W^2(t)$ eindeutig einen Repräsentanten, es handelt sich also nicht um eine neue Freiheit in dem Problem. Betrachte dazu mit der Umparametrisierung τ die Gleichung

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{Y}(\tau(t)) \right)^2 = \mathbf{Y}_\tau^2(t) \dot{\tau}^2(t) \stackrel{!}{=} W^2(t) \quad (5.14)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \tau(t) = \frac{W(t)}{|\mathbf{Y}_\tau(\tau(t))|} \quad \text{mit } \tau(0) = 0. \quad (5.15)$$

Da $|\mathbf{Y}_\tau| > 0$ auf einer kompakten Menge gilt, finden wir eine Konstante $L \in (0, \infty)$ mit

$$\left| \frac{W(t)}{|\mathbf{Y}_\tau(\tau_1)|} - \frac{W(t)}{|\mathbf{Y}_\tau(\tau_2)|} \right| \leq L |\tau_1 - \tau_2| \quad (5.16)$$

und die Funktion τ ist nach einem Satz der gewöhnlichen Differentialgleichungen eindeutig bestimmt. Wir müssen nun noch zeigen, dass die so definierte Funktion $\mathbf{Y} \circ \tau$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten \mathbf{Y} ist. Das folgt aber gerade aus der Äquivalenzrelation verbunden mit der Kettenregel und der Eindeutigkeitsaussage für gewöhnliche Differentialgleichungen. Seien also zwei äquivalente Kurven

$$\mathbf{Y}_1(\theta) = \mathbf{Y}_2(\tau(\theta)), \quad (5.17)$$

dann folgen

$$\frac{d}{d\theta} \mathbf{Y}_1(\theta) = \frac{d}{d\tau} \mathbf{Y}_2(\tau(\theta)) \frac{d}{d\theta} \tau(\theta) \quad (5.18)$$

und wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \tau \circ \theta(t) = \frac{d}{d\theta} \tau(\theta) \frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{d}{d\theta} \tau(\theta) \frac{W(t)}{\left| \frac{d}{d\theta} \mathbf{Y}_1(\theta(t)) \right|} = \frac{W(t)}{\left| \frac{d}{d\tau} \mathbf{Y}_2(\tau \circ \theta(t)) \right|}. \quad (5.19)$$

Jetzt jedoch werden wir unsere a-priori Abschätzungen für Lösungen unseres Problem 1 etablieren. Wir wollen aus [Sa05], Kapitel XII, §7, Satz 2 anwenden. Er ist dort folgendermaßen formuliert:

Satz 5.1.3. *Es sei*

$$ds^2 = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2 = a_{ij} dz^i dz^j \quad (5.20)$$

eine positiv-definite quadratische Differentialform mit Koeffizienten $a_{ij} : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R} \in C^{1,\alpha}(\bar{B})$. Zu $\lambda > 0$ erfülle die quadratische Form

$$\frac{1}{\lambda} \xi^2 \leq a_{ij}(z) \xi^i \xi^j \leq \lambda \xi^2 \quad \text{für } z \in \bar{B} \quad \text{und} \quad \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.21)$$

Außerdem gelte die Abschätzung

$$\|a_{ij}\|_B^{1,\alpha} \leq \gamma \quad (5.22)$$

mit einem $\gamma > 0$. Dann gilt für jede positiv-orientierte, konforme und nullpunkttreue Abbildung

$$z = z(u, v) = (z^1(u, v), z^2(u, v)) : \bar{E} \rightarrow \bar{B} \in C^2(E) \cap C^1(\bar{E}) \quad (5.23)$$

die Aussage $z \in C^{2,\alpha}(\bar{E})$ und es gibt Konstanten $\Theta = \Theta(\lambda, \alpha, \gamma) > 0$ und $\Lambda = \Lambda(\lambda, \alpha, \gamma) < +\infty$ mit

$$\inf_{w \in E} (z_u^1 z_v^2 - z_v^1 z_u^2)(w) \geq \Theta \quad \text{und} \quad \|z\|_E^{2,\alpha} \leq \Lambda. \quad (5.24)$$

Allerdings kann dieser Satz etwas schwächer formuliert werden. Tatsächlich hat F. Sauvigny den folgenden Satz bewiesen.

Satz 5.1.4. *Es sei*

$$ds^2 = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2 = a_{ij} dz^i dz^j \quad (5.25)$$

eine positiv-definite quadratische Differentialform mit Koeffizienten $a_{ij} : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(\bar{B}) \cap C^{1,\alpha}(\partial B)$. Mit $\lambda > 0$ gelten für die quadratische Form die Ungleichungen

$$\frac{1}{\lambda} \xi^2 \leq a_{ij}(z) \xi^i \xi^j \leq \lambda \xi^2 \quad \text{für } z \in \bar{B} \quad \text{und} \quad \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.26)$$

Wir haben die Abschätzung

$$\|a_{ij} \circ (\cos t, \sin t)\|_{[0,2\pi]}^{1,\alpha} \leq \gamma \quad (5.27)$$

mit einem $\gamma > 0$. Weiter sei

$$z = z(u, v) = (z^1(u, v), z^2(u, v)) : \bar{E} \rightarrow \bar{B} \in C^2(E) \cap C^1(\bar{E}) \quad (5.28)$$

eine konforme, nullpunkttreue Abbildung, welche einem System

$$\Delta z^k = h_{ij}^k(z) \nabla z^i \nabla z^j \quad \text{für } w \in E \quad (5.29)$$

mit Koeffizienten $h_{ij}^k : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R} \in C^{0,\alpha}(\bar{B})$ und

$$\|h_{ij}^k\|_B^{0,\alpha} \leq \gamma \quad (5.30)$$

genügt. Dann folgt $z \in C^{2,\alpha}(\bar{E})$ und es gibt die Konstanten $\Theta = \Theta(\lambda, \alpha, \gamma) > 0$ und $\Lambda = \Lambda(\lambda, \alpha, \gamma) < +\infty$ mit

$$\inf_{w \in E} (z_u^1 z_v^2 - z_v^1 z_u^2)(w) \geq \Theta \quad \text{und} \quad \|z\|_E^{2,\alpha} \leq \Lambda. \quad (5.31)$$

Beweis: Man prüfe den Beweis von [Sa05], Kapitel XII, §7, Satz 2 auf die Gültigkeit unter diesen etwas schwächeren Voraussetzungen. \square

Bemerkung 5.1.5. Offenbar folgen unter den Voraussetzungen von Satz 5.1.3 die Voraussetzungen von Satz 5.1.4.

Ohne weitere geometrische Zusatzannahmen ist es auch nicht möglich, ein System der Form 5.29 herzuleiten. Allerdings haben wir solch ein System durch die Differentialgleichung $\mathcal{Q}(z) = 0$. Außerdem werden wir mit Hilfssatz 2.3.7 eine Abschätzung der Form (5.27) herleiten.

Hilfssatz 5.1.6. Die quadratische Differentialform ds^2 genüge der Bedingung 1.) von Problem 1. Weiter sei

$$z = z(u, v) = (z^1(u, v), z^2(u, v)) : \bar{E} \rightarrow \bar{B} \in C^2(E) \cap C^1(\bar{E}) \quad (5.32)$$

eine nullpunktreue Inverse einer konjugiert-konformen Abbildung einer zweiten Fundamentalform, welche die Integrationsbedingungen gemäß Hilfssatz 3.1.6 bezüglich ds^2 erfüllt. Dann genügt z einem System der Form (5.29). Darüberhinaus gibt es eine Konstante $C_1 = C_1(c) \in (0, \infty)$ mit

$$\|h_{ij}^k\|_B^{0,\alpha} \leq C_1(c). \quad (5.33)$$

Beweis: Mit Beispiel 4.2.2 sehen wir die Äquivalenz der Integrationsbedingungen mit der Differentialgleichung $\mathcal{Q}(z) = 0$. Da $K > 0$ gilt, erhalten wir äquivalent dazu

$$\Delta z^k + \frac{K_i}{2K} \nabla z^i \nabla z^k + \Gamma_{ij}^k \nabla z^i \nabla z^j = 0 \quad (5.34)$$

mit den Koeffizienten $h_{ij}^k = -\Gamma_{ij}^k - \frac{\partial}{\partial z^i} (\log \sqrt{K}) \delta_j^k$. Beachten wir die Definition der Inneren Krümmung, so finden wir eine Konstante $C_1 = C_1(c) \in (0, \infty)$ mit

$$\|h_{ij}^k\|_B^{0,\alpha} \leq C_1(c). \quad (5.35)$$

\square

Hilfssatz 5.1.7. Es sei ds^2 eine quadratische Differentialform, welche der Bedingung 1.) von Problem 1 genügt. Es sei weiter \mathbf{Y} eine geschlossene reguläre Kurve, welche der Bedingung 2.) von Problem 1 genügt. Dann gelten für die Größen

$$l_{ij} = \frac{\dot{u}^k \dot{u}^l}{\kappa_n \dot{u}^p g_{pq} \dot{u}^q} (-\bar{K} e_{ik} e_{lj} + (\kappa_n g_{ik} - \tau_n e_{ik})(\kappa_n g_{lj} + \tau_n e_{lj})) \quad (5.36)$$

mit der kanonischen Parametrisierung u^k von ∂B die Abschätzungen

$$\|l_{ij}\|_{\partial B}^{1,\alpha} \leq C_2(c) \quad (5.37)$$

mit einer Konstanten $C_2 = C_2(c) \in (0, \infty)$. Darüberhinaus sind die so definierten Funktionen Randwerte der zweiten Fundamentalform einer jeden Fläche \mathbf{X} mit $ds^2 = (d\mathbf{X})^2$ in B und $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ auf ∂B .

Beweis: Hilfssatz 2.3.7 liefert sofort die letzte Aussage der Behauptung. Wir müssen nur noch unsere Abschätzung etablieren. Wir definieren dazu gemäß Beispiel 2.2.10 die Funktionen

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{Y}} \times \ddot{\mathbf{Y}}|}{|\dot{\mathbf{Y}}|^3} \quad (5.38)$$

und

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}})}{(\dot{\mathbf{Y}} \times \ddot{\mathbf{Y}})^2}. \quad (5.39)$$

Wegen Punkt 2.) gibt es eine Konstante $D_1 = D_1(c) \in (0, \infty)$ mit

$$\|\kappa\|_{[0,2\pi]}^{2,\alpha} \leq D_1(c) \quad \text{und} \quad \|\tau\|_{[0,2\pi]}^{1,\alpha} \leq D_1(c). \quad (5.40)$$

Wir beachten nun Hilfssatz 2.2.8 und definieren die Funktionen

$$\kappa_n(t) = \sqrt[3]{\kappa^2(t) - \kappa_g^2(t)} \geq c \quad (5.41)$$

und

$$\tau_n(t) = \tau(t) - \dot{\phi}(t) \frac{1}{|\dot{\mathbf{Y}}(t)|} = \tau(t) + \frac{1}{|\dot{\mathbf{Y}}(t)|} \frac{\kappa_n(t)\dot{\kappa}_g(t) - \dot{\kappa}_n(t)\kappa_g(t)}{\kappa^2(t)} \quad (5.42)$$

mit der Funktion $\phi(t) = \arctan\left(\frac{\kappa_g(t)}{\kappa_n(t)}\right)$. Da es eine Konstante $D_2 = D_2(c)$ gibt mit

$$\|\kappa_g\|_{[0,2\pi]}^{2,\alpha} \leq D_2(c), \quad (5.43)$$

folgt die Existenz von $D_3 = D_3(c) \in (0, \infty)$ mit

$$\|\kappa_n\|_{[0,2\pi]}^{2,\alpha} \leq D_3(c) \quad \text{und} \quad \|\tau_n\|_{[0,2\pi]}^{1,\alpha} \leq D_3(c). \quad (5.44)$$

Folglich finden wir eine Konstante $C_2 = C_2(c) \in (0, \infty)$ mit

$$\|l_{ij}\|_{[0,2\pi]}^{1,\alpha} \leq C_2(c). \quad (5.45)$$

□

Wir haben also zwei von den drei entscheidenden Voraussetzungen von Satz 5.1.4 bereits nachgeprüft.

Hilfssatz 5.1.8. *Es sei ds^2 eine quadratische Differentialform, welche der Bedingung 1.) von Problem 1 genügt und $d\sigma^2$ eine positiv-definite zweite Fundamentalform. Dann gilt die Elliptizitätsabschätzung*

$$\frac{\overline{K}}{2H} \frac{EG - F^2}{E + G} |\xi|^2 \leq l_{ij} \xi^i \xi^j \leq 2H(E + G) |\xi|^2 \quad \text{für} \quad \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.46)$$

Beweis: Um die Elliptizität einer symmetrischen, positiv-definiten Matrix abzuschätzen, genügt es, den größten Eigenwert λ^+ nach oben und den kleinsten Eigenwert λ^- nach unten abzuschätzen. Durch Betrachtung des charakteristischen Polynoms, erhalten wir

$$0 = \lambda^2 - (L + N)\lambda + LN - M^2 = \lambda(\lambda - (L + N)) + LN - M^2 \geq \lambda(\lambda - (L + N)) \quad (5.47)$$

oder $\lambda^+ \leq L + N$ und durch Betrachtung der inversen Matrix $\lambda^- \geq \frac{LN - M^2}{L + N}$. Wir erhalten also zunächst

$$\frac{LN - M^2}{L + N} |\xi|^2 \leq l_{ij} \xi^i \xi^j \leq (L + N) |\xi|^2 \quad \text{für } \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.48)$$

Wir betrachten nun

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{E} \frac{L(EG - F^2) + LF^2 - 2MFE + NE^2}{2(EG - F^2)} > \frac{L}{2E} \quad (5.49)$$

und analog

$$H > \frac{N}{2G}. \quad (5.50)$$

Das liefert dann $L + N < 2H(E + G)$ und auch

$$\frac{LN - M^2}{L + N} = \bar{K} \frac{EG - F^2}{L + N} > \frac{\bar{K}}{2H} \frac{EG - F^2}{E + G}. \quad (5.51)$$

Damit ist alles bewiesen. \square

Um nun die Elliptizität der zweiten Fundamentalform einer Lösung von Problem 1 abzuschätzen, genügt es also die mittlere Krümmung nach oben abzuschätzen. Dazu zunächst der folgende

Hilfssatz 5.1.9. *Es sei ds^2 eine quadratische Differentialform, welche der Bedingung 1.) von Problem 1 genügt und $z_0 \in B$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U}(z_0) \subset B$ und eine konforme Abbildung*

$$z = z(u, v) = (z^1(u, v), z^2(u, v)) : E \rightarrow \mathcal{U}(w_0) \in C^2(E) \cap C^1(\bar{E}) \quad (5.52)$$

mit $z(0) = z_0$, $\mathcal{E} = \sqrt{EG - F^2}|_{z=z(w)}(z_u^1 z_v^2 - z_v^1 z_u^2)$ und $\nabla \mathcal{E}(0) = 0$.

Beweis: Mit Hilfe von Satz 3.1.1 führen wir global isotherme Parameter ein mit der Abbildung

$$z^* = z^*(\alpha, \beta) = (z^{*1}(\alpha, \beta), z^{*2}(\alpha, \beta)) : \bar{E}^* \rightarrow \bar{B} \in C^{2,\alpha}(\bar{E}^*). \quad (5.53)$$

Die Metrik lautet dann $ds^2 = \mathcal{E}^*(d\alpha^2 + d\beta^2)$. Die isotherme Form bleibt unter holomorphen Transformationen invariant, siehe dazu Beispiel 4.1.3 Punkt 3). Wir finden eine geeignete holomorphe Funktion f mit $\mathcal{E}^*(f)f'' + \mathcal{E}_f^*(f)(f')^2 = 0$, etwa ein quadratisches Polynom, und die Abbildung $z = z^* \circ f$ leistet das Gewünschte. \square

Wir beweisen nun die berühmte Weylsche Ungleichung.

Satz 5.1.10. (Weylsche Ungleichung) Sei \mathbf{X} eine Lösung von Problem 1 und $w_0 \in B$ ein Punkt, in dem H ein lokales Maximum annimmt. Dann folgt

$$H^2 \leq K - \frac{1}{4K} \Delta_{ds^2} K \quad (5.54)$$

an der Stelle $w_0 \in B$. Hierbei bezeichnet Δ_{ds^2} den Laplace-Beltrami Operator bezüglich ds^2 .

Beweis: Dieses ist eine parameterinvariante Ungleichung. Können wir sie also in einem Koordinatensystem beweisen, gilt sie automatisch in allen. Zunächst sei

$$\frac{l_{ij} dx^i dx^j}{\sqrt{EG - F^2}} = \lambda dx^2 + 2\mu dx dy + \nu dy^2 = \lambda_{ij} dx^i dx^j, \quad (5.55)$$

dann schreiben sich die Integrationsbedingungen gemäß Beispiel 3.1.7 in der Form $\lambda\nu - \mu^2 = K$ und

$$\begin{aligned} \lambda_v - \mu_u &= -\Gamma_{22}^2 \lambda + 2\Gamma_{12}^2 \mu - \Gamma_{11}^2 \nu, \\ \nu_u - \mu_v &= -\Gamma_{22}^1 \lambda + 2\Gamma_{12}^1 \mu - \Gamma_{11}^1 \nu. \end{aligned}$$

Weiter gilt $H = \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}(\lambda G - 2\mu F + \nu E)$. Mit Hilfssatz 5.1.9 führen wir nun um z_0 konforme Parameter ein mit $\nabla E(z_0) = 0$. Dann transformieren sich die Integrationsbedingungen zu

$$\begin{aligned} \lambda_v - \mu_u &= \frac{E_v}{2E}(\lambda - \nu) + \frac{E_u}{E}\mu, \\ \nu_u - \mu_v &= -\frac{E_u}{2E}(\lambda - \nu) + \frac{E_v}{E}\mu. \end{aligned}$$

Wir haben für die Krümmungen die Gleichungen

$$K = -\frac{1}{2E} \Delta \log E = -\frac{1}{2E} \frac{E\Delta E - \nabla E^2}{E^2} = \lambda\nu - \mu^2 \quad \text{und} \quad H = \frac{\lambda + \nu}{2}. \quad (5.56)$$

Wir differenzieren nun die Integrationsbedingungen und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_{uv} - \mu_{uu} &= \frac{EE_{uv} - E_u E_v}{2E^2}(\lambda - \nu) + \frac{EE_{uu} - E_u^2}{E^2}\mu + \frac{E_v}{2E}(\lambda_u - \nu_u) + \frac{E_u}{2E}\mu_u, \\ \lambda_{vv} - \mu_{uv} &= \frac{EE_{vv} - E_v^2}{2E^2}(\lambda - \nu) + \frac{EE_{uv} - E_u E_v}{E^2}\mu + \frac{E_v}{2E}(\lambda_v - \nu_v) + \frac{E_u}{2E}\mu_v, \\ \nu_{uu} - \mu_{uv} &= -\frac{EE_{uu} - E_u^2}{2E^2}(\lambda - \nu) + \frac{EE_{uv} - E_u E_v}{E^2}\mu - \frac{E_u}{2E}(\lambda_u - \nu_u) + \frac{E_v}{2E}\mu_u, \\ \nu_{uv} - \mu_{vv} &= -\frac{EE_{uv} - E_u E_v}{2E^2}(\lambda - \nu) + \frac{EE_{vv} - E_v^2}{E^2}\mu - \frac{E_u}{2E}(\lambda_v - \nu_v) + \frac{E_v}{2E}\mu_v. \end{aligned}$$

Wir addieren jeweils zwei Gleichungen und erhalten an der Stelle z_0 mit $\nabla E(z_0) = 0$

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= \lambda_{uv} + \nu_{uv} + 2EK\mu, \\ \lambda_{vv} - \nu_{uu} &= -EK(\lambda - \nu). \end{aligned}$$

Da nun H ein lokales Maximum in z_0 annimmt, folgt $\nabla\lambda = -\nabla\nu$ und $0 \geq 2(\nu H_{uu} - 2\mu H_{uv} + \lambda H_{vv})$, da die Matrix λ_{ij} positiv-definit ist und wir $|\mu| \leq \sqrt{\lambda\nu}$ beachten. Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
K - \frac{1}{4K} \Delta_{ds^2} K &= K - \frac{1}{4EK} \Delta K \\
&= K - \frac{1}{4EK} (\nu \Delta \lambda - 2\mu \Delta \mu + \lambda \Delta \nu + 2\nabla \lambda \nabla \nu - 2\nabla \mu^2) \\
&= K - \frac{1}{4EK} (\nu(\lambda_{uu} + \nu_{uu}) - 2\mu \Delta \mu + \lambda(\lambda_{vv} + \nu_{vv}) \\
&\quad - (\lambda_{vv} - \nu_{uu})(\lambda - \nu) - 2(\nabla \lambda^2 + \nabla \mu^2)) \\
&= K - \frac{1}{4EK} (2(\nu H_{uu} - 2\mu H_{uv} + \lambda H_{vv}) - 2(\nabla \lambda^2 + \nabla \mu^2) \\
&\quad + EK(-4\mu^2 - (\lambda - \nu)^2)) \\
&\geq K - \frac{1}{4} (4(\lambda\nu - \mu^2) - (\lambda + \nu)^2) \\
&= H^2.
\end{aligned}$$

□

Hilfssatz 5.1.11. *Sei \mathbf{X} eine Lösung von Problem 1. Dann gibt es eine Konstante $C_3 = C_3(c) \in (0, \infty)$, so dass die Ungleichung*

$$\|H\|_B^0 \leq C_3(c) \quad (5.57)$$

richtig ist.

Beweis: H als stetige Funktion nimmt sein Maximum im Inneren oder auf dem Rand an. Nimmt es das Maximum im Inneren an, so gilt die Ungleichung

$$H^2 \leq K - \frac{1}{4K} \Delta_{ds^2} K \quad (5.58)$$

gemäß Satz 5.1.10. Auf dem Rand gilt andererseits die Darstellung

$$H = \frac{K + \kappa_n^2 + \tau_n^2}{\kappa_n}. \quad (5.59)$$

Wie in Hilfssatz 5.1.7 finden wir eine Konstante $D_1 = D_1(c) \in (0, \infty)$ mit

$$\frac{K + \kappa_n^2 + \tau_n^2}{\kappa_n} \leq D_1(c). \quad (5.60)$$

Außerdem finden wir wegen Punkt 1) von 1 eine Konstante $D_2 = D_2(c) \in (0, \infty)$ mit

$$K - \frac{1}{4K} \Delta_{ds^2} K \leq D_2(c). \quad (5.61)$$

Zusammen ergibt das die behauptete Ungleichung mit $C_3(c) = \max \{D_1(c), \sqrt{D_2(c)}\}$. □

Satz 5.1.12. (A priori Abschätzungen für konjugiert-konforme Abbildungen) Sei \mathbf{X} eine Lösung von Problem 1 mit der Konstanten $c \in (0, \infty)$ und

$$z = z(u, v) = (z^1(u, v), z^2(u, v)) : \bar{E} \rightarrow \bar{B} \in C^2(E) \cap C^1(\bar{E}) \quad (5.62)$$

eine Inverse einer nullpunkttreuen und positiv-orientierten konjugiert-konformen Abbildung von \mathbf{X} . Dann gibt es eine Konstante $\Lambda = \Lambda(c) < +\infty$ mit

$$\inf_{w \in E} (z_u^1 z_v^2 - z_v^1 z_u^2)(w) \geq \frac{1}{\Lambda(c)} \quad \text{und} \quad \|z\|_E^{2,\alpha} \leq \Lambda(c). \quad (5.63)$$

Beweis: Wir wollen Satz 5.1.4 anwenden. Gemäß Hilfssatz 5.1.6 genügt z einem Differentialgleichungssystem mit hölderstetigen Koeffizienten, dabei hängt die $(0, \alpha)$ -Norm nur von den Daten c ab. Die zweite Fundamentalform können wir gemäß Hilfssatz 5.1.7 auf dem Rand in ihrer $(1, \alpha)$ -Norm nur von den Daten c abhängig abschätzen. Schließlich liefern die Hilfssätze 5.1.8 und 5.1.11 eine nur von den Daten c abhängige Abschätzung der Elliptizität der zweiten Fundamentalform. Satz 5.1.4 liefert somit die Existenz der behaupteten Konstanten und Abschätzungen. \square

Wir können nun unser Hauptresultat beweisen.

Beweis von Satz 5.1.1 Sei z Inverse einer nullpunkttreuen und positiv-orientierten konjugiert-konformen Abbildung von \mathbf{X} . Dann gilt

$$l^{ij} = \frac{1}{\sqrt{K(EG - F^2)}} \left(\frac{\nabla z^i \nabla z^j}{\nabla z^1 \times \nabla z^2} \right)_{w=z^{-1}(z)} \quad (5.64)$$

Mit Hilfe von Satz 5.1.12 finden wir also eine Konstante $D_1 = D_1(c) \in (0, \infty)$ mit

$$\|l_{ij}\|_B^{1,\alpha} \leq D_1(c). \quad (5.65)$$

Außerdem liefert die elliptische Regularitätstheorie gemäß [GT], Theorem 6.17 die Aussage $z \in C^{3,\alpha}(B)$ und somit $l_{ij} \in C^{2,\alpha}(B) \cap C^{1,\alpha}(\bar{B})$. Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform sind also zweimal stetig differenzierbar. Das Dreibein $(\mathbf{X}_i, \mathbf{M})$ genügt einem linearen System mit Koeffizienten aus $C^{2,\alpha}(B) \cap C^{1,\alpha}(\bar{B})$. Die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert neben $\mathbf{X}_i, \mathbf{M} \in C^{3,\alpha}(B) \cap C^{2,\alpha}(\bar{B})$ auch die Existenz einer Konstanten $D_2 = D_2(c) \in (0, \infty)$ mit

$$\|\mathbf{X}_i\|_B^{2,\alpha} \leq D_2(c) \quad \text{und} \quad \|\mathbf{M}\|_B^{2,\alpha} \leq D_2(c). \quad (5.66)$$

Wählen wir $\mathbf{X}^0 = \mathbf{X}(0)$ und beachten

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{X}(0) + \int_0^z \mathbf{X}_x dx + \mathbf{X}_y dy, \quad (5.67)$$

so erhalten wir schließlich die Behauptung. \square

Da in der bereits mehrfach zitierten Arbeit von Pogorelov [Po57], in der eine konvexe "Mütze auf eine Ebene aufgesetzt" wird, das einzige geometrische Randwertproblem gelöst wurde, wollen wir diese Randbedingung in unsere Sprache übersetzen. Hierbei hat die Randkurve der konvexen Fläche die Windung $\tau = 0$, da sie in einer Ebene liegt. Die Krümmung ist dabei frei. Mit Hilfssatz 2.2.8 und Beispiel 2.2.10 erhalten wir die Gleichung

$$\tau_n = \tau + \frac{\kappa'_n \kappa_g - \kappa_n \kappa'_g}{\kappa^2} = \frac{\kappa'_n \kappa_g - \kappa_n \kappa'_g}{\kappa^2}. \quad (5.68)$$

Wie üblich bezeichnet der Strich die Differentiation nach der Bogenlänge. Wir erhalten dann

Folgerung 5.1.13. *Sei X eine konvexe Fläche, deren Randkurve in einer Ebene liegt. Dann genügt eine konjugiert-konforme Abbildung mittels Hilfssatz 4.3.2 auf dem Rand mit den Abkürzungen*

$$\kappa_n := \sqrt{K} \frac{e_{ij} z_r^i z_t^j}{g_{kl} z_t^k z_t^l} \quad \text{und} \quad \tau_n := \sqrt{K} \frac{g_{kl} z_r^k z_t^l}{g_{kl} z_t^k z_t^l} \quad (5.69)$$

der Randbedingung

$$\tau_n = \frac{1}{W} \frac{\dot{\kappa}_n \kappa_g - \kappa_n \dot{\kappa}_g}{\kappa_n^2 + \kappa_g^2}. \quad (5.70)$$

5.2 Hyperbolische Systeme

In diesem Abschnitt wollen wir gewisse Cauchysche Anfangswertprobleme für nicht-lineare hyperbolische Systeme lösen. Diese benutzen wir, um später unseren Anfangsstreifen lokal zu einer Lösung des Einbettungsproblems zu ergänzen. Wir betrachten zunächst gewisse lineare Systeme und gehen dann über zu nicht-linearen Systemen mit homogenen Anfangsdaten. Die ganzen Betrachtungen gelten für parameterabhängige rechte Seiten und Anfangsdaten. Unter einer Differenzierbarkeitsvoraussetzung an die rechte Seite werden wir auch höhere Differenzierbarkeit der Lösung zeigen. Im Gegensatz zur Theorie der elliptischen Differentialgleichung, wo wir zu einer rechten Seite der Regularitätsklasse $C^{k,\alpha}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0, 1)$ eine Lösung der Regularitätsklasse $C^{k+2,\alpha}$ und zu einer rechten Seite der Regularitätsklasse $C^{k,1}$ bzw. C^{k+1} eine Lösung in $C^{k+2,1}$ erwarten, haben wir in der hyperbolischen Theorie keinen glättenden Effekt. Wir erwarten hier lediglich zu einer rechten Seite der Klasse $C^{0,1}$ eine Lösung der Regularitätsklasse

$$C_*(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{z = z(u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) : z_{uv} = z_{vu} \text{ existiert und ist stetig in } \Omega\}.$$

Ist darüber hinaus die rechte Seite in der Regularitätsklasse C^1 enthalten, erwarten wir gleich, dass der Gradient einer Lösung in der Regularitätsklasse C_* enthalten ist. Dies werden wir auch mit einer Differenzenquotientenmethode beweisen. Wir werden zunächst die Gebiete definieren, für welche wir unser Cauchysches Anfangswertproblem lösen. Wir folgen

dabei zunächst [Sa05], verfeinern die dortigen Aussagen jedoch, um höhere Regularität zu erhalten. Zunächst betrachten wir zu $R > 0$ und $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ den Quader

$$Q_R = Q_R(u_0, v_0) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u - u_0| < R, |v - v_0| < R\} \quad (5.71)$$

mit der Diagonalen

$$D_R = D_R(u_0, v_0) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = u_0 + \tau, v = v_0 - \tau, -R < \tau < R\} \subset Q_R. \quad (5.72)$$

Dabei teilt D_R den Quader Q_R in zwei Teile. Wir sagen $(u, v) \in Q_R$ liegt im oberen Teil von Q_R oder oberhalb der Diagonalen D_R , wenn die Ungleichung $u + v > u_0 + v_0$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $(u, v) \in Q_R^+$. Gilt andererseits $u + v < u_0 + v_0$, so sagen wir $(u, v) \in Q_R$ liegt im unteren Teil von Q_R oder unterhalb der Diagonalen D_R . Dann schreiben wir $(u, v) \in Q_R^-$. Das bedeutet wir können den Quader Q_R disjunkt zerlegen durch

$$Q_R = Q_R^- \dot{\cup} D_R \dot{\cup} Q_R^+. \quad (5.73)$$

Wir können nun für $(u, v) \in Q_R^+$ das sogenannte charakteristische Dreieck durch

$$T(u, v) = T(u, v; u_0, v_0) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : -(u - u_0) < -(\xi - u_0) < \eta - v_0 < v - v_0\} \subset Q_R^+ \quad (5.74)$$

definieren. Für $(u, v) \in Q_R^-$ definieren wir das charakteristische Dreieck durch

$$T(u, v) = T(u, v; u_0, v_0) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : -(u - u_0) > -(\xi - u_0) > \eta - v_0 > v - v_0\} \subset Q_R^-. \quad (5.75)$$

Es wird sich zeigen, dass die Lösung unseres hyperbolischen Anfangswertproblems im Punkt $(u, v) \in Q_R$ nur von den Anfangsdaten auf

$$D_R \cap \overline{T(u, v)} \quad (5.76)$$

abhängt. Schließlich definieren wir noch eine Einheitsnormale an D_R durch $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und eine Einheitstangente $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir beginnen mit dem

Hilfssatz 5.2.1. *Das lineare hyperbolische Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} z &= z(u, v) : Q_R \rightarrow \mathbb{R}^m \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m) \\ z_{uv}(u, v) &= 0 \quad \text{in } Q_R \\ \frac{\partial}{\partial t} z(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= f(\sqrt{2}\tau) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \nu} z(\tau + u_0, -\tau + v_0) = g(\sqrt{2}\tau) \quad \text{für } -R < \tau < R \end{aligned} \quad (5.77)$$

mit den Funktionen $f, g : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^0((-R, R), \mathbb{R}^m)$ hat eine Lösung $z \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m)$, dargestellt durch

$$z(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{u-u_0} f(\sqrt{2}t) dt - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-(v-v_0)}^0 f(\sqrt{2}t) dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-(v-v_0)}^{u-u_0} g(\sqrt{2}t) dt + z(0, 0) \quad \text{für } (u, v) \in Q_R. \quad (5.78)$$

für $(u, v) \in Q_R$. Hängen die Funktionen f und g auch noch stetig von einem Parameter ab,

$$f, g : (-R, R) \times [\lambda_-, \lambda_+] \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^0((-R, R) \times [\lambda_-, \lambda_+], \mathbb{R}^m), \quad (5.79)$$

so hängen auch die gemäß (5.78) dargestellte Lösung und deren erste Ableitungen stetig vom Parameter ab, also $z, z_u, z_v \in C^0(Q_R \times [\lambda_-, \lambda_+], \mathbb{R}^m)$.

Beweis: Wir wollen die Existenz beweisen. Dazu könnte man einfach eine Integraldarstellung notieren und zeigen, dass diese auch wirklich das Problem löst, aber wir wollen auch noch zeigen, wie man sie herleitet. Also lassen wir uns von [Sa04], Kapitel 6, §5 inspirieren. Da $z_{uv} = 0$ gilt, folgt

$$z(u, v) = F(u) + G(v) + c \quad (5.80)$$

mit einmal stetig differenzierbaren Funktionen F und G und der Konstanten $c \in \mathbb{R}^m$. Wir bestimmen die Ableitungen nach t und ν in Termen des Gradienten

$$\begin{aligned} z_t &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_u - z_v), \\ z_\nu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_u + z_v). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Dieses lineare Gleichungssystem können wir eindeutig nach z_u und z_v auflösen und erhalten

$$\begin{aligned} F' &= z_u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}z_t + \frac{1}{\sqrt{2}}z_\nu \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}f + \frac{1}{\sqrt{2}}g \right), \\ G' &= z_v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}z_t + \frac{1}{\sqrt{2}}z_\nu \right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}f + \frac{1}{\sqrt{2}}g \right). \end{aligned} \quad (5.82)$$

Hierbei werten wir die Funktionen an den Stellen $u = \tau + u_0$ und $v = -\tau + v_0$ aus. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} F'(\tau + u_0) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}f(\sqrt{2}\tau) + \frac{1}{\sqrt{2}}g(\sqrt{2}\tau) \right), \\ G'(-\tau + v_0) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}f(\sqrt{2}\tau) + \frac{1}{\sqrt{2}}g(\sqrt{2}\tau) \right) \end{aligned} \quad (5.83)$$

für alle $t \in (-R, R)$. Eine Integration liefert unter Beachtung von $u = \tau + u_0$ und $v = -\tau + v_0$ die Relationen

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{u-u_0} f(\sqrt{2}t) + g(\sqrt{2}t) dt + c_F, \quad (5.84)$$

$$G(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-(v-v_0)}^0 -f(\sqrt{2}t) + g(\sqrt{2}t) dt + c_G$$

mit den reellen Konstanten $c_F + c_G =: c$. Setzen wir dies nun ein, so folgt

$$z(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{u-u_0} f(\sqrt{2}t) dt - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-(v-v_0)}^0 f(\sqrt{2}t) dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-(v-v_0)}^{u-u_0} g(\sqrt{2}t) dt + c \quad (5.85)$$

für $(u, v) \in Q_R$. Eine elementare Rechnung liefert nun, dass $z \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m)$ gilt und auch noch Lösung unseres Anfangswertproblems ist. \square

Bemerkung 5.2.2. Für Eindeutigkeitsaussagen benötigen wir neben höherer Regularität auch noch, dass unsere Funktion an mindestens einem Punkt vorgeschrieben wird. Ob diese (möglicherweise verallgemeinerten) Aussagen allerdings auch unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 5.2.1 richtig bleiben, lassen wir offen.

Hilfssatz 5.2.3. Das lineare hyperbolische Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} z &= z(u, v) : Q_R \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^2(Q_R, \mathbb{R}^m) \\ z_{uv}(u, v) &= 0 \quad \text{in } Q_R \\ z(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= f(\sqrt{2}\tau) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} z(\tau + u_0, -\tau + v_0) = g(\sqrt{2}\tau) \quad \text{für } -R < \tau < R \end{aligned} \quad (5.86)$$

mit der Funktion $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^2((-R, R), \mathbb{R}^m)$ und der Funktion $g : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^1((-R, R), \mathbb{R}^m)$ hat genau eine Lösung $z \in C^2(Q_R)$, dargestellt durch

$$z(u, v) = \frac{1}{2} \left(f(\sqrt{2}(u - u_0)) + f(-\sqrt{2}(v - v_0)) \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-(v-v_0)}^{u-u_0} g(\sqrt{2}\tau) d\tau \quad \text{für } (u, v) \in Q_R. \quad (5.87)$$

Beweis: Wir beachten $z_t(\tau + u_0, -\tau + v_0) = \sqrt{2}f'(\sqrt{2}\tau)$ und wenden Hilfssatz 5.2.1 an. Dann erhalten wir damit die behauptete Formel mit der Setzung $z(0, 0) = f(0)$. Die Regularität der Lösung sehen wir der Darstellung in der Behauptung an. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien z_1 und z_2 zwei Lösungen unseres Anfangswertproblems. Dann betrachten wir zu der Differenzfunktion $z := z_1 - z_2$ die Pfaffsche Form

$$\omega := z_v(u, v) dv - z_u(u, v) du \quad (5.88)$$

mit der äußeren Ableitung

$$d\omega = 2z_{uv}(u, v) du dv = 0. \quad (5.89)$$

Unter Beachtung von $z|_{D_R} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial v} z|_{D_R} = 0$ erhalten wir neben $z_u|_{D_R} = 0$ auch $z_v|_{D_R} = 0$. Integrieren wir nun z entlang von $\partial T(u, v)$, so erhalten wir für $(u, v) \in Q_R$

$$\begin{aligned} 2z(u, v) &= (z(u, v) - z(u, -(u - u_0) + v_0)) - (z(u_0 - (v - v_0), v) - z(u, v)) \\ &= \int_{-(u-u_0)+v_0}^v z_v(u, s) ds - \int_u^{u_0-(v-v_0)} z_u(t, v) dt \\ &= \int_{\partial T(u, v)} \omega \\ &= \int_{T(u, v)} d\omega \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Also gibt es höchstens eine Lösung. □

Bemerkung 5.2.4. Der Darstellungsformel (5.87) in Satz 5.2.3 entnehmen wir die folgende Regularitätsaussage: Sind zu $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in [0, 1]$ die Funktionen $f \in C^{k+1, \alpha}((-R, R), \mathbb{R}^m)$

und $g \in C^{k,\alpha}((-R, R), \mathbb{R}^m)$ in den angegebenen Regularitätsklassen enthalten, so folgt $z \in C^{k+1,\alpha}(Q_R, \mathbb{R}^m)$. Sind darüber hinaus f und g reell-analytisch, so ist auch z reell-analytisch.

Nun sollten wir dazu übergehen, nicht-homogene rechte Seiten für die Differentialgleichung vorzuschreiben und für diese auch Existenzsätze beweisen. Wir betrachten nun die nicht-lineare rechte Seite

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}} &= \bar{\mathbf{h}}(u, v, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda) : Q_R \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times [\lambda_-, \lambda_+] \rightarrow \mathbb{R}^m \in \\ &C^0(Q_R \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times [\lambda_-, \lambda_+], \mathbb{R}^m), \end{aligned} \quad (5.91)$$

welche gleichmäßig für alle $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ und alle $(u, v) \in Q_R$ einer Lipschitzbedingung

$$|\bar{\mathbf{h}}(u, v, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \lambda) - \bar{\mathbf{h}}(u, v, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda)| \leq H (|\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z}|^2 + |\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}|^2 + |\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.92)$$

für alle $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}), (\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ mit einer Konstanten $L > 0$ genügt. Nun betrachten wir zu $f \in C^2((-R, R), \mathbb{R}^m)$ und $g \in C^2((-R, R), \mathbb{R}^m)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \bar{z}(u, v) : Q_R \rightarrow \mathbb{R}^m \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m) \\ \bar{z}_{uv}(u, v) &= \bar{\mathbf{h}}(u, v, \bar{z}(u, v), \bar{z}_u(u, v), \bar{z}_v(u, v), \lambda) \quad \text{in } Q_R \\ \bar{z}(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= f(\sqrt{2}\tau) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} \bar{z}(\tau + u_0, -\tau + v_0) = g(\sqrt{2}\tau) \quad \text{für } -R < \tau < R. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Sei $\tilde{z} \in C^2(Q_R, \mathbb{R}^m)$ die gemäß Satz 5.2.3 eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} z &= z(u, v) : Q_R \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^2(Q_R, \mathbb{R}^m) \\ z_{uv}(u, v) &= 0 \quad \text{in } Q_R \\ z(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= f(\sqrt{2}\tau) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} z(\tau + u_0, -\tau + v_0) = g(\sqrt{2}\tau) \quad \text{für } -R < \tau < R, \end{aligned} \quad (5.94)$$

dann ist $z(u, v) := \bar{z}(u, v) - \tilde{z}(u, v)$ mit $(u, v) \in Q_R$ genau dann Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} z &= z(u, v) : Q_R \rightarrow \mathbb{R}^m \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m) \\ z_{uv}(u, v) &= \bar{\mathbf{h}}(u, v, z(u, v) + \tilde{z}(u, v), z_u(u, v) + \tilde{z}_u(u, v), z_v(u, v) + \tilde{z}_v(u, v), \lambda) \quad \text{in } Q_R \\ z(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} z(\tau + u_0, -\tau + v_0) = 0 \quad \text{für } -R < \tau < R \end{aligned} \quad (5.95)$$

wenn $\bar{z} \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m)$ das Anfangswertproblem (5.93) löst. Setzen wir nun

$$\mathbf{h}(u, v, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \bar{\mathbf{h}}(u, v, \mathbf{z} + \tilde{z}(u, v), \mathbf{p} + \tilde{z}_u(u, v), \mathbf{q} + \tilde{z}_v(u, v), \lambda) \quad (5.96)$$

für $(u, v, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in Q_R \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, dann schreibt sich das Anfangswertproblem (5.95) in der Form

$$\begin{aligned} z &= z(u, v) : Q_R \rightarrow \mathbb{R}^m \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m) \\ z_{uv}(u, v) &= \mathbf{h}(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v), \lambda) \quad \text{in } Q_R \\ z(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} z(\tau + u_0, -\tau + v_0) = 0 \quad \text{für } -R < \tau < R. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Außerdem genügt dann auch \mathbf{h} einer Lipschitzbedingung zur Konstanten $H > 0$ gleichmäßig für alle $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ und alle $(u, v) \in Q_R$. Schließlich gehen wir über zu einer Integralgleichung mit dem folgenden

Hilfssatz 5.2.5. *Die Funktion $z \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m)$ ist Lösung des Anfangswertproblems (5.97) genau dann wenn sie in Q_R der Integralgleichung*

$$z(u, v) = \iint_{T(u, v)} \mathbf{h}(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_u(\xi, \eta), z_v(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (5.98)$$

genügt. Ist darüberhinaus $z \in C^1(Q_R, \mathbb{R}^m)$ eine Lösung der Integralgleichung (5.98), so folgt $z \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m)$.

Beweis: Sei $z \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m)$ eine Lösung des Anfangswertproblems 5.97. Wir folgen der Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.2.3 und betrachten die Pfaffsche Form

$$\omega := z_v(u, v) dv - z_u(u, v) du \quad (5.99)$$

mit der äußeren Ableitung

$$d\omega = 2z_{uv}(u, v) du dv = 2\mathbf{h}(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v), \lambda). \quad (5.100)$$

Eine Integration wie im zitierten Satz liefert, dass z der Integralgleichung

$$z(u, v) = \iint_{T(u, v)} \mathbf{h}(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_u(\xi, \eta), z_v(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (5.101)$$

genügt. Ist andererseits $z \in C^1(Q_R, \mathbb{R}^m)$ eine Lösung der Integralgleichung 5.98, so schreiben wir

$$z(u, v) = \int_{\eta=v_0-(u-u_0)}^v \int_{\xi=u_0-(\eta-v_0)}^u \mathbf{h}(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_u(\xi, \eta), z_v(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (5.102)$$

und erhalten

$$z_v(u, v) = \int_{\xi=u_0-(v-v_0)}^u \mathbf{h}(\xi, v, z(\xi, v), z_u(\xi, v), z_v(\xi, v)) d\xi. \quad (5.103)$$

Ebenso erhalten wir aus der Darstellung

$$z(u, v) = \int_{\xi=u_0-(v-v_0)}^u \int_{\eta=v_0-(\xi-u_0)}^v \mathbf{h}(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_u(\xi, \eta), z_v(\xi, \eta)) d\eta d\xi \quad (5.104)$$

die Gleichung

$$z_u(u, v) = \int_{\eta=v_0-(u-u_0)}^v \mathbf{h}(u, \eta, z(u, \eta), z_u(u, \eta), z_v(u, \eta)) d\eta. \quad (5.105)$$

Beides zusammen liefert $z \in C_*(Q_R, \mathbb{R}^m)$ und

$$z_{uv}(u, v) = \mathbf{h}(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v)) \quad \text{für } (u, v) \in Q_R. \quad (5.106)$$

Setzen wir in das Integral (5.102) $u = u_0 + t$ und $v = v_0 - t$ ein, so erhalten wir $z|_{D_R} = 0$. Aus den Integralen (5.103) und (5.105) folgt $z_u|_{D_R} = 0$ und $z_v|_{D_R} = 0$. Das liefert aber sofort $z_\nu|_{D_R} = 0$. Damit ist alles gezeigt. \square

Wir müssen also, um ein allgemeines Anfangswertproblem (5.93) zu lösen, die Anfangsdaten mit Hilfssatz 5.2.1 oder 5.2.3 zu einer Lösung der Wellengleichung fortsetzen. Anschließend können wir für die Differenzfunktion eine Integralgleichung lösen.

Satz 5.2.6. *Vorgelegt sei das Integralgleichungsproblem*

$$z(u, v) = \iint_{T(u, v)} \mathbf{h}(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_u(\xi, \eta), z_v(\xi, \eta), \lambda) d\xi d\eta \quad (5.107)$$

für $(u, v) \in Q_R$ und einer in $(\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ gleichmäßig lipschitzstetigen Funktion

$$\mathbf{h} : Q_R \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times [\lambda_-, \lambda_+] \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^0(Q_R \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times [\lambda_-, \lambda_+], \mathbb{R}^m) \quad (5.108)$$

unter der Bedingung

$$|\mathbf{h}(u, v, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda) - \mathbf{h}(u, v, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \lambda)| \leq H (|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}|^2 + |\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}|^2 + |\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.109)$$

für alle $(u, v) \in Q_R$, $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ und alle $(\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ mit einer Konstanten $H > 0$. Dann gibt es ein $0 < r = r(H, R) \leq R$ so dass das Integralgleichungsproblem genau eine Lösung $z \in C_*(Q_r, \mathbb{R}^m)$ in einem (möglicherweise kleineren) Rechteck Q_r hat. Dabei hängt die Lösungsschar darüberhinaus auch noch stetig vom Parameter λ ab: $z, z_u, z_v \in C^0(Q_r \times [\lambda_-, \lambda_+], \mathbb{R}^m)$.

Beweis: Zu $0 < r < R$ erklären wir den Banachraum

$$\mathcal{B}_r := \{z \in C^1(Q_r, \mathbb{R}^m) : z|_{D_r} = 0, z_\nu|_{D_r} = 0\} \quad (5.110)$$

mit der Norm

$$\|z\|_r := \left(\sup_{Q_r} |z|^2 + \sup_{Q_r} |z_u|^2 + \sup_{Q_r} |z_v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.111)$$

und die konvexe Menge

$$\mathcal{E}_{r, S} := \{z \in \mathcal{B}_r : \|z\|_r \leq S\} \quad (5.112)$$

mit dem Parameter $S > 0$. Außerdem erklären wir den Operator $\mathbf{I} : \mathcal{B}_R \rightarrow \mathcal{B}_R$ durch

$$\mathbf{I}[z] := \iint_{T(u, v)} \mathbf{h}(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_u(\xi, \eta), z_v(\xi, \eta), \lambda) d\xi d\eta \quad \text{in } Q_R. \quad (5.113)$$

Wir wollen nun ein $S = S(R)$ und ein $r = r(H, R, S) = r(H, R)$ angeben, so dass \mathbf{I} eingeschränkt auf $\mathcal{E}_{r, S}$ eine kontrahierende Selbstabbildung ist. Dazu folgen wir dem Beweis von F. Sauvigny in [Sa05], Kapitel XI, §4. Wir definieren

$$\begin{aligned} \phi(\tau) := & \max_{(\xi, \eta) \in T(u, v), \xi + \eta = u_0 + v_0 + \tau} (|z(\xi, \eta) - \bar{z}(\xi, \eta)|^2 + |z_u(\xi, \eta) - \bar{z}_u(\xi, \eta)|^2 \\ & + |z_v(\xi, \eta) - \bar{z}_v(\xi, \eta)|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

und erhalten wie in der zitierten Quelle

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}[z_1](u, v) - \mathbf{I}[z_2](u, v)| &\leq \int_{u_0+v_0}^{u+v} |(u - u_0) + (v - v_0) - \tau| \phi(\tau) d\tau \\ &\leq H \|z_1 - z_2\|_r \iint_{T(u, v)} d\xi d\eta \leq \frac{1}{2} H r^2 \|z_1 - z_2\|_r \end{aligned} \quad (5.114)$$

und auch

$$|(\mathbf{I}[z_1])_u(u, v) - (\mathbf{I}[z_2])_u(u, v)| \leq H \int_{u_0+v_0}^{u+v} \phi(\tau) d\tau \leq H r \|z_1 - z_2\|_r \quad (5.115)$$

bzw.

$$|(\mathbf{I}[z_1])_v(u, v) - (\mathbf{I}[z_2])_v(u, v)| \leq H \int_{u_0+v_0}^{u+v} \phi(\tau) d\tau \leq H r \|z_1 - z_2\|_r, \quad (5.116)$$

und zwar für alle $(u, v) \in Q_r$ und alle $z_1, z_2 \in \mathcal{B}_r$. Damit erhalten wir die Abschätzung

$$\|\mathbf{I}[z_1] - \mathbf{I}[z_2]\|_r \leq \frac{1}{2} H (4r + r^2) \|z_1 - z_2\|_r. \quad (5.117)$$

Außerdem gilt

$$\|\mathbf{I}[z]\|_r \leq \|\mathbf{I}[z] - \mathbf{I}[0]\|_r + \|\mathbf{I}[0]\|_r \leq \frac{1}{2} H (4r + r^2) \|z\|_r + \|\mathbf{I}[0]\|_r \quad (5.118)$$

für alle $z \in \mathcal{B}_r$. Wählen wir nun $S = 2\|\mathbf{I}[0]\|_R$, so folgen

$$\|\mathbf{I}[z](u, v)\|_r \leq \left(\frac{1}{2} H (4r + r^2) + \frac{1}{2} \right) S \quad (5.119)$$

und

$$\|\mathbf{I}[z_1] - \mathbf{I}[z_2]\|_r \leq \frac{1}{2} H (4r + r^2) \|z_1 - z_2\|_r \quad (5.120)$$

für alle $z, z_1, z_2 \in \mathcal{E}_{r, S}$. Wählen wir nun $r = -2 + \sqrt{H^{-1} + 4}$, so folgt $H(4r + r^2) = 1$ und folglich

$$\|\mathbf{I}[z](u, v)\|_r \leq S \quad (5.121)$$

und

$$\|\mathbf{I}[z_1] - \mathbf{I}[z_2]\|_r \leq \frac{1}{2} \|z_1 - z_2\|_r \quad (5.122)$$

für alle $z, z_1, z_2 \in \mathcal{E}_{r, S}$. Im Gegensatz zur zitierten Quelle brauchen wir uns aber keine Gedanken um eine etwaige Fortsetzung der rechten Seite im Rahmen einer Fixpunktiteration zu machen, da wir bereits eine Selbstabbildung vorliegen haben. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert nun die Behauptung. \square

Um später Regularitätsaussagen zu beweisen, sollten wir uns noch mit linearen Problemen beschäftigen.

Hilfssatz 5.2.7. *Vorgelegt sei das Integralgleichungsproblem*

$$z(u, v) = \iint_{T(u, v)} \mathbf{h}(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_u(\xi, \eta), z_v(\xi, \eta), \lambda) d\xi d\eta \quad (5.123)$$

für $(u, v) \in Q_R$. Dabei sei die rechte Seite linear in der Lösung und deren Ableitungen.

$$\mathbf{h}(u, v, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda) = \mathbf{A}(u, v, \lambda) + \mathbf{B}(u, v, \lambda)(\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (5.124)$$

mit der beschränkten vektorwertigen Abbildung

$$\mathbf{A} : Q_R \times [\lambda_-, \lambda_+] \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^0(Q_R \times [\lambda_-, \lambda_+], \mathbb{R}^m) \quad (5.125)$$

und der beschränkten matrixwertigen Abbildung

$$\mathbf{B} : Q_R \times [\lambda_-, \lambda_+] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times (3m)} \in C^0(Q_R \times [\lambda_-, \lambda_+], \mathbb{R}^{m \times (3m)}). \quad (5.126)$$

Hierbei gelte für alle $(u, v) \in Q_R$, $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ und alle $(\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$$|\mathbf{A}(u, v, \lambda)| \leq H, \quad \text{und} \quad |\mathbf{B}(u, v, \lambda)(\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q})| \leq H \sqrt{|\mathbf{z}|^2 + |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2} \quad (5.127)$$

mit einer Konstante $H > 0$. Sei weiter $z(u, v, \lambda) : Q_r \times [\lambda_-, \lambda_+] \rightarrow \mathbb{R}^m$ die gemäß Satz 5.2.6 existierende und stetig von λ abhängende Lösungsschar des Integralgleichungsproblems (5.123). Dann folgt

$$\|z(\cdot, \lambda_1) - z(\cdot, \lambda)\|_r \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \lambda_1 \rightarrow \lambda, \quad (5.128)$$

die Konvergenz ist also gleichmäßig in Q_r bis zu den ersten Ableitungen.

Beweis: Mit Ideen aus [Sa05], Kapitel XI, §5 und den Notationen aus dem Beweis des Satzes 5.2.6 betrachten wir die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} \psi(\tau, \lambda, \lambda_1) &:= \max_{(\xi, \eta) \in T(u, v), \xi + \eta = u_0 + v_0 + \tau} (|z(\xi, \eta, \lambda) - z(\xi, \eta, \lambda_1)|^2 \\ &\quad + |z_u(\xi, \eta, \lambda) - z_u(\xi, \eta, \lambda_1)|^2 + |z_v(\xi, \eta, \lambda) - z_v(\xi, \eta, \lambda_1)|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

definiert für $-r < \tau < r$ und $\lambda, \lambda_1 \in [\lambda_-, \lambda_+]$. Wir leiten für ψ nun eine Integralgleichung her. Wie im Beweis des vorherigen Satzes erhalten wir

$$|z(u, v, \lambda) - z(u, v, \lambda_1)| \leq C(H) \int_0^{u-u_0+v-v_0} \psi(\tau) + \varepsilon(\lambda, \lambda_1) d\tau \quad (5.129)$$

und

$$|z_u(u, v, \lambda) - z_u(u, v, \lambda_1)| \leq C(H) \int_0^{u-u_0+v-v_0} \psi(\tau) + \varepsilon(\lambda, \lambda_1) d\tau \quad (5.130)$$

bzw.

$$|z_v(u, v, \lambda) - z_v(u, v, \lambda_1)| \leq C(H) \int_0^{u-u_0+v-v_0} \psi(\tau) + \varepsilon(\lambda, \lambda_1) d\tau \quad (5.131)$$

für alle $(u, v) \in Q_r$ und alle $\lambda, \lambda_1 \in [\lambda_-, \lambda_+]$. Wir sollten dabei noch auf die Größe $C(H)\varepsilon(\lambda, \lambda_1)$ eingehen. Wir beachten $S = R^2H$ und $z(\cdot, \lambda), z(\cdot, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{r,S}$

$$\begin{aligned} & |\mathbf{A}(u, v, \lambda) + \mathbf{B}(u, v, \lambda)(z(u, v, \lambda), z_u(u, v, \lambda), z_v(u, v, \lambda)) \\ & - \mathbf{A}(u, v, \lambda_1) + \mathbf{B}(u, v, \lambda_1)(z(u, v, \lambda_1), z_u(u, v, \lambda_1), z_v(u, v, \lambda_1))| \\ & \leq |\mathbf{A}(u, v, \lambda) - \mathbf{A}(u, v, \lambda_1)| + |\mathbf{B}(u, v, \lambda) - \mathbf{B}(u, v, \lambda_1)|S \\ & + H|(z(u, v, \lambda), z_u(u, v, \lambda), z_v(u, v, \lambda)) - (z(u, v, \lambda_1), z_u(u, v, \lambda_1), z_v(u, v, \lambda_1))|. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Setzen wir $C(H)$ geeignet und

$$\varepsilon(\lambda, \lambda_1) := \frac{1}{C(H)} \sup_{(u,v) \in Q_r} (|\mathbf{A}(u, v, \lambda) - \mathbf{A}(u, v, \lambda_1)| + |\mathbf{B}(u, v, \lambda) - \mathbf{B}(u, v, \lambda_1)|S), \quad (5.133)$$

dabei existiert das Supremum in \mathbb{R} , da \mathbf{A} und \mathbf{B} sogar in der größeren Menge $Q_R \times [\lambda_-, \lambda_+]$ stetig sind. Damit erhalten wir für ψ die Integralgleichung

$$\psi(t, \lambda, \lambda_1) \leq C(H) \int_0^t \psi(\tau, \lambda, \lambda_1) + \varepsilon(\lambda, \lambda_1) d\tau. \quad (5.134)$$

Das Lemma von Gronwall liefert schließlich

$$\psi(t, \lambda, \lambda_1) \leq \varepsilon(\lambda, \lambda_1) (e^{C(H)t} - 1) \leq \varepsilon(\lambda, \lambda_1) (e^{C(H)r} - 1) \quad (5.135)$$

für alle $0 < t < r$. Analoges können wir auch für negatives t durchführen. Schließlich haben wir mit der Definition von ψ unter Beachtung von $\varepsilon \rightarrow 0$ für $\lambda_1 \rightarrow \lambda$ die Behauptung gezeigt. \square

Bemerkung 5.2.8. *Wir können bei linearen Problemen bekanntermaßen die Existenzmenge noch weiter optimieren. Aber da wir nur Regularitätsaussagen beweisen möchten, ist dies in unserer Situation nicht notwendig.*

Satz 5.2.9. *Vorgelegt sei das Integralgleichungsproblem*

$$z(u, v) = \iint_{T(u,v)} \mathbf{h}(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_u(\xi, \eta), z_v(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (5.136)$$

für $(u, v) \in Q_R$ und einer in $(\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ gleichmäßig lipschitzstetigen Funktion

$$\mathbf{h} : Q_R \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^1(Q_R \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \quad (5.137)$$

unter der Bedingung

$$|\mathbf{h}(u, v, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) - \mathbf{h}(u, v, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})| \leq H (|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}|^2 + |\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}|^2 + |\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.138)$$

für alle $(u, v) \in Q_R$ und alle $(\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ mit einer Konstanten $H > 0$. Dann ist die gemäß Satz 5.2.6 in einer Menge Q_r existierende Lösung $z \in C_*(Q_r, \mathbb{R}^m)$ sogar in der Regularitätsklasse $C^2(Q_r, \mathbb{R}^m)$ enthalten.

Beweis:

1. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\bar{\zeta}(u, v, h) := \frac{1}{h} (z(u+h, v) - z(u, v)) \quad (5.139)$$

für hinreichend kleine $|h| > 0$ und dazu passende $(u, v) \in Q_{r'}$. Wir leiten für $\bar{\zeta}$ zunächst Anfangsbedingungen her. Es gilt zunächst $z_u(t+u_0, -t+v_0) = 0 = z_v(t+u_0, -t+v_0)$ und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \bar{\zeta}(t+u_0, -t+v_0, h) &= \frac{1}{h} (z_u(t+u_0+h, -t+v_0) - z_u(t+u_0, -t+v_0)) \\ &= \frac{1}{h} \int_{\eta=v_0-(t+h)}^{-t+v_0} \mathbf{h}(u, \eta, z(u, \eta), z_u(u, \eta), z_v(u, \eta))|_{u=t+u_0+h} d\eta \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{h}(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v))|_{(u,v)=(t+u_0+h, \eta-t+v_0+h)} d\eta \\ &= \mathbf{h}(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v))|_{(u,v)=(t+u_0+h, -t+v_0+h+h')} \end{aligned}$$

mit einem $0 < |h'| = |h'(u_0, v_0, t, h)| < |h|$. Der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ liefert an dieser Stelle

$$\frac{\partial}{\partial u} \bar{\zeta}(t+u_0, -t+v_0, 0) = \mathbf{h}(t+u_0, -t+v_0, 0, 0, 0).$$

Eine analoge Rechnung führt auf

$$\frac{\partial}{\partial v} \bar{\zeta}(t+u_0, -t+v_0, h) = \mathbf{h}(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v))|_{(u,v)=(t+u_0+h+h'', -t+v_0+h)}$$

mit einem $0 < |h''| = |h''(u_0, v_0, t, h)| < |h|$. In der Grenze $h \rightarrow 0$ erhalten wir wieder

$$\frac{\partial}{\partial v} \bar{\zeta}(t+u_0, -t+v_0, 0) = \mathbf{h}(t+u_0, -t+v_0, 0, 0, 0). \quad (5.140)$$

Wir setzen nun $f(t, h) := \frac{\partial}{\partial u} \bar{\zeta}(t+u_0, -t+v_0, h) - \frac{\partial}{\partial v} \bar{\zeta}(t+u_0, -t+v_0, h)$ und $g(t, h) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \bar{\zeta}(t+u_0, -t+v_0, h) + \frac{\partial}{\partial v} \bar{\zeta}(t+u_0, -t+v_0, h) \right)$ für $|h| > 0$. Außerdem setzen wir $f(t, 0) = 0$ und $g(t, 0) = \sqrt{2} \mathbf{h}(t+u_0, -t+v_0, 0, 0, 0)$. Wir beachten, dass f, g für festes $h \neq 0$ stetig in $(-r', r')$ und auch stetig in $h = 0$ sind. Außerdem sind f, g für $h = 0$ sogar einmal stetig differenzierbar. Sei nun für alle hinreichend kleinen h die Funktion $\hat{\zeta} \in C_*(Q_{r'}, \mathbb{R}^m)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} &= \hat{\zeta}(u, v, h) : Q_{r'} \rightarrow \mathbb{R}^m \in C_*(Q_{r'}, \mathbb{R}^m) \\ \hat{\zeta}_{uv}(u, v, h) &= 0 \quad \text{in } Q_{r'} \\ \frac{\partial}{\partial t} \hat{\zeta}(\tau+u_0, -\tau+v_0, h) &= f(\sqrt{2}\tau, h) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} \hat{\zeta}(\tau+u_0, -\tau+v_0, h) = g(\sqrt{2}\tau, h) \end{aligned} \quad (5.141)$$

für $-r' < \tau < r'$. Wir verwenden dazu Hilfssatz 5.2.1 mit der Konstanten $c_h = \frac{1}{h} z(u_0+h, v_0)$. Mit diesem Hilfssatz folgt aber auch noch

$$\|\hat{\zeta}(\cdot, h) - \hat{\zeta}(\cdot, 0)\|_{r'} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0. \quad (5.142)$$

Außerdem gilt wegen Hilfssatz 5.2.3 die Aussage $\hat{\zeta}(\cdot, 0) \in C^2(Q_{r'}, \mathbb{R}^m)$.

2. Wir wollen nun für die Funktion

$$\zeta(u, v, h) := \bar{\zeta}(u, v, h) - \hat{\zeta}(u, v, h) \in C_*(Q_{r'}, \mathbb{R}^m) \quad \text{für } (u, v) \in Q_{r'} \quad (5.143)$$

ein Anfangswertproblem herleiten. Mit Punkt 1. dieses Beweises erhalten wir $\zeta_t = 0 = \zeta_v$ auf $D_{r'}$. Da auch noch $\zeta(u_0, v_0, h) = 0$ gilt, nimmt ζ also homogene Anfangswerte an. Wir bestimmen die gemischten Ableitungen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \zeta(u, v, h) &= \frac{1}{h} (\mathbf{h}(u+h, v, z(u+h, v), z_u(u+h, v), z_v(u+h, v)) \\ &\quad - \mathbf{h}(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v))) \\ &= \mathbf{A}(u, v, h) \\ &\quad + \mathbf{h}_z(u, v, \mathbf{z}(u, v, h), z_u(u+h, v), z_v(u+h, v)) \zeta(u, v, h) \\ &\quad + \mathbf{h}_p(u, v, z(u, v), \mathbf{p}(u, v, h), z_v(u+h, v)) \zeta_u(u, v, h) \\ &\quad + \mathbf{h}_q(u, v, z(u, v), z_u(u, v), \mathbf{q}(u, v, h)) \zeta_v(u, v, h) \end{aligned} \quad (5.144)$$

$$(5.145)$$

mit in $Q_{r'}$ für $h \rightarrow 0$ stetigen Funktionen $\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ und der vektorwertigen und in $Q_{r'}$ für $h \rightarrow 0$ stetigen Funktion (es gilt ja auch ξ stetig)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(u, v, h) &:= \mathbf{h}_u(\xi(u, v, h), v, z(u+h, v), z_u(u+h, v), z_v(u+h, v)) \\ &\quad + \mathbf{h}_z(u, v, \mathbf{z}(u, v, h), z_u(u+h, v), z_v(u+h, v)) \hat{\zeta}(u, v, h) \\ &\quad + \mathbf{h}_p(u, v, z(u, v), \mathbf{p}(u, v, h), z_v(u+h, v)) \hat{\zeta}_u(u, v, h) \\ &\quad + \mathbf{h}_q(u, v, z(u, v), z_u(u, v), \mathbf{q}(u, v, h)) \hat{\zeta}_v(u, v, h). \end{aligned} \quad (5.146)$$

$$(5.147)$$

Dies ist aber ein System aus Hilfssatz 5.2.7 und wir erhalten

$$\|\zeta(\cdot, h) - \zeta(\cdot, 0)\|_{r'} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0. \quad (5.148)$$

3. Die Punkte 1. und 2. zusammen liefern $\bar{\zeta}(\cdot, 0) = z_u \in C_*(Q_{r'}, \mathbb{R}^m)$. Verfahren wir mit dem Differenzenquotienten nach v analog so erhalten wir auch $z_v \in C_*(Q_{r'}, \mathbb{R}^m)$. Da z selbst in der Klasse $C_*(Q_{r'}, \mathbb{R}^m)$ liegt, folgt $z_{uv} = z_{vu}$ und wir erhalten $z \in C^2(Q_{r'}, \mathbb{R}^m)$. □

Wir wollen nun unseren Existenzsatz auf die geometrisch relevanten Systeme spezialisieren.

Satz 5.2.10. *Seien $\mathbf{k}_{ij}^k = \mathbf{k}_{ij}^k(\mathbf{z}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\bar{\Omega})$ Funktionen auf der konvexen, offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Dabei laufen $k = 1, \dots, m$ und $i, j = 1, 2$ und es gibt H_0 und H_1 mit*

$$\|\mathbf{k}_{ij}^k\|_0^\Omega \leq H_0 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{k}_{ij}^k\|_1^\Omega \leq H_1. \quad (5.149)$$

Wir setzen

$$\mathbf{h}^k(\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{k}_{11}^k(\mathbf{z})\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_{12}^k(\mathbf{z})\mathbf{p}_1\mathbf{q}_2 + \mathbf{k}_2^k(\mathbf{z})\mathbf{p}_2\mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_{22}^k(\mathbf{z})\mathbf{p}_2\mathbf{q}_2. \quad (5.150)$$

Sei weiter $\zeta = \zeta(t) \subset \subset \Omega$ ein reguläres parametrisches C^2 Kurvenstück und $\zeta' = \zeta'(t)$ eine einmal stetig differenzierbare Abbildung für $-R \leq t \leq R$. Weiter gibt es Konstanten A_1 und A_2 mit

$$\|\zeta\|_2^{(-R,R)} \leq A_2 \quad \text{und} \quad \|\zeta'\|_1^{(-R,R)} \leq A_1. \quad (5.151)$$

Wir nennen weiter $d := \text{dist}(\partial\Omega, \zeta(-R, R))$ Dann gibt es ein $0 < r = r(H_0, H_1, A_1, A_2, d, R, m)$ und ein $S_0 = S_0(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r) < \infty$, so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} z &= z(u, v) : Q_r \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^m) \\ z_{uv}(u, v) &= \mathbf{h}(z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v)) \quad \text{in } Q_r \\ z(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= \zeta(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} z(\tau + u_0, -\tau + v_0, h) = \zeta'(\tau) \quad \text{für } -r < \tau < r \end{aligned} \quad (5.152)$$

im Raum \mathcal{E}_{r, S_0} eindeutig lösbar ist.

Beweis:

1. Wir kontrollieren den Beweis von Satz 5.2.6. Zunächst ergänzen wir die Anfangswerte durch eine Lösung \hat{z} der Wellengleichung in Q_R . Wir erhalten eine Abschätzung

$$\|\hat{z}\|_r \leq \|\hat{z}\|_R \leq C_1(A_1, A_2, R) \quad (5.153)$$

mit einer Konstanten $C_1 = C_1(A_1, A_2, R) \in (0, \infty)$. Mit dem Verfahren unter der Bemerkung 5.2.4 gehen wir über zu homogenen Anfangsdaten. Wir betrachten die transformierten Koeffizienten

$$\bar{\mathbf{h}}^k(u, v, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) := \mathbf{h}^k(\mathbf{z} + \hat{z}(u, v), \mathbf{p} + \hat{z}_u(u, v), \mathbf{q} + \hat{z}_v(u, v)) \quad (5.154)$$

und ermitteln eine Lipschitzabschätzung für $|\mathbf{z}|^2 + |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 \leq S^2$ mit dem festen, aber beliebigen Parameter $S > 0$

$$\begin{aligned} &|\bar{\mathbf{h}}^k(u, v, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) - \bar{\mathbf{h}}^k(u, v, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})| \\ &\leq |\mathbf{k}_{ij}^k(\mathbf{z} + \hat{z}(u, v))(\mathbf{p}^i + \hat{z}_u^i(u, v))(\mathbf{q}^j + \hat{z}_v^j(u, v)) \\ &\quad - \mathbf{k}_{ij}^k(\bar{\mathbf{z}} + \hat{z}(u, v))(\bar{\mathbf{p}}^i + \hat{z}_u^i(u, v))(\bar{\mathbf{q}}^j + \hat{z}_v^j(u, v))| \\ &\leq H_1(S + C_1)^2|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}| + H_0(S + C_1)|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}| + H_0(S + C_1)|\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}| \\ &\leq (H_1(S + C_1) + 2H_0)(S + C_1)(|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}|^2 + |\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}|^2 + |\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dies gilt aber nur für die \mathbf{z} und $\bar{\mathbf{z}}$, für die $\mathbf{k}_{ij}^k(\mathbf{z} - \hat{z}(u, v))$ und $\mathbf{k}_{ij}^k(\bar{\mathbf{z}} - \hat{z}(u, v))$ noch erklärt sind. Wir kommen darauf gleich zurück. Wir erhalten mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 5.2.6

$$\|\mathbf{I}[z_1] - \mathbf{I}[z_2]\|_r \leq \frac{1}{2}(H_1(S + C_1) + 2H_0)(S + C_1)(4r + r^2)\|z_1 - z_2\|_r \quad (5.155)$$

und

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I}[z]\|_r &\leq \frac{1}{2}(H_1(S + C_1r) + 2H_0)(S + C_1r)(4r + r^2)\|z\|_r + \|\mathbf{I}[0]\|_r \\ &\leq \frac{1}{2}(H_1(S + C_1) + 2H_0)(S + C_1)(4r + r^2)S + \frac{1}{2}H_0C_1^2(4r + r^2) \end{aligned}$$

für alle $z, z_1, z_2 \in \mathcal{E}_{r,S}$. Im Gegensatz zu dem zitierten Satz hängt hier die Lipschitzkonstante $C_2 = C_2(S) = C_2(H_0, H_1, A_1, A_2, R, S) := (H_1(S + C_1) + 2H_0)(S + C_1)$ von S ab. Es gilt nämlich $C_2(S) \rightarrow \infty$ für $S \rightarrow \infty$. Außerdem ist C_2 in einer Umgebung von $S = 0$ nach unten durch eine positive Konstante beschränkt. Nun stellen wir sicher, dass $z(u, v) + \hat{z}(u, v) \in \Omega$ erfüllt ist für alle $z \in \mathcal{E}_{r,S}$ und $(u, v) \in Q_r$. Dies ist aber sicher dann der Fall, wenn

$$|z(u, v) + \hat{z}(u, v) - \zeta(t)| < d \quad (5.156)$$

für alle $(u, v) \in Q_r$ und alle $t \in (-r, r)$. Der Taylorsche Satz an der Entwicklungsstelle $(t + u_0, -t + v_0)$ liefert dann mit Zwischenstellen $\xi_1, \dots, \xi_m \in Q_r$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |z(u, v) + \hat{z}(u, v) - \zeta(t)| &= \sum_{k=1}^m |u - u_0 - t| |z_u^k(\xi_k) + \hat{z}_u^k(\xi_k)| \\ &\quad + |v - v_0 + t| |z_v^k(\xi_k) + \hat{z}_v^k(\xi_k)| \\ &\leq 4mr(S + C_1). \end{aligned} \quad (5.157)$$

Für festes S erhalten wir hier $r \leq \frac{d}{8m(S+C_1)}$ als Forderung an r .

2. Damit \mathbf{I} eine kontrahierende Selbstabbildung auf $\mathcal{E}_{r,S}$ wird, müssen wir zu fest gewähltem S r so wählen, dass neben $r \leq \frac{d}{8m(S+C_1)}$ auch noch die Ungleichungen

$$C_2(4r + r^2) \leq 1 \quad (5.158)$$

und

$$H_0C_1^2(4r + r^2) \leq S \quad (5.159)$$

erfüllt sind. Wir betrachten die erste Ungleichung und bestimmen die Nullstellen des Polynoms

$$\begin{aligned} p(r) &= r^2 + 4r - \frac{1}{C_2} \\ &= (r + 2)^2 - 4 - \frac{1}{C_2}. \end{aligned} \quad (5.160)$$

Offenbar gibt es eine positive Nullstelle und wir wählen nun auch noch

$$r \leq -2 + \sqrt{4 + \frac{1}{C_2}}. \quad (5.161)$$

Aus der zweiten Ungleichung erhalten wir (denn: $H_0C_1^2 > 0$) analog

$$r \leq -2 + \sqrt{4 + \frac{S}{H_0C_1^2}}. \quad (5.162)$$

Insgesamt bedeutet das, dass wir ein positives r folgender Maßen wählen:

$$\begin{aligned} r &= r(S) = r(S, H_0, H_1, A_1, A_2, R, d) \\ &= \min \left\{ \frac{d}{8m(S + C_1)}, -2 + \sqrt{4 + \frac{1}{C_2(S)}}, -2 + \sqrt{4 + \frac{S}{H_0 C_1^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.163)$$

Nun ist die Funktion $r(S)$ für nicht-negatives S stetig und für positives S selbst wieder positiv. Außerdem erfüllt sie $r(0) = 0$ und $\lim_{S \rightarrow \infty} r(S) = 0$. Sie nimmt also in einem Punkt $S_0 = S_0(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r)$ ein Maximum mit Wert $r := r(S_0) = r(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d)$ an.

□

Da wir den Raum $\mathcal{E}_{r,S}$ nicht wirklich fest wählen, könnte es für verschiedene S voneinander verschiedene Lösungen geben. Daher werden wir noch einen Eindeutigkeitssatz beweisen.

Satz 5.2.11. *Unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 5.2.10 seien $Z, \bar{Z} \in C_*(\bar{Q}_r, \mathbb{R}^m)$ Lösungen des Integralgleichungsproblems*

$$z^k(u, v) = \iint_{T(u,v)} \mathbf{k}_{ij}^k(z + \tilde{z})(z_u^i + \tilde{z}_u^i)(z_v^j + \tilde{z}_v^j)|_{(u,v)=(\xi,\eta)} d\xi d\eta \quad \text{in } Q_r \quad (5.164)$$

Dann folgt

$$Z \equiv \bar{Z}. \quad (5.165)$$

Beweis: Zunächst sei $S > 0$ so groß gewählt, dass

$$\max \{ \|Z\|_r, \|\bar{Z}\|_r \} \leq S \quad (5.166)$$

richtig ist. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \max_{(\xi,\eta) \in T(u,v), \xi+\eta=u_0+v_0+\tau} (|Z(u, v) - \bar{Z}(u, v)|^2 \\ &\quad + |Z_u(u, v) - \bar{Z}_u(u, v)|^2 + |Z_v(u, v) - \bar{Z}_v(u, v)|^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.167)$$

und wieder eine Integralgleichung her. Zunächst beachten wir

$$\begin{aligned} &|\mathbf{k}_{ij}^k(Z)Z_u^i Z_v^j - \mathbf{k}_{ij}^k(\bar{Z})\bar{Z}_u^i \bar{Z}_v^j| \\ &\leq |\mathbf{k}_{ij}^k(Z) - \mathbf{k}_{ij}^k(\bar{Z})|(S + C_1)^2 + H_0(S + C_1)|Z_u^i - \bar{Z}_u^i| + H_0(S + C_1)|Z_v^j - \bar{Z}_v^j| \\ &\leq (H_1(S + C_1)^2 + 2H_0(S + C_1)) \\ &\quad (|Z(u, v) - \bar{Z}(u, v)|^2 + |Z_u(u, v) - \bar{Z}_u(u, v)|^2 + |Z_v(u, v) - \bar{Z}_v(u, v)|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $L := H_1(S + C_1)^2 + 2H_0(S + C_1)$ erhalten wir

$$\phi(t) \leq \tilde{L} \int_0^t \phi(\tau) d\tau \quad (5.168)$$

für $0 < t < r$ mit einem $\tilde{L} = \tilde{L}(L, r) < \infty$ und das Lemma von Gronwall liefert in diesem singulären Fall

$$\phi(t) \equiv 0, \quad (5.169)$$

womit dann alles gezeigt ist. \square

5.3 Globale Diffeomorphismen

Wir wollen die Überlegungen des letzten Abschnittes im Fall $m = 2$ fortsetzen und weitere Voraussetzungen einbringen. Diese werden es uns ermöglichen, in einem Gebiet, dessen Größe nur von den Daten der auftretenden geometrischen Probleme abhängt, die Abbildungen zu einem globalen Diffeomorphismus zu machen.

Zunächst benötigen wir eine C^2 -Abschätzung:

Satz 5.3.1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2.10 betrachten wir die Lösung $z \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^2)$ des dortigen Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} z &= z(u, v) : Q_r \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^m) \\ z_{uv}(u, v) &= \mathbf{k}_{ij}(z(u, v)) z_u^i(u, v) z_v^j(u, v) \quad \text{in } Q_r \\ z(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= \zeta(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} z(\tau + u_0, -\tau + v_0, h) = \zeta'(\tau) \quad \text{für } -r < \tau < r. \end{aligned} \quad (5.170)$$

Dann gibt es eine Konstante $C_2 = C_2(H_0, H_1, A_1, A_2, d, R, r) < \infty$, so dass die Abschätzung

$$\|z\|_{Q_r}^2 \leq C_2(H_0, H_1, A_1, A_2, d, R, r) \quad (5.171)$$

richtig ist.

Beweis:

1. Wie in den Beweisen des letzten Abschnittes zerlegen wir z in eine Summe aus einer Lösung der Wellengleichung \hat{z} zu unseren Anfangsdaten

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \hat{z}(u, v) : Q_r \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^m) \\ \hat{z}_{uv}(u, v) &= 0 \quad \text{in } Q_r \\ \hat{z}(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= \zeta(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} \hat{z}(\tau + u_0, -\tau + v_0, h) = \zeta'(\tau) \quad \text{für } -r < \tau < r, \end{aligned} \quad (5.172)$$

und in eine Lösung \tilde{z} des gestörten nicht-linearen Problems zu homogenen Anfangsdaten

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \tilde{z}(u, v) : Q_r \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^m) \\ \tilde{z}_{uv}(u, v) &= \mathbf{k}_{ij}(\hat{z} + \tilde{z})(\hat{z}_u^i + \tilde{z}_u^i)(\hat{z}_v^j + \tilde{z}_v^j) \quad \text{in } Q_r \\ \tilde{z}(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} \tilde{z}(\tau + u_0, -\tau + v_0, h) = 0 \quad \text{für } -r < \tau < r. \end{aligned} \quad (5.173)$$

Aus Hilfssatz 5.2.3 erhalten wir die eindeutige Darstellung

$$\hat{z}(u, v) = \frac{1}{2} (\zeta(u - u_0) + \zeta(-(v - v_0))) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-(v-v_0)}^{u-u_0} \zeta'(\tau) d\tau \quad \text{für } (u, v) \in Q_r, \quad (5.174)$$

und somit die Abschätzung

$$\|\hat{z}\|_{Q_r}^2 \leq D_1(A_0, A_1, r). \quad (5.175)$$

Die Lösung \tilde{z} unseres nicht-linearen Problems haben wir im Beweis von Satz 5.2.10 in der Klasse $\mathcal{E}_{r,S}$ erbracht. Dabei ist $S = S_0(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d)$ ein Parameter und liefert

$$\|\tilde{z}\|_{Q_r}^1 \leq S_0(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r). \quad (5.176)$$

2. Wenn wir C^2 -Abschätzungen für \tilde{z} etablieren wollen, müssen wir dem Beweis von Satz 5.2.9 folgen und den Gradienten \tilde{z}_u bzw. \tilde{z}_v betrachten. Ohne Einschränkung sei ab jetzt $\tilde{z}_u = \tilde{\zeta} + \hat{\zeta}$. Im Beweis von Satz 5.2.9 leiten wir für $\tilde{\zeta}$ das lineare System

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} &= \tilde{\zeta}(u, v) : Q_r \rightarrow \mathbb{R}^m \in C_*(Q_r, \mathbb{R}^m) \\ \tilde{\zeta}_{uv}(u, v) &= \mathbf{A}(u, v) + \mathbf{B}(u, v)(\tilde{\zeta}(u, v), \tilde{\zeta}_u(u, v), \tilde{\zeta}_v(u, v)) \in Q_r \\ \tilde{\zeta}(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} \tilde{\zeta}(\tau + u_0, -\tau + v_0, h) = 0 \quad \text{für } -r < \tau < r, \end{aligned} \quad (5.177)$$

her. Dabei ist wieder $\hat{\zeta}$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} &= \hat{\zeta}(u, v) : Q_r \rightarrow \mathbb{R}^m \in C_*(Q_r, \mathbb{R}^m) \\ \hat{\zeta}_{uv}(u, v) &= 0 \quad \text{in } Q_r \\ \hat{\zeta}(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} \hat{\zeta}(\tau + u_0, -\tau + v_0, h) = g(\tau) \quad \text{für } -r < \tau < r, \end{aligned} \quad (5.178)$$

mit der Funktion

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \sqrt{2} \mathbf{h}(\tau + u_0, -\tau + v_0, 0, 0, 0) \\ &= \sqrt{2} \mathbf{k}_{ij}(\hat{z} + \tilde{z})(\hat{z}_u^i + \tilde{z}_u^i)(\hat{z}_v^j + \tilde{z}_v^j)|_{(u,v)=(\tau+u_0, -\tau+v_0)} \\ &= \sqrt{2} \mathbf{k}_{ij}(\hat{z})(\hat{z}_u^i)(\hat{z}_v^j)|_{(u,v)=(\tau+u_0, -\tau+v_0)}. \end{aligned} \quad (5.179)$$

Mit Hilfssatz 5.2.3 erhalten wir eine Konstante $D_2 = D_2(H_0, H_1, A_0, A_1, r) < \infty$ mit

$$\|\hat{\zeta}\|_{Q_r}^1 \leq D_2(H_0, H_1, A_0, A_1, r). \quad (5.180)$$

Jetzt können wir die Koeffizienten \mathbf{A} und \mathbf{B} abschätzen. In Satz 5.2.9 haben wir sie bestimmt, wir erhielten dort

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(u, v) &:= \mathbf{h}_u(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v)) \\ &\quad + \mathbf{h}_z(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v)) \hat{\zeta}(u, v) \\ &\quad + \mathbf{h}_p(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v)) \hat{\zeta}_u(u, v) \\ &\quad + \mathbf{h}_q(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v)) \hat{\zeta}_v(u, v) \end{aligned} \quad (5.181)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(u, v) &:= (\mathbf{h}_z(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v)), \\ &\quad \mathbf{h}_p(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v)), \\ &\quad \mathbf{h}_q(u, v, z(u, v), z_u(u, v), z_v(u, v))). \end{aligned} \quad (5.182)$$

Wir erhalten zwei Konstanten $D_3 = D_3(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r) < \infty$ und $D_4 = D_4(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r)$ mit

$$\|\mathbf{A}\|_{Q_r}^0 \leq D_3(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r) \quad (5.183)$$

und

$$\|\mathbf{B}\|_{Q_r}^0 \leq D_4(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r). \quad (5.184)$$

3. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\phi(\tau) := \max_{(\xi, \eta) \in T(u, v), \xi + \eta = u_0 + v_0 + \tau} \left(|\tilde{\zeta}(\xi, \eta)|^2 + |\tilde{\zeta}_u(\xi, \eta)|^2 + |\tilde{\zeta}_v(\xi, \eta)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.185)$$

Außerdem gilt für $\hat{\zeta}$ die Integralgleichung

$$\tilde{\zeta}(u, v) = \iint_{T(u, v)} \mathbf{A} + \mathbf{B}(\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}_u, \tilde{\zeta}_v) d\xi d\eta. \quad (5.186)$$

Diese schätzen wir wieder ab. Wir erhalten wie im Beweis von Satz 5.2.6 neben

$$\begin{aligned} |\tilde{\zeta}(u, v)| &\leq \iint_{T(u, v)} D_3 + D_4(|\tilde{\zeta}|^2 + |\tilde{\zeta}_u|^2 + |\tilde{\zeta}_v|^2)^{1/2} d\xi d\eta \\ &\leq \int_{u_0 + v_0}^{u+v} D_3 r + D_4 r \phi(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.187)$$

auch noch

$$|\tilde{\zeta}(u, v)_u| \leq \int_{u_0 + v_0}^{u+v} D_3 + D_4 \phi(\tau) d\tau \quad (5.188)$$

und

$$|\tilde{\zeta}(u, v)_v| \leq \int_{u_0 + v_0}^{u+v} D_3 + D_4 \phi(\tau) d\tau. \quad (5.189)$$

Insgesamt erhalten wir mit $D_5 = D_5(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r) < \infty$ und $D_6 = D_6(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r) < \infty$

$$\phi(t) \leq D_5 \int_0^t \phi(\tau) + D_6 d\tau, \quad (5.190)$$

und das Lemma von Gromwall liefert

$$\|\tilde{\zeta}\|_{Q_r}^1 \leq \phi(r) \leq D_6 (e^{D_5 r} - 1) =: D_7(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r). \quad (5.191)$$

4. Punkt 2. und 3. dieses Beweises liefern

$$\|\tilde{z}_u\|_{Q_r}^1 \leq \|\hat{\zeta}\|_{Q_r}^1 + \|\tilde{\zeta}\|_{Q_r}^1 \leq D_2 + D_7 \quad (5.192)$$

und analog

$$\|\tilde{z}_v\|_{Q_r}^1 \leq D_2 + D_7. \quad (5.193)$$

Mit Punkt 1. erhalten wir eine Konstante $D_8 = D_8(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r) < \infty$ mit

$$\|\tilde{z}\|_{Q_r}^2 \leq D_8(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r). \quad (5.194)$$

Mit der Abschätzung für \hat{z} folgt schließlich die Behauptung. □

Wir können nun lokale Injektivität zeigen.

Hilfssatz 5.3.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2.10 betrachten wir die Lösung $z \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^2)$ des dortigen Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} z &= z(u, v) : Q_r \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^m) \\ z_{uv}(u, v) &= \mathbf{k}_{ij}(z(u, v)) z_u^i(u, v) z_v^j(u, v) \quad \text{in } Q_r \\ z(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= \zeta(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} z(\tau + u_0, -\tau + v_0, h) = \zeta'(\tau) \quad \text{für} \quad -r < \tau < r. \end{aligned} \quad (5.195)$$

Weiter gelte mit $z = x + iy$ und $c > 0$

$$\inf_{(u,v) \in D_r} |x_u y_v - x_v y_u| \geq c. \quad (5.196)$$

Dann gibt es ein $r' = r'(H_0, H_1, A_1, A_2, R, d, r, c) > 0$, so dass z injektiv in jeder Menge

$$B_{r'}(u, v) \cap Q_r, \quad (u, v) \in D_r \quad (5.197)$$

ist.

Beweis: Wir lassen zunächst $0 < r' \leq r$ frei und fixieren es später. Außerdem beachten wir, dass die Menge $B_{r'}(u, v) \cap Q_r$ als Durchschnitt konvexer Mengen konvex ist. Zunächst betrachten wir zu einem Punkt $\zeta = (u, v) \in D_r$ beliebige

$$w_1 = (u_1, v_1), w_2 = (u_2, v_2) \in B_{r'}(u, v) \cap Q_r, \quad (5.198)$$

und

$$0 = z(w_1) - z(w_2) = \nabla x(\zeta_1)(w_1 - w_2) + \nabla y(\zeta_2)(w_1 - w_2) \quad (5.199)$$

mit geeigneten Zwischenstellen ζ_1 und ζ_2 . Wählen wir nun r' so klein, dass die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_u(\zeta_1) & x_v(\zeta_1) \\ y_u(\zeta_2) & y_v(\zeta_2) \end{pmatrix} \quad (5.200)$$

nicht verschwindet, so folgt $w_1 = w_2$ und z ist injektiv. Wir berechnen

$$\begin{aligned} x_u(\zeta)y_v(\zeta) - x_v(\zeta)y_u(\zeta) &= (x_u(\zeta) - x_u(\zeta_1))y_v(\zeta) - (x_v(\zeta) - x_v(\zeta_1))y_u(\zeta) \\ &\quad + x_u(\zeta_1)(y_v(\zeta) - y_v(\zeta_2)) - x_v(\zeta_1)(y_u(\zeta) - y_u(\zeta_2)) \\ &\quad + x_u(\zeta_1)y_v(\zeta_2) - x_v(\zeta_1)y_u(\zeta_2) \end{aligned} \quad (5.201)$$

und wir können abschätzen

$$|x_u(\zeta_1)y_v(\zeta_2) - x_v(\zeta_1)y_u(\zeta_2)| \geq c - 4r'C_2^2 > 0 \quad (5.202)$$

mit der Konstanten $C_2(H_0, H_1, A_1, A_2, d, R, r) < \infty$ aus Satz 5.3.1. Wählen wir nun $r' = r'(H_0, H_1, A_1, A_2, d, R, r, c) > 0$ geeignet, so ist alles gezeigt. \square

Wir formulieren nun einen Satz über globale Diffeomorphismen.

Satz 5.3.3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2.10 betrachten wir die Lösung $z \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^2)$ des dortigen Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} z &= z(u, v) : Q_r \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^m) \\ z_{uv}(u, v) &= \mathbf{k}_{ij}(z(u, v))z_u^i(u, v)z_v^j(u, v) \quad \text{in } Q_r \\ z(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= \zeta(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v}z(\tau + u_0, -\tau + v_0, h) = \zeta'(\tau) \quad \text{für} \quad -r < \tau < r. \end{aligned} \quad (5.203)$$

Weiter gelte mit $z = x + iy$ und $c_1 > 0$

$$\inf_{(u,v) \in D_r} |x_u y_v - x_v y_u| \geq c_1. \quad (5.204)$$

Außerdem erfülle die Bildkurve mit einem $c_2 > 0$ die Bogen-Sehnen Bedingung

$$|z(u_1, v_1) - z(u_2, v_2)| \geq c_2 (|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2)^{1/2} \quad (5.205)$$

für alle (u_1, v_1) und $(u_2, v_2) \in D_r$. Dann gibt es ein

$0 < r'' = r''(H_0, H_1, A_1, A_2, d, R, r, c_1, c_2) < r'$, so dass z in dem Gebiet

$$G_{r''} = \{(u, v) \in Q_r : \text{dist}((u, v), D_r) < r''\} \quad (5.206)$$

injektiv ist.

Bemerkung 5.3.4. 1. Der obige Satz liefert dann zusammen mit Hilfssatz 5.3.2 die Aussage, dass z ein Diffeomorphismus eingeschränkt auf seinem Bild ist.

2. Die Bogen-Sehnen-Bedingung ist eine Voraussetzung an die Bildkurve und ihre Parametrisierung. Betrachten wir wieder ein geometrisches Problem, ist diese Voraussetzung unkritisch, da wir zu jeder kompakten, injektiven und regulären C^2 -Kurve ein solches c_2 finden können.

3. Die Voraussetzung an die Funktionaldeterminante können wir bei unseren geometrischen Problemen ebenfalls kontrollieren.

Beweis von Satz 5.3.3: Diesmal sei $0 < r'' \leq \frac{r'}{2}$ ein noch zu fixierender Parameter. Seien

$$w_1 = (u_1, v_1), w_2 = (u_2, v_2) \in G_{r''}. \quad (5.207)$$

Wir bezeichnen mit $\zeta_i \in D_r$ die orthogonale Projektion der w_i auf D_r für $i = 1, 2$. Wir erhalten

$$|z(w_1) - z(w_2)| \geq |z(\zeta_1) - z(\zeta_2)| - 2r''S_0 \geq c_2|\zeta_1 - \zeta_2| - 2r''S_0. \quad (5.208)$$

Gilt nun $|\zeta_1 - \zeta_2| < r'$, so folgt $w_1, w_2 \in B_{r'}(\zeta) \cap D_r$ mit $\zeta = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$. In diesem Fall liefert Hilfssatz 5.3.2 die Injektivität. Gilt $|\zeta_1 - \zeta_2| \geq r'$, so erhalten wir

$$|z(w_1) - z(w_2)| \geq c_2r' - 2r''S_0 > 0, \quad (5.209)$$

falls wir $r'' = r''(H_0, H_1, A_1, A_2, d, R, r, c_1, c_2) > 0$ geeignet klein wählen. \square

Satz 5.3.5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2.10 betrachten wir die Lösung $z \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^2)$ des dortigen Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} z &= z(u, v) : Q_r \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^2(Q_r, \mathbb{R}^m) \\ z_{uv}(u, v) &= \mathbf{k}_{ij}(z(u, v))z_u^i(u, v)z_v^j(u, v) \quad \text{in } Q_r \\ z(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= \zeta(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v}z(\tau + u_0, -\tau + v_0, h) = \zeta'(\tau) \quad \text{für} \quad -r < \tau < r. \end{aligned} \quad (5.210)$$

Weiter gelte mit $z = x + iy$ und $c_1 > 0$

$$\inf_{(u,v) \in D_r} |x_u y_v - x_v y_u| \geq c_1. \quad (5.211)$$

Außerdem erfülle die Bildkurve mit einem $c_2 > 0$ die Bogen-Sehnen Bedingung

$$|z(u_1, v_1) - z(u_2, v_2)| \geq c_2 (|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2)^{1/2} \quad (5.212)$$

für alle (u_1, v_1) und $(u_2, v_2) \in D_r$. Dann gibt es einen Faktor $\varrho = \varrho(H_0, H_1, A_1, A_2, d, R, r, c_1, c_2) > 0$, so dass die Inklusion

$$z(B_t(\zeta)) \supset B_{\varrho t}(z(\zeta)) \quad (5.213)$$

für alle $\zeta \in D_r$ und alle $0 < t \leq r''$ mit $B_t(\zeta) \subset G_{r''}$ richtig ist.

Beweis: Wir ermitteln eine Abschätzung an die Jacobische wie im Beweis von Hilfssatz 5.3.2. Es folgt dann mit den Bezeichnungen aus dem zitierten Hilfssatz $r' < \frac{c_1}{4C_2^2}$

$$|x_u(w)y_v(w) - x_v(w)y_u(w)| \geq c - 2r'C_2^2 \geq \frac{c_1}{2} \quad (5.214)$$

sogar für alle $w \in G_{r'} \cap Q_r \supset G_{r''} \cap Q_r$. Sei nun

$$w : \text{Im}(z) \rightarrow G_{r''} \in C^2(\text{Im}(z), G_{r''}) \quad (5.215)$$

die gemäß Satz 5.3.3 existierende Inverse von z . Für je zwei Punkte $z_1, z_2 \in \text{Im}(z)$ erhalten wir

$$|w(z_1) - w(z_2)| \leq \frac{S_0}{c_1} |z_1 - z_2| \leq D_1 |z_1 - z_2| \quad (5.216)$$

mit einer Konstanten $0 < D_1 = D_1(H_0, H_1, A_1, A_2, d, R, r, c_1) < \infty$. Damit folgt aber für die entsprechenden Urbilder

$$|z(w_1) - z(w_2)| \geq \varrho |w_1 - w_2|, \quad (5.217)$$

mit $\varrho = D_1^{-1} > 0$. Das impliziert aber die Behauptung. \square

5.4 Ein Existenzsatz für hyperbolische Flächen

Wir setzen die Überlegungen des vorherigen Abschnittes fort. Dabei werden wir unser Existenzresultat auf das geometrisch relevante Darboux'sche System mit den ermittelten Randwerten aus Hilfssatz 4.4.2 und Satz 4.4.3 anwenden und damit schließlich ein Anfangswertproblem für die Differentialgleichung

$$(d\mathbf{X})^2 = ds^2 \quad (5.218)$$

beweisen. Doch zunächst betrachten wir das folgende

Problem 2. 1. Gegeben sei in der einfach-zusammenhängenden, konvexen, offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Riemannsche Metrik - in Form einer quadratischen Differentialform -

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (5.219)$$

mit Koeffizienten $g_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^4(\bar{\Omega})$. Die quadratische Differentialform ds^2 sei in Ω positiv-definit und habe in Ω eine negative innere Krümmung K . Auf der regulären Kurve $\Gamma \subset \Omega$ mit $d := \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega) > 0$ bezeichnen wir die geodätische Krümmung durch

$$\kappa_g = \kappa_g(\Gamma, ds^2) \quad (5.220)$$

und ein Wegelement durch

$$W^2(t) = g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j. \quad (5.221)$$

Dabei ist $u^i : [0, T] \rightarrow \Gamma$ eine reguläre Parametrisierung von Γ .

2. Es sei eine reguläre Kurve $\mathbf{Y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^4[0, T]$ gegeben mit

$$\mathbf{Y}_t^2(t) = W^2(t) \quad \text{für } t \in [0, T]. \quad (5.222)$$

Wir bezeichnen die Krümmung von \mathbf{Y} an der Stelle $t \in [0, T]$ mit $\kappa(t) = \kappa(\mathbf{Y})(t)$. Es gelte ebenfalls die Ungleichung

$$\kappa^2(t) - \kappa_g^2(t) \geq k > 0 \quad \text{für } t \in [0, T]. \quad (5.223)$$

3. Wir suchen nun in einer Umgebung $\Omega' \subset \Omega$ von Γ eine Lösung $\mathbf{X} : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^4(\Omega')$ des nicht-linearen Systems partieller Differentialgleichungen

$$(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = g_{ij} \in \Omega \quad (5.224)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{X}|_{\Gamma} = \mathbf{Y}. \quad (5.225)$$

Wir haben bereits alle Werkzeuge bewiesen, um den folgenden Existenzsatz zu beweisen.

Satz 5.4.1. *Das Problem 2 hat in einer Umgebung $\Omega' \subset \Omega$ von Γ eine Lösung. Ist die Kurve Γ keine geödtische Linie, dann gibt es genau zwei verschiedene, bis auf isometrische Transformationen bestimmte Lösungen.*

Beweis:

- Wir bestimmen die Krümmung und Windung der Kurve \mathbf{Y} zunächst mit Beispiel 2.2.10. Weil $\kappa^2 - \kappa_g^2 > 0$ erfüllt ist, folgt $\kappa_n^\pm = \pm \sqrt{\kappa^2 - \kappa_g^2} \neq 0$. Damit bestimmen wir zwei Sätze von Krümmungsvektoren $(-\tau^\pm, \kappa_n^\pm, -\kappa_g)^\top$ mit Hilfssatz 2.2.8. Nun definieren wir wie in Hilfssatz 4.4.2 neben der Funktion $\zeta(t) = (u(t), v(t))$ mit der regulären Parametrisierung von Γ auch noch zwei Funktionen

$$\bar{\zeta}^\pm(t) = -\frac{1}{\sqrt{-K(\zeta(t))}} \left(\tau_n^\pm(t) \dot{\zeta}(t) + \kappa_n^\pm(t) ((g^{1j} + ig^{2j})e_{jk})_{z=\zeta(t)} \dot{\zeta}^k(t) \right) \quad (5.226)$$

und lösen in der Umgebung eines Punktes $(u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$ mit Hilfe von Satz 5.2.10 das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} z^\pm &= z^\pm(u, v) : Q_r \rightarrow \Omega \in C^2(Q_r, \Omega) \\ \mathcal{Q}(z^\pm) &= 0 \quad \text{in } Q_r \\ z^\pm(\tau + u_0, -\tau + v_0) &= \zeta(\tau) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \nu} z^\pm(\tau + u_0, -\tau + v_0) = \bar{\zeta}^\pm(\tau) \end{aligned} \quad (5.227)$$

für $-r < \tau < r$ eindeutig in einem Rechteck Q_r mit einem $r = r(\|g_{ij}\|_4^\Omega, \|\mathbf{Y}\|_4^{[0, T]}, d, k, T) > 0$. Eine elementare Rechnung liefert, dass $x_t^\pm y_v^\pm - x_v^\pm y_t^\pm = -\frac{W^2(t)}{\sqrt{-K(EG-F^2)}} \kappa_n^\pm \neq 0$ entlang D_r erfüllt ist. In einer (möglicherweise kleineren) Umgebung $Q_{r'}$ ist z also sogar ein lokaler Diffeomorphismus. Satz 4.4.3 liefert nun zu z^+ als auch zu z^- die Existenz einer bis auf isometrische Transformationen eindeutig bestimmten Lösung \mathbf{X}^+ bzw. \mathbf{X}^- unseres Problem 2. Dies können wir für jeden Punkt $t \in (0, T)$ tun; da der Eindeutigkeitsatz gilt, stimmen verschiedene Lösungen (zu den jeweils gleichen Vorzeichen) in überlappenden Bereichen überein und wir erhalten zu jedem Vorzeichen eine Umgebung und eine Lösung unseres Problems in dieser Umgebung.

- Wir haben nur noch zu ermitteln, wann unsere beiden Lösungen zufällig übereinstimmen können. Zunächst gilt: genau dann wenn sie übereinstimmen, so stimmen auch die

Normalen \mathbf{N} der Flächen entlang der Anfangskurve bis auf eine Richtung überein¹. Wir zeigen, dass das nur unter der Zusatzvoraussetzung $\kappa_g \equiv 0$ möglich sein kann. Zunächst erhalten wir mit Beispiel 2.2.10 die Formeln

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{(\mathbf{N}, \dot{\mathbf{N}}, \dot{\mathbf{Y}})}{W^2}, \\ \kappa_n &= \frac{(\mathbf{N}, \dot{\mathbf{Y}})}{W^2}, \\ \kappa_g &= \frac{(\mathbf{N}, \dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}})}{W^3}.\end{aligned}\tag{5.228}$$

Ein Übergang von \mathbf{N} zu $-\mathbf{N}$ transformiert diese Formeln zu

$$\begin{aligned}\tau_n &\rightarrow \tau_n, \\ \kappa_n &\rightarrow -\kappa_n, \\ \kappa_g &\rightarrow -\kappa_g.\end{aligned}\tag{5.229}$$

Es gilt andererseits

$$\tau_n = \tau + \frac{\dot{\kappa}_n \kappa_g - \kappa_n \dot{\kappa}_g}{\kappa^2},\tag{5.230}$$

und damit folgt: $\tau_n^+ = \tau_n^-$ gilt genau dann, wenn

$$\dot{\kappa}_n^+ \kappa_g - \kappa_n^+ \dot{\kappa}_g = \dot{\kappa}_n^- \kappa_g - \kappa_n^- \dot{\kappa}_g = -\dot{\kappa}_n^+ \kappa_g + \kappa_n^+ \dot{\kappa}_g,\tag{5.231}$$

und das wiederum ist äquivalent zu

$$\dot{\kappa}_n^+ \kappa_g - \kappa_n^+ \dot{\kappa}_g = 0.\tag{5.232}$$

Gilt nun $\kappa_g \equiv 0$, so hat das neben $\kappa_g = -\kappa_g$ auch noch $\tau_n^+ = \tau_n^-$ zur Folge. Wir haben eben die Aussage gezeigt: Gilt $\kappa_g \equiv 0$, genau dann stimmen die beiden Anfangsstreifen unserer Lösungsflächen bis auf ein Vorzeichen einer Normalen überein. Da die beiden Lösungsflächen selbst nur in diesem Fall übereinstimmen können, haben wir alles gezeigt. □

Satz 5.4.2. *In der Situation von Problem 2 sei Γ eine kompakte, injektive C^2 -Kurve. Wir haben die Abschätzungen*

$$\|g_{ij}\|_{\Omega}^4 \leq C < \infty\tag{5.233}$$

und

$$EG - F^2 \geq \frac{1}{C} \quad \text{und} \quad -K \geq \frac{1}{C} \quad \text{in } \Omega\tag{5.234}$$

mit einem $0 < C < \infty$. Außerdem gelte

$$\|\mathbf{Y}\|_{[0,T]}^4 \leq D\tag{5.235}$$

¹Richtigerweise muss man vorher eine geeignete isometrische Transformation finden.

$$\dot{Y}(t)^2 = W^2(t) \geq \frac{1}{D} \quad (5.236)$$

mit einem $0 < D < \infty$. Dann gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(C, D, d, k, \Gamma) > 0$ und ein $R = R(C, D, d, k, \Gamma) > 0$ mit

$$B_R(u(t), v(t)) \subset \Omega' \quad \text{für } t \in [\varepsilon, T - \varepsilon] \quad (5.237)$$

für Ω' aus Satz 5.4.1.

Beweis: Aus der Parametrisierung $\zeta(t) = (u(t), v(t))$ von Γ ermitteln wir eine Bogen-Sehnen-Bedingung

$$|\zeta(t_1) - \zeta(t_0)| \geq c_2 |t_1 - t_2| \quad (5.238)$$

für alle $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit einem $c_2 = c_2(\Gamma) > 0$. Sei $z = x + iy = z^1 + iz^2$ die Lösung des Anfangswertproblems aus dem Satz 5.4.1. Dann folgt mit Hilfssatz 4.4.2

$$\begin{aligned} x_u y_v - x_v y_u &= \frac{z_u^i e_{ij} z_v^j}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{z_t^i e_{ij} z_t^j}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{z_t^i e_{ij} (\tau_n z_t^j + \kappa_n g^{jk} e_{kl} z_t^l)}{\sqrt{-K(EG - F^2)}} \\ &= -\kappa_n \frac{z_t^i g_{ij} z_t^j}{\sqrt{-K(EG - F^2)}} \\ &= -\kappa_n \frac{|\dot{Y}|^2}{\sqrt{-K(EG - F^2)}} \end{aligned} \quad (5.239)$$

für alle $(u, v) \in D_r$. Damit erhalten wir eine Konstante $c_1 = c_1(C, D, k) > 0$ mit

$$|J_z| \geq c_1 \quad \text{auf } D_r \quad (5.240)$$

Weiter erhalten wir aus der Abschätzung an die Norm der Anfangskurve die Abschätzungen

$$\|\zeta\|_{D_R}^2 \leq A_2 \quad \text{und} \quad \|\zeta'\|_{D_R}^1 \leq A_1 \quad (5.241)$$

mit Konstanten $A_2 = A_2(C, D, k) < \infty$ und $A_1 = A_1(C, D, k) < \infty$. Außerdem erhalten wir Abschätzungen

$$\|\mathbf{k}_{ij}^k\|_{Q_R}^1 \leq H_1 \quad (5.242)$$

mit $H_1 = H_1(C) \leq \infty$. (Man vergleiche dazu etwa die elliptische Theorie aus Abschnitt 5.1.) Satz 5.3.5 liefert nun die Behauptung, indem wir in den dortigen Bezeichnungen $\varepsilon = \sqrt{2}r''$ und $R = \varrho r''$ setzen. \square

Um nun einen Zusammenhang zwischen den beiden Lösungen herzustellen, beachten wir den folgenden

Hilfssatz 5.4.3. Sei \mathbf{X} eine Lösung von Problem 2 mit der ersten Fundamentalform $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ und der Kurve \mathbf{Y} . Wenn nun die Kurve in einer Ebene E liegt, also Windung $\tau = 0$ hat, so ist die an der Ebene E gespiegelte Fläche $\bar{\mathbf{X}}$ ebenfalls Lösung von Problem 2 mit der ersten Fundamentalform $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ und der Kurve \mathbf{Y} .

Beweis: Da durch die Schreibweise mit geometrischen Invarianten lediglich Eindeutigkeit bis auf isometrische Transformationen vorliegt, können wir ohne Einschränkung \mathbf{Y} in die Ebene $z = 0$ legen. Ist nun $\mathbf{X} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ eine Lösung unseres Problems, dann folgt $\mathbf{X}|_{\Gamma} = \mathbf{Y} = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), 0)$. Somit ist auch $\bar{\mathbf{X}}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), -z(u, v))$ eine Lösung unseres Problems. \square

Wir wollen für unseren Existenzsatz ein aussagekräftiges Beispiel mit der Metrik der Poincaré-Halbebene konstruieren. Diese ist viel studiert, beispielsweise in [St]. Dazu benötigen wir den einen oder anderen Hilfssatz. Wir beginnen mit dem

Hilfssatz 5.4.4. Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ die obere Halbebene, versehen mit der Metrik $g_{ij} = g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}$. Dann schreiben sich die Christoffelsymbole

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = 0 \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{y}\end{aligned}$$

und die innere Krümmung hat den konstanten Wert

$$K = -1.$$

Beweis: Der Beweis ist einfach, man setzt die Ableitungen der Metrik lediglich in die Definition der Christoffelsymbole und der inneren Krümmung ein. \square

Wir betrachten nun die Kurven

$$\Gamma = \{(t, 1) \in \mathbb{R}^2 : -1 < t < 1\}$$

und

$$\Delta = \{(0, s) \in \mathbb{R}^2 : s > 1\} = \{(0, \cosh t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}.$$

Hilfssatz 5.4.5. In den angegebenen Parametrisierungen haben die Kurven Γ und Δ die Wegelemente

$$W^2(\Gamma, t) = 1, \quad W^2(\Delta, t) = \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}$$

und die geodätischen Krümmungen

$$\kappa_g(\Gamma, t) = 1, \quad \kappa_g(\Delta, t) = 0.$$

Beweis: Wir betrachten $(x(t), y(t)) = (t, 1)$ mit $\dot{x} = 1$ und $\dot{y} = 0$, und es folgt $g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = g_{11}(\dot{x})^2 = 1$. In der Formel für die geodätische Krümmung folgt

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \frac{\dot{x}^i e_{ij} (\Gamma_{kl}^j \dot{x}^k \dot{x}^l + \ddot{x}^j)}{(g_{pq} \dot{x}^p \dot{x}^q)^{3/2}} \\ &= \dot{x} e_{12} \Gamma_{11}^2 \dot{x} \dot{x} = 1.\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung für $(x(t), y(t)) = (0, \cosh t)$ liefert die behaupteten Resultate für Δ . \square

Wir wollen entlang Γ bzw. Δ die Anfangskurven \mathbf{Y} bzw. \mathbf{Z} definiert durch

$$\mathbf{Y}(t) = \frac{1}{2} (\cos 2t, -\sin 2t, 0), \quad -1 < t < 1$$

und

$$\mathbf{Z}(t) = \left(\frac{1}{\cosh t}, 0, t - \tanh t \right), \quad t > 0$$

vorschreiben. Wir bestimmen noch

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}\left(\operatorname{arcosh} \frac{s}{c}\right) &= \frac{c}{s} \left(1, 0, \frac{s}{c} \operatorname{arcosh} \frac{s}{c} - \sqrt{\frac{s^2}{c^2} - 1} \right) \\ &= \frac{c}{s} \left(1, 0, \int_1^{s/c} \operatorname{arcosh} \tau \, d\tau \right) \quad \text{für } s > c > 0.\end{aligned}$$

Hilfssatz 5.4.6. Die Kurven \mathbf{Y} bzw. \mathbf{Z} haben die Wegelemente

$$\dot{\mathbf{Y}}^2(t) = 1, \quad \dot{\mathbf{Z}}^2(t) = \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}$$

und die Quadrate der Krümmungen

$$\kappa(\mathbf{Y}, t) = |\ddot{\mathbf{Y}}(t)| = 2, \quad \kappa(\mathbf{Z}, t) = \frac{|\dot{\mathbf{Z}}(t) \times \ddot{\mathbf{Z}}(t)|}{(\dot{\mathbf{Z}}^2(t))^{3/2}} = \frac{1}{\sinh t}$$

Beweis: Wiederum setzen wir in die Formeln ein. \square

Wir setzen die Überlegungen der Hilfssätze fort in

Beispiel 5.4.7.

1. Wir betrachten zunächst Γ mit der Kurve \mathbf{Y} und erhalten für die Normalenkrümmungen $\kappa_n = \pm \sqrt{\kappa^2 - \kappa_g^2} = \pm \sqrt{3}$, für die geodätischen Windungen $\tau_n = 0$. Wir haben nun das nicht-lineare System

$$\begin{aligned}x_{uv} &= \frac{1}{2y} (x_u y_v + x_v y_u) \\ y_{uv} &= \frac{1}{y} (y_u y_v - x_u x_v)\end{aligned}$$

zu den Anfangsdaten

$$\begin{aligned} x_u(\tau, -\tau) - x_v(\tau, -\tau) &= \sqrt{2}, & y_u(\tau, -\tau) - y_v(\tau, -\tau) &= 0 \\ x_u(\tau, -\tau) + x_v(\tau, -\tau) &= 0, & y_u(\tau, -\tau) + y_v(\tau, -\tau) &= \mp\sqrt{2}\kappa_n(\sqrt{2}\tau) = \mp\sqrt{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

zu lösen. Dabei sind die Anfangsdaten wie in Hilfssatz 4.4.2 gesetzt. Dabei haben wir $x_t = 1$ und $y_t = 0$ gesetzt, um die Kurve Γ zu parametrisieren. Anschließend wurden

$$x_\nu = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\tau_n x_t + \kappa_n g^{1i} e_{ij} z_t^j \right) = \kappa_n y_t = 0$$

und

$$y_\nu = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\tau_n y_t + \kappa_n g^{2i} e_{ij} z_t^j \right) = -\kappa_n x_t = \mp\sqrt{3}$$

gesetzt. Durch elementare Rechnung prüft man, dass

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \frac{u - v}{\sqrt{2}} \\ y(u, v) &= \cosh(\sqrt{2}(u + v)) \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh(\sqrt{2}(u + v)) \end{aligned}$$

die (bis auf eine Konstante) eindeutig bestimmte Lösung des (AWPs) ist. Wir beachten auch noch neben $2y_{uv} = y$ die Relation $2y^2 - y_u^2 = \frac{1}{2}$. Wenn wir dann noch $J_z = x_u y_v - x_v y_u = \sqrt{2}y_u = \sqrt{2}y_v$ und $\operatorname{sgn} J_z = \operatorname{sgn} \kappa_n = \mp 1$ erkennen, so liefern die Gleichungen 4.1.4 die zweite Fundamentalform

$$\begin{aligned} L_\pm &= \operatorname{sgn} J_z \sqrt{-K(EG - F^2)} \frac{2y_u y_v}{J_z} = \mp \frac{1}{y^2} \sqrt{2}y_u = \mp \frac{1}{y^2} \sqrt{4y^2 - 1}, \\ M_\pm &= \operatorname{sgn} J_z \sqrt{-K(EG - F^2)} \frac{x_u y_v + x_v y_u}{J_z} = 0, \\ N_\pm &= \operatorname{sgn} J_z \sqrt{-K(EG - F^2)} \frac{2x_u x_v}{J_z} = \pm \frac{1}{y^2} \frac{1}{\sqrt{2}y_u} = \pm \frac{1}{y^2} \frac{1}{\sqrt{4y^2 - 1}}. \end{aligned}$$

2. Wir betrachten jetzt Δ zusammen mit der Kurve \mathbf{Z} . Hier hat die Normalenkrümmung den Wert $\kappa_n = \pm \frac{1}{\sinh t}$ und die geodätische Windung verschwindet wieder: $\tau_n = 0$. Wenn wir nun die Anfangsdaten gemäß Hilfssatz 4.4.2 auswerten, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x_u(\tau, -\tau) - x_v(\tau, -\tau) &= 0, & y_u(\tau, -\tau) - y_v(\tau, -\tau) &= \sqrt{2} \sinh(\sqrt{2}\tau) \\ x_u(\tau, -\tau) + x_v(\tau, -\tau) &= \pm 1, & y_u(\tau, -\tau) + y_v(\tau, -\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Dabei wurde wieder $x_t = 0$ und $y_t = \sinh(\sqrt{2}\tau)$ gesetzt, um diesmal Δ zu parametrisieren. Jetzt erhalten wir für die Ableitungen nach ν die Bedingungen

$$x_\nu = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\tau_n x_t + \kappa_n g^{1i} e_{ij} z_t^j \right) = \kappa_n y_t = \pm 1$$

und

$$y_\nu = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\tau_n y_t + \kappa_n g^{2i} e_{ij} z_t^j \right) = -\kappa_n x_t = 0.$$

Wir finden wieder durch

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \pm \frac{u+v}{\sqrt{2}} \\y(u, v) &= \cosh \frac{u-v}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

die (bis auf eine Konstante) eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems für das System

$$\begin{aligned}x_{uv} &= \frac{1}{2y}(x_u y_v + x_v y_u) \\y_{uv} &= \frac{1}{y}(y_u y_v - x_u x_v).\end{aligned}$$

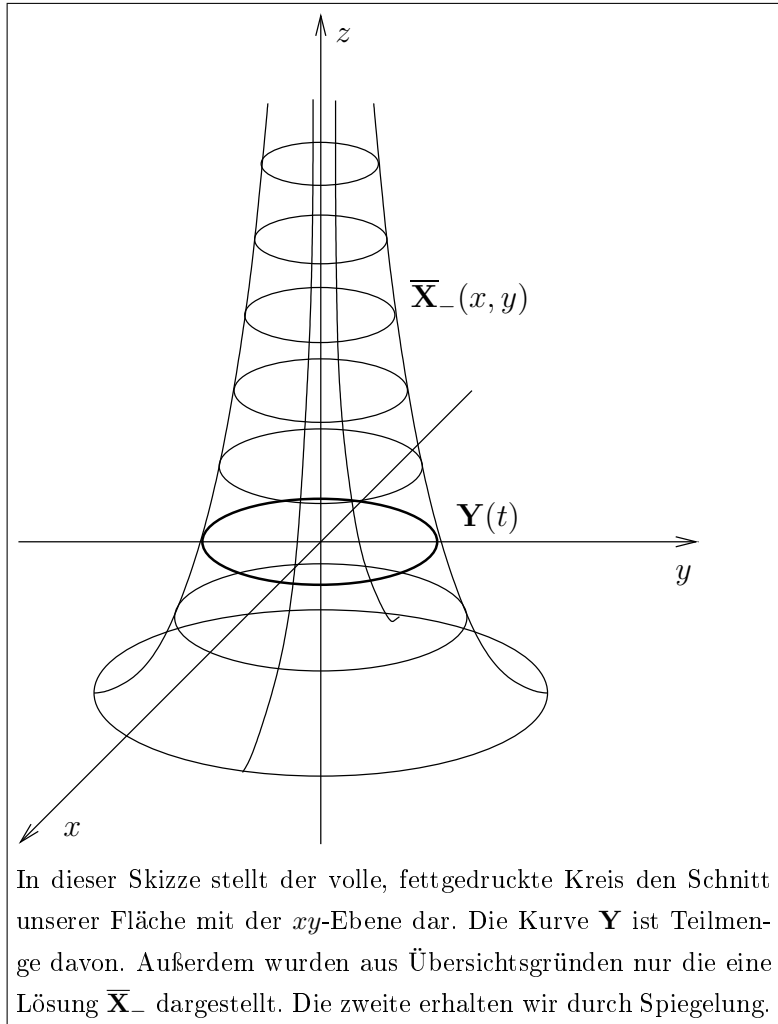
Hier hat die Jacobische den Wert $J_z = x_u y_v - x_v y_u = \pm\sqrt{2}y_u = \mp\sqrt{2}y_v$, welcher nicht verschwindet für $u \neq -v$. Bei den Anfangswerten haben wir an der Stelle $\tau = 0$ ein Problem, welches daher rührt, dass die Parametrisierung von Δ für $t = 0$ singularär wird. Ebenfalls gilt $\operatorname{sgn} J_z = \operatorname{sgn} \kappa_n = \pm 1$. Wir erhalten nun für die zweite Fundamentalform

$$\begin{aligned}L_{\pm} &= \operatorname{sgn} J_z \sqrt{-K(EG - F^2)} \frac{2y_u y_v}{J_z} = -\frac{1}{y^2} \sqrt{2} y_u = -\frac{1}{y^2} \sqrt{4y^2 - 1}, \\M_{\pm} &= \operatorname{sgn} J_z \sqrt{-K(EG - F^2)} \frac{x_u y_v + x_v y_u}{J_z} = 0, \\N_{\pm} &= \operatorname{sgn} J_z \sqrt{-K(EG - F^2)} \frac{2x_u x_v}{J_z} = \frac{1}{y^2} \frac{1}{\sqrt{2} y_u} = \frac{1}{y^2} \frac{1}{\sqrt{4y^2 - 1}}.\end{aligned}$$

Wir beachten, dass in diesen Gleichungen im Gegensatz zu Punkt 1. das zweite Vorzeichen in den Gleichungen durch das Vorzeichen in der Lösungskomponente x absorbiert wird. Obwohl wir eigentlich zwei verschiedene Lösungen der zwei Anfangswertprobleme haben, gibt es am Ende nur eine Setzung der zweiten Fundamentalform.

3. Da der Fundamentalsatz der Flächentheorie Eindeutigkeit bis auf eine isometrische Transformation liefert, werden wir Flächen mit eben diesen Fundamentalformen bestimmen. Sei $c(t) = \left(\frac{1}{\cosh t}, \pm(t - \tanh t)\right)$ zu $t > 0$ die Traktrix oder Schleppkurve. Wenn wir diese um die z -Achse rotieren lassen und verschieben, erhalten wir die Fläche mit der Parameterdarstellung

$$\mathbf{X}_{\pm}(t, \phi) = \left(\frac{\cos \phi}{\cosh t}, \frac{\sin \phi}{\cosh t}, \mp(t - \tanh t + D) \right).$$



Dabei sei D zunächst frei. Mit der Parametertransformation $t(x, y) = \operatorname{arcosh} \frac{y}{c}$ und $\phi(x, y) = -\frac{x}{c}$ mit der Konstanten $c > 0$ führen wir lokale für $x \in \mathbb{R}$ und $y > c > 0$ isotherme Parameter ein. Wir erhalten die Parameterdarstellung

$$\bar{\mathbf{X}}_{\pm}(x, y) = \frac{c}{y} \left(\cos \frac{x}{c}, -\sin \frac{x}{c}, \mp \int_1^{y/c} \operatorname{arcosh} \tau \, d\tau \mp D \frac{y}{c} \right).$$

Nun ist $\bar{\mathbf{X}}_{\pm}$ konform parametrisiert mit dem Oberflächenelement $E(x, y) = \frac{1}{y^2}$. Außerdem gelten für geeignete t

$$\bar{\mathbf{X}}_{\pm}(t, 1) = c \left(\cos \frac{t}{c}, -\sin \frac{t}{c}, 0 \right), \quad \bar{\mathbf{X}}_-(0, t) = \frac{c}{t} \left(1, 0, \int_1^{t/c} \operatorname{arcosh} \tau \, d\tau \right),$$

wobei an dieser Stelle die Konstante D geeignet gesetzt wird. Wiederum durch ele-

mentare Rechnung erhalten wir für die zweite Fundamentalform

$$\begin{aligned} L_{\pm} &= \pm \frac{1}{y^2} \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}, \\ M_{\pm} &= 0, \\ N_{\pm} &= \mp \frac{1}{y^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun noch $c = \frac{1}{2}$, so haben wir unsere Fundamentalformen identifiziert. Im Falle des zweiten Anfangswertproblems stimmen unsere beiden Lösungen überein, weil die Rotationsfläche spiegelsymmetrisch zur Ebene $y = 0$ ist.

An dieser Stelle kann man in Verbindung mit dem Resultat über die Anzahl der Lösungen und Hilfsatz 5.4.3 der folgenden Vermutung erliegen: Um eine eindeutige Fläche zu erhalten, genügt es neben $\kappa_g \equiv 0$ zu fordern, dass die Kurve \mathbf{Y} in einer Ebene liegt. Die Lösung ist dann spiegelsymmetrisch zu der Ebene.

Diese Vermutung ist falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.4.8. Wir betrachten die Fläche

$$\mathbf{X}(u, v) = \left(u, v, \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right)$$

und die Kurve

$$\mathbf{Y}(t) = \left(0, t, -\frac{t^2}{2} \right) = \mathbf{X}(0, t).$$

Dabei ist die Fläche in keiner Umgebung von $u = 0$ spiegelsymmetrisch. Es gilt $\mathbf{X}(u, v) = \mathbf{X}(-u, v) \Rightarrow u = 0$. Die erste Fundamentalform lautet

$$E(u, v) = 1 + u^2 + u^4, \quad F(u, v) = -v(u + u^2) \quad \text{und} \quad G(u, v) = 1 + v^2.$$

Als Normale erhalten wir

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2 + u^4}} (u^2 + u, -v, -1)$$

mit der geodätischen Krümmung

$$\kappa_g(t) = \frac{(\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{N})}{(\mathbf{X}_v^2)^{3/2}} = \frac{u + u^2}{(1 + u^2 + v^2 + u^4)^2} \Big|_{u=0, v=t} = 0$$

und der Normalenkrümmung

$$\kappa_n(t) = \frac{(\mathbf{X}_{vv}, \mathbf{N})}{\mathbf{X}_v^2} = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2 + u^4)^{3/2}} \Big|_{u=0, v=t} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}^3} \neq 0.$$

Außerdem erhalten wir für die zweite Fundamentalform

$$L(u, v) = -\frac{2u + 1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2 + u^4}}, \quad M(u, v) = 0 \quad \text{und} \quad N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2 + u^4}}.$$

Damit folgt $K(u, v) < 0$ für alle $-\frac{1}{2} < u$, insbesondere für $u = 0$.

Da jetzt die Kurve \mathbf{Y} in einer Ebene liegt, ist Hilfsatz 5.4.3 trotz allem anwendbar, und wir erhalten somit eine zweite Lösung durch

$$\mathbf{X}(u, v) = \left(-u, v, \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right).$$

5.5 Ausblick

Wir geben hier einen Ausblick auf die Themen, von denen wir eine weitere Erforschung vornehmen oder für wünschenswert halten.

Zunächst behandeln wir die globalen Einbettungen für positive innere Krümmung. In diesem Falle sind verallgemeinerte Randbedingungen von Folgerung 5.1.13 interessant. Hier treten schließlich zweite Ableitungen der Lösung in der Randbedingung auf. Dabei sollte man das Buch [WRL] bearbeiten, um zunächst festzustellen, welche linearen Kombinationen für Randbedingungen Elliptizität zur Folge haben. Anschließend sollte man aus diesen Möglichkeiten geometrisch relevante auswählen. Man hofft dann, für diese a-priori Abschätzungen bis zum Rand zu etablieren.

Bei den lokalen Einbettungen ist einerseits ein lokaler Existenzsatz für elliptische Probleme noch offen. Eine mögliche Methode wird in [Re] und präziser in [Sa05], Kapitel XI, §6 angedeutet. Man sollte dabei elliptische Probleme durch Komplexifizierung in hyperbolische Probleme umrechnen. Dabei sind die Anfangsdaten für die hyperbolischen Probleme so zu wählen, dass man aus der Lösung eine entsprechende Lösung des elliptischen Problems konstruieren kann.

Eine weitere offene Frage in Bezug auf Satz 5.4.1 ist die folgende: Ist die Lösung von Problem 2 bis auf isometrische Transformationen eindeutig bestimmt, falls die Anfangskurve eine geodätische Linie ist? Außerdem stellt sich die Frage, ob man die Funktionaldeterminante einer Lösung wie im elliptischen Fall durch Kompaktheitsaussagen abschätzen kann, und damit zumindest $J_z \neq 0$ auf ganz Q_r sichern kann. Eine weitere Verallgemeinerung bietet sich durch die Arbeit von Rellich [Re] an. Gegeben seien zwei sich schneidende Asymptoten. Gibt es eine lokale Realisierung einer Metrik durch eine Fläche, welche diese Asymptoten annimmt?

Die vorgestellte Methode in dieser Arbeit beruht darauf, dass man durch Angabe der geometrischen Invarianten der Anfangskurve und damit des Anfangsstreifens die geometrischen Invarianten der Lösungsfläche bestimmen kann. Genau genommen wird ja die zweite Fundamentalform entlang dieser Kurve mehr oder weniger eindeutig bestimmt. Weitergehende Arbeiten von Qing Han über die lokale Einbettung von Metriken mit innerer Krümmung, welche einen geeigneten Vorzeichenwechsel hat, beruhen darauf, direkt die Codazzi-Mainardi Gleichungen zu lösen. In anderen Worten, er gibt eine zweite Fundamentalform so an, dass die Integrationsbedingungen erfüllt sind. Die Frage die sich stellt ist: Ist es in diesem Fall

möglich, die Anfangsbedingungen der auftretenden Differentialgleichungen so zu wählen, dass wir Analoga zu Problem 2 im Falle eines Vorzeichenwechsels der inneren Krümmung lösen können.

Literaturverzeichnis

- [Al42] *Aleksandr Danilovich Aleksandrov*, Existence of a convex polyhedron and of a convex surface with a given metric, Rec. Math. [Math. Sbornik] N.S., Vol. 11/53 (1942), pp. 15–65.
- [Al55] *Aleksandr Danilovich Aleksandrov*, Über die innere Geometrie konvexer Flächen, Akademie-Verlag, Berlin (1955).
- [BL] *Wilhelm Blaschke, Karl Leichtweiß*, Elementare Differentialgeometrie, Springer-Verlag (1973).
- [Da] *Gaston Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Chelsea Pub Co. (1894).
- [Ef] *Nikolai Vladimirovich Efimov*, Flächenverbiegung im Großen, Akademie-Verlag Berlin (1957).
- [GT] *David Gilbarg, Niel S. Trudinger*, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag (1977, 1983).
- [GL] *Pengfei Guan, Yan Yan Li*, The Weyl problem with nonnegative Gauss curvature, Journ. Differential Geom., Vol. 2/39 (1994), pp. 331–342.
- [Ha05] *Qing Han*, On the isometric embedding of surfaces with Gauss curvature changing sign cleanly, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 2/58 (2005), pp. 285–295.
- [HHL03] *Qing Han, Jia-Xing Hong, Chang-Shou Lin*, Local isometric embedding of surfaces with nonpositive Gaussian curvature, Jour. Differential Geom., Vol. 3/63 (2003), pp. 475–520.
- [HW50] *Philip Hartman, Aurel Wintner*, On the embedding problem in differential geometry, Amer. Jour. Math., Vol. 72 (1950), pp. 553–564.
- [HW51] *Philip Hartman, Aurel Wintner*, Gaussian curvature and local embedding, Amer. Jour. Math., Vol. 73 (1951), pp. 876–884.

- [HW52] *Philip Hartman, Aurel Wintner*, On the embedding of hyperbolic line elements; a correction, *Amer. Jour. Math.*, Vol. 74 (1952), p. 264.
- [He56] *Erhard Heinz*, On certain nonlinear elliptic differential equations of second order, *Jour. Anal. Math.*, Vol. 5 (1956/57), pp. 197–272.
- [He57] *Erhard Heinz*, Existence theorems for one-to-one mappings associated with elliptic systems of second order I, *Jour. Anal. Math.*, Vol. 15 (1957), pp. 325–352.
- [He66] *Erhard Heinz*, Existence theorems for one-to-one mappings associated with elliptic systems of second order II, *Jour. Anal. Math.*, Vol. 17 (1966), pp. 145–184.
- [He60] *Erhard Heinz*, Neue a-priori-Abschätzung für den Ortsvektor einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch ihr Linienelement, *Math. Z.*, Vol. 74 (1960), pp. 129–157.
- [He96] *Erhard Heinz*, Monge-Ampere-Gleichungen und elliptische Systeme, *Jahresber. der DMV*, Vol. 98 (1996), pp. 173–181.
- [He] *Thomas Herb*, The Darboux System and Embedding Problems in three-Dimensional Riemannian Spaces, *Math. Z.*, Vol. 204 (1990), pp. 357–371.
- [HM] *Stefan Hildebrandt, Heiko van der Mosel*, On Lichtenstein’s theorem about globally conformal mappings, *Calc. Var. Part. Diff. Eq.*, Vol. 4/23 (2005), pp. 415–425.
- [Ia] *Joseph Iaia*, Isometric embeddings of surfaces with nonnegative curvature in \mathbb{R}^3 , *Duke Math. Jour.*, Vol. 2/67 (1992), pp. 423–459.
- [Ja] *Howard Jacobowitz*, Local isometric embeddings of surfaces into Euclidean four space, *Indiana Univ. Math. Jour.*, Vol. 21 (1971/72), pp. 249–254.
- [Le35] *Hans Lewy*, A priori limitations for solutions of Monge-Ampere equations I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 37 (1935), pp. 417–434.
- [Le36] *Hans Lewy*, On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 42 (1936), pp. 689–692.
- [Le37] *Hans Lewy*, A priori limitations for solutions of Monge-Ampere equations II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 41 (1937), pp. 365–374.
- [Le38] *Hans Lewy*, On the existence of a closed convex surface realizing a given Riemannian metric, *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, Vol. 2/24 (1938), pp. 104–106.
- [Li85] *Chang-Shou Lin*, The local isometric embedding in R^3 of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature, *Jour. Differential Geom.*, Vol. 2/21 (1985), pp. 213–230.

- [Li86] *Chang-Shou Lin*, The local isometric embedding in R^3 of two-dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 6/39 (1986), pp. 867–887.
- [Ni] *Louis Nirenberg*, The Weyl and Minkowski Problems in Differential Geometry in the Large, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. VI (1953), pp. 337–394.
- [Po49] *Aleksei Vasilevich Pogorelov*, On the proof of Weyl’s theorem on the existence of a closed analytic convex surface realizing an analytic metric with positive curvature given on the sphere, *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, Vol. 4/32 (1949), pp. 183–186.
- [Po49/2] *Aleksei Vasilevich Pogorelov*, On the regularity of convex surfaces with regular metric, *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, Vol. 66 (1949), pp. 1051–1053.
- [Po49/3] *Aleksei Vasilevich Pogorelov*, On convex surfaces with regular metric, *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, Vol. 67 (1949), pp. 791–794.
- [Po57] *Aleksei Vasilevich Pogorelov*, *Verbiegung konvexer Flächen*, Akademie-Verlag, Berlin (1957).
- [Re] *Franz Rellich*, Die Bestimmung einer Fläche durch ihre Gaußsche Krümmung, *Math. Z.*, Vol. 1/43 (1938), pp. 618–627.
- [Sa03] *Friedrich Sawigny*, *Global $C^{2+\alpha}$ -Estimates for Conformal Maps*, Geometric analysis and nonlinear partial differential equations, *Hersg. Stefan Hildebrandt*, Springer-Verlag (2003).
- [Sa04] *Friedrich Sawigny*, *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und Physik, Band 1: Grundlagen und Integraldarstellungen*, Springer-Verlag (2004).
- [Sa05] *Friedrich Sawigny*, *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und Physik, Band 2: Funktionalanalytische Lösungsmethoden*, Springer-Verlag (2005).
- [Sch82] *Friedmar Schulz*, Über die Differentialgleichung $rt - s^2 = f$ und das Weylsche Einbettungsproblem, *Math. Z.*, Vol. 179 (1982), pp. 1–10.
- [Sch] *Friedmar Schulz*, *Regularity Theory for Quasilinear Elliptic Systems and Monge-Ampère Equations in Two Dimensions*, Springer-Verlag (1990).
- [Sch90] *Friedmar Schulz*, Regularity of locally convex surfaces, *Bull. Austral. Math. Soc.*, Vol. 3/42 (1990), pp. 487–497.
- [St] *Saul Stahl*, *The Poincaré Half-Plane*, Jones and Bartlett Publishers Int. (1993).
- [We] *Hermann Weyl*, Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement, *Selecta Hermann Weyl* (1956), pp. 148–178.

- [Wh] *Hassler Whitney*, Differentiable Manifolds, Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 3/37 (1036), pp. 645–680.
- [Wi] *Aurel Wintner*, On the local embedding problems in the differential geometry of surfaces, Amer. Jour. Math., Vol. 77 (1955), pp. 845–852.
- [WRL] *Joseph Wloka, Brian Rowley, Bohdan Lawruk* Boundary value problems for elliptic systems, Cambridge University Press (1995).

Kapitel 6

Danksagung und Formalien

6.1 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich während meines Studiums und meiner Promotion unterstützt haben. Ganz besonders danken möchte ich Herrn Prof. Dr. Friedmar Schulz, meinem Doktorvater, und meinem akademischen Lehrer Herrn Prof. Dr. Friedrich Sauvigny. Schließlich möchte ich ganz herzlich meiner Familie und einer lieben Seele an meiner Seite für die Unterstützung in dieser langen Zeit danken.

6.2 Eidesstattliche Erklärung zur eingereichten Dissertation

Hiermit versichere ich, dass ich die Dissertation "Über globale und lokale Einbettungen" selbstständig und nur unter Verwendung der genannten Hilfen und Hilfsmittel verfasst habe.

Jens Dittrich

6.3 Lebenslauf

Persönliche Daten

Name, Vorname	Dittrich, Jens
Geburtsdatum	21. November 1978
Geburtsort	Lauchhammer

Schullaufbahn

Sep. 1991 - Aug. 1995	Gymnasium Schwarzheide
Abschluß	Fachoberschulreife
Sep. 1995 - Jun. 1998	Gymnasium Schwarzheide
Abschluß	Allgemeine Hochschulreife
Abschlußnote	1,8

Pflichtdienst

Jul. 1998 - Apr. 1999	Wehrdienst im PzArtBtl 415 in Eggesin/Karpin
Grundausbildung	4. Batterie
Dienst, Verwendung	1. Batterie, Truppenfernmeldesoldat, Fahrer

Studium

Okt. 1999 - Mär. 2005	Studium der Mathematik an der BTU Cottbus
Okt. 2001	Vordiplom mit Note 1,6
Abschluß	Diplom-Mathematiker
Abschlußnote	1,2
Diplomarbeit	"Über das Weylsche Einbettungsproblem"

Praktika

Jul. 2002 - Okt. 2002	DESY Zeuthen, TESLA Team
Dauer	Zwölf Wochen
Abschlußarbeit	"Production of Heavy Higgs Bosons in $q\bar{q}$ -Processes"

Feb. 2003 - Apr. 2003	Dresdner Bank, Corporate Center Risikocontrolling
Dauer	Sieben Wochen
Abschlußarbeit	"Piecewise Least-Square Regression and Convexity Preserving Spline Interpolation"

Tätigkeiten als wissenschaftliche Hilfskraft

Okt. 2000 - Jul. 2001	Programmierung am Lehrstuhl numerische Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Lehrstuhlinhaber	Prof. Dr. G. Bader
Okt. 2001 - Feb. 2002	Begleitseminar in der Vorlesung Mathematik I,
Apr. 2002 - Jul. 2002	Mathematik II, für Elektrotechniker und Maschinenbauer am Lehrstuhl Ingenieurmathematik
Lehrstuhlinhaber	Prof. Dr. R. Reemtsen
Okt. 2002 - Feb. 2003	Begleitseminar in der Vorlesung Mathematik I,
Apr. 2003 - Jul. 2003	Mathematik II, für Wirtschaftsingenieure am Lehrstuhl Optimierung
Lehrstuhlinhaberin	Prof. Dr. S. Pickenhain
Okt. 2004 - Feb. 2005	Unterstützung in der Vorlesung Partielle Differentialgleichungen am Lehrstuhl Analysis
Lehrstuhlinhaber	Prof. Dr. F. Sauvigny

Beruflicher Werdegang

Apr. 2005 - Aug. 2005	1/2 Wissenschaftlicher Mitarbeiter, BTU Cottbus, Lehrstuhl Analysis
Lehrstuhlinhaber	Prof. Dr. F. Sauvigny
seit Sept. 2005	Wissenschaftlicher Mitarbeiter, Universität Ulm, Abteilung Analysis
Abteilungsleiter	Prof. Dr. F. Schulz

Promotion

vorauss. Sommer 2007	an der Universität Ulm
vorauss. Gutachter	Prof. Dr. F. Schulz, Prof. Dr. W. Balsler (beide Ulm), Prof. Dr. F. Sauvigny (Cottbus)
Dissertation	"Über globale und lokale Einbettungen" (Arbeitstitel)

Weitere Fähigkeiten

Programmierkenntnisse	C, C++, Java, FORTRAN, L ^A T _E X, HTML
Führerschein	Klasse 3, Klasse 1a
Englisch	fortgeschritten
Russisch	Grundkenntnisse

Persönliche Interessen und Aktivitäten

Ausdauersport	
Literatur	
Modellbau	
Okt. 2002 - Sept. 2004	Aktivität im Fachschaftsrat Mathematik als stellvertretender Vorsitzender
Okt. 2001 - Dez. 2004	Aktivität im OTIWO e.V.

Auszeichnungen

Jun. 1998	Buchpreis für den besten Chemie-Absolventen gestiftet vom Fonds der chemischen Industrie
Okt. 2003	Ernst-Frank Förderpreis der Max-Grünebaum Stiftung dotiert mit 3000,-€.

6.4 Vorträge

Sept. 2006	DMV Tagung in Bonn "A-priori Abschätzungen im Rahmen des Weylschen Einbettungsproblems"
------------	--

6.5 English Abstract

Let $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^1(\Omega)$ be a vector valued mapping defined on the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. In this thesis we study the system of differential equations

$$(d\mathbf{X})^2 = ds^2$$

under certain boundary or initial condition

$$\mathbf{X}|_{\Gamma} = \mathbf{Y}$$

where Γ is the boundary or an interior curve of Ω . We describe a method to transform this problem into an equivalent boundary or initial value problem of a system of partial differential equations which can be treated by known theory. In the case of boundary values some a-priori estimates are established. In the case of initial values we prove an existence theorem based on the contraction mapping principle. We also give some quantitative results.