Eigenwertprobleme und Oszillation linearer Hamiltonscher Systeme

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat.
der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
der Universität Ulm

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker
Markus Wahrheit
aus
Papenburg

2006

Amtierender Dekan:	Prof. Dr. Ulrich Stadtmüller
Gutachter:	Prof. Dr. Werner Kratz Prof. Dr. Werner Balser Prof. Dr. Ondřej Došlý
Tag der Promotion:	26. Mai 2006

Danksagung

Mein ganz herzlicher Dank gilt meinem akademischen Lehrer Professor Dr. Werner Kratz für die ausgezeichnete Betreuung dieser Arbeit. Außerdem möchte ich mich bei Herrn Professor Dr. Ondřej Došlý für seine wertvollen Tipps und für seine anregenden Literaturhinweise bedanken. Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Professor Dr. Ondřej Došlý und Herrn Prof. Dr. Werner Balser dafür, dass sie sich freundlicherweise bereit erklärt haben, ein Gutachten dieser Arbeit zu erstellen.

Besondere Dankbarkeit möchte ich abschließend meiner zukünftigen Frau Anja aussprechen, die mich während meiner gesamten Promotionszeit liebevoll unterstützt hat.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen und Konventionen

Grundsätzlich wollen wir in dieser Arbeit Matrizen mit Großbuchstaben, Vektoren und skalare Größen mit Kleinbuchstaben bezeichnen. Außerdem sollen folgende Konventionen gelten.

Es bezeichnet

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen.
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen.
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen.
$\mathbb{R}^n$	die Menge der reellwertigen Vektoren der Dimension n.
$\mathbb{C}^n$	die Menge der komplexwertigen Vektoren der Dimension n.
$\mathbb{R}^{m\times n}$	die Menge der $m \times n$-Matrizen, deren Elemente reelle Zahlen sind.
K°	das Innere der Menge K, d.h. die Menge aller inneren Punkte von K.
$[a, b]$	das abgeschlossene reelle Zahlenintervall mit den Eckpunkten a und b.
$(a, b]$	das halboffene reelle Zahlenintervall mit den Eckpunkten a und b, wobei der Eckpunkt a im Gegensatz zum Eckpunkt b nicht zum Intervall gehört.
(a, b)	das offene reelle Zahlenintervall mit den Eckpunkten a und b.
$C([a, b])$	die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$.
$C_s([a, b])$	die Menge der stückweise stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$, d.h. die Menge aller reellen Funktionen auf $[a, b]$, die mit Ausnahme endlich vieler Punkte stetig sind und an ihren Unstetigkeitsstellen einseitige Grenzwerte besitzen.
$L^2([a, b])$	die Menge der messbaren und zweimal integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$.
$\dim V$	die Dimension des Vektorraums V.
$0_{n\times n}, I_{n\times n}$	die $n \times n$-Nullmatrix, bzw. die $n \times n$-Einheitsmatrix. Geht die Dimension klar aus dem Kontext hervor, so verzichten wir auf die Dimensionsangabe $n \times n$.
$\ker M$	den Kern der Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
$\operatorname{Im} M$	das Bild der Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
$\mathrm{rg} M$	den Rang der Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
$\operatorname{def} M$	den Defekt der Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$, d.h. die Dimension des Kerns der Matrix M.

ind M	den negativen Index der symmetrischen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. die Anzahl der negativen Eigenwerte dieser Matrix.
M^{T}	die Transponierte der Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
M^{-1}	die Inverse der Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$M^{\dagger}$	die Moore-Penrose Inverse von $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$, siehe den Abschnitt A.2.
$M \geq 0$	eine nichtnegativ definite Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. es gilt $M = M^{\mathrm{T}}$ und $x^{\mathrm{T}}Mx \geq 0$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$.
$M > 0$	eine positiv definite Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. es gilt $M = M^{\mathrm{T}}$ und $x^{\mathrm{T}}Mx > 0$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.
$M(t)$	eine Matrix, deren Einträge reellwertige Funktionen der Variable t sind. Entsprechend sollen Operationen wie Differenzieren oder Integrieren solcher Objekte immer komponentenweise verstanden sein, also etwa
$\dot{M}(t)$	die Matrix $(\dot{m}_{\mu\nu}(t)) = (\frac{d}{dt}\, m_{\mu\nu}(t))$ für $M(t) = (m_{\mu\nu}(t))$.
$\ker M(t-)$	den „linksseitigen Grenzwert" des Kerns der matrixwertigen Funktion M im Punkt t, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\ker M(\cdot)$ konstant auf $[t-\varepsilon, t)$ ist, und diesen Vektorraum bezeichnen wir mit $\ker M(t-)$.
$\ker M(t+)$	den „rechtsseitigen Grenzwert" des Kerns der matrixwertigen Funktion M im Punkt t, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\ker M(\cdot)$ konstant auf $(t, t+\varepsilon]$ ist, und diesen Vektorraum bezeichnen wir mit $\ker M(t+)$.
$\operatorname{Im} M(t+)$	den „rechtsseitigen Grenzwert" des Bildes der matrixwertigen Funktion M im Punkt t.
$\|x\|$	$= \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^2}$ die Euklidische Vektornorm, sofern in dem entsprechenden Textabschnitt nicht anders definiert.
$\oplus$	eine direkte Summe.

Wir nennen eine symmetrische matrixwertige Funktion $M(t)$ monoton nicht fallend (streng monoton wachsend) auf dem reellen Intervall $\mathcal{I}$, falls $M(t_2) - M(t_1) \geq 0$ ($M(t_2) - M(t_1) > 0$) für alle $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$, $t_1 < t_2$, gilt. Wir sagen sie ist monoton nicht wachsend (streng monoton fallend) auf $\mathcal{I}$, falls $M(t_1) - M(t_2) \geq 0$ ($M(t_1) - M(t_2) > 0$) für alle $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$, $t_1 < t_2$, gilt. Ferner nennen wir eine Menge diskret, falls sie nur aus isolierten Punkten besteht, d.h. falls sie keine Häufungspunkte besitzt.

Wir verstehen unter $f(t-)$ (bzw. $f(t+)$) den üblichen „linksseitigen" („rechtsseitigen") Grenzwert der Funktion f. Ist f ganzzahlig, so bedeutet dies, dass ein $\varepsilon > 0$ so existiert, dass f konstant auf $[t-\varepsilon, t)$ (bzw. auf $(t, t+\varepsilon]$) ist und diesen Wert bezeichnen wir mit $f(t-)$ bzw. $f(t+)$.

1 Einleitung

Die Oszillationstheorie linearer Differentialgleichungen begann mit den Untersuchungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung von J. C. F. Sturm [45] im Jahre 1836 und wurde durch J. Liouville [31] vorangetrieben. Auf letzteren geht die Betrachtung der *Sturm-Liouvilleschen Eigenwertprobleme* zweiter Ordnung zurück. Obwohl diese Theorie in der Physik vielfältige Anwendungen findet (es sei bemerkt, dass diese allgemeine Randwertprobleme expliziter linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung beinhaltet, siehe etwa [[48], Kapitel VI §26]), konnte vor dem Jahr 1911 kein Analogon dieser Theorie für Systeme höherer Ordnung gefunden werden. In diesem Jahr erweiterte G. D. Birkhoff [6, 7] die Betrachtungen auf Systeme dritter Ordnung. C. N. Reynolds Jr. [41] vermochte einige Resultate von G. D. Birkhoff auf Systeme n-ter Ordnung zu übertragen.

In der ersten Dekade des 20. Jahrhunderts stellte D. Hilbert [20] einen Zusammenhang zwischen Randwertproblemen selbstadjungierter Differentialgleichungssysteme und der Variationsrechnung her. Die Bedeutsamkeit dieses Zusammenhangs, insbesondere bezüglich der Sturmschen Theorie, hob M. Morse 1930 in [35] (siehe auch [36, 37]) hervor und gab der Oszillationstheorie mit seinen Betrachtungen zahlreiche neue Impulse. M. Morse vermochte zudem einen Satz zu erzielen, der die Anzahl aller Eigenwerte bis zu einer gewissen Grenze mit so genannten „konjugierten Punkten“ von speziellen Lösungen des betrachteten Differentialgleichungssystems vergleicht. Aufbauend auf diese Theorie trug W. T. Reid [39, 40] viele Erweiterungen der Sturmschen Theorie bei.

C. Carathéodory [14] fand einen neuen Zugang zur Feldtheorie, mitunter auch als Königsweg bezeichnet, der den Zusammenhang von dem Fundamentalsatz von K. Weierstrass mit der Identität von M. Picone [38] herstellt. Dieser begründet einerseits die Wichtigkeit von konjugierten Basen und fokalen Punkten, die wir in den Kapiteln 3 und 4 einführen werden, andererseits ermöglichte diese Identität die Untersuchung der Definitheit quadratischer Funktionale (siehe etwa [25, 28]), die für den globalen Oszillationssatz, der im Kapitel 6 präsentiert wird, wichtig ist. C. Carathéodory erweiterte zudem den Lösungsbegriff von Differentialgleichungen dahingehend, dass er als Lösungen von diesen absolut stetige Funktionen definierte, die die Ableitungsbedingungen der Differentialgleichung fast überall im Sinne von H.L. Lebesgue erfüllen. Diesem Ansatz möchten wir in dieser Arbeit folgen.

Eine ausführliche historische Darstellung der Oszillationstheorie bis etwa 1970 findet man in den Büchern von W.A. COPPEL [16], C.A. SWANSON [47] und W. T. REID [40].
Die Identität von Picone verallgemeinerten W. KRATZ und A. PEYERIMHOFF. Sie machten sich diese in den 1984 bzw. 1985 erschienenen Arbeiten [23, 24] zunutze und erarbeiteten eine umfassende Theorie für Sturm-Liouvillesche Eigenwertprobleme gerader Ordnung, in der sie einen Oszillationssatz für die zugehörigen Hamiltonschen Systeme bewiesen. Hamiltonsche Systeme sind $2n \times 2n$-Differentialgleichungssysteme der Form

$$\mathcal{J}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{u}\end{pmatrix} = \mathcal{H}\begin{pmatrix}x\\ u\end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix} \text{ und } \mathcal{H} = \begin{pmatrix}-C+\lambda C_0 & A^{\mathrm{T}}\\ A & B\end{pmatrix}$$

mit einem reellen (Eigenwert-)Parameter λ ist. Der (lokale) Oszillationssatz besagt, dass die Anzahl aller Eigenwerte des betrachteten Eigenwertproblems kleiner oder gleich λ (inkl. Vielfachheiten) bis auf eine Konstante, die sich aus der Asymptotik für $\lambda \to -\infty$ ergibt, gleich der Anzahl aller fokaler Punkte einer geeigneten von den Randbedingungen abhängigen konjugierten Basis des zugrunde liegenden Hamiltonschen Systems (inkl. Vielfachheiten) plus der Anzahl der negativen Eigenwerte einer zugehörigen quadratischen Matrix ist.
In seiner Dissertation an der Universität Ulm verallgemeinerte G. BAUR [3] 1986 dieses Resultat dahingehend, dass er die spezielle Gestalt des Hamiltonschen Systems fallen ließ. In dem 1995 veröffentlichten Buch [25] verallgemeinerte W. KRATZ dieses Resultat wiederum in mehrerlei Hinsicht. Zum einen durften gewisse Randbedingungen von λ abhängen, zum anderen vermochte er einen Oszillationssatz für Hamiltonsche Systeme zu beweisen, für die

$$\mathcal{H}(t,\lambda) = \begin{pmatrix}-C(t)+\lambda C_0(t) & A^{\mathrm{T}}(t,\lambda)\\ A(t,\lambda) & B(t,\lambda)\end{pmatrix}$$

für alle festen $t \in [a,b]$ monoton wachsend in λ auf $\mathbb{R}$ und $B \geq 0$ auf $\mathcal{I} \times \mathbb{R}$ ist. Dabei war statt $C - \lambda C_0$ eine beliebige stetige Funktion $C_1(\cdot,\lambda)$ zugelassen. Schließlich gelang ihm die Angabe eines globalen Oszillationssatzes. Dieser besagt, dass unter der zusätzlichen Annahme der Positivität eines gewissen quadratischen Funktionals die von der Asymptotik für $\lambda \to -\infty$ abhängigen Konstante gleich Null ist, siehe hierzu auch

[27]. Der globale Oszillationssatz liefert also eine explizite Formel zur Berechnung aller Eigenwerte kleiner oder gleich λ in Abhängigkeit der Anzahl der fokalen Punkte einer geeigneten konjugierten Basis des zugrunde liegenden Hamiltonschen Systems.
Beide Autoren setzen in ihren Arbeiten jedoch voraus, dass das zugrunde liegende Hamiltonsche System *streng normal* ist, vergleiche [[25], Definition 4.1.2]. Strenge Normalität eines Hamiltonschen Systems impliziert, dass das System *steuerbar* ist, siehe [[25], Definition 4.1.1], was wiederum damit äquivalent ist, dass die fokalen Punkte jeder konjugierten Basis des Hamiltonschen Systems isoliert sind, vergleiche [[25], Theorem 4.1.3]. Weiterhin impliziert die strenge Normalität, dass die Eigenwerte des betrachteten Eigenwertproblems isoliert sind, siehe [[25], Lemma 7.1.1].
Das zentrale neue Resultat dieser Arbeit ist, dass wir die Voraussetzung der strengen Normalität, insbesondere die Annahme der Steuerbarkeit, fallen lassen. Um die Isoliertheit der Eigenwerte des betrachteten Eigenwertproblems und der fokalen Punkte einer konjugierten Basis des zugrunde liegenden Hamiltonschen Systems, die selbstverständlich nach wie vor benötigt werden, zu gewährleisten, müssen diese Begriffe enger gefasst werden. Der neue Begriff des *eigentlichen Eigenwertes* eines Eigenwertproblems erlaubt es Systeme zu betrachten, deren „Ausgangsmatrix C_0“ auf Teilintervallen identisch gleich Null ist. Damit erschließt sich eine neue Klasse von Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblemen, siehe Bemerkung 6.2. Der erstmals in [28] definierte Begriff des *verallgemeinerten (hier: eigentlichen) fokalen Punktes* einer konjugierten Basis erlaubt die Untersuchung von nicht-steuerbaren Hamiltonschen Systemen. Da wir die Annahme der Steuerbarkeit des dem Eigenwertproblem zugrunde liegenden Hamiltonschen Systems fallen lassen, vermögen wir Eigenwertprobleme mit nicht separierten Randbedingungen auf Eigenwertprobleme mit separierten Randbedingungen zurückzuführen, vergleiche Abschnitt 6.3.
Wir möchten einige aktuelle Untersuchungen der Oszillation linearer Hamiltonscher Systeme erwähnen. Diese gehen in drei Richtungen, die allesamt verschieden von der von uns betrachteten Untersuchung sind. M. Bohner, O. Došlý und W. Kratz untersuchen in [11, 17, 29] Oszillationssätze diskreter Eigenwertprobleme, deren zugrunde liegende Differenzengleichungssysteme symplektische Gestalt besitzen.
D.R. Anderson, F. Meng, S. Kumari, S. Umamaheswaram und Q. Yang u.a. beschäftigen sich mit der qualitativen Natur der Lösungen von linearen Hamiltonschen Systemen, d.h. sie untersuchen Fragestellungen, unter welchen Voraussetzungen eine konjugierte Basis eines Hamiltonschen Systems auf einem Intervall $[a, \infty), a \in \mathbb{R}$, unendlich viele fokale Punkte besitzt. Dabei werden in allen Veröffentlichungen dies-

bezüglich stets $B(t) > 0, t \in [a, \infty)$, und damit insbesondere die Steuerbarkeit des zugrunde liegenden Systems, vorausgesetzt (siehe etwa die Arbeiten [1, 15, 18, 30, 32, 33, 34, 46, 49, 50]). In eine andere Richtung gehen die Untersuchungen von M. Bohner und R. Hilscher in [13], bzw. von M. Bohner und O. Došlý in [12]. In diesen Arbeiten untersuchen sie Eigenwertprobleme, bzw. die qualitative Natur von Lösungen von Hamiltonschen Systemen, auf *time-scales*, ein Konzept welches die diskreten und zeitstetigen Systeme verallgemeinert und beide zusammen führt. Siehe hierzu auch [9, 10].

Wir möchten nun den Aufbau dieser Arbeit darlegen. Im zweiten Kapitel stellen wir Hilfsmittel aus der Matrix Analysis zusammen, die bis auf Satz 2.3, der neu zu sein scheint, [25] entliehen und zum Teil nur Spezialfälle dort formulierter allgemeinerer Sätze sind.

Bekannte Resultate aus der Theorie der Hamiltonschen Systeme geben wir im dritten Kapitel an. Dabei spielt der dort definierte Begriff einer konjugierten Basis eines Hamiltonschen Systems eine zentrale Rolle in dieser Arbeit.

Im vierten Kapitel führen wir den Begriff des eigentlichen fokalen Punktes einer konjugierten Basis ein. In [28] definiert W. Kratz zunächst, wann eine konjugierte Basis *keinen* eigentlichen (dort: verallgemeinerten) fokalen Punkt in dem betrachteten Intervall besitzt. Darauf aufbauend wird dann in dieser Arbeit ein eigentlicher (dort: verallgemeinerter) fokaler Punkt definiert. Da jedoch in jener Arbeit die Vielfachheit eines eigentlichen (dort: verallgemeinerten) fokalen Punktes nicht benötigt wird, ist die Definition der Vielfachheit eines eigentlichen fokalen Punktes folglich neu. Der Satz 4.1, der eine Formel für die lokale Änderung der Anzahl aller eigentlichen fokalen Punkte einer konjugierten Basis auf dem betrachteten Intervall bezüglich λ angibt, ist der wichtigste Satz in dieser Arbeit.

Im fünften Kapitel führen wir den neuen Begriff des eigentlichen Eigenwertes einer konjugierten Basis eines Hamiltonschen Systems ein. Wir zeigen, dass die eigentlichen Eigenwerte isoliert sind und geben zwei charakteristische Gleichungen für die eigentlichen Eigenwerte an. Ferner leiten wir eine Transformation eines Hamiltonschen Systems und der Randbedingungen auf kanonische Form her, mit der wir den Indexsatz für Eigenwertprobleme, Satz 5.2, beweisen.

Die Hauptresultate zur Oszillation linearer Hamiltonscher Systeme sind im sechsten Kapitel aufgeführt. Dort werden wir ebenfalls erläutern, wie man das Eigenwertproblem mit nicht separierten Randbedingungen auf den Fall separierter Randbedingungen zurückführen kann.

In dieser Arbeit benutzen wir einige mathematische Grundlagen wie etwa den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für stückweise stetige lineare Differentialgleichungssysteme und deren lineare Abhängigkeit von einem reellen Parameter λ oder aber die Moore-Penrose Inverse einer Matrix. Um das Wesentliche nicht aus den Augen zu verlieren, sind diese Hilfsmittel im Anhang aufgelistet und wir werden an den jeweiligen Stellen, an denen wir sie benötigen, auf diese verweisen.
Abschließend möchten wir die vorliegende Arbeit anhand dreier Beispiele motivieren.

Beispiel 1.1. (Sturm-Liouville)
Es sei das Eigenwertproblem

$$(py')' - qy + \lambda y = 0 \tag{SL}$$

mit $y(0) = y(1) = 0$ (so genannten *Dirichletschen Randbedingungen*) gegeben. Dabei sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein reeller (Eigenwert-)Parameter und p, q seien stetige Funktionen auf $[0, 1]$ mit $p(t) > 0$ für alle $t \in [0, 1]$. Bezeichnet y nun die *Hauptlösung* von (SL) bei 0, d.h. ist y eine Lösung von (SL) mit $y(0) = 0, p(0)y'(0) = 1$, so besagt ein bekanntes Resultat aus der Theorie der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertprobleme, dass die Anzahl der Nullstellen der Funktion $y = y(\cdot; \lambda)$ im Intervall $(0, 1]$ gleich der Anzahl der Eigenwerte, die kleiner oder gleich λ sind, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert des obigen Eigenwertproblems falls es eine nichttriviale Lösung y gibt, die (SL) und den Dirichletschen Randbedingungen genügt.
Substituiert man in der Gleichung (SL) etwa $x := y$ und $u := py'$, so ist die Hauptlösung von (SL) bei 0 gegeben durch die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \frac{1}{p}u,\ \dot{u} = (q - \lambda)x,\ x(0) = 0,\ u(0) = 1$$

mit der in diesem Zusammenhang üblichen Notation $\dot{x}, \dot{u}$ anstelle von x', u'.

Beispiel 1.2.
Wir diskutieren nun drei Eigenwertprobleme im skalaren Fall (d.h. $n = 1$) jeweils bestehend aus dem linearen Hamiltonschen System

$$\dot{x} = Bu,\ \dot{u} = (C - \lambda C_0)x$$

mit

$$B(t) := \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi] \\ 0, & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases} \qquad C(t) := \begin{cases} -1, & t \in [0, \pi] \\ 0, & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases} \qquad C_0(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi] \\ 1, & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

und den Randbedingungen

(i) $x(0) = x(2\pi) = 0$ (Dirichletsche Randbedingungen).

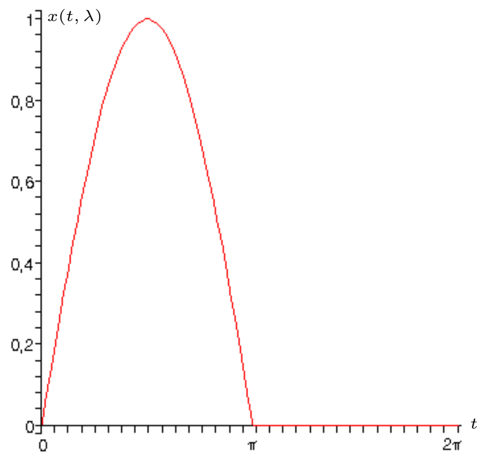
(ii) $x(0) = u(2\pi) = 0$.

(iii) $u(0) = u(2\pi) = 0$.

Wie üblich heißt $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert dieses Eigenwertproblems, falls es eine nichttriviale Lösung (x, u) dieses linearen Hamiltonschen Systems gibt, die die Randbedingungen erfüllt.
Die Lösung des Hamiltonschen Systems mit den Anfangswerten $x(0, \lambda) = 0, u(0, \lambda) = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch

$$x(t,\lambda) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0,\pi] \\ 0, & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases} \qquad u(t,\lambda) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0,\pi] \\ -1, & t \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

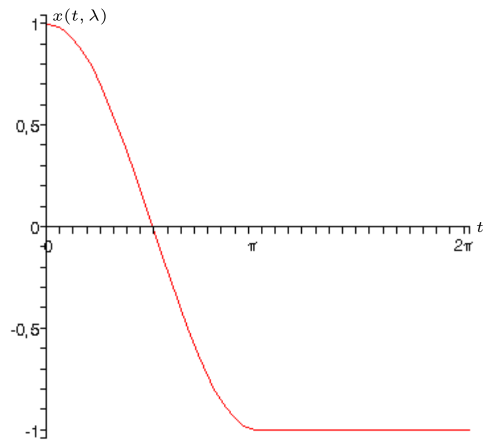
Skizze von x.



Damit ist jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert des Eigenwertproblems (i), so dass sich im Sinne unserer Untersuchungen keine sinnvolle Theorie ergeben würde. Im Eigenwertproblem (ii) gibt es wegen $u(2\pi, \lambda) = -1 \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ hingegen keine Eigenwerte.
Schließlich ist die Lösung des gegebenen Hamiltonschen Systems mit den Anfangswerten $x(0, \lambda) = 1, u(0, \lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben durch

$$x(t,\lambda) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0,\pi] \\ -1, & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases} \qquad u(t,\lambda) = \begin{cases} -\sin t, & t \in [0,\pi] \\ \lambda(t-\pi), & t \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Skizze von x.



Es gibt also genau einen Eigenwert des Eigenwertproblems (iii) und dieser wird für $\lambda = 0$ angenommen. Dabei ist die Funktion x bezüglich λ konstant.

Beispiel 1.3.
Es sei das Eigenwertproblem

$$\dot{x} = Bu, \;\; \dot{u} = -\lambda C_0 x$$

mit

$$B(t) := \begin{cases} 1, & t \in [0,\pi] \cup [2\pi, 3\pi] \\ 0, & t \in (\pi, 2\pi), \end{cases} \;, \; C_0(t) := \begin{cases} 1, & t \in [0,\pi] \cup [2\pi, 3\pi] \\ 0, & t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

und den Randbedingungen

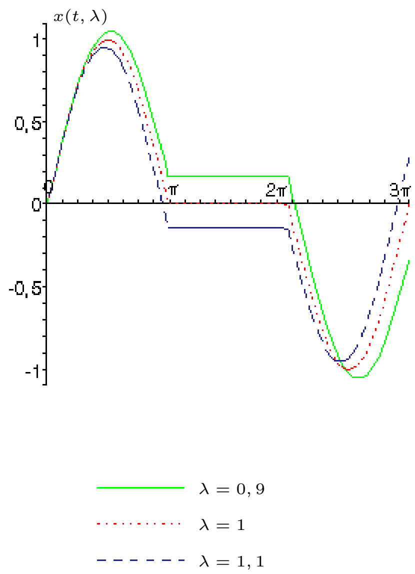
$$x(0) = x(3\pi) = 0$$

gegeben. Die Lösung des Differentialgleichungssystems mit den Anfangswerten $x(0) = 0, u(0) = 1$ ist für $\lambda > 0$ gegeben durch

$$x(t,\lambda) \;\; = \;\; \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}, & t \in [0,\pi] \\ \dfrac{\sin(\sqrt{\lambda}\pi)}{\sqrt{\lambda}}, & t \in [\pi, 2\pi] \\ \dfrac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\sin(\sqrt{\lambda}t) - \sin(\sqrt{\lambda}\pi)\cos(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}, & t \in [2\pi, 3\pi], \end{cases}$$

$$u(t,\lambda) \;=\; \begin{cases} \cos(\sqrt{\lambda}t), & t \in [0,\pi] \\ \cos(\sqrt{\lambda}\pi), & t \in [\pi, 2\pi] \\ \sin(\sqrt{\lambda}\pi)\sin(\sqrt{\lambda}t) + \cos(\sqrt{\lambda}\pi)\cos(\sqrt{\lambda}t), & t \in [2\pi, 3\pi]. \end{cases}$$

Skizze von $x(t,\lambda)$ für $\lambda = 0,9;\ 1;\ 1,1$:



Das Eigenwertproblem besitzt für $\lambda \leq 0$ keine nichttriviale Lösung des Differentialgleichungssystems, die die Randbedingungen erfüllt. Im Fall $\lambda > 0$ ist λ genau dann ein Eigenwert des gegebenen Eigenwertproblems, wenn $x(3\pi,\lambda) = 0$ für die obige Funktion x gilt. Anhand der Skizze sieht man, dass die „linksseitigen Nullstellen“ von x mit wachsendem λ kleiner werden. Damit bleiben sie insbesondere mit wachsendem λ im Intervall $[0,3\pi]$ „erhalten“, und x besitzt genau dann eine „neue“ linksseitige Nullstelle, falls $x(3\pi,\lambda) = 0$ gilt. Die Anzahl der linksseitigen Nullstellen von $x(\cdot,\lambda)$ ist also für alle $\delta > 0$ größer als die Anzahl der linksseitigen Nullstellen von $x(\cdot,\lambda-\delta)$ in $[0,3\pi]$, und es kommt genau dann eine „neue“ linksseitige Nullstelle hinzu, wenn λ ein Eigenwert des gegebenen Eigenwertproblems ist. Daher ist ähnlich wie in Beispiel 1.1 die Anzahl der Eigenwerte dieses Eigenwertproblems kleiner oder gleich λ gleich der Anzahl aller linksseitigen Nullstellen von $x(\cdot,\lambda)$ in $(0,3\pi]$.

Ferner bemerken wir, dass sowohl die linksseitigen Nullstellen von x wie auch die „rechtsseitigen Nullstellen“ von x Sprünge haben können. Für die kleinste linksseitige Nullstelle $t_0 = t_0(\lambda)$ im Intervall $(0,3\pi]$ gilt etwa: $t_0(1) = \pi,\ t_0(1-) = 2\pi$; für die kleinste rechtsseitige Nullstelle $\tau_0 = \tau_0(\lambda)$ im Intervall $(0,3\pi)$ gilt: $\tau_0(1) = 2\pi,\ \tau_0(1+) = \pi$.

2 Matrix Analysis

In diesem Kapitel stellen wir einige Hilfsmittel aus der Matrix Analysis bereit, auf die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit zurückgreifen werden. Bis auf Satz 2.3, der neu zu sein scheint, und Proposition 2.1, die eine Zusammenstellung bekannter Resultate ist, sind die Resultate dieses Kapitels allesamt [25] entnommen und werden daher in dieser Arbeit nicht bewiesen. Insbesondere der Indexsatz, Satz 2.2 (siehe auch [26]), spielt eine zentrale Rolle für die Oszillation linearer Hamiltonscher Systeme.

Satz 2.1. ([[25], Theorem 3.1.2])
Gegeben seien $m \times m$-Matrizen Q_1, Q_2 so, dass $Q_1 Q_2^{\mathrm{T}}$ symmetrisch ist.

(i) Dann gibt es eine symmetrische Matrix S_1 und eine Matrix S_2 mit

$$Q_1 = Q_2 S_1 + S_2, \quad S_2 Q_2^{\mathrm{T}} = 0.$$

Gilt zusätzlich $\mathrm{rg}(Q_1, Q_2) = m$, so gilt darüber hinaus

(ii) $\mathrm{rg}(Q_1^{\mathrm{T}}, Q_2^{\mathrm{T}}) = m$ und $\ker Q_1 Q_2^{\mathrm{T}} = \ker Q_1^{\mathrm{T}} \oplus \ker Q_2^{\mathrm{T}}$.

(iii) $Q_1 + Q_2$ ist regulär, sofern $Q_1 Q_2^{\mathrm{T}}$ nichtnegativ definit ist.

Korollar 2.1. ([[25], Corollary 3.1.3])

(i) Gegeben seien $m \times m$ Matrizen R_1, R_2, für die gilt:

$$R_1 R_2^{\mathrm{T}} = R_2 R_1^{\mathrm{T}} \text{ und } \mathrm{rg}(R_1, R_2) = m.$$

Dann gibt es eine symmetrische Matrix S_1 und eine Matrix S_2 so, dass

$$R_1 = R_2 S_1 + S_2,\ S_2 R_2^{\mathrm{T}} = 0,\ \ker R_2 = \mathrm{Im}\ S_2^{\mathrm{T}},$$
$$\ker(R_1, R_2) = \mathrm{Im} \begin{pmatrix} R_2^{\mathrm{T}} \\ -R_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

gilt, und für Vektoren $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^m$ gilt $R_1 d_1 + R_2 d_2 = 0$, d.h.

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \ker(R_1, R_2),$$

genau dann, wenn

$$d_1 \in \mathrm{Im}\ R_2^{\mathrm{T}} \text{ und } d_2 + S_1 d_1 \in \ker R_2 = \mathrm{Im}\ S_2^{\mathrm{T}}$$

gilt.

(ii) Es seien umgekehrt eine $m \times m$-Matrix R_2 und eine symmetrische $m \times m$-Matrix S_1 gegeben. Dann gibt es eine $m \times m$-Matrix S_2, für die gilt:

$$\operatorname{Im} S_2^{\mathrm{T}} = \ker R_2,\ R_1 R_2^{\mathrm{T}} = R_2 R_1^{\mathrm{T}},\ \operatorname{rg}(R_1, R_2) = m,\ \text{wobei } R_1 = R_2 S_1 + S_2.$$

Proposition 2.1.

(i) Es seien X_1, U_1, X_2, U_2 $m \times m$-Matrizen mit

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ U_1 & U_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} U_2^{\mathrm{T}} & -X_2^{\mathrm{T}} \\ -U_1^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$X_i^{\mathrm{T}} U_i = U_i^{\mathrm{T}} X_i \text{ für } i = 1,2, \quad X_1 X_2^{\mathrm{T}} = X_2 X_1^{\mathrm{T}}, \quad U_1 U_2^{\mathrm{T}} = U_2 U_1^{\mathrm{T}},$$
$$X_1^{\mathrm{T}} U_2 - U_1^{\mathrm{T}} X_2 = X_1 U_2^{\mathrm{T}} - X_2 U_1^{\mathrm{T}} = I.$$

(ii) Es seien X_2, U_2 $m \times m$-Matrizen mit

$$\operatorname{rg}(X_2^{\mathrm{T}}, U_2^{\mathrm{T}}) = m,\ X_2^{\mathrm{T}} U_2 = U_2^{\mathrm{T}} X_2.$$

Dann gibt es Matrizen X_1, U_1 so, dass die Matrizen X_1, U_1, X_2, U_2 die Gleichung $(*)$ erfüllen, und so, dass X_1 regulär und $X_1^{-1} X_2 \geq 0$ (oder $X_1^{-1} X_2 \leq 0$) ist.

Beweis

(i) Die Behauptung folgt aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} U_2^{\mathrm{T}} & -X_2^{\mathrm{T}} \\ -U_1^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ U_1 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

und aus der Tatsache, dass eine Matrix mit ihrer Inversen kommutiert.

(ii) Wir verwenden den Beweis von [[25], Corollary 3.3.9] mit $D := \eta I$ und wählen

$$X_1(\eta) := U_2 K^{-1} + \eta X_2,\ U_1(\eta) := -X_1 K^{-1} + \eta U_2$$

mit $K := X_2^{\mathrm{T}} X_2 + U_2^{\mathrm{T}} U_2$ und $\eta \in \mathbb{R}$. Dabei ist K regulär, da nach $(*)$ $\operatorname{rg}(X_2^{\mathrm{T}}, U_2^{\mathrm{T}}) = m$ gilt. Folglich ist

$$\begin{pmatrix} U_2^{\mathrm{T}} & -X_2^{\mathrm{T}} \\ -U_1^{\mathrm{T}}(\eta) & X_1^{\mathrm{T}}(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(\eta) & X_2 \\ U_1(\eta) & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} X_1(\eta) & X_2 \\ U_1(\eta) & U_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} U_2^{\mathrm{T}} & -X_2^{\mathrm{T}} \\ -U_1^{\mathrm{T}}(\eta) & X_1^{\mathrm{T}}(\eta) \end{pmatrix} \text{ für alle } \eta \in \mathbb{R}.$$

Aus (i) folgt, dass $X_1(\eta)X_2^{\mathrm{T}}$ für alle $\eta \in \mathbb{R}$ symmetrisch ist. Gemäß Satz 2.1(i) existiert daher eine symmetrische Matrix $S_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und eine Matrix $S_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit

$$X_1(0) = X_2S_1 + S_2,\ S_2X_2^{\mathrm{T}} = 0.$$

Dann ist

$$X_1(\eta)X_2^{\mathrm{T}} = (X_1(0) + \eta X_2)X_2^{\mathrm{T}} = X_2(S_1 + \eta I)X_2^{\mathrm{T}}$$

nichtnegativ (nichtpositiv) definit für genügend großes (kleines) $\eta \in \mathbb{R}$.
Da $X_1(\eta)X_2^{\mathrm{T}}$ symmetrisch ist und nach $(*)$ $\mathrm{rg}(X_1(\eta), X_2) = m$ gilt, sind die Voraussetzungen von Satz 2.1(iii) mit $Q_1 = X_1(\eta), Q_2 = X_2$ (mit $Q_1 = X_1(\eta)$, $Q_2 = -X_2$) erfüllt. Demnach ist $X_1(\eta)$ regulär für genügend großes (kleines) $\eta \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$X_1^{-1}(\eta)X_2 = X_1^{-1}(\eta)X_1(\eta)X_2^{\mathrm{T}}(X_1^{-1})^{\mathrm{T}}(\eta) = X_1^{-1}(\eta)X_2(S_1 + \eta I)X_2^{\mathrm{T}}(X_1^{-1})^{\mathrm{T}}(\eta) \geq 0$$

($X_1^{-1}(\eta)X_2 \leq 0$) für genügend großes (kleines) $\eta \in \mathbb{R}$. Setzt man nun mit diesem genügend großen (kleinen) η

$$X_1 := X_1(\eta),\ U_1 := U_1(\eta),$$

so ergibt sich die Behauptung.

□

Proposition 2.2. ([[25], Proposition 3.2.3])
Es sei $Q(t)$ eine hermitische $m \times m$-matrixwertige Funktion auf einem Intervall $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ mit den Eigenwerten $\mu_1(t), \ldots, \mu_m(t)$ mit $\mu_1(t) \leq \ldots \leq \mu_m(t)$ für $t \in \mathcal{J}$. Dann gilt für alle $\nu = 1, \ldots, m$:

(i) $\mu_\nu(t)$ ist stetig auf $\mathcal{J}$, falls $Q(t)$ stetig auf $\mathcal{J}$ ist.

(ii) $\mu_\nu(t)$ ist monoton nicht wachsend (nicht fallend) auf $\mathcal{J}$, falls $Q(t)$ monoton nicht wachsend (nicht fallend) auf $\mathcal{J}$ ist.

Satz 2.2. (Indexsatz, siehe [25], Theorem 3.4.1)
Es seien reelle $m \times m$-Matrizen R_1, R_2, X, U gegeben, die den Gleichungen

$$\mathrm{rg}(R_1, R_2) = \mathrm{rg}(X^{\mathrm{T}}, U^T) = m,\ R_1 R_2^{\mathrm{T}} = R_2 R_1^{\mathrm{T}},\ X^{\mathrm{T}} U = U^{\mathrm{T}} X$$

genügen, sowie $m \times m$-matrixwertige Funktionen $X(t), U(t)$ definiert auf $[-\varepsilon, \varepsilon], \varepsilon > 0$, für die gilt:

$$\begin{aligned} &X^{\mathrm{T}}(t)U(t) = U^{\mathrm{T}}(t)X(t) \text{ für } t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \text{ und} \\ &X(t) \to X, U(t) \to U \text{ für } t \to 0; \end{aligned}$$

$$X(t) \text{ ist regulär für } t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\};$$

und

$$U(t)X^{-1}(t) \text{ ist monoton nicht wachsend für } t \in [-\varepsilon, 0) \text{ und für } t \in (0, \varepsilon].$$

Ferner seien

$$\begin{aligned} M(t) &:= R_1 R_2^{\mathrm{T}} + R_2 U(t) X^{-1}(t) R_2^{\mathrm{T}}, \\ \Lambda(t) &:= R_1 X(t) + R_2 U(t), \\ \Lambda &:= R_1 X + R_2 U. \end{aligned}$$

Dann existieren $\mathrm{ind}\, M(0+), \mathrm{ind}\, M(0-)$ und $\mathrm{def}\, \Lambda(0+)$ und es gilt:

$$\mathrm{ind}\, M(0+) - \mathrm{ind}\, M(0-) = \mathrm{def}\, \Lambda - \mathrm{def}\, \Lambda(0+) - \mathrm{def}\, X.$$

Genauer gilt das

Korollar 2.2. ([[25], Corollary 3.4.2])
Es gelten die Voraussetzungen und die Notation des vorangegangenen Indexsatzes 2.2. Die orthogonale Zerlegung von $\mathrm{Im}\, R_2^{\mathrm{T}}$ in $\mathrm{Im}\, X$ und dessen orthogonales Komplement führt auf eine eindeutige Matrix S^* und eine Matrix S mit

$$R_2^T = XS + S^* \text{ mit } X^{\mathrm{T}} S^* = 0.$$

Ferner sei T eine Matrix mit

$$\mathrm{Im}\, T = \ker S^*, \text{ und es sei } Q := T^{\mathrm{T}} \Lambda S T.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}\, M(0+) &= \mathrm{ind}\, Q + m - \mathrm{rg}\, T + \mathrm{def}\, \Lambda - \mathrm{def}\, \Lambda(0+) - \mathrm{def}\, X, \text{ und} \\ \mathrm{ind}\, M(0-) &= \mathrm{ind}\, Q + m - \mathrm{rg}\, T. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.1.
Beachte, dass die Matrix S^* des vorangegangenen Korollars 2.2 nicht die hermitesch konjugierte Matrix von S bezeichnet, wie es eine gängige Notation ist. Wir haben an dieser Stelle die Notation von [25] übernommen.

Der nachstehende Satz ist zentral für die Transformation der Randbedingungen auf „kanonische Form“, siehe Lemma 5.4. Dieser Satz scheint ein neues Resultat zu sein, das in der Literatur noch nicht aufgetreten ist.

Satz 2.3.
Es seien $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, und $r \in \{0, \ldots, m\}$. Dann gibt es eine reguläre Matrix $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{r \times (m-r)}$ mit

$$RZ = \begin{pmatrix} R_{11} & CR_{22} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}$$

mit gewissen Matrizen $R_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ und $R_{22} \in \mathbb{R}^{(m-r) \times (n-r)}$.

Beweis
Es sei k_1 die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren $c_1, \ldots, c_{k_1} \in \mathbb{R}^r$, für die es gewisse $z_1, \ldots, z_{k_1} \in \mathbb{R}^n$ mit $Rz_\nu = (c_\nu^{\mathrm{T}}, 0)^{\mathrm{T}}$, $\nu = 1, \ldots, k_1$, gibt. Es sei $\{z_{k_1+1}, \ldots, z_{k_2}\}$ eine Basis von $\ker R$. Dann sind die Vektoren $z_1, \ldots, z_{k_2}$ linear unabhängig. Es ist

$$\mathrm{rg} R \leq k_1 + m - r$$

und damit

$$r \leq m - n + k_1 + \operatorname{def} R \leq k_1 + \operatorname{def} R = k_2.$$

Es seien nun weitere Vektoren $z_{k_2+1}, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^n$ so gegeben, dass $\{z_1, \ldots, z_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet. Setzt man $Z := (z_1, \ldots, z_n)$, so ist

$$RZ = (Rz_1, \ldots, Rz_n) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}$$

mit gewissen Matrizen $R_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}, R_{12} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}, R_{22} \in \mathbb{R}^{(m-r) \times (n-r)}$.
Ferner ist $\ker R_{22} \subset \ker R_{12}$, denn sei $d \in \ker R_{22}$, so ist

$$RZ \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{12} d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei angenommen, es wäre $d \notin \ker R_{12}$. Dann wäre $Z \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$ linear abhängig von den Vektoren $z_1, \dots, z_{k_1}$, $k_1 \leq r$, d.h.

$$Z \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{k_1} \alpha_\nu z_\nu = \sum_{\nu=r+1}^{n} d_\nu z_\nu,$$

mit $d = (d_{r+1}, \dots, d_n)^{\mathrm{T}}$ und gewissen $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1} \in \mathbb{R}$.
Da die Vektoren $z_1, \dots, z_{k_1}, z_{r+1}, \dots, z_n$ jedoch linear unabhängig sind, hieße dies $d = 0$ im Widerspruch zu $d \notin \ker R_{12}$.
Es implizieren

$$\mathbb{R}^{n-r} = \ker R_{22} \oplus \mathrm{Im}\ R_{22}^{\mathrm{T}} = \ker R_{12} \oplus \mathrm{Im}\ R_{12}^{\mathrm{T}}$$

und $\ker R_{22} \subset \ker R_{12}$, dass $\mathrm{Im}\ R_{12}^{\mathrm{T}} \subset \mathrm{Im}\ R_{22}^{\mathrm{T}}$ gilt, d.h. es ist $R_{12} = CR_{22}$ mit einer gewissen Matrix $C \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$.

$\square$

Bemerkung 2.2.
Ein alternativer Beweis für den Satz 2.3 ergibt sich mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Hierbei bringt man zunächst die Matrix R mittels elementarer Spaltenoperationen auf Spaltenstufenform. Durch Vertauschen von Spalten erreicht man nun stets eine Gestalt

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}$$

mit gewissen Matrizen $R_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}, R_{12} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}, R_{22} \in \mathbb{R}^{(m-r) \times (n-r)}$ so, dass man die Einträge der Matrix R_{12} durch elementare Zeilenoperationen der Matrix R_{22} darstellen kann.

3 Hamiltonsche Systeme

In diesem Kapitel tragen wir bekannte Resultate aus [25, 28] über das lineare Hamiltonsche System

$$\text{(H)} \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u,$$

zusammen. Differentialgleichungssysteme dieser Form haben ihren Ursprung in der Variationsrechnung, siehe etwa [[4], Kapitel 25], [[25], Chapter 1.3, 2.3 und 8.2] und [43]. Sie besitzen eine *symplektische Struktur*, d.h. es gilt $H^{\mathrm{T}}\mathcal{J} + \mathcal{J}H \equiv 0$, wobei

$$H = H(t, \lambda) := \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) - \lambda C_0(t) & -A^{\mathrm{T}}(t) \end{pmatrix}, \ \mathcal{J} := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir legen die folgenden Annahmen zu Grunde:

($\mathcal{A}$) A, B, C, C_0 sind stückweise stetige, reelle, auf dem Intervall $\mathcal{I} := [a, b]$ erklärte $n \times n$-matrixwertige Funktionen;
$B(t), C(t)$ und $C_0(t)$ sind symmetrisch für alle $t \in \mathcal{I}$; und es ist
$B(t) \geq 0, C_0(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathcal{I}$.

Bemerkung 3.1. (Lösungsbegriff)

(i) Da wir in der Annahme ($\mathcal{A}$) lediglich voraussetzen, dass die im Hamiltonschen System (H) auftretenden vektorwertigen Funktionen stückweise stetig sind, kann es vorkommen, dass die Funktionen $Ax + Bu$, bzw. $(C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u$, an endlich vielen Stellen Sprünge aufweisen, so dass die Ableitung von x, bzw. von u, an diesen Stellen nicht existiert. Wir lesen dann $\dot{x}$, bzw. $\dot{u}$, als Ableitung von x, bzw. von u, außer in endlich vielen Stellen, in denen $\dot{x}$, bzw. $\dot{u}$, nicht definiert ist.
Gemäß Satz A.3 verstehen wir unter einer *Lösung des Hamiltonschen Systems* (H) das Paar zweier absolut stetiger Funktionen (x, u) mit

$$\begin{aligned} x(t) - x(\tau) &= \int_\tau^t \{A(\xi)x(\xi) + B(\xi)u(\xi)\} \,\mathrm{d}\xi, \\ u(t) - u(\tau) &= \int_\tau^t \{(C(\xi) - \lambda C_0(\xi))x(\xi) - A^{\mathrm{T}}(\xi)u(\xi)\} \,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Die Existenz und Eindeutigkeit solcher Lösungen sowie die Abhängigkeit der Lösungen von dem Parameter λ werden wir im Anhang A.1 diskutieren.

(ii) Es gelte $(\mathcal{A})$. Unter einer *$(n \times m)$-matrixwertigen Lösung des Hamiltonschen Systems* (H) verstehen wir das Paar zweier absolut stetiger $n \times m$-matrixwertiger Funktionen (X, U), die das Differentialgleichungssystem

$$\dot{X} = AX + BU, \quad \dot{U} = (C - \lambda C_0)X - A^{\mathrm{T}}U$$

im Sinne von (i) lösen.
Wir werden im Verlauf dieser Arbeit stets vektorwertige Lösungen von (H) mit Kleinbuchstaben, matrixwertige Lösungen von (H) mit Großbuchstaben bezeichnen.

Untersuchen wir explizit den Einfluss der Variablen λ auf eine matrixwertige Lösung von (H), so werden wir $(X, U)(t; \lambda)$ schreiben. Verzichten wir hingegen auf die Angabe der Variable λ, so heißt dies, die entsprechende Behauptung gilt für alle (fest gewählten) $\lambda \in \mathbb{R}$. Ferner werden wir der Übersichtlichkeit halber an gewissen Stellen ebenfalls auf die Angabe der Variablen t verzichten. Dies bedeutet, dass die entsprechende Aussage für alle $t \in \mathcal{I}$ gilt.

Proposition 3.1. ([[25], Proposition 1.1.1])
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es seien $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ zwei $n \times m$-matrixwertige Lösungen von (H). Dann ist die *Wronski-Matrix*

$$\{X_1^{\mathrm{T}}U_2 - U_1^{\mathrm{T}}X_2\}(t)$$

konstant auf $\mathcal{I}$.

Beweis
Wir verifizieren die Behauptung mittels Differentiation. Für alle $t \in \mathcal{I}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{X_1^{\mathrm{T}}U_2 - U_1^{\mathrm{T}}X_2\} &= (AX_1 + BU_1)^{\mathrm{T}}U_2 + X_1^{\mathrm{T}}((C - \lambda C_0)X_2 - A^{\mathrm{T}}U_2) \\ &\quad -((C - \lambda C_0)X_1 - A^{\mathrm{T}}U_1)^{\mathrm{T}}X_2 - U_1^{\mathrm{T}}(AX_2 + BU_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.1.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es sei (X, U) eine $n \times m$-matrixwertige Lösung von (H). Dann ist $\{X^{\mathrm{T}}U - U^{\mathrm{T}}X\}(t)$ konstant auf $\mathcal{I}$.

Beweis
Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Proposition 3.1 durch Setzen von $X_1 = X_2 = X,\ U_1 = U_2 = U$. □

Proposition 3.2.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es sei (X, U) eine $n \times m$-matrixwertige Lösung von (H). Dann ist $\operatorname{rg}(X^{\mathrm{T}}, U^{\mathrm{T}})(t)$ konstant auf $\mathcal{I}$.

Beweis
Es sei $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ eine Fundamentalmatrix von (H). Dann ist jede matrixwertige Lösung (X, U) von (H) von der Form $(X^{\mathrm{T}}, U^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(t) = \Phi(t)M$ mit einer konstanten Matrix $M \in \mathbb{R}^{2n\times m}$. Da $\Phi(t)$ regulär für alle $t \in \mathcal{I}$ ist, ergibt sich die Behauptung. □

Wir werden im weiteren Verlauf eine $n \times n$-matrixwertige Lösung (X, U) von (H) mit maximalem Rang so wählen, dass die resultierende Wronski-Matrix die Nullmatrix ist. Die hiermit erzielte Symmetrie von $X^{\mathrm{T}}U$ wird sich als hilfreich erweisen.

Definition 3.1.
Es gelte $(\mathcal{A})$.

(i) (X, U) heißt *konjugierte Basis von* (H), falls (X, U) eine $n \times n$-matrixwertige Lösung von (H) ist, für die gilt:

$$\operatorname{rg}(X^{\mathrm{T}}, U^{\mathrm{T}}) \equiv n \text{ und } \{X^{\mathrm{T}}U - U^{\mathrm{T}}X\} \equiv 0 \text{ auf } \mathcal{I}.$$

(ii) Zwei konjugierte Basen $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ von (H) heißen *normalisierte konjugierte Basen von* (H), falls $\{X_1^{\mathrm{T}}U_2 - U_1^{\mathrm{T}}X_2\} \equiv I$ auf $\mathcal{I}$ gilt.

Bemerkung 3.2.

(i) Weitere Bezeichnungen für matrixwertige Lösungen (X, U) von (H), bei denen $X^{\mathrm{T}}U$ symmetrisch ist, sind „prepared solutions“ [19], „isotropic solutions“ [16] und „conjugate solutions“ [40, 44]. Ferner wird eine konjugierte Basis von (H) auch als „Lagrange plane“ [2] benannt.

(ii) Da eine konjugierte Basis (X, U) von (H) eine Lösung des Hamiltonschen Systems (H) mit maximalem Rang ist, kann man (X, U) als „halbe Fundamentalmatrix" von (H) ansehen. Sind $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ normalisierte konjugierte Basen von (H), so bildet

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ U_1 & U_2 \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix von (H).

Proposition 3.3.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es sei (X_2, U_2) eine konjugierte Basis von (H). Ferner sei $t_0 \in \mathcal{I}$. Dann existiert eine konjugierte Basis (X_1, U_1) von (H) so, dass $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) sind, und dass $X_1(t_0)$ regulär und $\{X_1^{-1} X_2\}(t_0)$ nichtnegativ (oder nichtpositiv) definit ist.

Beweis
Gemäß Proposition 2.1 existieren Matrizen $X_1, U_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $X_1^{\mathrm{T}} U_2(t_0) - U_1^{\mathrm{T}} X_2(t_0) = I$, X_1 regulär ist und $X_1^{-1} X_2(t_0) \geq 0$ $(X_1^{-1} X_2(t_0) \leq 0)$ gilt. Es sei nun $(X_1, U_1)(t)$ die matrixwertige Lösung von (H) mit den Anfangswerten $X_1(t_0) = X_1, U_1(t_0) = U_1$. Dann erfüllt diese Lösung gemäß Proposition 3.1 und der Definition normalisierter konjugierter Basen von (H), Definition 3.1, die Behauptung. □

Mit der Proposition 2.1 ergibt sich unmittelbar die

Proposition 3.4. ([[25], Proposition 1.1.5])
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es seien $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ normalisierte konjugierte Basen von (H). Dann gelten die folgenden Gleichungen für alle $t \in \mathcal{I}$:

$$X_i^{\mathrm{T}} U_i = U_i^{\mathrm{T}} X_i \text{ für } i = 1, 2, \quad X_1 X_2^{\mathrm{T}} = X_2 X_1^{\mathrm{T}}, \quad U_1 U_2^{\mathrm{T}} = U_2 U_1^{\mathrm{T}},$$
$$X_1^{\mathrm{T}} U_2 - U_1^{\mathrm{T}} X_2 = X_1 U_2^{\mathrm{T}} - X_2 U_1^{\mathrm{T}} = I.$$

Proposition 3.5.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es seien $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ normalisierte konjugierte Basen von (H). Dann ist

$$\{X_1^{-1} X_2\}(t)$$

monoton nicht fallend auf allen Intervallen, auf denen X_1 regulär ist.

Beweis
Wir verifizieren die Behauptung mittels Differentiation. Für alle $t \in \mathcal{I}$, für die $X_1(t)$ regulär ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_1^{-1} X_2 &= -X_1^{-1} \dot{X}_1 X_1^{-1} X_2 + X_1^{-1} \dot{X}_2 \\
&= -X_1^{-1}(AX_1 + BU_1) X_1^{-1} X_2 + X_1^{-1}(AX_2 + BU_2) \\
&= X_1^{-1} B(U_2 - U_1 X_1^{-1} X_2) \\
&= X_1^{-1} B (X_1^{-1})^{\mathrm{T}} \geq 0
\end{aligned}$$

□

Satz 3.1. ([[28], Theorem 3])
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es sei (X, U) eine konjugierte Basis von (H). Dann ist $\ker X(t)$ stückweise konstant auf $\mathcal{I}$. Genauer: Es gibt $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ so, dass für alle $\nu = 1, \ldots, m$ gilt:

$$\ker X(t) \text{ ist konstant auf } (t_{\nu-1}, t_\nu) \text{ und es ist}$$

$$\ker X(t) \subset \ker X(t_{\nu-1}) \cap \ker X(t_\nu) \text{ für alle } t \in (t_{\nu-1}, t_\nu).$$

Korollar 3.2.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es sei (X, U) eine konjugierte Basis von (H). Dann existieren

(i) $\ker X(t-)$ für alle $t \in (a, b]$ und

(ii) $\ker X(t+)$ für alle $t \in [a, b)$.

4 Eigentliche fokale Punkte

In diesem Kapitel untersuchen wir so genannte fokale Punkte („Nullstellen“) einer konjugierten Basis (X, U) von

$$\text{(H)} \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u.$$

Dies sind Stellen $t_0 \in \mathcal{I} := [a, b]$, an denen $X(t_0)$ singulär ist. Insbesondere sind wir an einer Formel für die lokale Änderung der Anzahl aller fokalen Punkte einer konjugierten Basis von (H) in dem Intervall $\mathcal{I}$ (inklusive Vielfachheiten) bezüglich λ interessiert. Im Hinblick auf diese Fragestellung ist es unerlässlich, dass die fokalen Punkte einer konjugierten Basis von (H) isoliert sind. In den Beispielen 1.2(i),(ii) und 1.3 (mit $\lambda = 1$) haben wir jedoch gesehen, dass dies ohne weitere Voraussetzungen im allgemeinen nicht der Fall ist. Daher muss der Begriff des fokalen Punktes einer konjugierten Basis von (H) wie in [28] enger gefasst werden, was uns auf die Definition eines eigentlichen fokalen Punktes einer konjugierten Basis von (H) führt.
Der Satz 4.1, der eine Formel für die lokale Änderung der Anzahl der eigentlichen fokalen Punkte einer konjugierten Basis von (H) in $\mathcal{I}$ bezüglich λ angibt, ist der wichtigste Satz der vorliegenden Arbeit.

Definition 4.1.
Es gelte $(\mathcal{A})$.

(i) $t_0 \in \mathcal{I}$ heißt *fokaler Punkt von X* für eine konjugierte Basis (X, U) von (H), falls die Matrix $X(t_0)$ singulär ist. Die Zahl $\operatorname{def} X(t_0)$ heißt *Vielfachheit des fokalen Punktes t_0 von X*.

(ii) $t_0 \in (a, b]$ heißt *eigentlicher fokaler Punkt von X* für eine konjugierte Basis (X, U) von (H), falls

$$\ker X(t_0) \supsetneqq \ker X(t_0-)$$

gilt. Die Zahl $\operatorname{def} X(t_0) - \operatorname{def} X(t_0-)$ heißt *Vielfachheit des eigentlichen fokalen Punktes t_0 von X*.

Bemerkung 4.1.

(i) Ist (X, U) eine konjugierte Basis von (H), so existieren $\ker X(t_0-)$ für alle $t_0 \in (a, b]$ und $\ker X(t_0+)$ für alle $t_0 \in [a, b)$ nach Korollar 3.2. Mit Korollar A.1 folgt die Stetigkeit von X auf $\mathcal{I}$, so dass $\ker X(t_0-) \cup \ker X(t_0+) \subset \ker X(t_0)$ für alle $t_0 \in (a, b)$ sowie $\ker X(a+) \subset \ker X(a)$ und $\ker X(b-) \subset \ker X(b)$ gilt.

(ii) Aufgrund der Definition 4.1 ergibt sich unmittelbar, dass jeder eigentliche fokale Punkt einer konjugierten Basis von (H) insbesondere auch ein fokaler Punkt dieser konjugierten Basis ist. Umgekehrt ist dieses (bis auf $t_0 = a$) im Allgemeinen genau dann der Fall, wenn das Hamiltonsche System (H) steuerbar ist, vergleiche [[25], Definition 4.1.1]. Dieses ergibt sich unmittelbar aus [[25], Theorem 4.1.3]. In diesem Fall sind die Vielfachheiten des eigentlichen fokalen Punktes einer konjugierten Basis von (H) und des fokalen Punktes dieser konjugierten Basis gleich.

(iii) Die Definition eines eigentlichen fokalen Punktes von X für eine konjugierte Basis (X, U) von (H) wurde [[28], Definition 2], bzw. [[28], Remark 11], entnommen und wird dort als „verallgemeinerter fokaler Punkt“ bezeichnet. Dort wird zunächst (ohne Untersuchung der Existenz von $\ker X(t-)$ für $t \in (a, b]$) erklärt, wann X keinen eigentlichen fokalen Punkt in $(a, b]$ besitzt. Die Definition der Vielfachheit eines eigentlichen fokalen Punktes $t_0 \in (a, b]$ einer konjugierten Basis (X, U) von (H) ist hingegen neu.

Zur Illustration des Begriffs eines fokalen Punktes und eines eigentlichen fokalen Punktes einer konjugierten Basis von (H) möchten wir das Beispiel 1.3 für $\lambda = 1$ aufgreifen.

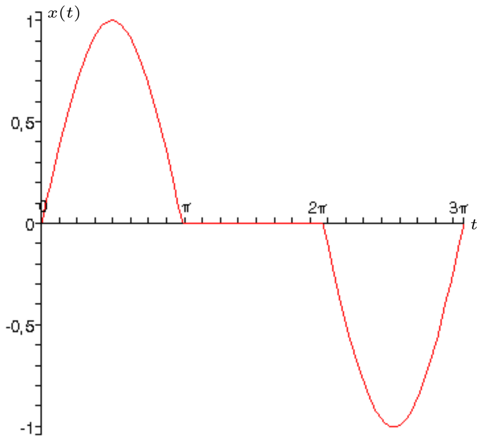
Beispiel 4.1.
Eine konjugierte Basis (x, u) des linearen Hamiltonschen Systems

$$\dot{x} = \begin{cases} u, & t \in [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \\ 0, & t \in (\pi, 2\pi), \end{cases} \qquad \dot{u} = -x$$

ist gegeben durch

$$x(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0, \pi] \\ 0, & t \in [\pi, 2\pi] \\ -\sin t, & t \in [2\pi, 3\pi], \end{cases} \qquad u(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0, \pi] \\ -1, & t \in [\pi, 2\pi] \\ -\cos t, & t \in [2\pi, 3\pi]. \end{cases}$$

Skizze von x.



In diesem Beispiel ist jeder Punkt $t \in [\pi, 2\pi] \cup \{0, 3\pi\}$ ist ein fokaler Punkt von x. Hingegen sind die Punkte $t = \pi$ und $t = 3\pi$ die einzigen eigentlichen fokalen Punkte von x im Intervall $(0, 3\pi]$.

Proposition 4.1.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es sei (X, U) eine konjugierte Basis von (H). Dann besitzt X nur endlich viele eigentliche fokale Punkte in $(a, b]$. Insbesondere sind diese Punkte stets isoliert.

Beweis
Die Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3.1. □

Proposition 4.2.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es seien $t_0 \in \mathcal{I}, \lambda_0 \in \mathbb{R}$. Ferner sei (X_2, U_2) eine konjugierte Basis von (H). Dann existiert eine konjugierte Basis (X_1, U_1) von (H) so, dass

(i) $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) sind,

(ii) (X_1, U_1) bezüglich λ konstante Anfangsbedingungen im Punkt a besitzt, d.h. $X_1(a; \lambda) \equiv X_1(a), U_1(a; \lambda) \equiv U_1(a)$,

(iii) $X_1(t_0; \lambda_0)$ regulär ist, und

(iv) $\{X_1^{-1} X_2\}(t_0; \lambda_0)$ nichtnegativ (oder nichtpositiv) definit ist.

Beweis
Nach Proposition 3.3 existiert eine konjugierte Basis (X_1, U_1) von (H) so, dass $(X_1, U_1)(\cdot; \lambda_0), (X_2, U_2)(\cdot; \lambda_0)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) sind, $X_1(t_0; \lambda_0)$ regulär ist und $\{X_1^{-1}X_2\}(t_0; \lambda_0) \geq 0$ ($\{X_1^{-1}X_2\}(t_0; \lambda_0) \leq 0$) gilt.
Betrachtet man nun für beliebiges λ die $n \times n$-matrixwertige Lösung von (H) mit den bezüglich λ konstanten Anfangsbedingungen

$$X_1(a; \lambda) \equiv X_1(a; \lambda_0), \quad U_1(a; \lambda) \equiv U_1(a; \lambda_0),$$

so gelten für dieses Paar (X_1, U_1) nach Konstruktion (ii), (iii) und (iv). Ferner gilt mit Proposition 3.1

$$\begin{aligned} \{X_1^{\mathrm{T}}U_2 - U_1^{\mathrm{T}}X_2\}(t; \lambda) &\equiv \{X_1^{\mathrm{T}}U_2 - U_1^{\mathrm{T}}X_2\}(a; \lambda) \\ &\equiv \{X_1^{\mathrm{T}}U_2 - U_1^{\mathrm{T}}X_2\}(a; \lambda_0) = I, \end{aligned}$$

d.h. $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ sind normalisierte konjugierte Basen von (H), und damit gilt (i).
□

Lemma 4.1. ([[25], Lemma 4.1.4])
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es seien $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) mit bezüglich λ konstanten Anfangsbedingungen im Punkt a, d.h. $X_i(a; \lambda) \equiv X_i(a)$, $U_i(a; \lambda) \equiv U_i(a), \lambda \in \mathbb{R}, i = 1, 2$. Weiterhin seien für $t \in \mathcal{I}, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X_*(t; \lambda) &:= \begin{pmatrix} 0 & I \\ X_1(t; \lambda) & X_2(t; \lambda) \end{pmatrix}, \quad U_*(t; \lambda) := \begin{pmatrix} I & 0 \\ U_1(t; \lambda) & U_2(t; \lambda) \end{pmatrix} \text{ und} \\ \Phi(t; \lambda) &:= \begin{pmatrix} X_1(t; \lambda) & X_2(t; \lambda) \\ U_1(t; \lambda) & U_2(t; \lambda) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann gilt für jedes feste $t \in \mathcal{I}$ und auf allen Intervallen, auf denen $X_1(t; \lambda)$ regulär ist:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} -X_1^{-1}X_2 & X_1^{-1} \\ (X_1^{-1})^{\mathrm{T}} & U_1X_1^{-1} \end{pmatrix} (t; \lambda) \\ = \ &(X_*^{-1})^{\mathrm{T}}(t; \lambda) \int_a^t \Phi^{\mathrm{T}}(\tau; \lambda) \begin{pmatrix} -C_0(\tau) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi(\tau; \lambda) \, \mathrm{d}\tau \, X_*^{-1}(t; \lambda). \end{aligned}$$

Insbesondere ist also für jedes feste $t \in \mathcal{I}$

(i) $\{X_1^{-1}X_2\}(t;\lambda)$ monoton nicht fallend in λ

(ii) $\{U_1X_1^{-1}\}(t;\lambda)$ monoton nicht wachsend in λ

auf allen Intervallen, auf denen $X_1(t;\lambda)$ regulär ist.

Korollar 4.1.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es seien $(X_1, U_1), (X_2, U_2)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) mit bezüglich λ konstanten Anfangsbedingungen im Punkt a, d.h. $X_i(a;\lambda) \equiv X_i(a)$, $U_i(a;\lambda) \equiv U_i(a), \lambda \in \mathbb{R}, i = 1,2$. Ferner seien $t_0 \in \mathcal{I}, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ und $X_1(t_0;\lambda)$ regulär auf $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ für ein $\delta > 0$.
Dann gilt für alle $c \in \ker X_2(t_0;\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} c^{\mathrm{T}}\{X_1^{-1}X_2\}(t_0;\lambda)c = c^{\mathrm{T}} \int_a^{t_0} X_2^{\mathrm{T}}(t;\lambda)C_0(t)X_2(t;\lambda)\,\mathrm{d}t\; c.$$

Beweis
Mit den Bezeichnungen aus Lemma 4.1 gilt

$$X_*^{-1}(t;\lambda) = \begin{pmatrix} -X_1^{-1}(t;\lambda)X_2(t;\lambda) & X_1^{-1}(t;\lambda) \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathcal{I}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, für die $X_1(t;\lambda)$ regulär ist. Somit gilt für alle $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\lambda} c^{\mathrm{T}}\{X_1^{-1}X_2\}(t_0;\lambda)c \\
= &- \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \frac{\partial}{\partial\lambda} \begin{pmatrix} -X_1^{-1}X_2 & X_1^{-1} \\ (X_1^{-1})^{\mathrm{T}} & U_1X_1^{-1} \end{pmatrix}(t_0;\lambda) \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} (X_*^{-1})^{\mathrm{T}}(t_0;\lambda) \int_a^{t_0} \Phi^{\mathrm{T}}(t;\lambda) \begin{pmatrix} C_0(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi(t;\lambda)\mathrm{d}t X_*^{-1}(t_0;\lambda) \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \int_a^{t_0} \Phi^{\mathrm{T}}(t;\lambda) \begin{pmatrix} C_0(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi(t;\lambda)\,\mathrm{d}t \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \\
= &\; c^{\mathrm{T}} \int_a^{t_0} X_2^{\mathrm{T}}(t;\lambda)C_0(t)X_2(t;\lambda)\,\mathrm{d}t\; c.
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.3.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es sei (X, U) eine konjugierte Basis von (H) mit konstanten Anfangsbedingungen im Punkt a, d.h. $X(a;\lambda) \equiv X(a), U(a;\lambda) \equiv U(a)$.
Dann sind die Räume

$$\begin{aligned}\widetilde{V} &:= \bigcap_{t\in\mathcal{I}} \ker\{X^{\mathrm{T}}(t;\lambda)C_0(t)X(t;\lambda)\},\\ V &:= \widetilde{V} \cap \ker X(b;\lambda),\\ W &:= \widetilde{V} \cap \ker\{R_1^b X(b;\lambda) + R_2^b U(b;\lambda)\},\\ &\bigcap_{t\in\mathcal{I}} \ker X(t;\lambda)\end{aligned}$$

unabhängig von λ.

Beweis
Es seien $c \in \widetilde{V} = \widetilde{V}(\lambda_0)$ und $(x, u) := (X, U)(t;\lambda_0)c$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind $x(a), u(a)$ unabhängig von λ nach Voraussetzung, und es gilt $C_0(\cdot)x(\cdot;\lambda_0) \equiv 0$ auf $\mathcal{I}$.
Folglich ist

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ \dot{u} = Cx - A^{\mathrm{T}}u,$$

d.h. (x, u) löst (H) auf $\mathcal{I}$ unabhängig von λ.
Aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen des Hamiltonschen Systems (H), siehe Korollar A.1, ist das Paar (x, u) eine Lösung von (H) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit ist $C_0(\cdot)x(\cdot;\lambda) \equiv 0$ auf $\mathcal{I}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. es ist $c \in \widetilde{V}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
Damit haben zum einen gezeigt, dass $\widetilde{V}$ unabhängig von λ ist, und zum anderen, dass ebenfalls $X(t;\lambda)c$ und $U(t;\lambda)c$ für alle $c \in \widetilde{V}, t \in \mathcal{I}$ unabhängig von λ sind. Hieraus ergibt sich die Behauptung. $\square$

Proposition 4.4.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und (X, U) sei eine konjugierte Basis von (H) mit konstanten Anfangsbedingungen im Punkt a, d.h. $X(a;\lambda) \equiv X(a), U(a;\lambda) \equiv U(a)$. Ferner seien

$$V := \bigcap_{t\in\mathcal{I}} \ker\{X^{\mathrm{T}}(t;\lambda)C_0(t)X(t;\lambda)\} \cap \ker X(b;\lambda)$$

und $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{n\times q}$ eine Matrix mit $\mathbb{R}^n = V \oplus \operatorname{Im} \mathcal{V}$, wobei $q := n - \dim V$.
Dann gilt:

$$\ker X(b;\lambda) = V \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M},$$

wobei

$$\mathcal{M} := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \operatorname{def} X(b;\lambda) \neq \operatorname{def} X(b;\lambda+)\},$$

und diese Menge $\mathcal{M}$ ist diskret. Insbesondere gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{def} X(b;\lambda) - \operatorname{def} X(b;\lambda+) = \operatorname{def} X(b;\lambda) - \operatorname{def} X(b;\lambda-) = \operatorname{def} \{X(b;\lambda)\mathcal{V}\}.$$

Beweis

V ist gemäß Proposition 4.3 unabhängig von λ, so dass die Matrix $\mathcal{V}$ konstant ist. Folglich gilt mit $V \subset \ker X(b;\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{def} X(b;\lambda) = \dim V + \operatorname{def} \{X(b;\lambda)\mathcal{V}\}.$$

Es sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Dann ergibt sich die Behauptung, wenn wir nur zeigen, dass es $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ so gibt, dass $\operatorname{def} \{X(b;\lambda)\mathcal{V}\} = 0$ für alle $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_1]$ und für alle $\lambda \in [\lambda_0 - \delta_2, \lambda_0)$ gilt.
Zunächst zeigen wir, dass es ein $\delta_1 > 0$ mit $\operatorname{def} \{X(b;\lambda)\mathcal{V}\} = 0$ für alle $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_1]$ gibt. Es sei $(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ gemäß Proposition 4.2 so, dass $(\widetilde{X}, \widetilde{U}), (X, U)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) sind, $(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ bezüglich λ konstante Anfangsbedingungen im Punkt a besitzt, $\widetilde{X}(b;\lambda_0)$ regulär ist und $\{\widetilde{X}^{-1}X\}(b;\lambda_0) \geq 0$ gilt. Dann gibt es ein $\delta_1 > 0$ so, dass $\widetilde{X}(b;\lambda)$ regulär auf $[\lambda_0, \lambda_0 + \delta_1]$ ist. Mit Korollar 4.1 ist $c^{\mathrm{T}}\{\widetilde{X}^{-1}X\}(b;\lambda)c > 0$ für alle $c \in \operatorname{Im} \mathcal{V} \setminus \{0\}$ und für alle $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_1]$. Insbesondere ist also $X(b;\lambda)c \neq 0$ für alle $c \in \operatorname{Im} \mathcal{V} \setminus \{0\}$ und für alle $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_1]$. Da $\ker \mathcal{V} = \{0\}$ nach Konstruktion der Matrix $\mathcal{V}$ gilt, bedeutet dies, dass $X(b;\lambda)\mathcal{V}d \neq 0$ für alle $d \neq 0$ gilt. Hieraus ergibt sich die Behauptung.
Wir zeigen nun, dass es ein $\delta_2 > 0$ mit $\operatorname{def} \{X(b;\lambda)\mathcal{V}\} = 0$ für alle $\lambda \in [\lambda_0 - \delta_2, \lambda_0)$ gibt. Es sei $(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{U})$ gemäß Proposition 4.2 so, dass $(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{U}), (X, U)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) sind, $(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{U})$ bezüglich λ konstante Anfangsbedingungen im Punkt a besitzt, $\underset{\sim}{X}(b;\lambda_0)$ regulär ist und $\{\underset{\sim}{X}^{-1}X\}(b;\lambda_0) \leq 0$ gilt. Dann gibt es ein $\delta_2 > 0$ so, dass $\underset{\sim}{X}(b;\lambda)$ regulär auf $[\lambda_0 - \delta_2, \lambda_0]$ ist. Mit Korollar 4.1 ist $c^{\mathrm{T}}\{\underset{\sim}{X}^{-1}X\}(b;\lambda)c < 0$ für alle $c \in \operatorname{Im} \mathcal{V} \setminus \{0\}$ und für alle $\lambda \in [\lambda_0 - \delta_2, \lambda_0)$. Insbesondere ist also $X(b;\lambda)c \neq 0$ für alle $c \in \operatorname{Im} \mathcal{V} \setminus \{0\}$ und für alle $\lambda \in [\lambda_0 - \delta_2, \lambda_0)$. Analog wie oben ergibt sich hieraus die Behauptung. $\square$

Satz 4.1.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und (X,U) sei eine konjugierte Basis von (H) mit konstanten Anfangsbedingungen im Punkt a, d.h. $X(a;\lambda) \equiv X(a), U(a;\lambda) \equiv U(a)$. Es seien

$$V := \bigcap_{t\in\mathcal{I}} \ker\{X^{\mathrm{T}}(t;\lambda)C_0(t)X(t;\lambda)\} \cap \ker X(b;\lambda)$$

und $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{n\times q}$ eine Matrix mit $\mathbb{R}^n = V \oplus \operatorname{Im} \mathcal{V}$, wobei $q := n - \dim V$. Ferner sei

$n_1(\lambda)$ die Anzahl der eigentlichen fokalen Punkte von $X(t;\lambda)$ in $(a,b]$ (inklusive Vielfachheiten).

Dann existieren $n_1(\lambda+), n_1(\lambda-)$ und es gilt

$$n_1(\lambda+) = n_1(\lambda), \quad n_1(\lambda-) = n_1(\lambda) - \operatorname{def}\{X(b;\lambda)\mathcal{V}\}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis
Gemäß Proposition 4.1 ist $n_1(\lambda)$ endlich für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Weiterhin ist V nach Proposition 4.3 unabhängig von λ, so dass die Matrix $\mathcal{V}$ konstant ist.
Es sei nun $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Wir zeigen zunächst, dass $n_1(\lambda_0+)$ existiert und $n_1(\lambda_0+) = n_1(\lambda_0)$ gilt, d.h. es gibt ein $\delta > 0$ mit $n_1(\lambda) = n_1(\lambda_0)$ für alle $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$. Anschließend zeigen wir, dass $n_1(\lambda_0-)$ existiert und $n_1(\lambda_0-) = n_1(\lambda_0) - \operatorname{def}\{X(b;\lambda_0)\mathcal{V}\}$ gilt.
Für jedes $t_0 \in \mathcal{I}$ gibt es nach Proposition 4.2 eine konjugierte Basis $(\widetilde{X},\widetilde{U})$ von (H) (abhängig von t_0 und λ_0) derart, dass $(\widetilde{X},\widetilde{U}),(X,U)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) sind, $(\widetilde{X},\widetilde{U})$ bezüglich λ konstante Anfangsbedingungen im Punkt a besitzt, und so, dass $\widetilde{X}(t_0;\lambda_0)$ regulär und $\{\widetilde{X}^{-1}X\}(t_0;\lambda_0) \geq 0$ ist. Gemäß Korollar 3.2 und der Stetigkeit konjugierter Basen von (H) auf $\mathcal{I}$ gibt es für alle $t_0 \in \mathcal{I}$ ein $\varepsilon_{t_0} > 0$ so, dass gilt:

(i) $\ker X(t;\lambda_0) = \ker X(t-;\lambda_0)$ für alle $t \in [t_0 - \varepsilon_{t_0}, t_0 + \varepsilon_{t_0}] \setminus \{t_0\}$,
$\ker X(t;\lambda_0) = \ker X(t+;\lambda_0)$ für alle $t \in [t_0 - \varepsilon_{t_0}, t_0 + \varepsilon_{t_0}] \setminus \{t_0\}$.

(ii) $\widetilde{X}(t;\lambda_0)$ ist regulär auf $[t_0 - \varepsilon_{t_0}, t_0 + \varepsilon_{t_0}]$.

Gemäß dem Satz von Heine-Borel existieren nun endlich viele paarweise verschiedene Punkte $t_1,\ldots,t_N$ so, dass $\mathcal{I} \subset \bigcup_{\nu=1}^{N}(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu})$. Dann sind wegen (i) und Definition

4.1 alle eigentlichen fokalen Punkte von $X(\cdot;\lambda_0)$ in $\{t_1,\dots,t_N\}$ enthalten.
Es sei

$$V_\xi := \bigcap_{t\in[a,\xi]} \ker\{X^{\mathrm{T}}C_0X\}(t;\lambda) \cap \ker X(\xi;\lambda),\ \xi \in \mathcal{I}.$$

Dann ist V_ξ nach Proposition 4.3 (mit $b=\xi$) für alle $\xi\in\mathcal{I}$ unabhängig von λ. Weiter seien $\mathcal{V}_1 \in \mathbb{R}^{n\times m_1}, \mathcal{V}_2 \in \mathbb{R}^{n\times m_2}, \mathcal{V}_3 \in \mathbb{R}^{n\times m_3}$ mit $m_1 := n-\dim V_{t_\nu-\varepsilon_{t_\nu}}, m_2 := n-\dim V_{t_\nu}$, $m_3 := n-\dim V_{t_\nu+\varepsilon_{t_\nu}}$ so, dass $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}\mathcal{V}_1 \oplus V_{t_\nu-\varepsilon_{t_\nu}} = \operatorname{Im}\mathcal{V}_2 \oplus V_{t_\nu} = \operatorname{Im}\mathcal{V}_3 \oplus V_{t_\nu+\varepsilon_{t_\nu}}$ gilt.
Für alle $t_\nu, \nu=1,\dots,N$, gibt es wegen der Stetigkeit konjugierter Basen von (H) und aufgrund der Proposition 4.4 ein $\delta_{t_\nu}>0$ so, dass gilt:

(iii) $\widetilde{X}(t;\lambda)$ ist regulär auf $[t_\nu-\varepsilon_{t_\nu}, t_\nu+\varepsilon_{t_\nu}] \times [\lambda_0-\delta_{t_\nu}, \lambda_0+\delta_{t_\nu}]$.

(iv) $\mathcal{V}_1^{\mathrm{T}}\{\widetilde{X}^{-1}X\}(t_\nu-\varepsilon_{t_\nu};\lambda)\mathcal{V}_1$ ist regulär für alle $\lambda\in[\lambda_0-\delta_{t_\nu},\lambda_0+\delta_{t_\nu}]\setminus\{\lambda_0\}$,
$\mathcal{V}_2^{\mathrm{T}}\{\widetilde{X}^{-1}X\}(t_\nu;\lambda)\mathcal{V}_2$ ist regulär für alle $\lambda\in[\lambda_0-\delta_{t_\nu},\lambda_0+\delta_{t_\nu}]\setminus\{\lambda_0\}$,
$\mathcal{V}_3^{\mathrm{T}}\{\widetilde{X}^{-1}X\}(t_\nu+\varepsilon_{t_\nu};\lambda)\mathcal{V}_3$ ist regulär für alle $\lambda\in[\lambda_0-\delta_{t_\nu},\lambda_0+\delta_{t_\nu}]\setminus\{\lambda_0\}$.

Es sei $\delta := \min_{\nu=1,\dots,N}\delta_{t_\nu} > 0$. Nach (iii) ist die matrixwertige Funktion $H(t;\lambda) := \{\widetilde{X}^{-1}X\}(t;\lambda)$ wohldefiniert auf $[t_\nu-\varepsilon_{t_\nu}, t_\nu+\varepsilon_{t_\nu}]\times[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$ für alle $\nu=1,\dots,N$. Es bezeichnen $\mu_1(t;\lambda),\dots,\mu_n(t;\lambda)$ die Eigenwerte von $H(t;\lambda)$. Da H symmetrisch, stetig in beiden Variablen und monoton nicht fallend sowohl in t als auch in λ ist, sind ebenfalls die Eigenwerte $\mu_1(t;\lambda),\dots,\mu_n(t;\lambda)$ bei geeigneter Nummerierung stetig und monoton nicht fallend sowohl in t wie auch in λ, vergleiche Proposition 2.2.
Weiterhin impliziert (iv) gemäß Korollar 4.1 folgende Eigenschaften. Ist $\mu_i(t_\nu-\varepsilon_{t_\nu};\lambda) = 0$ für ein $\lambda\in[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]\setminus\{\lambda_0\}$, so ist dieses $\mu_i(t_\nu-\varepsilon_{t_\nu};\lambda)\equiv 0$ auf $[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$; ist $\mu_i(t_\nu+\varepsilon_{t_\nu};\lambda)=0$ für ein $\lambda\in[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]\setminus\{\lambda_0\}$, so ist dieses $\mu_i(t_\nu+\varepsilon_{t_\nu};\lambda)\equiv 0$ auf $[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$; ist $\mu_i(t_\nu;\lambda)=0$ für ein $\lambda\in[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]\setminus\{\lambda_0\}$, so ist dieses $\mu_i(t_\nu;\lambda)\equiv 0$ auf $[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$. Hierbei sei eine geeignete Nummerierung der Eigenwerte $\mu_i, i=1,\dots,n$, vorausgesetzt.
Nun sei t_ν ein eigentlicher fokaler Punkt von $X(\cdot;\lambda_0)$ der Vielfachheit $k\geq 0$. Wir zeigen, dass es für alle $\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\delta]$ genau k eigentliche fokale Punkte von $X(\cdot;\lambda)$ (inklusive Vielfachheiten) in $(t_\nu-\varepsilon_{t_\nu}, t_\nu+\varepsilon_{t_\nu})$ gibt. Da die Vereinigung dieser Intervalle $\mathcal{I}$ überdeckt, folgt dann die Existenz von $n_1(\lambda_0+)$ und die Gültigkeit der Gleichung $n_1(\lambda_0+) = n_1(\lambda_0)$.
Wegen $\{\widetilde{X}^{-1}X\}(t_\nu;\lambda_0)\geq 0$ und da k die Vielfachheit des eigentlichen fokalen Punktes

t_ν von $X(\cdot;\lambda_0)$ ist, gibt es ein $c \in \{0,\ldots,n-k\}$ mit

$$\begin{array}{rcccccc} \mu_1(t_\nu;\lambda_0) & = & \ldots & = & \mu_k(t_0;\lambda_0) & = & 0, \\ \mu_{k+1}(t_\nu;\lambda_0) & = & \ldots & = & \mu_{k+c}(t_0;\lambda_0) & = & 0, \\ \mu_{k+c+1}(t_\nu;\lambda_0) & , & \ldots & , & \mu_n(t_0;\lambda_0) & > & 0. \end{array}$$

Da $\ker X(t;\lambda_0)$ konstant auf $[t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu)$, bzw. auf $(t_\nu, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu}]$, nach (i) ist und wegen der Monotonie der Eigenwerte μ_i bezüglich t gilt für alle $t \in [t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu)$

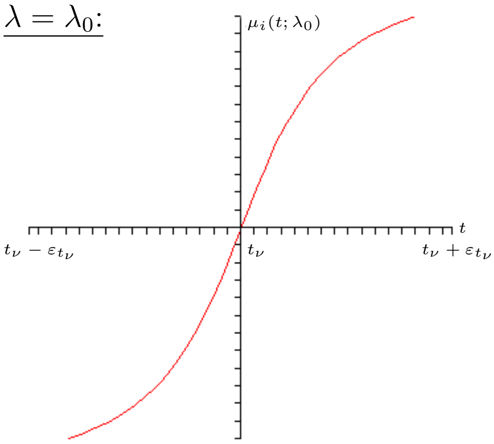
$$\begin{array}{rcccccc} \mu_1(t;\lambda_0) & , & \ldots & , & \mu_k(t;\lambda_0) & < & 0, \\ \mu_{k+1}(t;\lambda_0) & = & \ldots & = & \mu_{k+c}(t;\lambda_0) & = & 0, \\ \mu_{k+c+1}(t;\lambda_0) & , & \ldots & , & \mu_n(t;\lambda_0) & > & 0, \end{array}$$

sowie für alle $t \in (t_\nu, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu}]$

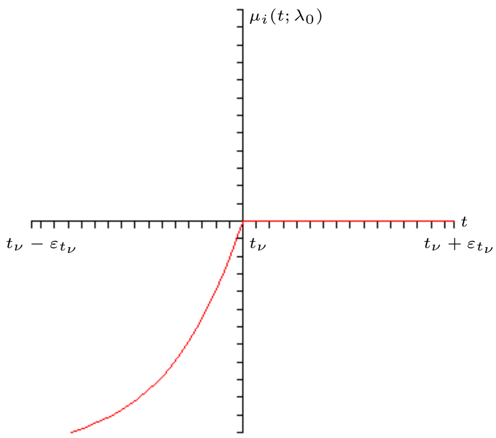
$$\begin{array}{rcccccc} \mu_1(t;\lambda_0) & , & \ldots & , & \mu_k(t;\lambda_0) & \geq & 0, \\ \mu_{k+1}(t;\lambda_0) & , & \ldots & , & \mu_{k+c}(t;\lambda_0) & \geq & 0, \\ \mu_{k+c+1}(t;\lambda_0) & , & \ldots & , & \mu_n(t;\lambda_0) & > & 0, \end{array}$$

Es liegt also die folgende Situation für die Eigenwerte $\mu_i(\cdot;\lambda_0), i = 1,\ldots,k,$ vor:

$\underline{\lambda = \lambda_0:}$



oder



Wegen (iv) und der Monotonie der Eigenwerte μ_i in λ gilt für alle $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$:

$$\begin{array}{rcccccc} \mu_1(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \ldots & , & \mu_k(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & < & 0, \\ \mu_{k+1}(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \ldots & , & \mu_{k+c}(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & \geq & 0, \\ \mu_{k+c+1}(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \ldots & , & \mu_n(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & > & 0. \end{array}$$

Weiterhin folgt mit (iv) und der Monotonie der Eigenwerte μ_i in λ, dass für alle $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$ gilt:

$$\begin{array}{rcccl} \mu_1(t_\nu;\lambda) & , & \ldots & , & \mu_k(t_\nu;\lambda) \geq 0, \\ \mu_{k+1}(t_\nu;\lambda) & , & \ldots & , & \mu_{k+c}(t_\nu;\lambda) \geq 0, \\ \mu_{k+c+1}(t_\nu;\lambda) & , & \ldots & , & \mu_n(t_\nu;\lambda) > 0. \end{array}$$

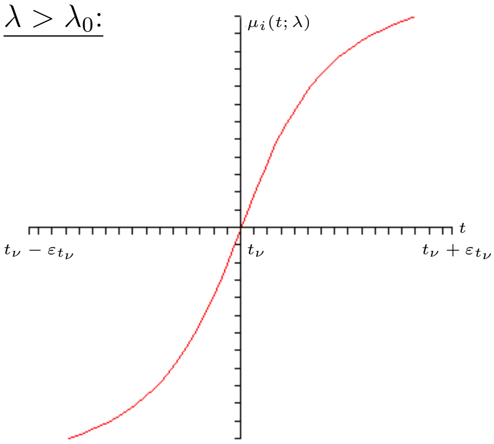
Schließlich gilt mit der Monotonie der Eigenwerte μ_i in t für alle $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$:

$$\begin{array}{rcccl} \mu_1(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \ldots & , & \mu_k(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) \geq 0, \\ \mu_{k+1}(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \ldots & , & \mu_{k+c}(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) \geq 0, \\ \mu_{k+c+1}(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \ldots & , & \mu_n(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) > 0, \end{array}$$

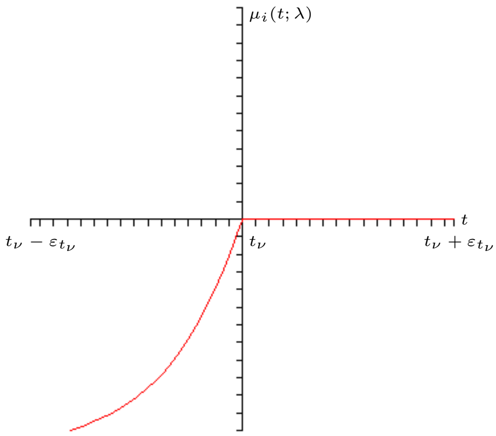
gilt.

Für $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$ können die Eigenwerte $\mu_i(\cdot;\lambda), i = 1, \ldots, n$, also die folgende Gestalt haben:

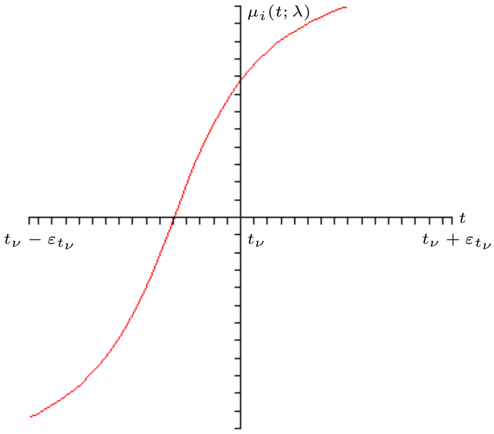
$\underline{\lambda > \lambda_0:}$



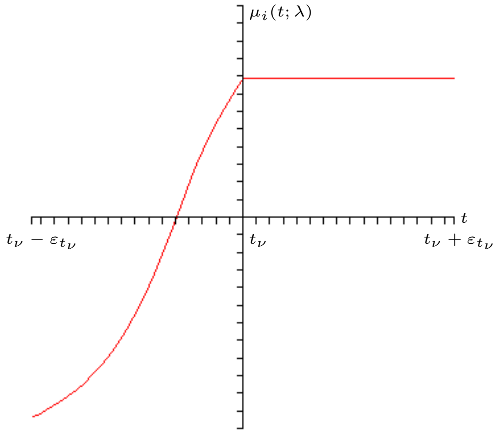
oder



oder



oder

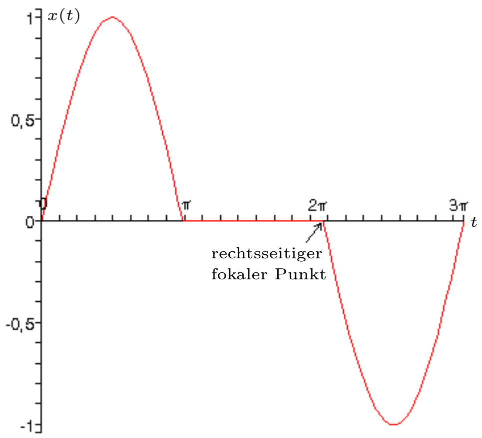


Für alle $i = 1, \ldots, k$ und alle $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$ gibt es wegen der Stetigkeit und der Monotonie der Eigenwerte μ_i in t eindeutig bestimmte $\tau_{i,\lambda} \in (t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu]$, für die $\mu_i(\tau_{i,\lambda}; \lambda) = 0$ und $\mu_i(\tau; \lambda) < 0$ für alle $\tau \in [t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, \tau_{i,\lambda})$ gilt. Da der Defekt von $X(t; \lambda)$ für alle $t \in \mathcal{I}, \lambda \in \mathbb{R}$ gleich der Anzahl der Eigenwerte der Matrix $H(t; \lambda)$, die gleich Null sind, ist, sind genau diese Punkte die eigentlichen fokalen Punkte von $X(\cdot; \lambda)$ mit $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$, und diese sind die einzigen Punkte in $(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu})$ mit dieser Eigenschaft, d.h. für alle $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$ gibt es genau k eigentliche fokale Punkte von $X(\cdot; \lambda)$ in $(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu})$. Wie auf Seite 28 beschrieben ergibt sich hieraus die Existenz von $n_1(\lambda_0+)$ und die Gleichung $n_1(\lambda_0+) = n_1(\lambda_0)$.
Es bleibt zu zeigen, dass $n_1(\lambda_0-)$ existiert und dass $n_1(\lambda_0-) = n_1(\lambda_0) - \operatorname{def}\{X(b; \lambda_0)\mathcal{V}\}$ gilt. Dafür führen wir nur für diesen Beweis den Begriff des „rechtsseitigen fokalen Punktes“ einer konjugierten Basis X von (H) ein, und zwar wie folgt: Für $t_0 \in (a, b)$ sei $r \in \{0, \ldots, n\}$ die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{R}^n$ mit

$$d_i \in \ker X(t_0), \; d_i \notin \ker X(t_0+), \; d_i \notin \bigcap_{t \in [a, t_0]} \ker X(t).$$

Dann nennen wir t_0 einen *rechtsseitigen fokalen Punkt von X der Vielfachheit r*, falls $r \geq 1$ gilt. Beachte, dass ein rechtsseitiger fokaler Punkt von X zwar stets ein fokaler Punkt von X, im allgemeinen jedoch kein eigentlicher fokaler Punkt von X ist.
Etwa besitzt die Funktion x des Beispiels 4.1 nur im Punkt 2π einen rechtsseitigen fokalen Punkt. Dieser ist jedoch kein eigentlicher fokaler Punkt von x.

Skizze der Funktion x des Beispiels 4.1.



Wir möchten an dieser Stelle eine Interpretation der rechtsseitigen fokalen Punkte von X geben und einen Zusammenhang zu den („linksseitigen") eigentlichen fokalen Punkten von X herstellen. Der Defekt von $X(t;\lambda)$ ist für alle $t \in \mathcal{I}, \lambda \in \mathbb{R}$ gleich der Anzahl der Eigenwerte der Matrix $H(t;\lambda)$, die gleich Null sind. Ein eigentlicher fokaler Punkt $(t;\lambda)$ von X der Vielfachheit k ist etwa dadurch charakterisiert, dass es genau k Eigenwerte μ_i von H gibt, für die bei geeigneter Nummerierung $\mu_i(t;\lambda) = 0, \mu_i(t-\varepsilon;\lambda) < 0$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ gilt. Jeder dieser Eigenwerte von H ist (bei geeigneter Nummerierung der Eigenwerte von H) nun auf einem abgeschlossenen (evtl. entarteten) Intervall von $\mathcal{I}$ identisch Null. Den rechten Endpunkt eines solchen Intervalls bezeichnen wir als rechtsseitigen fokalen Punkt von X, sofern dieser nicht gleich b ist. Dabei möchten wir garantieren, dass dieser Punkt in einem Zusammenhang mit einem eigentlichen fokalen Punkt von X steht und nicht etwa der entsprechende Eigenwert von H (geeignete Nummerierung vorausgesetzt) auf $[a, t_0]$ identisch Null ist.
Ist nun $\widetilde{n}_1(\lambda)$ die Anzahl der rechtsseitigen fokalen Punkte von $X(\cdot;\lambda)$ in (a,b) (inklusive Vielfachheiten), so ergibt sich der folgende Zusammenhang zu der Anzahl der eigentlichen fokalen Punkten von X in $\mathcal{I}$:

$$\widetilde{n}_1(\lambda) = n_1(\lambda) - (\operatorname{def} X(b;\lambda) - \dim \bigcap_{t\in\mathcal{I}} \ker X(t;\lambda)) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\bigcap_{t\in\mathcal{I}} \ker X(t;\lambda)$ ist gemäß Proposition 4.3 unabhängig von λ. Wir zeigen, dass $\widetilde{n}_1(\lambda-)$ existiert und $\widetilde{n}_1(\lambda-) = \widetilde{n}_1(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Da nach Proposition 4.4 $\operatorname{def} X(b;\lambda-)$ existiert und da $\bigcap_{t\in\mathcal{I}} \ker X(t;\lambda)$ unabhängig von λ ist, existiert somit $n_1(\lambda-)$ für alle

$\lambda \in \mathbb{R}$ und es folgt mit Proposition 4.4

$$(*)\qquad \begin{aligned} n_1(\lambda) - n_1(\lambda-) &= \widetilde{n}_1(\lambda) + \widetilde{n}_1(\lambda-) + \operatorname{def} X(b;\lambda) - \operatorname{def} X(b;\lambda-) \\ &= \operatorname{def} X(b;\lambda) - \operatorname{def} X(b;\lambda-) \\ &= \operatorname{def} \{X(b;\lambda)\mathcal{V}\} \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, die Behauptung des Satzes.
Analog wie oben zeigen wir nun, dass $\widetilde{n}_1(\lambda_0-)$ für ein festes $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ existiert und $\widetilde{n}_1(\lambda_0-) = \widetilde{n}_1(\lambda_0)$ gilt. Dabei seien $t_1, \dots, t_N, \varepsilon_{t_1}, \dots, \varepsilon_{t_N}, \delta$ wie oben und es gelten (i)-(iv). Wegen (i) sind dabei alle rechtsseitigen fokalen Punkte von $X(\cdot;\lambda_0)$ in $\{t_1, \dots, t_N\}$ enthalten. Es sei $t_\nu \in (a,b)$ ein rechtsseitiger fokaler Punkt von $X(\cdot;\lambda_0)$ der Vielfachheit $r \geq 0$. Wir zeigen, dass es für alle $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$ genau r rechtsseitige fokale Punkte von $X(\cdot;\lambda)$ (inklusive Vielfachheiten) in $(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu})$ gibt. Da die Vereinigung dieser Intervalle $\mathcal{I}$ überdeckt, folgt die Existenz von $\widetilde{n}_1(\lambda_0-)$ und es gilt $\widetilde{n}_1(\lambda_0-) = \widetilde{n}_1(\lambda_0)$.
Wegen $\{\widetilde{X}^{-1}X\}(t_\nu;\lambda_0) \geq 0$ und da r die Vielfachheit des rechtsseitigen fokalen Punktes von $X(\cdot;\lambda_0)$ ist, gibt es bei geeigneter Nummerierung der Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_n$ von H ein $d \in \{0, \dots, n-r\}$ mit

$$\begin{array}{rcccccl} \mu_1(t_\nu;\lambda_0) & = & \dots & = & \mu_r(t_\nu;\lambda_0) & = & 0, \\ \mu_{r+1}(t_\nu;\lambda_0) & = & \dots & = & \mu_{r+d}(t_\nu;\lambda_0) & = & 0, \\ \mu_{r+d+1}(t_\nu;\lambda_0) & , & \dots & , & \mu_n(t_\nu;\lambda_0) & > & 0. \end{array}$$

Da $\ker X(t;\lambda_0)$ nach (i) konstant auf $[t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu)$, bzw. auf $(t_\nu, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu}]$, ist und wegen der Monotonie der Eigenwerte μ_i bezüglich t gilt für alle $t \in [t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu)$

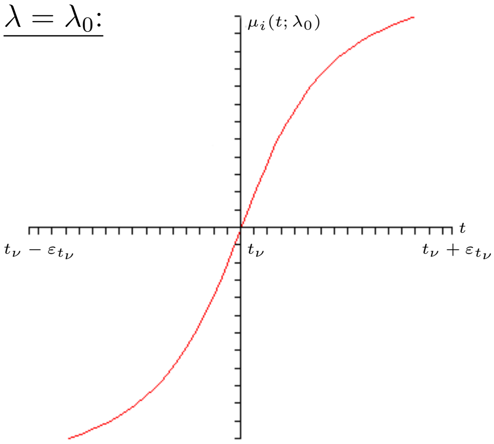
$$\begin{array}{rcccccl} \mu_1(t;\lambda_0) & , & \dots & , & \mu_r(t;\lambda_0) & \leq & 0, \\ \mu_{r+1}(t;\lambda_0) & , & \dots & , & \mu_{r+d}(t;\lambda_0) & \leq & 0, \\ \mu_{r+d+1}(t;\lambda_0) & , & \dots & , & \mu_n(t;\lambda_0) & > & 0, \end{array}$$

sowie für alle $t \in (t_\nu, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu}]$

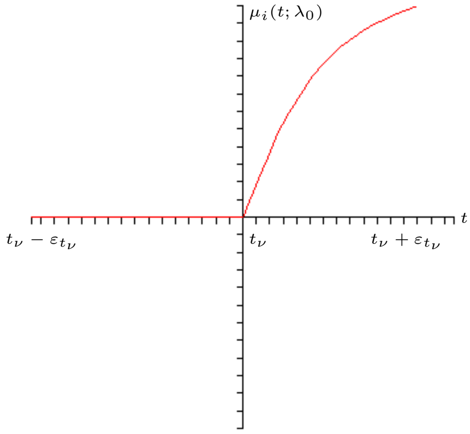
$$\begin{array}{rcccccl} \mu_1(t;\lambda_0) & , & \dots & , & \mu_r(t;\lambda_0) & > & 0, \\ \mu_{r+1}(t;\lambda_0) & = & \dots & = & \mu_{r+d}(t;\lambda_0) & = & 0, \\ \mu_{r+d+1}(t;\lambda_0) & , & \dots & , & \mu_n(t;\lambda_0) & > & 0. \end{array}$$

Es liegt also die folgende Situation für die Eigenwerte $\mu_i(\cdot;\lambda_0), i = 1,\dots,r$, vor.

<u>$\lambda = \lambda_0$:</u>



oder



Weiterhin gilt wegen (iv) und der Monotonie der Eigenwerte μ_i in λ für alle $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$:

$$\begin{array}{rcccll}
\mu_1(t_\nu;\lambda) & , & \dots & , & \mu_r(t_\nu;\lambda) & \leq \; 0, \\[2mm]
\mu_{r+1}(t_\nu;\lambda) & , & \dots & , & \mu_{r+d}(t_\nu;\lambda) & \leq \; 0, \\[2mm]
\mu_{r+d+1}(t_\nu;\lambda) & , & \dots & , & \mu_n(t_\nu;\lambda) & > \; 0.
\end{array}$$

Schließlich folgt mit (iv) und der Monotonie der Eigenwerte μ_i in λ, dass für alle $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$ gilt:

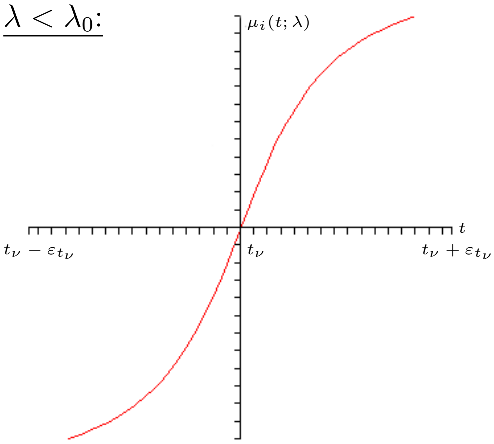
$$\begin{array}{rcccll}
\mu_1(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \dots & , & \mu_r(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & \leq \; 0, \\[2mm]
\mu_{r+1}(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \dots & , & \mu_{r+d}(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & \leq \; 0, \\[2mm]
\mu_{r+d+1}(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \dots & , & \mu_n(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & > \; 0,
\end{array}$$

sowie

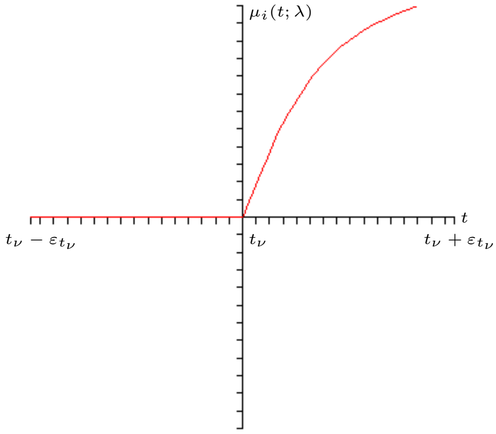
$$\begin{array}{rcccll}
\mu_1(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \dots & , & \mu_r(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & > \; 0, \\[2mm]
\mu_{r+1}(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \dots & , & \mu_{r+d}(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & \leq \; 0, \\[2mm]
\mu_{r+d+1}(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & , & \dots & , & \mu_n(t_\nu + \varepsilon_{t_\nu};\lambda) & > \; 0.
\end{array}$$

Für $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$ können die Eigenwerte $\mu_i(\cdot;\lambda), i = 1, \ldots, r$, also die folgende Gestalt haben:

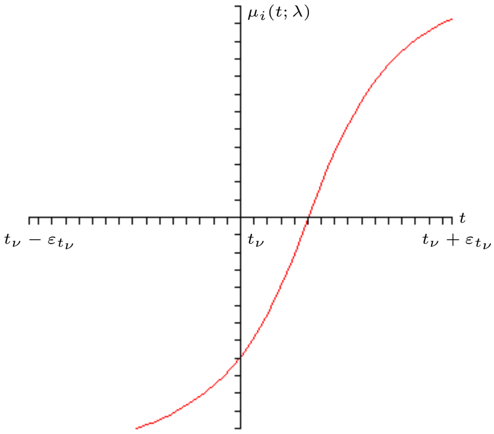
$\underline{\lambda < \lambda_0}$:



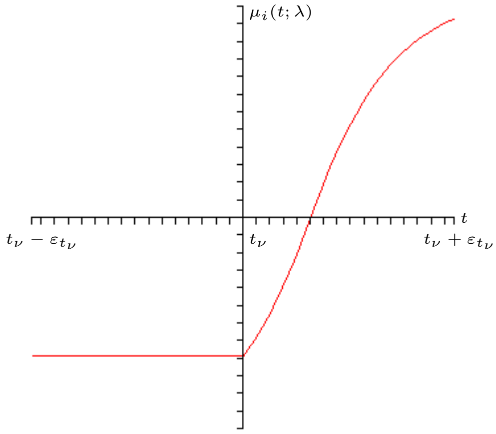
oder



oder



oder



Für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ und alle $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$ gibt es wegen der Stetigkeit und der Monotonie der Eigenwerte μ_i in t eindeutig bestimmte $\tau_{i,\lambda} \in [t_\nu, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu})$, für die $\mu_i(\tau_{i;\lambda};\lambda) = 0, \mu_i(\tau;\lambda) > 0$ für alle $\tau \in (\tau_{i,\lambda}, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu}]$ gilt. Für diese Punkte gibt es folglich $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c \in \ker X(\tau_{i,\lambda};\lambda), c \notin \ker X(\tau_{i,\lambda}+;\lambda)$ und $c \notin \bigcap_{t \in \mathcal{I}} \ker X(t)$. Wäre nämlich $c \in \bigcap_{t \in [a, \tau_{i,\lambda}]} \ker X(t)$, so würde wegen der Unabhängigkeit von $\bigcap_{t \in [a,\tau_{i,\lambda}]} \ker X(t)$ von λ folgen, dass $c \in \ker X(\tau_{i,\lambda};\lambda_0), c \notin \ker X(\tau_{i,\lambda}+;\lambda_0)$ wäre, im Widerspruch dazu, dass der Kern von $X(\cdot;\lambda_0)$ nach (i) auf $(t_\nu, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu}]$ konstant ist. Folglich sind diese Punkte die rechtsseitigen fokalen Punkte von $X(\cdot;\lambda)$ für $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$. Diese sind die einzigen Punkte in $(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu})$ mit dieser Eigenschaft, d.h. für alle $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$ gibt es genau r rechtsseitige fokale Punkte von $X(\cdot;\lambda)$ in $(t_\nu - \varepsilon_{t_\nu}, t_\nu + \varepsilon_{t_\nu})$. Hieraus ergibt sich, wie in $(*)$ auf Seite 33 erläutert, die Behauptung. $\square$

Bemerkung 4.2.
Ist das Tripel $(A, B, C - \lambda C_0)$ streng normal, vergleiche [[25], Definition 4.1.2], so ist im obigen Satz $V = \{0\}$, so dass $\mathcal{V} = I$ gewählt werden kann. Bilden $(\widetilde{X}, \widetilde{U}), (X, U)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) mit bezüglich λ konstanten Anfangsbedingungen im Punkt a, so ist $\{\widetilde{X}^{-1}X\}(t; \lambda)$ sowohl streng monoton wachsend in t als auch in λ auf allen Intervallen, auf denen $\widetilde{X}$ regulär ist. Dies ergibt sich aus [[25], Theorem 4.1.3, Proposition 4.1.2 und Proposition 4.1.5]. Insbesondere sind dann mit den Bezeichnungen aus dem Beweis des obigen Satzes die („linksseitigen") eigentlichen fokalen Punkte von X gleich den rechtsseitigen fokalen Punkten von X und ihre Vielfachheiten sind jeweils gleich. Daher benötigen wir in diesem Fall den Begriff des rechtsseitigen fokalen Punktes nicht. Ferner vereinfacht sich in diesem Fall der obige Beweis an den Stellen, an denen wir mit der Monotonie bezüglich t und λ argumentiert haben. Damit erhalten wir einen neuen elementaren Beweis für [[25], Lemma 4.2.2] der kürzer ist, jedoch eine lineare Abhängigkeit des Hamiltonschen Systems (H) von λ voraussetzt.

5 Eigentliche Eigenwerte

Wir betrachten Eigenwertprobleme bestehend aus dem linearen Hamiltonschen System

$$\text{(H)} \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u$$

und separierten Randbedingungen, d.h. wir betrachten

$$\text{(E)} \qquad \begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u \text{ auf } \mathcal{I} := [a, b], \\ &R_1^a x(a) + R_2^a u(a) = R_1^b x(b) + R_2^b u(b) = 0 \text{ (wir schreiben } (x, u) \in \mathrm{B}). \end{aligned}$$

Dabei setzen wir stets die Annahme ($\mathcal{A}$) aus dem Kapitel 3 sowie

$$(\mathcal{R}) \qquad \begin{aligned} &R_1^a, R_2^a, R_1^b, R_2^b \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ mit} \\ &\operatorname{rg}(R_1^a, R_2^a) = \operatorname{rg}(R_1^b, R_2^b) = n, \; R_1^a {R_2^a}^{\mathrm{T}} = R_2^a {R_1^a}^{\mathrm{T}}, R_1^b {R_2^b}^{\mathrm{T}} = R_2^b {R_1^b}^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

voraus.
In der nachstehenden Definition eines (eigentlichen) Eigenwertes von (E) lassen wir komplexe Eigenwerte von (E) zu. Wie wir im Lemma 5.1 jedoch zeigen werden, sind alle eigentlichen Eigenwerte von (E) reell. Ferner können wir gemäß Bemerkung 5.1 stets reelle Eigenfunktionen zu den eigentlichen Eigenwerten von (E) wählen.

Definition 5.1.
Es gelten ($\mathcal{A}$) und ($\mathcal{R}$).

(i) $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert von* (E), falls es eine (komplexwertige) Lösung (x, u) von (H) mit $(x, u) \not\equiv (0, 0)$ auf $\mathcal{I}$ gibt, die den separierten Randbedingungen genügt, d.h. mit $(x, u) \in \mathrm{B}$. Die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen mit dieser Eigenschaft nennen wir *Vielfachheit des Eigenwertes* λ.

(ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *eigentlicher Eigenwert von* (E), falls es eine (komplexwertige) Lösung (x, u) von (H) mit $C_0 x \not\equiv 0$ auf $\mathcal{I}$ gibt, die den separierten Randbedingungen genügt, d.h. mit $(x, u) \in \mathrm{B}$. Eine solche Lösung (x, u) nennen wir *Eigenfunktion von* (E) *zum eigentlichen Eigenwert* λ.
Die Zahl

$$\dim \{ C_0(t)x(t) \mid (x, u) \text{ ist eine Lösung von (H) mit } (x, u) \in \mathrm{B} \}$$

nennen wir die *Vielfachheit des eigentlichen Eigenwertes* λ.

Lemma 5.1.
Es gelten $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$. Dann gilt:

(i) Jeder eigentliche Eigenwert von (E) ist reell.

(ii) Es seien $(x_1, u_1), (x_2, u_2)$ zwei Eigenfunktionen von (E) zu den eigentlichen Eigenwerten λ_1, λ_2 resp. mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann sind x_1 und x_2 orthogonal zueinander, d.h. es gilt:

$$< x_1, x_2 >:= \int_{\mathcal{I}} \{\overline{x}_1^{\mathrm{T}} C_0 x_2\}(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Beweis
Wir zeigen zunächst, dass das Eigenwertproblem (E) selbstadjungiert ist, d.h. für alle $(x_1, u_1), (x_2, u_2) \in \mathrm{B}$ gilt $I(x_1, x_2) = \overline{I(x_2, x_1)}$, wobei

$$I(x_1, x_2) = I(x_1, x_2, u_1, u_2) := \int_{\mathcal{I}} \{\overline{x}_1^{\mathrm{T}} C x_2 + \overline{u}_1^{\mathrm{T}} B u_2\}(t)\ \mathrm{d}t - \overline{x}_1^{\mathrm{T}} u_2|_a^b.$$

Dazu bemerken wir, dass nach Korollar 2.1(i) gilt:

$$\ker(R_1^a, R_2^a) = \mathrm{Im} \begin{pmatrix} R_2^{a\,\mathrm{T}} \\ -R_1^{a\,\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad \ker(R_1^b, R_2^b) = \mathrm{Im} \begin{pmatrix} R_2^{b\,\mathrm{T}} \\ -R_1^{b\,\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $(x_i, u_i) \in \mathrm{B}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} x_i(a) &= R_2^{a\,\mathrm{T}} c_i^a, & u_i(a) &= -R_1^{a\,\mathrm{T}} c_i^a, \\ x_i(b) &= R_2^{b\,\mathrm{T}} c_i^b, & u_i(b) &= -R_1^{b\,\mathrm{T}} c_i^b \end{aligned}$$

mit gewissen Vektoren $c_i^a, c_i^b \in \mathbb{C}^n, i = 1, 2$, gilt. Demnach ist

$$\begin{aligned} I(x_1, x_2) - \overline{I(x_2, x_1)} &= \overline{x}_1^{\mathrm{T}} u_2|_a^b - x_2^{\mathrm{T}} \overline{u}_1|_a^b \\ &= -\overline{c}_1^{b\,\mathrm{T}} R_2^b R_1^{b\,\mathrm{T}} c_2^b + \overline{c}_1^{a\,\mathrm{T}} R_2^a R_1^{a\,\mathrm{T}} c_2^a + c_2^{b\,\mathrm{T}} R_2^b R_1^{b\,\mathrm{T}} \overline{c}_1^b - c_2^{a\,\mathrm{T}} R_2^a R_1^{a\,\mathrm{T}} \overline{c}_1^a \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $(x_1, u_1), (x_2, u_2) \in \mathrm{B}$.
Es sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ ein eigentlicher Eigenwert von (E) mit zugehöriger Eigenfunktion (x, u). Mittels partieller Integration folgt $< x, \lambda x >= I(x, x)$. Die Selbstadjungiertheit von (E) impliziert dann

$$\lambda = \frac{< x, \lambda x >}{< x, x >} = \frac{I(x, x)}{< x, x >} = \frac{\overline{I(x, x)}}{< x, x >} = \frac{\overline{< x, \lambda x >}}{< x, x >} = \overline{\lambda},$$

d.h. jeder eigentliche Eigenwert von (E) ist reell. Damit gilt (i).
Es seien nun $(x_1, u_1), (x_2, u_2)$ zwei Eigenfunktionen von (E) zu den eigentlichen Eigenwerten λ_1, λ_2 resp. mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann ist mit partieller Integration und der Selbstadjungiertheit von (E)

$$(\lambda_2 - \lambda_1) < x_1, x_2 > = < x_1, \lambda_2 x_2 > - < \lambda_1 x_1, x_2 > = \; I(x_1, x_2) - \overline{I(x_2, x_1)} = 0.$$

Damit gilt (ii). □

Aufgrund des Lemmas 5.1 und der nachstehenden Bemerkung 5.1(i) betrachten wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur reelle Lösungen (x, u) von (H) und werden entsprechend den (Eigenwert-)Parameter λ stets reell annehmen, wie schon in den vorangegangenen Kapiteln.

Bemerkung 5.1.

(i) Es sei $(x = x_1 + ix_2, u = u_1 + iu_2)$ eine Eigenfunktion zum eigentlichen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von (E) mit reellen Funktionen x_1, x_2, u_1, u_2. Dann sind auch (x_1, u_1) und (x_2, u_2) Eigenfunktionen zum eigentlichen Eigenwert λ von (E), falls $C_0 x_1 \not\equiv 0$, bzw. $C_0 x_2 \not\equiv 0$, auf $\mathcal{I}$ ist.

(ii) Die Einschränkung $C_0 x \not\equiv 0$ auf $\mathcal{I}$ in der Definition eines eigentlichen Eigenwertes von (E) ist notwendig, wie das Beispiel 1.2(i) zeigt. In diesem Beispiel ist nämlich jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert des dortigen Eigenwertproblems. Eigenwerte von (E) sind also im allgemeinen nicht zwingend reell.
Weiterhin entnimmt man diesem Beispiel, dass es weder ausreicht, Lösungen (x, u) von (H), für die $x \equiv 0$ auf $\mathcal{I}$ gilt, auszuschließen, noch solche Lösungen von (H) auszuschließen, deren „übliche Halbnorm“

$$\int_{\mathcal{I}} \{x^{\mathrm{T}} C_0 x + u^{\mathrm{T}} B u\}(t) \, \mathrm{d}t$$

nicht positiv ist.

Wir zeigen in diesem Kapitel die Isoliertheit der eigentlichen Eigenwerte von (E) und leiten zwei charakteristische Gleichungen für die eigentlichen Eigenwerte von (E) her.

Wie wir sehen werden, genügt dabei jeweils die Betrachtung der speziellen konjugierten Basis (X_a, U_a) von (H) mit den Anfangswerten

$$X_a(a; \lambda) \equiv -R_2^{a\mathrm{T}},\ U_a(a; \lambda) \equiv R_1^{a\mathrm{T}},$$

die in unseren weiteren Untersuchungen folglich eine zentrale Rolle spielt. Um die degenerierten Eigenwerte aus dem Spektrum der Eigenwerte zu nehmen, ist es unerlässlich den nachstehenden Raum W, der die „bezüglich λ konstanten Eigenfunktionen“ charakterisiert, herauszunehmen. Im Falle der rechten Randbedingung $x(b) = 0$ stimmt dieser Raum mit dem nachstehenden Raum V überein, den wir herausnehmen möchten, wenn wir an der Untersuchung des Kerns von $X_a(b; \lambda)$ interessiert sind.
Ferner leiten wir eine Transformation des Hamiltonschen Systems (H) und der Randbedingungen auf kanonische Form her, mit der wir den Indexsatz für Eigenwertprobleme, Satz 5.2, mittels des Indexsatzes 2.2 zeigen werden.

Es seien

(V) $$V := \bigcap_{t\in\mathcal{I}} \ker\{X_a^{\mathrm{T}}(t; \lambda) C_0(t) X_a(t; \lambda)\} \cap \ker X_a(b; \lambda)$$
und $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{n\times q}$ eine Matrix mit $\mathbb{R}^n = V \oplus \operatorname{Im} \mathcal{V}$, wobei $q := n - \dim V$,

sowie

(W) $$W := \bigcap_{t\in\mathcal{I}} \ker\{X_a^{\mathrm{T}}(t; \lambda) C_0(t) X_a(t; \lambda)\} \cap \ker(R_1^b X_a(b; \lambda) + R_2^b U_a(b; \lambda)),$$
und $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ eine Matrix mit $\mathbb{R}^n = W \oplus \operatorname{Im} \mathcal{W}$, wobei $r := n - \dim W$.

Die Räume V und W sind gemäß Proposition 4.3 unabhängig von λ.

Lemma 5.2. (Charakteristische Gleichung, 1. Teil)
Es gelten $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$ und es sei (X_a, U_a) die spezielle konjugierte Basis von (H) mit den Anfangswerten

$$X_a(a; \lambda) \equiv -R_2^{a\mathrm{T}},\ U_a(a; \lambda) \equiv R_1^{a\mathrm{T}}.$$

Ferner sei $\mathcal{W}$ eine Matrix wie in (W) und es sei

$$\Lambda(\lambda) := R_1^b X_a(b; \lambda) + R_2^b U_a(b; \lambda).$$

Dann ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann ein eigentlicher Eigenwert von (E), falls

$$\operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} > 0$$

gilt. In diesem Fall ist die Vielfachheit des eigentlichen Eigenwertes λ von (E) gleich def $\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\}$.

Beweis

Gemäß Proposition 4.2 existiert eine konjugierte Basis $(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ von (H) so, dass $(\widetilde{X}, \widetilde{U}), (X_a, U_a)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) sind. Insbesondere ist

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \widetilde{X} & X_a \\ \widetilde{U} & U_a \end{pmatrix}(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

eine Fundamentalmatrix von (H). Jede vektorwertige Lösung (x, u) von (H) ist von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$. Es ist $(x, u) \in \mathrm{B}$, $C_0 x \not\equiv 0$ auf $\mathcal{I}$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} R_1^a \widetilde{X}(a;\lambda) + R_2^a \widetilde{U}(a;\lambda) & R_1^a X_a(a;\lambda) + R_2^a U_a(a;\lambda) \\ R_1^b \widetilde{X}(b;\lambda) + R_2^b \widetilde{U}(b;\lambda) & R_1^b X_a(b;\lambda) + R_2^b U_a(b;\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \int_{\mathcal{I}} (\widetilde{X}\ X_a)^{\mathrm{T}}(t;\lambda) C_0(t) (\widetilde{X}\ X_a)(t;\lambda)\, \mathrm{d}t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} > 0$$

gilt. Aufgrund der Anfangswerte der speziellen konjugierten Basis (X_a, U_a) von (H) ist nun $R_1^a X_a(a) + R_2^a U_a(a) = 0$. Da $\operatorname{rg}(R_1^a, R_2^a) = n$ nach Voraussetzung $(\mathcal{R})$ gilt, und da $\Phi(a)$ regulär ist, ist folglich $c_1 = 0$. Damit ist $(x, u) \in \mathrm{B}$ und $C_0 x \not\equiv 0$ auf $\mathcal{I}$, falls

$$\Lambda(\lambda) c_2 = 0 \text{ und } C_0(t) X_a(t;\lambda) c_2 \not\equiv 0 \text{ auf } \mathcal{I}$$

gilt. Setzt man nun $c_2 = d_1 + d_2, d_1 \in W, d_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{W}$, so erhält man die Bedingung, dass $(x, u) \in \mathrm{B}$ und $C_0 x \not\equiv 0$ auf $\mathcal{I}$ genau dann gilt, wenn

$$\Lambda(\lambda) d_2 = 0 \text{ und } d_2 \neq 0$$

ist. Damit ist λ genau dann ein eigentlicher Eigenwert von (E) der Vielfachheit k, wenn es genau k linear unabhängige Vektoren $d_2^{(i)} \in \operatorname{Im} \mathcal{W}$ mit $\Lambda(\lambda) d_2^{(i)} = 0, i = 1, \ldots, k$, gibt, d.h. genau dann, wenn gilt:

$$k = \operatorname{def} \{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} > 0.$$

□

Der obige Beweis beinhaltet das

Korollar 5.1.
Es gelten $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$ und es sei (X_a, U_a) die spezielle konjugierte Basis von (H) mit den bezüglich λ konstanten Anfangswerten

$$X_a(a;\lambda) \equiv -R_2^{a\mathrm{T}},\; U_a(a;\lambda) \equiv R_1^{a\mathrm{T}}.$$

Ferner sei $(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ eine konjugierte Basis von (H) so, dass $(\widetilde{X}, \widetilde{U}), (X_a, U_a)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) sind.
Ist dann $\lambda \in \mathbb{R}$ ein eigentlicher Eigenwert von (E) mit zugehöriger Eigenfunktion (x, u),

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{X} & X_a \\ \widetilde{U} & U_a \end{pmatrix}(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n,$$

so folgt stets $c_1 = 0$.

Satz 5.1. (Isoliertheit der eigentlichen Eigenwerte)
Unter den Voraussetzungen $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$ sind die eigentlichen Eigenwerte von (E) isoliert.

Beweis
Es sei angenommen, die eigentlichen Eigenwerte von (E) wären nicht isoliert. Dann gibt es eine Folge von eigentlichen Eigenwerten (λ_k) von (E) mit zugehörigen Eigenfunktionen (x_k, u_k), die gegen einen eigentlichen Eigenwert λ von (E) konvergiert.
Es sei $(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ gemäß Proposition 4.2 eine konjugierte Basis von (H) so, dass $(\widetilde{X}, \widetilde{U}), (X_a, U_a)$ normalisierte konjugierte Basen von (H) bilden. Betrachte für $k \in \mathbb{N}$ die Fundamentalmatrix Φ_k mit

$$\dot{\Phi}_k = \begin{pmatrix} A & B \\ C - \lambda_k C_0 & -A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \Phi_k, \quad \Phi_k(a) = \Phi_a := \begin{pmatrix} \widetilde{X}(a) & X_a(a) \\ \widetilde{U}(a) & U_a(a) \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der stetigen Abhängigkeit von Lösungen von (H) vom Parameter λ, siehe Korollar A.1, und da das Intervall $\mathcal{I} = [a, b]$ kompakt ist, konvergiert Φ_k gleichmäßig auf $\mathcal{I}$ gegen Φ mit

$$\dot{\Phi} = \begin{pmatrix} A & B \\ C - \lambda C_0 & -A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \Phi, \quad \Phi(a) = \Phi_a.$$

Gemäß dem Korollar 5.1 gibt es $c_k \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix}(t) = \Phi_k(t) \begin{pmatrix} 0 \\ c_k \end{pmatrix}.$$

Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c_k \in \operatorname{Im} \mathcal{W}, ||c_k|| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ annehmen. Somit ist die Folge (c_k) beschränkt und nach Bolzano-Weierstraß gibt es demzufolge eine konvergente Teilfolge, die wir der Lesbarkeit halber ebenfalls mit (c_k) bezeichnen möchten, so, dass

$$c_k \to c \ (k \to \infty), c \in \operatorname{Im} \mathcal{W}, ||c|| = 1.$$

Folglich konvergiert

$$\begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix}(t) \to \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}(t) := \Phi(t) \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \quad (k \to \infty) \text{ gleichmäßig auf } \mathcal{I}.$$

Gemäß Lemma 5.1 sind Eigenfunktionen zu verschiedenen eigentlichen Eigenwerten von (E) zueinander orthogonal, so dass $< x_k, x_l >= 0$ für alle $k \neq l$ gilt.
Nun ist

$$< x, x >= \lim_{k \to \infty} < x_k, x_{k+1} >= 0,$$

d.h. $C_0 x \equiv 0$ auf $\mathcal{I}$ und es gilt $R_1^b x(b) + R_2^b u(b) = 0$. Damit ist jedoch $c \in W$ im Widerspruch zu $c \in \operatorname{Im} \mathcal{W} \setminus \{0\}$. □

Bemerkung 5.2.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und (X, U) sei eine konjugierte Basis von (H). Betrachten wir das Eigenwertproblem

$$(E_0) \quad \dot{x} = Ax + Bu,\ \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}} u,\ U^{\mathrm{T}}(a)x(a) - X^{\mathrm{T}}(a)u(a) = x(b) = 0,$$

so sind für dieses Eigenwertproblem die Vektorräume V und W aus (V) und (W) (siehe Seite 40) gleich. Ferner ist $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann ein eigentlicher Eigenwert von (E_0), wenn $\operatorname{def} \{X(b; \lambda)\mathcal{V}\} > 0$ ist. Da die eigentlichen Eigenwerte von (E_0) nach Satz 5.1 isoliert sind, und da $\operatorname{def} X(b; \lambda) = \dim V + \operatorname{def} \{X(b; \lambda)\mathcal{V}\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich ein neuer Beweis für die Proposition 4.4.

Korollar 5.2.
Es gelten $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$ und es sei $\mathcal{W}$ eine Matrix wie in (W). Ferner sei

$$\Lambda(\lambda) := R_1^b X_a(b; \lambda) + R_2^b U_a(b; \lambda).$$

Dann existiert $\ker \Lambda(\lambda+)$ und es gilt

$$\operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} = \operatorname{def}\Lambda(\lambda) - \operatorname{def}\Lambda(\lambda+)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis
Mit Satz 5.1 und Lemma 5.2 ergibt sich, dass

$$\ker \Lambda(\lambda) = W$$

bis auf isolierte Werte gilt. Demnach existiert $\ker \Lambda(\lambda+)$ und es ist $\operatorname{def}\Lambda(\lambda+) = \dim W$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit der Definition der Matrix $\mathcal{W}$ ist $\mathbb{R}^n = W \oplus \operatorname{Im}\mathcal{W}$ und $\ker \mathcal{W} = \{0\}$. Somit ist

$$\operatorname{def}\Lambda(\lambda) = \dim W + \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und folglich ist

$$\operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} = \operatorname{def}\Lambda(\lambda) - \operatorname{def}\Lambda(\lambda+)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\square$

Lemma 5.3. (Kanonische Form des Hamiltonschen Systems (H))
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es sei (X, U) eine konjugierte Basis von (H) mit bezüglich λ konstanten Anfangsbedingungen im Punkt a, d.h. $X(a;\lambda) \equiv X(a), U(a;\lambda) \equiv U(a)$. Ferner sei

$$\mathcal{M} := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \operatorname{def} X(b;\lambda) \neq \operatorname{def} X(b;\lambda+)\}.$$

Dann gibt es orthogonale Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass

$$\begin{aligned} X(b;\lambda) &= Q^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}}, \\ U(b;\lambda) &= Q^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} U_{11}(\lambda) & 0 \\ U_{21}(\lambda) & U_{22} \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

mit einer $r \times r$-matrixwertigen Funktion X_{11}, $r := \operatorname{rg} X(b;\lambda+)$, die bis auf isolierte Punkte, genauer auf $\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$, regulär ist, sowie mit matrixwertigen Funktionen U_{11}, U_{21}, wobei $U_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times r}, U_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und einer konstanten regulären Matrix $U_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ gilt.

Beweis

Wir führen eine Konstruktion ähnlich derer von [[11], Seite 13ff.] durch. Nach Proposition 4.4 ist $\mathcal{M}$ diskret, so dass es ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ und eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so gibt, dass

$$\ker X(b;\lambda_0) = \ker X(b;\lambda_0+)$$

und

$$X(b;\lambda_0)P = (\underbrace{*}_{r}, 0) \text{ mit } r := \mathrm{rg} X(b;\lambda_0)$$

gilt. Nach dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt gibt es ferner eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass

$$QX(b;\lambda_0)P = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit einer regulären Matrix $X_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ gilt.

Es seien nun

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(\lambda) &= \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & X_{12}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) & X_{22}(\lambda) \end{pmatrix} &:=& \; QX(b;\lambda)P, \\ \widetilde{U}(\lambda) &= \begin{pmatrix} U_{11}(\lambda) & U_{12}(\lambda) \\ U_{21}(\lambda) & U_{22}(\lambda) \end{pmatrix} &:=& \; QU(b;\lambda)P \end{aligned}$$

mit gewissen Matrizen $X_{11}(\lambda), U_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times r}, X_{12}(\lambda), U_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $X_{21}(\lambda), U_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}, X_{22}(\lambda), U_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgrund der Wahl der Matrix P und Proposition 4.4 folgt unmittelbar

$$X_{12}(\lambda) = X_{22}(\lambda) = 0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Da mit $X(b;\lambda)c \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$ nach Proposition 4.4 stets auch $c \in V := \bigcap_{t\in\mathcal{I}} \ker\{X^{\mathrm{T}}(t;\lambda)C_0(t)X(t;\lambda)\} \cap \ker X(b;\lambda)$ und damit $C_0(\cdot)X(\cdot;\lambda)c \equiv 0$ auf $\mathcal{I}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt, sind $U_{12}(\cdot)$ und $U_{22}(\cdot)$ konstant. Wir setzen $U_{12} := U_{12}(\lambda_0)$, $U_{22} := U_{22}(\lambda_0)$.

Es ist

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^{\mathrm{T}}(\lambda)\widetilde{U}(\lambda) &= \begin{pmatrix} X_{11}^{\mathrm{T}}(\lambda)U_{11}(\lambda) + X_{21}^{\mathrm{T}}(\lambda)U_{21}(\lambda) & X_{11}^{\mathrm{T}}(\lambda)U_{12} + X_{21}^{\mathrm{T}}(\lambda)U_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= P^{\mathrm{T}}\{X^{\mathrm{T}}U\}(b;\lambda)P \end{aligned}$$

symmetrisch nach der Definition einer konjugierten Basis von (H), Definition 3.1, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Gemäß der Definition der Matrix Q ist $X_{21}(\lambda_0) = 0$, so dass sich $U_{12} = 0$ aufgrund der Regularität von $X_{11}(\lambda_0)$ ergibt.
Mit

$$n = \operatorname{rg}(\widetilde{X}^{\mathrm{T}}(\lambda_0), \widetilde{U}^{\mathrm{T}}(\lambda_0)) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} X_{11}^{\mathrm{T}}(\lambda_0) & U_{11}^{\mathrm{T}}(\lambda_0) & U_{21}^{\mathrm{T}}(\lambda_0) \\ 0 & 0 & U_{22}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

folgt, dass U_{22} regulär ist.
Damit ist

$$\widetilde{X}^{\mathrm{T}}(\lambda)\widetilde{U}(\lambda) = \begin{pmatrix} X_{11}^{\mathrm{T}}(\lambda)U_{11}(\lambda) + X_{21}^{\mathrm{T}}(\lambda)U_{21}(\lambda) & X_{21}^{\mathrm{T}}(\lambda)U_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Aufgrund der herrschenden Symmetrie sowie der Regularität von U_{22} ergibt sich $X_{21}(\cdot) \equiv 0$. Also ist

$$\widetilde{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nach Proposition 4.4 ist $X_{11}(\cdot)$ auf isolierte Punkte, genauer auf $\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$, regulär. Ferner ist

$$\widetilde{U}(\lambda) = \begin{pmatrix} U_{11}(\lambda) & 0 \\ U_{21}(\lambda) & U_{22} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

mit einer regulären Matrix $U_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$. □

Bemerkung 5.3.
Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen des vorangegangenen Lemmas 5.3 gilt für die matrixwertige Lösung $(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{U})$ des transformierten Hamiltonschen Systems

$$\dot{\underset{\sim}{X}} = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{U},\ \dot{\underset{\sim}{U}} = (\underset{\sim}{C} - \lambda\underset{\sim}{C}_0)\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}\underset{\sim}{U},$$

$$\begin{array}{rclrcl} \underset{\sim}{A}(t) & := & QA(t)Q^{\mathrm{T}}, & \underset{\sim}{B}(t) & := & QB(t)Q^{\mathrm{T}}, \\ \underset{\sim}{C}(t) & := & QC(t)Q^{\mathrm{T}}, & \underset{\sim}{C}_0(t) & := & QC_0(t)Q^{\mathrm{T}}, \end{array}$$

mit den Anfangswerten

$$\underset{\sim}{X}(a) = QX(a)P,\ \underset{\sim}{U}(a) = QU(a)P$$

folglich:

$$\underset{\sim}{X}(b;\lambda) = \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \underset{\sim}{U}(b;\lambda) = \begin{pmatrix} U_{11}(\lambda) & 0 \\ U_{21}(\lambda) & U_{22} \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Matrizen $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{C}_0$ erfüllen die Annahme $(\mathcal{A})$.

Korollar 5.3.
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es sei (X, U) eine konjugierte Basis von (H) mit bezüglich λ konstanten Anfangsbedingungen im Punkt a, d.h. $X(a; \lambda) \equiv X(a), U(a; \lambda) \equiv U(a)$. Ferner sei

$$\mathcal{M} := \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \operatorname{def} X(b; \lambda) \neq \operatorname{def} X(b; \lambda+)\}.$$

Dann sind Im $X(b; \lambda)$ und Im $X^{\mathrm{T}}(b; \lambda)$ konstant auf $\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$.

Beweis
Nach dem Lemma 5.3 existieren orthogonale Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine $r \times r$-matrixwertige Funktion $X_{11},\ r := \operatorname{rg} X(b; \lambda+)$, die auf $\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$ regulär ist, so, dass

$$X(b; \lambda) = Q^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}}$$

gilt. Mit der Regularität von $X_{11}(\cdot)$ auf $\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$ gilt:

$$\operatorname{Im} X(b; \lambda) = \operatorname{Im} \{Q^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} I_{r \times r} \\ 0 \end{pmatrix}\},\ \operatorname{Im} X^{\mathrm{T}}(b; \lambda) = \operatorname{Im} \{P \begin{pmatrix} I_{r \times r} \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$. $\square$

Bemerkung 5.4.
Im Gegensatz zu den Konstruktionen von [[11], Seiten 13ff.] wählen wir Q unabhängig von dem Parameter t. Dieses bietet den Vorteil dass wir in unseren Hauptsätzen im Kapitel 6 nicht voraussetzen müssen, dass die Hauptlösung von (H) bei a (siehe Abschnitt 6.3) im Intervall $\mathcal{I}$ keinen eigentlichen fokalen Punkt für $\lambda \to -\infty$ besitzt.

Lemma 5.4. (Kanonische Form der Randbedingungen)
Es gelten ($\mathcal{A}$) und ($\mathcal{R}$). (X, U) sei eine konjugierte Basis von (H) und es sei $r := \mathrm{rg} X(b; \lambda+)$.
Dann gibt es gewisse Matrizen $R_{11}^{(1)}, R_{11}^{(2)} \in \mathbb{R}^{r\times r}, R_{12}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$, $R_{22}^{(1)}, R_{22}^{(2)} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ so, dass mit

$$\widetilde{R}_1^b := \begin{pmatrix} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(1)} \\ R_{22}^{(2)} C_1 & R_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \; \widetilde{R}_2^b := \begin{pmatrix} R_{11}^{(2)} & 0 \\ R_{22}^{(2)} C_2 & R_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

gilt:

(i) $\mathrm{Im}\, {R_2^b}^{\mathrm{T}} = \mathrm{Im}\, \widetilde{R}_2^{b\mathrm{T}}$.

(ii) $\ker(\widetilde{R}_1^b X(b;\lambda) + \widetilde{R}_2^b U(b;\lambda)) = \ker(R_1^b X(b;\lambda) + R_2^b U(b;\lambda))$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) Ist S_1 eine symmetrische reelle Matrix und S_2 eine reelle Matrix mit

$$R_1^b = R_2^b S_1 + S_2, \; \ker R_2^b = \mathrm{Im}\, S_2^{\mathrm{T}},$$

so gibt eine reelle Matrix $\widetilde{S}_2$ mit

$$\widetilde{R}_1^b = \widetilde{R}_2^b S_1 + \widetilde{S}_2, \; \ker \widetilde{R}_2^b = \mathrm{Im}\, \widetilde{S}_2^{\mathrm{T}}.$$

(iv) $\mathrm{rg}(R_{11}^{(1)}, R_{11}^{(2)}) = r$ und $R_{11}^{(1)} {R_{11}^{(2)}}^{\mathrm{T}}$ ist symmetrisch.

Beweis
Zunächst ist r gemäß Proposition 4.4 wohldefiniert. Nach Korollar 2.1(i) gibt es eine symmetrische reelle Matrix S_1 und eine reelle Matrix S_2 so, dass $R_1^b = R_2^b S_1 + S_2, \; \ker R_2^b = \mathrm{Im}\, S_2^{\mathrm{T}}$ gilt. Nach Satz 2.3 gibt es nun eine reguläre Matrix $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Matrix $C_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ so, dass

$${R_2^b}^{\mathrm{T}} Z = \begin{pmatrix} {R_{11}^{(2)}}^{\mathrm{T}} & C_2^{\mathrm{T}} {R_{22}^{(2)}}^{\mathrm{T}} \\ 0 & {R_{22}^{(2)}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

mit gewissen Matrizen $R_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}, R_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ gilt. Wir setzen nun

$$\widehat{R}_1^b := Z^T R_1^b, \; \widetilde{R}_2^b := Z^T R_2^b = \begin{pmatrix} R_{11}^{(2)} & 0 \\ R_{22}^{(2)} C_2 & R_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \; \widehat{S}_2 := Z^{\mathrm{T}} S_2.$$

Dann gilt $\operatorname{Im} R_2^{b\,\mathrm{T}} = \operatorname{Im} \widetilde{R}_2^{b\mathrm{T}}$, d.h. (i), sowie

$$\operatorname{rg}(\widehat{R}_1^b, \widetilde{R}_2^b) = \operatorname{rg}(Z^{\mathrm{T}}(R_1^b, R_2^b)) = \operatorname{rg}(R_1^b, R_2^b) = n,$$

und

$$\widehat{R}_1^b \widetilde{R}_2^{b\,\mathrm{T}} = Z^{\mathrm{T}} R_1^b R_2^{b\,\mathrm{T}} Z = Z^{\mathrm{T}} R_2^b R_1^{b\,\mathrm{T}} Z = \widetilde{R}_2^b \widehat{R}_1^{b\,\mathrm{T}}.$$

Ferner ist

$$\widehat{R}_1^b = \widetilde{R}_2^b S_1 + \widehat{S}_2,\ \ \widehat{S}_2 \widetilde{R}_2^{b\,\mathrm{T}} = 0, \ker \widetilde{R}_2^b = \operatorname{Im} \widehat{S}_2^{\mathrm{T}}.$$

Wenden wir Korollar 2.1(ii) mit $R_2 = R_{11}^{(2)}$, bzw. $= R_{22}^{(2)}$, und jeweils $S_1 = 0$ an, so schließen wir auf die Existenz von Matrizen $\widetilde{S}_{11}^{(2)} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ und $\widetilde{S}_{22}^{(2)} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, für die gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \widetilde{S}_{11}^{(2)\mathrm{T}} &= \ker R_{11}^{(2)}, \quad \operatorname{rg}(\widetilde{S}_{11}^{(2)}, R_{11}^{(2)}) = r, \\ \operatorname{Im} \widetilde{S}_{22}^{(2)\mathrm{T}} &= \ker R_{22}^{(2)}, \quad \operatorname{rg}(\widetilde{S}_{22}^{(2)}, R_{22}^{(2)}) = n - r. \end{aligned}$$

Mit $\widetilde{S}_{12}^{(2)} := -\widetilde{S}_{11}^{(2)} C_2^{\mathrm{T}}$ ist

$$R_{22}^{(2)} C_2 \widetilde{S}_{11}^{(2)\,\mathrm{T}} + R_{22}^{(2)} \widetilde{S}_{12}^{(2)\,\mathrm{T}} = 0.$$

Mit

$$\widetilde{S}_2 := \begin{pmatrix} \widetilde{S}_{11}^{(2)} & \widetilde{S}_{12}^{(2)} \\ 0 & \widetilde{S}_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

ist nun

$$\widetilde{S}_2 \widetilde{R}_2^{b\,\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \widetilde{S}_{11}^{(2)} R_{11}^{(2)\,\mathrm{T}} & \widetilde{S}_{11}^{(2)} C_2^{\mathrm{T}} R_{22}^{(2)\,\mathrm{T}} + \widetilde{S}_{12}^{(2)} R_{22}^{(2)\,\mathrm{T}} \\ 0 & \widetilde{S}_{22}^{(2)} R_{22}^{(2)\,\mathrm{T}} \end{pmatrix} = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\widetilde{S}_2, \widetilde{R}_2^b) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \widetilde{S}_{11}^{(2)} & \widetilde{S}_{12}^{(2)} & R_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{22}^{(2)} & R_{22}^{(2)} C_2 & R_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \widetilde{S}_{11}^{(2)} & \widetilde{S}_{12}^{(2)} & R_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{22}^{(2)} & 0 & R_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = n. \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir damit

$$n - \operatorname{rg} \widetilde{R}_2^b \geq \operatorname{rg} \widetilde{S}_2 \geq \operatorname{rg}(\widetilde{S}_2, \widetilde{R}_2^b) - \operatorname{rg} \widetilde{R}_2^b = n - \operatorname{rg} \widetilde{R}_2^b,$$

d.h. es ist $\ker \widetilde{R}_2^b = \operatorname{Im} \widetilde{S}_2^{\mathrm{T}}$.

Setzen wir nun

$$\widetilde{R}_1^b := \widetilde{R}_2^b S_1 + \widetilde{S}_2,$$

so gilt (iii). Es seien $S_{11}^{(1)} \in \mathbb{R}^{r\times r}, S_{12}^{(1)} \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}, S_{22}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ so, dass

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{12}^{(1)\mathrm{T}} & S_{22}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\widetilde{R}_1^b = \begin{pmatrix} R_{11}^{(2)} S_{11}^{(1)} + \widetilde{S}_{11}^{(2)} & R_{11}^{(2)} S_{12}^{(1)} + \widetilde{S}_{12}^{(2)} \\ R_{22}^{(2)} (C_2 S_{11}^{(1)} + \widetilde{S}_{12}^{(2)\mathrm{T}}) & R_{22}^{(2)} (C_2 + S_{22}^{(1)}) + \widetilde{S}_{12}^{(2)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(1)} \\ R_{22}^{(2)} C_1 & R_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

mit gewissen Matrizen $R_{11}^{(1)} \in \mathbb{R}^{r\times r}, R_{12}^{(1)} \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}, R_{22}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}, C_1 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$.
Damit ist

$$\mathrm{rg}(R_{11}^{(1)}, R_{11}^{(2)}) = \mathrm{rg}(\widetilde{S}_{11}^{(2)}, R_{11}^{(2)}) = r$$

und

$$R_{11}^{(1)} R_{11}^{(2)\,\mathrm{T}} = R_{11}^{(2)} S_{11}^{(1)} R_{11}^{(2)\,\mathrm{T}}$$

ist symmetrisch, d.h. es gilt (iv).
Ferner gilt mit Korollar 2.1(i) $\ker(\widetilde{R}_1^b, \widetilde{R}_2^b) = \ker(\widehat{R}_1^b, \widetilde{R}_2^b)$, so dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \ker(\widetilde{R}_1^b X(b;\lambda) + \widetilde{R}_2^b U(b;\lambda)) &= \ker(\widehat{R}_1^b X(b;\lambda) + \widetilde{R}_2^b U(b;\lambda)) \\ &= \ker(Z^{\mathrm{T}}(R_1^b X(b;\lambda) + R_2^b U(b;\lambda))) \\ &= \ker(R_1^b X(b;\lambda) + R_2^b U(b;\lambda)). \end{aligned}$$

Damit gilt (ii). □

Lemma 5.5. (Charakteristische Gleichung, 2. Teil)
Es gelten $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$. Für die spezielle konjugierte Basis (X_a, U_a) von (H) mit den Anfangswerten

$$X_a(a;\lambda) \equiv -R_2^{a\mathrm{T}},\ U_a(a;\lambda) \equiv R_1^{a\mathrm{T}}$$

gelte

$$X_a(b;\lambda) = \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ U_a(b;\lambda) = \begin{pmatrix} U_{11}(\lambda) & 0 \\ U_{21}(\lambda) & U_{22} \end{pmatrix}$$

mit einer $r \times r$-matrixwertigen Funktion $X_{11},\ r := \mathrm{rg} X(b;\lambda+)$, die bis auf isolierte Punkte regulär ist, sowie mit matrixwertigen Funktionen U_{11}, U_{21}, wobei $U_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times r}, U_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und einer konstanten regulären Matrix $U_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$.

Ferner seien $R_{11}^{(1)}, R_{11}^{(2)} \in \mathbb{R}^{r\times r}, R_{12}^{(1)} \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}, R_{22}^{(1)}, R_{22}^{(2)} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ und

$$\widetilde{R}_1^b := \begin{pmatrix} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(1)} \\ R_{22}^{(2)}C_1 & R_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \ \widetilde{R}_2^b := \begin{pmatrix} R_{11}^{(2)} & 0 \\ R_{22}^{(2)}C_2 & R_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

so, dass gilt:

$$\ker(R_1^b X_a(b;\lambda) + R_2^b U_a(b;\lambda)) = \ker(\widetilde{R}_1^b X_a(b;\lambda) + \widetilde{R}_2^b U_a(b;\lambda)) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Schließlich sei

$$\widetilde{\Lambda}(\lambda) := R_{11}^{(1)} X_{11}(\lambda) + R_{11}^{(2)} U_{11}(\lambda).$$

Dann existiert $\ker \widetilde{\Lambda}(\lambda+)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und λ ist genau dann ein eigentlicher Eigenwert von (E), wenn

$$\operatorname{def} \widetilde{\Lambda}(\lambda) - \operatorname{def} \widetilde{\Lambda}(\lambda+) > 0$$

gilt. In diesem Fall ist die Vielfachheit des eigentlichen Eigenwertes λ von (E) gleich der Zahl $\operatorname{def} \widetilde{\Lambda}(\lambda) - \operatorname{def} \widetilde{\Lambda}(\lambda+)$.

Beweis

Gemäß Korollar 5.2 existiert

$$\begin{aligned} & \ker\{R_1^b X_a(b;\lambda+) + R_2^b U_a(b;\lambda+)\} \\ = \ & \ker\{\widetilde{R}_1^b X_a(b;\lambda+) + \widetilde{R}_2^b U_a(b;\lambda+)\} \\ = \ & \ker \begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda}(\lambda+) & 0 \\ R_{22}^{(2)}(C_1 X_{11}(\lambda+) + C_2 U_{11}(\lambda+) + U_{21}(\lambda+)) & R_{22}^{(2)} U_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Da U_{22} regulär ist, existiert somit $\ker \widetilde{\Lambda}(\lambda+)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
Gemäß Lemma 5.2 und Korollar 5.2 ist $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann ein eigentlicher Eigenwert von (E) der Vielfachheit k, wenn

$$k = \operatorname{def} \left\{R_1^b X_a(b;\lambda) + R_2^b U_a(b;\lambda)\right\} - \operatorname{def} \left\{R_1^b X_a(b;\lambda+) + R_2^b U_a(b;\lambda+)\right\} > 0$$

ist. Gemäß Voraussetzung ist dieses genau dann der Fall, wenn

$$k = \operatorname{def} \left\{\widetilde{R}_1^b X_a(b;\lambda) + \widetilde{R}_2^b U_a(b;\lambda)\right\} - \operatorname{def} \left\{\widetilde{R}_1^b X_a(b;\lambda+) + \widetilde{R}_2^b U_a(b;\lambda+)\right\} > 0$$

gilt. Dieses ist nach den Voraussetzungen an $X_a(b;\lambda), U_a(b;\lambda)$ genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned} k = \ & \operatorname{def}\begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda}(\lambda) & 0 \\ R_{22}^{(2)}(C_1X_{11}(\lambda)+C_2U_{11}(\lambda)+U_{21}(\lambda)) & R_{22}^{(2)}U_{22}\end{pmatrix} \\ - \ & \operatorname{def}\begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda}(\lambda+) & 0 \\ R_{22}^{(2)}(C_1X_{11}(\lambda+)+C_2U_{11}(\lambda+)+U_{21}(\lambda+)) & R_{22}^{(2)}U_{22}\end{pmatrix} \\ > \ & 0 \end{aligned}$$

ist. Da U_{22} regulär ist, ist dies genau dann der Fall, wenn

$$k = \operatorname{def}\widetilde{\Lambda}(\lambda) - \operatorname{def}\widetilde{\Lambda}(\lambda+) > 0$$

gilt. □

Proposition 5.1.
Es gelten $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$ und es sei (X,U) eine konjugierte Basis von (H) mit bezüglich λ konstanten Anfangsbedingungen im Punkt a, d.h. $X(a;\lambda)\equiv X(a)$, $U(a;\lambda)\equiv U(a)$. Ferner seien

$$X(b;\lambda) = \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\ U(b;\lambda) = \begin{pmatrix} U_{11}(\lambda) & 0 \\ U_{21}(\lambda) & U_{22}\end{pmatrix}$$

mit einer $r\times r$-matrixwertigen Funktion X_{11}, $r := \operatorname{rg}X(b;\lambda+)$, die bis auf isolierte Punkte regulär ist, sowie mit matrixwertigen Funktionen U_{11}, U_{21}, wobei $U_{11}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r\times r}, U_{21}(\lambda)\in\mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}$, und einer konstanten regulären Matrix $U_{22}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$.
Dann ist die matrixwertige Funktion $\{U_{11}X_{11}^{-1}\}(\lambda)$ monoton nicht wachsend auf allen Intervallen, auf denen $X_{11}(\lambda)$ regulär ist.

Beweis
Auf Intervallen, auf denen $X_{11}(\lambda)$ regulär ist, gilt mit $\frac{\partial}{\partial\lambda} = {}'$ und ohne Angabe des Arguments λ:

$$\begin{aligned} & \{U_{11}X_{11}^{-1}\}' = (X_{11}^{-1})^{\mathrm{T}}\{X_{11}^{\mathrm{T}}U_{11}' - U_{11}^{\mathrm{T}}X_{11}'\}X_{11}^{-1} \\ = & \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} \\ 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} X_{11}^{\mathrm{T}}U_{11}' - U_{11}^{\mathrm{T}}X_{11}' & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11}^{-1} \\ 0\end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} \\ 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \left\{\begin{pmatrix} X_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11}' & 0 \\ U_{21}' & U_{22}'\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_{11}^{\mathrm{T}} & U_{21}^{\mathrm{T}} \\ 0 & U_{22}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11}' & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} X_{11}^{-1} \\ 0\end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} \\ 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \left\{X^{\mathrm{T}}(b;\cdot)U'(b;\cdot) - U^{\mathrm{T}}(b;\cdot)X'(b;\cdot)\right\}\begin{pmatrix} X_{11}^{-1} \\ 0\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist nun

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{X^{\mathrm{T}}(t;\cdot)U'(t;\cdot) - U^{\mathrm{T}}(t;\cdot)X'(t;\cdot)\}\\
= \;& (A(t)X(t;\cdot) + B(t)U(t;\cdot))^{\mathrm{T}}U'(t;\cdot)\\
& + X^{\mathrm{T}}(t;\cdot)((C(t) - \lambda C_0(t))X'(t;\cdot) - A^{\mathrm{T}}(t)U'(t;\cdot) - C_0(t)X(t;\cdot))\\
& - ((C(t) - \lambda C_0(t))X(t;\cdot) - A^{\mathrm{T}}(t)U(t;\cdot))^{\mathrm{T}}X'(t;\cdot)\\
& - U^{\mathrm{T}}(t;\cdot)(A(t)X'(t;\cdot) + B(t)U'(t;\cdot))\\
= \;& -X^{\mathrm{T}}(t;\cdot)C_0(t)X(t;\cdot),
\end{aligned}$$

so dass

$$\{U_{11}X_{11}^{-1}\}' = -\begin{pmatrix} X_{11}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \int_{\mathcal{I}} X^{\mathrm{T}}(\tau;\cdot)C_0(\tau)X(\tau;\cdot)\,\mathrm{d}\tau \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Da die matrixwertige Funktion C_0 nach Annahme $(\mathcal{A})$ nichtnegativ definit auf $\mathcal{I}$ ist, ergibt sich die Behauptung. □

Satz 5.2. (Indexsatz für Eigenwertprobleme)
Es gelten $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$ und es sei (X_a, U_a) die spezielle konjugierte Basis von (H) mit den Anfangswerten

$$X_a(a;\lambda) \equiv -R_2^{a\mathrm{T}},\; U_a(a;\lambda) \equiv R_1^{a\mathrm{T}}.$$

Es sei

$$\Lambda(\lambda) := R_1^b X_a(b;\lambda) + R_2^b U_a(b;\lambda),\; \lambda \in \mathbb{R},$$

und es seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ Matrizen wie in (V) und (W) (siehe Seite 40). Ferner sei

$$R_1^b = R_2^b S_1 + S_2$$

mit einer symmetrischen Matrix S_1 und einer Matrix S_2 mit $\ker R_2^b = \operatorname{Im} S_2^{\mathrm{T}}$.
Es sei nun $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit

$$\operatorname{Im} R = \operatorname{Im} R_2^{b^{\mathrm{T}}} \cap \operatorname{Im} X_a(b;\lambda+)$$

und es sei

$$\widetilde{n}_2(\lambda) := \operatorname{ind}\,\{R^{\mathrm{T}}(S_1 + (U_a X_a^{\dagger})(b;\lambda))R\} \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dann existieren $\widetilde{n}_2(\lambda+), \widetilde{n}_2(\lambda-)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\widetilde{n}_2(\lambda+) - \widetilde{n}_2(\lambda-) = \operatorname{def}\,\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} - \operatorname{def}\,\{X_a(b;\lambda)\mathcal{V}\}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$, $\mathcal{M} := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \operatorname{def} X_a(b;\lambda) \neq \operatorname{def} X_a(b;\lambda+)\}$, gilt genauer:

$$\widetilde{n}_2(\lambda+) = \widetilde{n}_2(\lambda) + \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\}, \quad \widetilde{n}_2(\lambda-) = \widetilde{n}_2(\lambda).$$

Beweis

Gemäß Lemma 5.3 gibt es orthogonale Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass

$$\begin{aligned} X_a(b;\lambda) &= Q^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}}, \\ U_a(b;\lambda) &= Q^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} U_{11}(\lambda) & 0 \\ U_{21}(\lambda) & U_{22} \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

mit einer $r \times r$-matrixwertigen Funktion X_{11}, $r := \operatorname{rg} X(b;\lambda+)$, die auf $\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$ regulär ist, sowie mit matrixwertigen Funktionen U_{11}, U_{21}, wobei $U_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}, U_{21} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und einer konstanten regulären Matrix $U_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$.

Es seien

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{R}_1^a &:= P^{\mathrm{T}} R_1^a Q^{\mathrm{T}}, & \underset{\sim}{R}_2^a &:= P^{\mathrm{T}} R_2^a Q^{\mathrm{T}}, \\ \underset{\sim}{R}_1^b &:= P^{\mathrm{T}} R_1^b Q^{\mathrm{T}}, & \underset{\sim}{R}_2^b &:= P^{\mathrm{T}} R_2^b Q^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

und

$$\underset{\sim}{X}_a(t;\lambda) := Q X_a(t;\lambda) P, \ \underset{\sim}{U}_a(t;\lambda) := Q U_a(t;\lambda) P$$

sowie

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{A}(t) &:= Q A(t) Q^{\mathrm{T}}, & \underset{\sim}{B}(t) &:= Q B(t) Q^{\mathrm{T}}, \\ \underset{\sim}{C}(t) &:= Q C(t) Q^{\mathrm{T}}, & \underset{\sim}{C}_0(t) &:= Q C_0(t) Q^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

für $t \in \mathcal{I}, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\underset{\sim}{X}_a, \underset{\sim}{U}_a)$ eine matrixwertige Lösung des Differentialgleichungssystems

$$(\underset{\sim}{H}) \qquad \dot{\underset{\sim}{X}} = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{U}, \ \dot{\underset{\sim}{U}} = (\underset{\sim}{C} - \lambda \underset{\sim}{C}_0)\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}\underset{\sim}{U}$$

mit $\underset{\sim}{X}_a(a;\lambda) \equiv -\underset{\sim}{R}_2^{a\mathrm{T}}$, $\underset{\sim}{U}_a(a;\lambda) \equiv \underset{\sim}{R}_1^{a\mathrm{T}}$.

Wir definieren ferner $\underset{\sim}{R} := QR$ und $\underset{\sim}{S}_1 := QS_1Q^{\mathrm{T}}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \underset{\sim}{R} &= \operatorname{Im} QR \\ &= \operatorname{Im} Q{R_2^b}^{\mathrm{T}} \cap \operatorname{Im} QX_a(b;\lambda+) \\ &= \operatorname{Im} {\underset{\sim}{R}_2^b}^{\mathrm{T}} \cap \operatorname{Im} \underset{\sim}{X}_a(b;\lambda+) \\ &= \operatorname{Im} {\underset{\sim}{R}_2^b}^{\mathrm{T}} \cap \operatorname{Im} \begin{pmatrix} I_{r\times r} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} & R^{\mathrm{T}}(S_1 + (U_a X_a^\dagger)(b;\lambda))R \\ = \;& R^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} (Q S_1 Q^{\mathrm{T}} + Q U_a(b;\lambda) P P^{\mathrm{T}} X_a^\dagger(b;\lambda) Q^{\mathrm{T}}) Q R \\ = \;& \utilde{R}^{\mathrm{T}}(\utilde{S}_1 + (\utilde{U}_a \utilde{X}_a^\dagger)(b;\lambda))\utilde{R}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \widetilde{n}_2(\lambda) &= \operatorname{ind}\{R^{\mathrm{T}}(S_1 + (U_a X_a^\dagger)(b;\lambda))R\} \\ &= \operatorname{ind}\{\utilde{R}^{\mathrm{T}}(\utilde{S}_1 + (\utilde{U}_a \utilde{X}_a^\dagger)(b;\lambda))\utilde{R}\}. \end{aligned}$$

Ferner ist mit $\utilde{S}_2 := P^{\mathrm{T}} S_2 Q^{\mathrm{T}}$ nun

$$R_1^b = R_2^b S_1 + S_2$$

genau dann, wenn $P^{\mathrm{T}} R_1^b Q^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}} R_2^b Q^{\mathrm{T}} Q S_1 Q^{\mathrm{T}} + P^{\mathrm{T}} S_2 Q^{\mathrm{T}}$ gilt, d.h. genau dann, wenn

$$\utilde{R}_1^b = \utilde{R}_2^b \utilde{S}_1 + \utilde{S}_2$$

gilt und es ist $\ker \utilde{R}_2^b = \ker P^{\mathrm{T}} R_2^b Q^{\mathrm{T}} = \ker R_2^b Q^{\mathrm{T}} = \operatorname{Im} Q S_2^{\mathrm{T}} = \operatorname{Im} \utilde{S}_2^{\mathrm{T}}$.
Nach Lemma 5.4 gibt es nun Matrizen $R_{11}^{(1)}, R_{11}^{(2)} \in \mathbb{R}^{r\times r}, R_{12}^{(1)} \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $R_{22}^{(1)}, R_{22}^{(2)} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ so, dass mit

$$\widetilde{R}_1 := \begin{pmatrix} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(1)} \\ R_{22}^{(2)} C_1 & R_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},\; \widetilde{R}_2 := \begin{pmatrix} R_{11}^{(2)} & 0 \\ R_{22}^{(2)} C_2 & R_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

gilt:

(i) $\operatorname{Im} {\utilde{R}_2^b}^{\mathrm{T}} = \operatorname{Im} \widetilde{R}_2^{\mathrm{T}}$,

(ii) Es gibt eine Matrix $\widetilde{S}_2$ mit

$$\widetilde{R}_1 = \widetilde{R}_2 \utilde{S}_1 + \widetilde{S}_2,\; \ker \widetilde{R}_2 = \operatorname{Im} \widetilde{S}_2^{\mathrm{T}},$$

(iii) $\operatorname{rg}(R_{11}^{(1)}, R_{11}^{(2)}) = r$ und $R_{11}^{(1)} {R_{11}^{(2)}}^{\mathrm{T}}$ ist symmetrisch.

Dann ist

$$\operatorname{Im} \utilde{R} = \operatorname{Im} \widetilde{R}_2^{\mathrm{T}} \cap \operatorname{Im} \begin{pmatrix} I_{r\times r} \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} {R_{11}^{(2)}}^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\utilde{R} := \begin{pmatrix} {R_{11}^{(2)}}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

setzen. Es seien $S_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}, S_{12} \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}, S_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ so, dass

$$\underset{\sim}{S}_1 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^{\mathrm{T}} & S_{22} \end{pmatrix}$$

gilt. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} & \underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}}(\underset{\sim}{S}_1 + (\underset{\sim}{U}_a \underset{\sim}{X}_a^{\dagger})(b;\lambda))\underset{\sim}{R} \\ = & \begin{pmatrix} R_{11}^{(2)} S_{11} R_{11}^{(2)^{\mathrm{T}}} + R_{11}^{(2)} U_{11}(\lambda) X_{11}^{-1}(\lambda) R_{11}^{(2)^{\mathrm{T}}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} R_{11}^{(1)} R_{11}^{(2)^{\mathrm{T}}} + R_{11}^{(2)} U_{11}(\lambda) X_{11}^{-1}(\lambda) R_{11}^{(2)^{\mathrm{T}}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\widetilde{n}_2(\lambda) = \operatorname{ind}\,\{R_{11}^{(1)} R_{11}^{(2)^{\mathrm{T}}} + R_{11}^{(2)} U_{11}(\lambda) X_{11}^{-1}(\lambda) R_{11}^{(2)^{\mathrm{T}}}\},$$

sofern $X_{11}(\lambda)$ regulär ist, d.h. für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$.
Da $\operatorname{rg}(R_{11}^{(1)}, R_{11}^{(2)}) = \operatorname{rg}(X_{11}, U_{11})(\lambda) = r$ und $R_{11}^{(1)} R_{11}^{(2)^{\mathrm{T}}} = R_{11}^{(2)} R_{11}^{(1)^{\mathrm{T}}}$ sowie $\{X_{11}^{\mathrm{T}} U_{11}\}(\lambda) = \{U_{11}^{\mathrm{T}} X_{11}\}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt und $X_{11}(\lambda)$ regulär bis auf isolierte Punkte ist, und da $\{U_{11} X_{11}^{-1}\}(\lambda)$ nach Proposition 5.1 monoton nicht wachsend auf allen Intervallen, auf denen X_{11} regulär ist, ist, sind die Voraussetzungen des Indexsatzes 2.2 mit $R_1 = R_{11}^{(1)}, R_2 = R_{11}^{(2)}, X(t) = X_{11}(\lambda), U(t) = U_{11}(\lambda)$ erfüllt. Gemäß diesem Satz existieren $\widetilde{n}_2(\lambda+), \widetilde{n}_2(\lambda-)$ und $\operatorname{def} \widetilde{\Lambda}(\lambda+)$ und es gilt

$$\widetilde{n}_2(\lambda+) - \widetilde{n}_2(\lambda-) = \operatorname{def} \widetilde{\Lambda}(\lambda) - \operatorname{def} \widetilde{\Lambda}(\lambda+) - \operatorname{def} X_{11}(\lambda),$$

wobei $\widetilde{\Lambda}(\lambda) := R_{11}^{(1)} X_{11}(\lambda) + R_{11}^{(2)} U_{11}(\lambda)$ ist.
Gemäß der Lemmata 5.2 und 5.5 ist dies äquivalent mit

$$\widetilde{n}_2(\lambda+) - \widetilde{n}_2(\lambda-) = \operatorname{def}\,\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} - \operatorname{def}\,\{X_a(\lambda)\mathcal{V}\}.$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$ ist, folgt, dass $X_{11}(\lambda)$ regulär ist, und damit ist

$$M(\lambda) := R_{11}^{(1)} R_{11}^{(2)^{\mathrm{T}}} + R_{11}^{(2)} U_{11}(\lambda) X_{11}^{-1}(\lambda) R_{11}^{(2)^{\mathrm{T}}} = \widetilde{\Lambda}(\lambda) X_{11}^{-1}(\lambda) R_{11}^{(2)}.$$

Da $M(\lambda)$ symmetrisch ist und da

$$\operatorname{rg}(\widetilde{\Lambda}(\lambda) X_{11}^{-1}(\lambda), R_{11}^{(2)}) = \operatorname{rg}(R_{11}^{(1)} + R_{11}^{(2)} U_{11}(\lambda) X_{11}^{-1}(\lambda), R_{11}^{(2)}) = \operatorname{rg}(R_{11}^{(1)}, R_{11}^{(2)}) = r$$

gilt, folgt mittels Satz 2.1(ii)

$$\ker M(\lambda) = \ker \widetilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}(\lambda) \oplus \ker R_{11}^{(2)^{\mathrm{T}}}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{M}$. Wegen der Stetigkeit und Monotonie von $M(\lambda)$ auf allen Intervallen, auf denen $X_{11}(\cdot)$ regulär ist, ist

$$\begin{aligned} \widetilde{n}_2(\lambda+) - \widetilde{n}_2(\lambda) &= \operatorname{ind} M(\lambda+) - \operatorname{ind} M(\lambda) \\ &= \operatorname{def} M(\lambda) - \operatorname{def} M(\lambda+) \\ &= \operatorname{def} \widetilde{\Lambda}(\lambda) - \operatorname{def} \widetilde{\Lambda}(\lambda+) \\ &= \operatorname{def} \{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.5.
Es gelten die Bezeichnungen aus (dem Beweis zu) Satz 5.2. Das transformierte Hamiltonsche System $(\underset{\sim}{H})$ und die Randbedingungen $\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2$ sind in kanonischer Form, siehe die Lemmata 5.3 und 5.4 und die Bemerkung 5.3.
Es sei

$$\widehat{\Lambda}(\lambda) := \widetilde{R}_1 \underset{\sim}{X}_a(b;\lambda) + \widetilde{R}_2 \underset{\sim}{U}_a(b;\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{def} \widehat{\Lambda}(\lambda) &= \operatorname{def} \{\widetilde{R}_1 \underset{\sim}{X}_a(b;\lambda) + \widetilde{R}_2 \underset{\sim}{U}_a(b;\lambda)\} \\ &= \operatorname{def} \{\underset{\sim}{R}_1^b \underset{\sim}{X}_a(b;\lambda) + \underset{\sim}{R}_2^b \underset{\sim}{U}_a(b;\lambda)\} \\ &= \operatorname{def} \{P^{\mathrm{T}}(R_1^b X_a(b;\lambda) + R_2^b U_a(b;\lambda))P\} \\ &= \operatorname{def} \{P^{\mathrm{T}}\Lambda(\lambda)P\} \\ &= \operatorname{def} \Lambda(\lambda). \end{aligned}$$

Damit ist das Eigenwertproblem (E) nach Lemma 5.2 und Korollar 5.2 äquivalent mit dem Eigenwertproblem

$$(\underset{\sim}{E}) \qquad (\underset{\sim}{H}),\ \underset{\sim}{U}_a^{\mathrm{T}}(a)x(a) - \underset{\sim}{X}_a^{\mathrm{T}}(a)u(a) = \widetilde{R}_1 x(b) + \widetilde{R}_2 u(b) = 0,$$

d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein eigentlicher Eigenwert von (E), wenn es ein eigentlicher Eigenwert von $(\underset{\sim}{E})$ ist und umgekehrt. Dabei sind die Vielfachheiten der eigentlichen Eigenwerte gleich.

Es ist also jedes Eigenwertproblem der Form (E) zu einem Eigenwertproblem äquivalent, bei dem das zugehörige Hamiltonsche System und die zugehörigen Randbedingungen in kanonischer Form vorliegen.

6 Oszillation linearer Hamiltonscher Systeme

Die Sätze in diesem Kapitel sind die Hauptresultate der vorliegenden Arbeit. Sie liefern Formeln für die Anzahl der eigentlichen Eigenwerte des Eigenwertproblems

$$\text{(E)} \qquad \begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u \text{ auf } \mathcal{I} := [a, b], \\ &R_1^a x(a) + R_2^a u(a) = R_1^b x(b) + R_2^b u(b) = 0 \end{aligned}$$

einschließlich ihrer Vielfachheiten kleiner oder gleich einem gewissen $\lambda \in \mathbb{R}$ in Bezug auf die eigentlichen fokalen Punkte der speziellen konjugierten Basis (X_a, U_a) von

$$\text{(H)} \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \ \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u.$$

Dabei besitzt die spezielle konjugierte Basis (X_a, U_a) von (H) die folgenden Anfangswerte:

$$X_a(a; \lambda) \equiv -R_2^{a\,\mathrm{T}}, U_a(a; \lambda) \equiv R_1^{a\,\mathrm{T}}.$$

Wir wiederholen die zugrunde gelegten Annahmen

$(\mathcal{A})$ A, B, C, C_0 sind stückweise stetige, reelle, auf dem Intervall $\mathcal{I}$ erklärte, $n \times n$-matrixwertige Funktionen;
$B(t), C(t)$ und $C_0(t)$ sind symmetrisch für alle $t \in \mathcal{I}$; und es ist
$B(t) \geq 0, C_0(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathcal{I}$

und

$$(\mathcal{R}) \qquad \begin{aligned} &R_1^a, R_2^a, R_1^b, R_2^b \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ mit} \\ &\operatorname{rg}(R_1^a, R_2^a) = \operatorname{rg}(R_1^b, R_2^b) = n, \ R_1^a R_2^{a\,\mathrm{T}} = R_2^a R_1^{a\,\mathrm{T}}, R_1^b R_2^{b\,\mathrm{T}} = R_2^b R_1^{b\,\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Schließlich verwenden wir die Notationen

(V) $V := \bigcap_{t \in \mathcal{I}} \ker\{X_a^{\mathrm{T}}(t; \lambda) C_0(t) X_a(t; \lambda)\} \cap \ker X_a(b; \lambda)$
und $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ist eine Matrix mit $\mathbb{R}^n = V \oplus \operatorname{Im} \mathcal{V}$, wobei $q := n - \dim V$,

sowie

(W) $W := \bigcap_{t \in \mathcal{I}} \ker\{X_a^{\mathrm{T}}(t; \lambda) C_0(t) X_a(t; \lambda)\} \cap \ker(R_1^b X_a(b; \lambda) + R_2^b U_a(b; \lambda))$,
und $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ist eine Matrix mit $\mathbb{R}^n = W \oplus \operatorname{Im} \mathcal{W}$, wobei $r := n - \dim W$.

Die Räume V und W sind gemäß Proposition 4.3 unabhängig von λ.

Im Abschnitt 6.1 betrachten wir den lokalen Oszillationssatz, der eine Formel für die lokale Änderung der Anzahl aller eigentlichen Eigenwerte von (E) kleiner oder gleich einem gewissen $\lambda \in \mathbb{R}$ in Bezug auf die Anzahl der eigentlichen fokalen Punkte der speziellen konjugierten Basis (X_a, U_a) von (H) in $\mathcal{I}$ angibt. Setzen wir ferner die Positivität eines gewissen quadratischen Funktionals voraus, so können wir die Anzahl aller eigentlichen Eigenwerte von (E) kleiner oder gleich einem gewissen $\lambda \in \mathbb{R}$ explizit berechnen, sofern wir nur die Anzahl der eigentlichen fokalen Punkte der speziellen konjugierten Basis (X_a, U_a) von (H) in $(a, b]$ kennen, und umgekehrt. Diesen globalen Oszillationssatz betrachten wir im Abschnitt 6.2.
In Abschnitt 6.3 zeigen wir auf, dass Eigenwertprobleme mit nicht separierten Randbedingungen auf den Fall separierter Randbedingungen zurückgeführt werden können. Ferner werden wir in diesem Abschnitt eine Formel für die Differenz eigentlicher fokaler Punkte einer beliebigen konjugierten Basis und der Hauptlösung von (H) bei a skizzieren. Daher könnten wir in den Abschnitten 6.1 und 6.2 stets auch eine Formel für die eigentlichen Eigenwerte von (E) in Bezug auf die eigentlichen fokalen Punkte der Hauptlösung von (H) bei a, d.h. der Lösung (X_0, U_0) von (H) mit $X_0(a) = 0, U_0(a) = I$, angeben.
Schließlich möchten wir noch anmerken, dass wir unsere Untersuchungen ohne größere Probleme ähnlich wie in [25] auf den Fall ausdehnen könnten, dass die Matrizen R_1^a und R_1^b in geeigneter Weise von dem Parameter λ abhängen. Dieses ist jedoch rein technisch und würde die Lesbarkeit dieser Arbeit erschweren.

6.1 Der lokale Oszillationssatz

Der lokale Oszillationssatz, Satz 6.1, verallgemeinert [[25], Theorem 7.4.1(iv)] in einem gewissen Sinne, d.h. im streng normalen Fall entsprechen die beiden Sätze einander, betrachtet jedoch speziellere Hamiltonsche Systeme. Dieser Satz ist allerdings nicht auf der nach Proposition 4.4 diskreten Menge $\mathcal{M} := \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \operatorname{def} X_a(b;\lambda) \neq \operatorname{def} X_a(b;\lambda+)\}$ erklärt. Der erweiterte lokale Oszillationssatz, Satz 6.2, behebt dieses Problem analog zu [[25], Theorem 7.2.2], jedoch wurde dieses Prinzip in der Literatur bisher noch nicht im Zusammenhang mit dem lokalen Oszillationssatz erwähnt.

Satz 6.1. (Lokaler Oszillationssatz)
Es gelten $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$ und es sei (X_a, U_a) die spezielle konjugierte Basis von (H) mit den Anfangswerten

$$X_a(a;\lambda) \equiv -R_2^{a\,\mathrm{T}},\; U_a(a;\lambda) \equiv R_1^{a\,\mathrm{T}}.$$

Es sei

$$\Lambda(\lambda) := R_1^b X_a(b;\lambda) + R_2^b U_a(b;\lambda)$$

und es sei $\mathcal{W}$ eine Matrix wie in (W).
Ferner sei

$n_1(\lambda)$ die Anzahl der eigentlichen fokalen Punkte von $X_a(t;\lambda)$ in $(a,b]$ (inklusive Vielfachheiten),

$n_2(\lambda)$ $:= \operatorname{ind}\{R^{\mathrm{T}}(S_1 + (U_a X_a^{\dagger})(b;\lambda))R\} + \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\},$ wobei $R_1^b = R_2^b S_1 + S_2$ mit einer symmetrischen Matrix S_1 und einer Matrix S_2 mit $\ker R_2^b = \operatorname{Im} S_2^{\mathrm{T}},$ sowie $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\operatorname{Im} R = \operatorname{Im} {R_2^b}^{\mathrm{T}} \cap \operatorname{Im} X_a(b;\lambda+),$

$n_3(\lambda)$ die Anzahl der eigentlichen Eigenwerte von (E) $\le \lambda$ (inklusive Vielfachheiten).

Dann existieren

$$\begin{aligned} n_1 &:= \lim_{\lambda\to-\infty} n_1(\lambda), \\ n_2 &:= \lim_{\lambda\to-\infty} n_2(\lambda), \end{aligned}$$

und es gilt

$$n_1(\lambda) + n_2(\lambda) = n_3(\lambda) + n_1 + n_2 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{M},$$

wobei die Menge

$$\mathcal{M} := \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \operatorname{def} X_a(b;\lambda) \ne \operatorname{def} X_a(b;\lambda+)\}$$

diskret ist.

Beweis
Die Menge $\mathcal{M}$ ist gemäß Proposition 4.4 diskret. Gemäß Proposition 4.1 ist $n_1(\lambda)$ endlich für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach Satz 4.1 gilt die Gleichung

$$n_1(\lambda+) - n_1(\lambda-) = \operatorname{def}\{X_a(b;\lambda)\mathcal{V}\}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{V}$ eine Matrix wie in (V) sei. Insbesondere ist $n_1(\cdot) \ge 0$, ganzzahlig und monoton nicht fallend auf $\mathbb{R}$. Daher gibt es ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ so, dass $n_1(\cdot)$ auf $(-\infty, \lambda_1)$ konstant ist, d.h. es gilt:

$$\operatorname{def}\{X_a(b;\lambda)\mathcal{V}\} = 0 \text{ für alle } \lambda < \lambda_1.$$

Damit ist $n_1 = \lim_{\lambda \to -\infty} n_1(\lambda)$ wohldefiniert.
Nach Lemma 5.2, Satz 5.1 und Korollar 5.3 ist $n_2(\lambda)$ wohldefiniert. Gemäß Satz 5.2 existieren $n_2(\lambda+), n_2(\lambda-)$ und es gilt die Beziehung

$$n_2(\lambda+) - n_2(\lambda-) = \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} - \operatorname{def}\{X_a(b;\lambda)\mathcal{V}\}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist $0 \leq n_2(\lambda) \leq 2n$ und damit ist $n_2(\lambda)$ insbesondere ganzzahlig und beschränkt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Ferner ist $n_2(\cdot)$ monoton nicht fallend auf $(-\infty, \lambda_1)$. Daher gibt es ein $\lambda_2 \leq \lambda_1$ so, dass $n_2(\lambda) = n_2$ für alle $\lambda < \lambda_2$ gilt. Insbesondere ist also auch n_2 wohldefiniert.
Nach Satz 5.1 existieren nun schließlich $n_3(\lambda+)$ und $n_3(\lambda-)$ und es gilt die Gleichung

$$n_3(\lambda+) - n_3(\lambda-) = \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Da $n_3(\cdot)$ ganzzahlig und monoton nicht fallend auf $\mathbb{R}$ ist, existiert $\lim_{\lambda \to -\infty} n_3(\lambda)$. Aufgrund der Definition von $n_3(\cdot)$ folgt, dass dieser Grenzwert Null ist.
Wir haben die folgenden Gleichungen gezeigt:

$$\begin{aligned} n_1(\lambda+) \; - \; n_1(\lambda-) &= \operatorname{def}\{X_a(b;\lambda)\mathcal{V}\}, \\ n_2(\lambda+) \; - \; n_2(\lambda-) &= \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} - \operatorname{def}\{X_a(b;\lambda)\mathcal{V}\}, \\ n_3(\lambda+) \; - \; n_3(\lambda-) &= \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\}. \end{aligned}$$

Hieraus schließen wir mit den Sätzen 4.1 und 5.2 sowie mit der Monotonie von $n_3(\cdot)$, dass

$$n_i(\lambda+) = n_i(\lambda) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M} \text{ und für alle } i = 1, 2, 3$$

gilt. Da

$$n_1(\lambda+) + n_2(\lambda+) - n_3(\lambda+)$$

wohldefiniert und konstant für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, folgt die Behauptung. □

Wir formulieren nun eine Erweiterung des lokalen Oszillationssatzes um die diskrete Ausnahmemenge $\mathcal{M} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \operatorname{def} X_a(b;\lambda) \neq \operatorname{def} X_a(b;\lambda+)\}$ mit einzuschließen. Diese bedarf jedoch technischer Hilfsmittel und ist daher aufwändiger zu formulieren. Da jedes Eigenwertproblem der Form (E) nach Bemerkung 5.5 äquivalent ist zu einem Eigenwertproblem, bei dem das zugehörige Hamiltonsche System und die zugehörigen Randbedingungen in kanonischer Form vorliegen, setzen wir dabei die kanonische Form des Hamiltonschen Systems (H) und der Randbedingungen voraus.

Satz 6.2. (Erweiterter lokaler Oszillationssatz)
Es gelten $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$ und es sei (X_a, U_a) die spezielle konjugierte Basis von (H) mit den Anfangswerten

$$X_a(a;\lambda) \equiv -R_2^{a\mathrm{T}},\ U_a(a;\lambda) \equiv R_1^{a\mathrm{T}}.$$

Es sei

$$\mathcal{M} := \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \operatorname{def} X_a(b;\lambda) \neq \operatorname{def} X_a(b;\lambda+)\}$$

und es seien

$$X_a(b;\lambda) = \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ U_a(b;\lambda) = \begin{pmatrix} U_{11}(\lambda) & 0 \\ U_{21}(\lambda) & U_{22} \end{pmatrix}$$

mit gewissen matrixwertigen Funktionen $X_{11}(\lambda), U_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times r}, U_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$, $\lambda \in \mathbb{R}, r := \operatorname{rg} X_a(b;\lambda+)$, wobei $X_{11}(\lambda)$ auf $\mathbb{R}\setminus\mathcal{M}$ regulär sei, und einer regulären Matrix $U_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$.
Ferner seien

$$R_1^b = \begin{pmatrix} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(1)} \\ R_{22}^{(2)}C_1 & R_{22}^{(1)} \end{pmatrix},\ R_2^b = \begin{pmatrix} R_{11}^{(2)} & 0 \\ R_{22}^{(2)}C_2 & R_{22}^{(2)} \end{pmatrix},$$

mit gewissen Matrizen $R_{11}^{(1)}, R_{11}^{(2)} \in \mathbb{R}^{r\times r}, R_{12}^{(1)} \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $R_{22}^{(1)}, R_{22}^{(2)} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$.
Es sei

$$\Lambda(\lambda) := R_1^b X_a(b;\lambda) + R_2^b U_a(b;\lambda),$$

und es seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ Matrizen wie in (V) und (W).
Weiter seien $S, S^*, T, K \in \mathbb{R}^{r\times r}$ mit

$$\begin{aligned}
&{R_{11}^{(2)}}^{\mathrm{T}} = X_{11}(\lambda)S + S^* \text{ mit } X_{11}^{\mathrm{T}}(\lambda)S^* = 0,\\
&\operatorname{Im} T = \ker S^*, \operatorname{Im} K = \ker T \text{ und es sei}\\
&\mathcal{N} = \mathcal{N}(\lambda) := T^{\mathrm{T}}\widetilde{\Lambda}(\lambda)ST - KK^{\mathrm{T}}, \text{ wobei}\\
&\widetilde{\Lambda}(\lambda) := R_{11}^{(1)}X_{11}(\lambda) + R_{11}^{(2)}U_{11}(\lambda).
\end{aligned}$$

Schließlich sei

$n_1(\lambda)$	die Anzahl der eigentlichen fokalen Punkte von $X_a(t;\lambda)$ in $(a,b]$ (inklusive Vielfachheiten),
$n_2(\lambda)$	$:= \operatorname{ind}\mathcal{N} + \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} - \operatorname{def}\{X_a(b;\lambda)\mathcal{V}\}$
$n_3(\lambda)$	die Anzahl der eigentlichen Eigenwerte von (E) $\leq \lambda$ (inklusive Vielfachheiten).

Dann existieren

$$\begin{aligned} n_1 &:= \lim_{\lambda\to-\infty} n_1(\lambda), \\ n_2 &:= \lim_{\lambda\to-\infty} n_2(\lambda), \end{aligned}$$

und es gilt

$$n_1(\lambda) + n_2(\lambda) = n_3(\lambda) + n_1 + n_2 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beweis
Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$ sei

$$\widehat{n}_2(\lambda) := \operatorname{ind} \{R^{\mathrm{T}}(S_1 + (U_a X_a^{\dagger})(b;\lambda))R\} + \operatorname{def} \{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\}.$$

Dabei sei gemäß Korollar 2.1(i) $R_1^b = R_2^b S_1 + S_2$ mit einer symmetrischen Matrix S_1 und einer Matrix S_2 mit $\ker R_2^b = \operatorname{Im} S_2^{\mathrm{T}}$, sowie $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\operatorname{Im} R = \operatorname{Im} R_2^{b\,\mathrm{T}} \cap \operatorname{Im} X_a(b;\lambda+)$. Dann ist

$$\operatorname{Im} R = \operatorname{Im} R_2^{b\,\mathrm{T}} \cap \operatorname{Im} \begin{pmatrix} I_{r\times r} \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} R_{11}^{(2)\,\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

und daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$R = \begin{pmatrix} R_{11}^{(2)\,\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annehmen.
Aufgrund des Lemmas 5.2 und des Satzes 5.1 ist $\operatorname{def}\{\Lambda(\lambda+)\mathcal{W}\} = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$\widehat{n}_2(\lambda+) = \operatorname{ind} \begin{pmatrix} M(\lambda+) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{ind} M(\lambda+)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei

$$M(\lambda) := R_{11}^{(1)} R_{11}^{(2)\,\mathrm{T}} + R_{11}^{(2)} U_{11}(\lambda) X_{11}^{-1}(\lambda) R_{11}^{(2)\,\mathrm{T}}.$$

Es sei

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \widetilde{\mathcal{N}}(\lambda) := T^{\mathrm{T}} \widetilde{\Lambda}(\lambda) S T.$$

Mit $d = d_1 + d_2, d_1 \in \operatorname{Im} T^{\mathrm{T}} = \ker K^{\mathrm{T}},\ d_2 \in \ker T = \operatorname{Im} K$ ist

$$d^{\mathrm{T}} \mathcal{N} d = d_1^{\mathrm{T}} \widetilde{\mathcal{N}} d_1 - d_2^{\mathrm{T}} K K^{\mathrm{T}} d_2,$$

und damit ist

$$\operatorname{ind}\mathcal{N} = \operatorname{ind}\widetilde{\mathcal{N}} + \operatorname{rg}K.$$

Gemäß Satz 4.1 gilt $n_1(\lambda+) = n_1(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und mit Satz 5.1 ist $n_3(\lambda+) = n_3(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach Satz 6.1 existieren n_1 und $\widehat{n}_2 := \lim_{\lambda\to-\infty} \operatorname{ind} M(\lambda+)$. Mit den Lemmata 5.2 und 5.5 folgt, dass $\operatorname{def}\widetilde{\Lambda}(\lambda) - \operatorname{def}\widetilde{\Lambda}(\lambda+) = \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ergibt sich mit Satz 6.1 und dem Korollar 2.2 zum Indexsatz 2.2:

$$\begin{aligned}
n_3(\lambda) + n_1 + \widehat{n}_2 - n_1(\lambda) &= n_3(\lambda+) + n_1 + \widehat{n}_2 - n_1(\lambda+) \\
&= \operatorname{ind} M(\lambda+) \\
&= \operatorname{ind}\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda) + r - \operatorname{rg}T + \operatorname{def}\widetilde{\Lambda}(\lambda) - \operatorname{def}\widetilde{\Lambda}(\lambda+) - \operatorname{def} X_{11}(\lambda) \\
&= \operatorname{ind}\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda) + \operatorname{rg}K + \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} - \operatorname{def}\{X_a(b;\lambda)\mathcal{V}\} \\
&= \operatorname{ind}\mathcal{N}(\lambda) + \operatorname{def}\{\Lambda(\lambda)\mathcal{W}\} - \operatorname{def}\{X_a(b;\lambda)\mathcal{V}\} \\
&= n_2(\lambda).
\end{aligned}$$

Da nach Satz 6.1 $\lim_{\lambda\to-\infty} n_3(\lambda) + n_1 + \widehat{n}_2 - n_1(\lambda) = \widehat{n}_2 = \lim_{\lambda\to-\infty} n_2(\lambda)$ folgt, existiert n_2 und es ist $n_2 = \widehat{n}_2$. Damit folgt die Behauptung des Satzes. Ferner folgt, dass $\widehat{n}_2(\lambda) = n_2(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{M}$ gilt, d.h. die Funktion $n_2(\cdot)$ aus den Sätzen 6.1 und 6.2 sind auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\mathcal{M}$ gleich. □

6.2 Der globale Oszillationssatz

Definition 6.1.

Es gelte $(\mathcal{A})$. R_a, R_b, S_a, S_b seien reelle $n \times n$-Matrizen und S_a, S_b seien symmetrisch. Das quadratische Funktional

$$\mathcal{F}(x) := \int_{\mathcal{I}} \{x^{\mathrm{T}}Cx + u^{\mathrm{T}}Bu\}(t)\ \mathrm{d}t + x^{\mathrm{T}}(b)S_b x(b) - x^{\mathrm{T}}(a)S_a x(a)$$

heißt *positiv definit*, falls $\mathcal{F}(x) > 0$ für alle zulässigen $x \not\equiv 0$ mit $x(a) \in \operatorname{Im} R_a^{\mathrm{T}}$, $x(b) \in \operatorname{Im} R_b^{\mathrm{T}}$ gilt. Dabei heißt x *zulässig*, falls x eine absolut stetige reelle vektorwertige Funktion ist und falls eine vektorwertige „Kontrollfunktion“ $u \in C_s(\mathcal{I})$ so existiert, dass (x, u) die so genannte „Bewegungsgleichung“

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

auf $\mathcal{I}$ erfüllt.

Satz 6.3. ([[28], Theorem 1])
Es gelte $(\mathcal{A})$ und es sei (X_a, U_a) eine spezielle konjugierte Basis von (H), die den Anfangsbedingungen

$$X_a(a) = R_a^{\mathrm{T}},\ \mathrm{rg}(X_a^{\mathrm{T}}(a), U_a^{\mathrm{T}}(a)) = n,\ X_a^{\mathrm{T}}(a)U_a(a) = -R_aS_aR_a^{\mathrm{T}} = U_a^{\mathrm{T}}(a)X_a(a)$$

genügt. Weiter seien R_a, R_b, S_a, S_b reelle $n \times n$-Matrizen und S_a, S_b seien symmetrisch. Dann ist das quadratische Funktional

$$\mathcal{F}(x) := \int_{\mathcal{I}} \{x^{\mathrm{T}}Cx + u^{\mathrm{T}}Bu\}(t)\ \mathrm{d}t + x^{\mathrm{T}}(b)S_bx(b) - x^{\mathrm{T}}(a)S_ax(a)$$

genau dann positiv definit, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i)
$$B(t) \geq 0 \text{ für alle } t \in \mathcal{I}.$$

(ii)
$$\ker X_a(t) \subset \ker X_a(\tau) \text{ für alle } a \leq \tau \leq t \leq b.$$

(iii)
$$d^{\mathrm{T}}(S_b + U_a(b)X_a^{\dagger}(b))d > 0 \text{ für alle } d \in \mathrm{Im}\ R_b^{\mathrm{T}} \cap \mathrm{Im}\ X_a(b) \setminus \{0\}.$$

Satz 6.4. (Erweiterter globaler Oszillationssatz)
Es gelten die Voraussetzungen und die Notation von Satz 6.2. Weiter seien S_1^a, S_1^b symmetrische reelle $n \times n$-Matrizen und $S_2^a, S_2^b \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\begin{aligned} R_1^a &= R_2^aS_1^a + S_2^a, & \ker R_2^a &= \mathrm{Im}\ S_2^{a\mathrm{T}}, \\ R_1^b &= R_2^bS_1^b + S_2^b, & \ker R_2^b &= \mathrm{Im}\ S_2^{b\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Es gebe zusätzlich ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ so, dass das quadratische Funktional

$$(\mathcal{F}) \qquad \mathcal{F}(x;\lambda_0) := \int_{\mathcal{I}} \{x^{\mathrm{T}}(C - \lambda_0C_0)x + u^{\mathrm{T}}Bu\}(t)\ \mathrm{d}t + x^{\mathrm{T}}(b)S_1^bx(b) - x^{\mathrm{T}}(a)S_1^ax(a)$$

positiv definit ist.
Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$n_1(\lambda) + n_2(\lambda) = n_3(\lambda).$$

Beweis

Das Resultat folgt unmittelbar aus dem erweiterten lokalen Oszillationssatz, Satz 6.2, wenn man nur zeigt, dass unter den dort getroffenen Notationen $n_1 = n_2 = 0$ gilt. Wir rechnen leicht nach, dass die spezielle konjugierte Basis $(X_a, U_a)(\cdot; \lambda)$ für das oben genannte quadratische Funktional $(\mathcal{F})$ eine spezielle konjugierte Basis gemäß Satz 6.3 mit $R_a = -R_2^a, R_b = -R_2^b, S_a = S_1^a, S_b = S_1^b$ ist. Da aufgrund der Annahme $(\mathcal{A})$ $C_0(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathcal{I}$ ist, ist $\mathcal{F}(x; \lambda)$ positiv definit für alle $\lambda \leq \lambda_0$. Damit gilt nach Satz 6.3

$$n_1(\lambda) = 0, \; n_2(\lambda) = 0 \text{ für alle } \lambda \leq \lambda_0,$$

und somit insbesondere $n_1 = 0, n_2 = 0$. □

Bemerkung 6.1.

Es genügt nicht, die Nichtnegativität des quadratischen Funktionals $(\mathcal{F})$ vorauszusetzen. Das eindimensionale Beispiel

$$A \equiv 0, \; C \equiv 1, \; C_0 \equiv 0 \text{ auf } \mathcal{I} = [0, 2\pi], B \equiv 1 \text{ auf } [0, \pi], B \equiv 0 \text{ auf } [\pi, 2\pi]$$

besitzt unter Dirichletschen Randbedingungen, d.h. unter $x(0) = x(2\pi) = 0$, etwa die spezielle Lösung

$$x_0(t) = \sin t \text{ auf } [0, \pi], \; x_0(t) \equiv 0 \text{ auf } [\pi, 2\pi].$$

Das zugehörige quadratische Funktional $\mathcal{F}(x) = \int_{\mathcal{I}} x^{\mathrm{T}}(t) C_0(t) x(t) + u^{\mathrm{T}}(t) B(t) u(t) \, \mathrm{d}t$ ist nichtnegativ definit, d.h. es ist $\mathcal{F}(x) \geq 0$ für alle zulässigen x mit $x(0) = x(2\pi) = 0$, jedoch besitzt x_0 einen eigentlichen fokalen Punkt im offenen Intervall $(0, 2\pi)$. Dieses wollten wir jedoch in dem Satz 6.4 ausschließen.

An dieser Stelle möchten wir ein hinreichendes Kriterium zur Positivität des quadratischen Funktionals $(\mathcal{F})$ angeben, welches [27] entnommen wurde. In jener Arbeit zeigen W. Kratz, D. Liebscher und R. Schätzle die Äquivalenz der Positivität eines gewissen quadratischen Funktionals, mit dem etwa $(\mathcal{F})$ abgeschätzt werden kann, mit der nachstehenden Ehrling-Bedingung sowie mit der starken Beobachtbarkeit des Hamiltonschen Systems (H) und mit einer gewissen Rangbedingung sofern das zugrunde liegende Hamiltonsche System (H) nur glatt genug ist.

Proposition 6.1. ([[27], Proposition 1])
Es gelten die Bedingungen ($\mathcal{A}$) und ($\mathcal{R}$) und die folgende *Ehrling-Bedingung*.

> Jedes $x \in W^{1,2}(\mathcal{I})$, d.h. jedes $x \in C_s(\mathcal{I})$ mit $\dot{x} \in L^2(\mathcal{I})$, mit
>
> $\dot{x}(t) - A(t)x(t) \in \operatorname{Im} B(t)$ und $C_0(t)x(t) = 0$ fast überall auf $\mathcal{I}$
>
> erfülle stets $x(t) = 0$ für alle $t \in \mathcal{I}$.

Weiter seien S_1^a, S_1^b symmetrische reelle $n \times n$-Matrizen und $S_2^a, S_2^b \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\begin{aligned} R_1^a &= R_2^a S_1^a + S_2^a, \quad \ker R_2^a &= \operatorname{Im} {S_2^a}^{\mathrm{T}}, \\ R_1^b &= R_2^b S_1^b + S_2^b, \quad \ker R_2^b &= \operatorname{Im} {S_2^b}^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Dann gibt es ein $\gamma > 0$ und ein $\lambda_0 < 0$ so, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x;\lambda) &= \int_{\mathcal{I}} \{x^{\mathrm{T}}(C - \lambda C_0)x + u^{\mathrm{T}}Bu\}(t)\,\mathrm{d}t + x^{\mathrm{T}}(b)S_1^b x(b) - x^{\mathrm{T}}(a)S_1^a x(a) \\ &\geq \int_{\mathcal{I}} \{x^{\mathrm{T}}(C - \lambda C_0)x + u^{\mathrm{T}}Bu\}(t)\,\mathrm{d}t - \gamma\{\|x(a)\|^2 + \|x(b)\|^2\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

für alle zulässigen $x \not\equiv 0$ mit $x(a) \in \operatorname{Im} {R_2^a}^{\mathrm{T}}$, $x(b) \in \operatorname{Im} {R_2^b}^{\mathrm{T}}$ und für alle $\lambda \leq \lambda_0$ gilt.

6.3 Eigenwertprobleme mit nicht separierten Randbedingungen

Unter einem Eigenwertproblem mit nicht separierten Randbedingungen verstehen wir das selbstadjungierte Eigenwertproblem

$$(E_{ns}) \qquad \begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu,\ \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u, \\ &R_1 \begin{pmatrix} -x(a) \\ x(b) \end{pmatrix} + R_2 \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Bei der Betrachtung solcher Eigenwertprobleme nehmen wir ($\mathcal{A}$) an und es seien $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ Matrizen, für die gilt:

$$R_1 R_2^{\mathrm{T}} = R_2 R_1^{\mathrm{T}},\ \operatorname{rg}(R_1, R_2) = 2n.$$

Wir werden zeigen, dass man dieses Problem auf ein Eigenwertproblem mit separierten Randbedingungen zurückführen kann.

Lemma 6.1.
Das Eigenwertproblem mit nicht separierten Randbedingungen (E_{ns}) ist äquivalent mit dem separierten Eigenwertproblem

(E_s)

bestehend aus dem „großen Hamiltonschen System“

$$(\widetilde{H}) \qquad \dot{\widetilde{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \widetilde{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \widetilde{u}, \quad \dot{\widetilde{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C - \lambda C_0 \end{pmatrix} \widetilde{x} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \widetilde{u}$$

und den **separierten** Randbedingungen

$$\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{x}(a) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} \widetilde{u}(a) = 0, \quad R_1 \widetilde{x}(b) + R_2 \widetilde{u}(b) = 0,$$

d.h. λ ist genau dann ein eigentlicher Eigenwert von (E_{ns}), wenn es ein eigentlicher Eigenwert von (E_s) ist, und ihre Vielfachheiten sind gleich.

Beweis
λ ist genau dann ein eigentlicher Eigenwert von (E_{ns}) mit zugehöriger Eigenfunktion (x, u), wenn λ ein eigentlicher Eigenwert von (E_s) mit zugehöriger Eigenfunktion

$$(\widetilde{x}, \widetilde{u})(t) = \left(\begin{pmatrix} -x(a) \\ x(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u(a) \\ u(t) \end{pmatrix} \right), \ t \in \mathcal{I},$$

ist. Offensichtlich überträgt sich hierbei jeweils die Vielfachheit des eigentlichen Eigenwertes λ. $\square$

Aus dem obigen Lemma 6.1 und den vorhergehenden Sätzen lassen sich ohne weiteres Sätze unter Berücksichtigung allgemeiner Randbedingungen führen, die wir hier lediglich bis auf eine diskrete Ausnahmemenge formulieren möchten. Eine Erweiterung dieser Sätze ergibt sich entsprechend wie in den Abschnitten 6.1 und 6.2.

Satz 6.5. (Lokaler Oszillationssatz mit nicht separierten Randbedingungen)
Es gelten $(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{R})$. Es seien (X_0, U_0) die *Hauptlösung* und (X_1, U_1) die *assoziierte Lösung* von (H) bei a, d.h. $(X_0, U_0), (X_1, U_1)$ seien Lösungen von (H) mit den Anfangswerten

$$X_0(a;\lambda) = U_1(a;\lambda) \equiv 0,\; U_0(a;\lambda) = -X_1(a;\lambda) \equiv I.$$

Ferner definieren wir für $t \in \mathcal{I}, \lambda \in \mathbb{R}$

$$X_*(t;\lambda) := \begin{pmatrix} 0 & I \\ X_0(t;\lambda) & X_1(t;\lambda) \end{pmatrix}, U_*(t;\lambda) := \begin{pmatrix} I & 0 \\ U_0(t;\lambda) & U_1(t;\lambda) \end{pmatrix}.$$

Es sei

- $n_1(\lambda)$ die Anzahl der eigentlichen fokalen Punkte von $X_0(t;\lambda)$ in $(a, b]$ (inklusive Vielfachheiten),
- $n_2(\lambda)$ $:= \operatorname{ind}\{R^{\mathrm{T}}(S_1 + (U_* X_*^\dagger)(b;\lambda))R\} + \operatorname{def}\Lambda_*(\lambda) - \operatorname{def}\Lambda_*(\lambda+)$, wobei $R_1 = R_2 S_1 + S_2$ mit einer symmetrischen Matrix S_1 und einer Matrix S_2 mit $\ker R_2 = \operatorname{Im} S_2^{\mathrm{T}}$, sowie $R \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ mit $\operatorname{Im} R = \operatorname{Im} {R_2}^{\mathrm{T}} \cap \operatorname{Im} X_a(b;\lambda+)$, $\Lambda_*(\lambda) := R_1 X_*(b;\lambda) + R_2 U_*(b;\lambda)$,
- $n_3(\lambda)$ die Anzahl der eigentlichen Eigenwerte von (E_{ns}) $\leq \lambda$ (inklusive Vielfachheiten).

Dann existieren

$$\begin{aligned} n_1 &:= \lim_{\lambda\to-\infty} n_1(\lambda), \\ n_2 &:= \lim_{\lambda\to-\infty} n_2(\lambda), \end{aligned}$$

und es gilt die Identität

$$n_1(\lambda) + n_2(\lambda) = n_3(\lambda) + n_1 + n_2 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{M},$$

wobei die Menge

$$\mathcal{M} := \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \operatorname{def} X_0(b;\lambda) \neq \operatorname{def} X_0(b;\lambda+)\}$$

diskret ist.

Beweis
Mit einer Differentiation nach t ist leicht einzusehen, dass (X_*, U_*) tatsächlich eine konjugierte Basis des „großen Hamiltonschen Systems“ $(\widetilde{H})$ mit den Anfangswerten

$$X_*(a;\lambda) \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -I \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \; U_*(a;\lambda) \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

ist. Die Behauptung folgt nun unmittelbar mit dem lokalen Oszillationssatz, Satz 6.1, wenn man noch zeigt, dass die eigentlichen fokalen Punkte von X_* mit den eigentlichen fokalen Punkten von X_0 samt ihren Vielfachheiten übereinstimmen. Dieses ist jedoch aufgrund der Definition von X_* evident. Mit dem selben Argument begründen wir ebenfalls die Gestalt der nach Proposition 4.4 diskreten Ausnahmemenge, d.h. es ist

$$\mathcal{M} = \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \operatorname{def} X_0(b;\lambda) \neq \operatorname{def} X_0(b;\lambda+)\} = \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \operatorname{def} X_*(b;\lambda) \neq \operatorname{def} X_*(b;\lambda+)\}.$$

□

Satz 6.6. (Globaler Oszillationssatz mit nicht separierten Randbedingungen)
Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 6.5. Ferner gebe es ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\mathcal{F}(x;\lambda_0) := \int_{\mathcal{I}} \{x^{\mathrm{T}}(C - \lambda_0 C_0)x + u^{\mathrm{T}} B u\}(t)\,\mathrm{d}t + \begin{pmatrix} -x(a) \\ x(b) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} S_1 \begin{pmatrix} -x(a) \\ x(b) \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.
Dann gilt die Gleichung

$$n_1(\lambda) + n_2(\lambda) = n_3(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$, wobei die Menge

$$\mathcal{M} := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \operatorname{def} X_0(b;\lambda) \neq \operatorname{def} X_0(b;\lambda+)\}$$

diskret ist.

Beweis
Dieses Resultat folgt aus den Sätzen 6.3 und 6.5 ähnlich wie im Abschnitt 6.2. □

Bemerkung 6.2.

(i) Die Betrachtung von Eigenwertproblemen mit nicht separierten Randbedingungen hat insbesondere gezeigt, dass man die Sätze zur Oszillation linearer Hamiltonscher Systeme mittels der Hauptlösung und der assoziierten Lösung des

Hamiltonschen Systems (H) bei a formulieren kann. Dieses Resultat kann man natürlich auch auf Eigenwertprobleme mit separierten Randbedingungen anwenden. Wir hätten also die Sätze aus den Abschnitten 6.1 und 6.2 mit der Hauptlösung und der assoziierten Lösung von (H) bei a statt mit der speziellen konjugierten Basis (X_a, U_a) des Hamiltonschen Systems (H) formulieren können.
Da im Gegensatz zur speziellen konjugierten Basis von (H) die Hauptlösung und die assoziierte Lösung von (H) bei a unabhängig von den Randbedingungen sind, vermögen wir mittels den Oszillationssätzen und den oben geschilderten zwei Betrachtungsmöglichkeiten eines geeigneten Eigenwertproblems eine explizite Formel zur Bestimmung der Differenz der eigentlichen fokalen Punkte einer (beliebigen) konjugierten Basis von (H) und den eigentlichen fokalen Punkten der Hauptlösung desselben Hamiltonschen Systems (H) bei a zu erhalten.

(ii) Eine Formel für die Moore-Penrose Inverse der Matrix X_* kann [[8], Lemma A.6] entnommen werden.

(iii) Es sei erwähnt, dass die vorliegende Theorie das selbstadjungierte Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem gerader Ordnung beinhaltet (siehe hierzu auch Beispiel 1.1), d.h. das selbstadjungierte Problem

$$L(y) = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} (r_\mu y^{(\mu)})^{(\mu)} = \lambda r y,\ n \in \mathbb{N},$$

mit den Randbedingungen

$$M_1 \begin{pmatrix} -x(a) \\ x(b) \end{pmatrix} + M_2 \begin{pmatrix} z(a) \\ z(b) \end{pmatrix} = 0.$$

Dabei sind $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $\operatorname{rg}(M_1, M_2) = 2n$, $x(t) = (y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$ und $z(t) = (y^{(n)}(t), \ldots, y^{(2n-1)}(t))$. Ferner nehmen wir an, dass $r_\mu \in C_s^{\mu}(\mathcal{I})$ für $\mu = 0, \ldots, n$, $r \in C_s(\mathcal{I}), \mathcal{I} = [a, b]$ und $r_n(t) > 0, r(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathcal{I}$ gelten möge. Dann löst eine Funktion y die Gleichung $L(y) = \lambda r y$ auf $\mathcal{I}$ genau dann, wenn $y \in C_s^{2n}(\mathcal{I})$ und das Paar (x, u) mit

$$u(t) = (u_\nu(t)),\ u_\nu(t) = \sum_{\mu=\nu+1}^{n} (-1)^{\mu-\nu-1} (r_\mu y^{(\mu)})^{(\mu-\nu-1)}, \nu = 0, \ldots, n-1,$$

das lineare Hamiltonsche System

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}} u$$

löst, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \; B := \frac{1}{r_n(t)} \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, 1),$$

$$C := \operatorname{diag}(r_0(t), \ldots, r_{n-1}(t)), \; C_0 := r(t) \operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0).$$

Die entsprechenden Randbedingungen, die man an x, u (statt x, z) zu stellen hat, sowie die Selbstadjungiertheit dieser Randbedingungen folgert man wie in [[25], Section 8.4].

Wir möchten an dieser Stelle noch einmal betonen, dass wir in unseren Betrachtungen lediglich die Annahme $C_0 \geq 0$ und damit $r \geq 0$ auf $\mathcal{I}$ voraussetzen, statt $r > 0$ fast überall auf $\mathcal{I}$ wie es in der bestehenden Theorie der Fall ist. Dies ist selbst für spezielle Betrachtungen des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems neu.

Analog kann man auch die Theorie der Kamke Eigenwertprobleme, siehe [[25], Section 8.4], verallgemeinern, wenn man die vorliegende Theorie um den Fall erweitert, dass die Randbedingung R_1 des Eigenwertproblems (E_{ns}) in geeigneter Weise von dem Eigenwertparameter λ abhängen darf.

A Anhang

A.1 Zur Theorie von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt möchten wir kurz die wichtigsten Resultate aus der Theorie von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen wiedergeben, die wir in der vorliegenden Arbeit ständig verwenden. Insbesondere sind wir an der Abhängigkeit eines Systems von Differentialgleichungen

$$(*) \qquad \dot{y}(t,\lambda) = f(t, y(t,\lambda), \lambda)$$

von dem reellen Parameter λ interessiert. Hierbei verstehen wir unter dem Symbol $\dot{} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ stets die Ableitung nach t. Wir werden zunächst Sätze formulieren, die die Stetigkeit von f voraussetzen. Diese Sätze wurden [[48], Kapitel III, §13] entnommen und sind dort in größerer Allgemeinheit dargestellt. Wir setzen dabei elementare Kenntnisse der Analysis voraus.
Schließlich wenden wir die Resultate auf die in dieser Arbeit behandelten Situation an. Da wir in den Annahmen ($\mathcal{A}$), siehe Kapitel 3, lediglich vorausgesetzt haben, dass die im Hamiltonschen System (H) auftretenden matrixwertigen Funktionen stückweise stetig in t sind, greifen wir auf den Begriff der absoluten Stetigkeit zurück und formulieren die obigen Resultate so, dass sie in dem vorliegenden Fall anwendbar sind.

Satz A.1. (Stetige Abhängigkeit der Lösungen)
Es seien $\mathcal{J} = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, und $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Die Funktionen $g : K \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n \times K \to \mathbb{R}^n$ seien stetig auf ihrem Definitionsbereich, und f genüge dort der Lipschitz-Bedingung

$$\text{(L)} \qquad |f(t, y_1, \lambda) - f(t, y_2, \lambda)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t,\lambda) = f(t, y(t,\lambda), \lambda), \quad y(\alpha, \lambda) = g(\lambda)$$

für jedes $\lambda \in K$ genau eine Lösung auf $\mathcal{J}$, und diese ist stetig auf $\mathcal{J} \times K$.

Beweis
Der Raum $B := C(\mathcal{J} \times K)$ wird durch

$$\|y\| := \sup \left\{ |y(t,\lambda)|\, e^{-2L(t-\alpha)} \;\middle|\; (t,\lambda) \in \mathcal{J} \times K \right\}$$

zu einem Banachraum. Für $y \in B$ sei

$$(Ty)(t,\lambda) := g(\lambda) + \int_\alpha^t f(\tau, y(\tau,\lambda), \lambda)\,\mathrm{d}\tau.$$

Offenbar ist $Ty \in B$ für $y \in B$. Aufgrund der Lipschitz-Bedingung (L) ist

$$|(Ty_1 - Ty_2)(t,\lambda)| \leq L \int_\alpha^t |y_1(\tau,\lambda) - y_2(\tau,\lambda)|\,\mathrm{d}\tau.$$

Erweitert man den Integranden mit $1 = e^{2L(\tau-\alpha)}e^{-2L(\tau-\alpha)}$, so sieht man, dass die rechte Seite dieser Ungleichung

$$\begin{aligned} &\leq L\|y_1 - y_2\| \int_\alpha^t e^{2L(\tau-\alpha)}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|\, e^{2L(t-\alpha)} \end{aligned}$$

und damit

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|$$

ist. Aus dem wohlbekannten Banachschen Fixpunktsatz folgt nun die Behauptung. □

Satz A.2. (Differenzierbarkeit nach dem Parameter λ)
Es gelten die Voraussetzungen des obigen Satzes A.1 und die partiellen Ableitungen $g_\lambda := \frac{\partial}{\partial\lambda}g$, $f_\lambda := \frac{\partial}{\partial\lambda}f$, $f_y := \frac{\partial}{\partial y}f$ seien auf K° bzw. $\mathcal{J} \times \mathbb{R}^n \times K^\circ$ stetig. Dann besitzt die Lösung $y(t,\lambda)$ von $(*)$ eine auf $\mathcal{J} \times K^\circ$ stetige partielle Ableitung $y_\lambda(t,\lambda)$.

Beweis
Es sei C^* die Menge aller $u \in C(\mathcal{J} \times K)$, deren partielle Ableitungen u_λ in $\mathcal{J} \times K^\circ$ stetig sind. Die Operatoren T, S seien wie folgt definiert:

$$(Tu)(t,\lambda) := g(\lambda) + \int_\alpha^t f(\tau, u(\tau,\lambda), \lambda)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$S(u,v)(t,\lambda) := g_\lambda(\lambda) + \int_\alpha^t f_\lambda(\tau, u(\tau,\lambda), \lambda) + f_y(\tau, u(\tau,\lambda), \lambda)v(\tau,\lambda)\,\mathrm{d}\tau.$$

Offenbar ist für $u \in C^*$ auch $Tu \in C^*$, und es gilt:

$$(**) \qquad (Tu)_\lambda = S(u, u_\lambda).$$

Nun definieren wir zwei Folgen $(u_k), (v_k)$ nach der Vorschrift

$$u_{k+1} = Tu_k,\ v_{k+1} = S(u_k, v_k)$$

für $k \geq 0$ mit $u_0 \in C^*, v_0 = (u_0)_\lambda$. Dann ist $u_1 = Tu_0 \in C^*$ und wegen $(**)$

$$v_1 = S(u_0, v_0) = S\left(u_0, (u_0)_\lambda\right) = (u_1)_\lambda.$$

Auf dieselbe Weise zeigt man, dass

$$u_k \in C^* \text{ und } v_k = (u_k)_\lambda$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.
Wir wählen eine kompakte Menge $K_1 \subset K^\circ$ und betrachten S und T auf dem Banachraum $B := C(\mathcal{J} \times K_1)$ mit der im Beweis zu Satz A.1 angegebenen Norm

$$\|u\| = \sup\left\{ |u(t,\lambda)|\, e^{-2L(t-\alpha)} \;\middle|\; (t,\lambda) \in \mathcal{J} \times K_1 \right\}.$$

Aus Satz A.1 folgt $\lim_{k\to\infty} u_k = y$, wobei y die (eindeutige) Lösung von $(*)$ mit $y(a,\lambda) = g(\lambda)$ ist. Wir betrachten nun den Operator $R := S(y, \cdot)$. Aufgrund der Lipschitzbedingung (L) ist

$$|f_y(t, y(t,\lambda), \lambda)v| = \lim_{h\to 0} \left| \frac{1}{h} \left\{ f(t, y(t,\lambda) + hv, \lambda) - f(t, y(t,\lambda), \lambda) \right\} \right| \leq L|v|$$

und damit

$$\begin{aligned} |(Rv - Rw)(t,\lambda)| &= \left| \int_\alpha^t f_y(\tau, y(\tau,\lambda), \lambda)(v(\tau,\lambda) - w(\tau,\lambda))\, \mathrm{d}\tau \right| \\ &\leq L \int_\alpha^t |v(\tau,\lambda) - w(\tau,\lambda)|\, \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Folglich gilt wie im Beweis zu Satz A.1 die Lipschitzbedingung

$$\|Rv - Rw\| \leq \frac{1}{2}\, \|v - w\|.$$

Aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes gibt es genau einen Fixpunkt z von R, und dieser ist eine Funktion $z \in C(\mathcal{J} \times K_1)$ mit

$$z = S(y, z).$$

Für die Folge (v_k) gilt

$$v_{k+1} = S(u_k, v_k) = Rv_k + a_k$$

mit

$$\begin{aligned} a_k &= S(u_k, v_k) - S(y, v_k) \\ &= \int_\alpha^t f_\lambda(\tau, u_k(\tau,\lambda),\lambda) - f_\lambda(\tau, y(\tau,\lambda),\lambda) \\ &\quad + (f_y(\tau, u_k(\tau,\lambda),\lambda) - f_y(\tau, y(\tau,\lambda),\lambda))\, v_k(\tau,\lambda)\, \mathrm{d}\tau \\ &= \alpha_k + \beta_k \|v_k\| \end{aligned}$$

mit gewissen Nullfolgen $(\alpha_k), (\beta_k)$.
Es ist

$$\begin{aligned} \|v_{k+1} - z\| &\leq \|Rv_k - Rz\| + \|a_k\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|v_k - z\| + \|a_k\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|v_k - z\| + \alpha_k + \beta_k\|v_k - z\| + \beta_k\|z\| \\ &= (\frac{1}{2} + \beta_k)\|v_k - z\| + \alpha_k + \beta_k\|z\|, \end{aligned}$$

woraus man leicht $\lim_{k\to\infty} v_k = z$ abliest.
Insgesamt gilt also

$$\lim_{k\to\infty} u_k = y \text{ und } \lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} (u_k)_\lambda = z \text{ in } B = C(\mathcal{J} \times K_1),$$

wobei die Konvergenz jeweils gleichmäßig ist.
Dann folgt aber aus einem elementaren Satz der Analysis, dass $y \in \mathcal{J} \times K_1^\circ$ nach λ differenzierbar und $z = y_\lambda$ ist. Da K_1 beliebig war, folgt die Behauptung. □

Definition A.1.
Eine Funktion $f : \mathcal{I} = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *absolut stetig* auf $\mathcal{I}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so existiert, dass

$$\sum_{\mu=1}^{m} \|f(\beta_\mu) - f(\alpha_\mu)\| < \varepsilon$$

für jedes n und jedes disjunkte System von Segmenten $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m)$ aus $\mathcal{I}$ gilt, deren Längen der Ungleichung

$$\sum_{\mu=1}^{m} (\beta_\mu - \alpha_\mu) < \delta$$

genügen.

Satz A.3. ([[42], Satz 7.20])
Ist $f : \mathcal{I} := [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine absolut stetige Funktion, so ist f in fast allen Punkten von $\mathcal{I}$ differenzierbar und es gilt:

$$f(t) - f(a) = \int_a^t \dot{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi, \; t \in \mathcal{I}.$$

Korollar A.1.
Es seien A, B stückweise stetige reelle $n \times n$-matrixwertige Funktionen auf $\mathcal{I} := [a, b]$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = (A(t) + \lambda B(t))y, \quad y(a, \lambda) = y_0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine eindeutige absolut stetige Lösung y auf $\mathcal{I}$. Diese Funktion ist stetig auf $\mathcal{I} \times \mathbb{R}$. Ferner existiert die Ableitung von y nach λ, und diese Funktion ist als Funktion auf $\mathcal{I} \times \mathbb{R}$ stetig.

Beweis
Es seien $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b, \; m \in \mathbb{N}$ so, dass A und B jeweils stetige Funktionen auf den offenen Intervallen $(t_{\mu-1}, t_\mu), \; \mu = 1, \ldots, m$, sind und daher zu stetigen Funktionen auf den kompakten Intervallen $\mathcal{J}_\mu := [t_{\mu-1}, t_\mu], \; \mu = 1, \ldots, m$, ergänzt werden können. Ferner sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Wir bestimmen nun sukzessive Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = (A(t) + \lambda B(t))y, \quad y(t_{\mu-1}, \lambda) = y_{\mu-1}(\lambda)$$

auf $\mathcal{J}_\mu \times K, \mu = 1, \ldots, m$, wobei wir $y_\mu(\lambda) := y(t_\mu, \lambda), \; y_0(\lambda) := y_0$ setzen. Iterativ sehen wir, dass für alle $\mu = 1, \ldots, m$ die Voraussetzungen der Sätze A.1 und A.2 auf den Streifen $\mathcal{J}_\mu \times K$, $\mu = 1, \ldots, m$, erfüllt sind. Setzen wir die so gefundenen Lösungen zu einer Lösung auf $\mathcal{I}$ zusammen, so ergibt sich die Behauptung. $\square$

Bemerkung A.1.
Genauer gilt im vorigen Korollar sogar, dass y analytisch nach λ differenzierbar ist.

A.2 Die Moore-Penrose Inverse

In diesem Abschnitt möchten wir die Definition sowie die Existenz und Eindeutigkeit der Moore-Penrose Inversen angeben, die in den Sätzen zur Oszillation linearer Hamiltonscher Systeme, Kapitel 6, und im Kapitel 5, auftritt.
Da wir in unseren Beweisen stets eine explizite Gestalt der Moore-Penrose Inversen angeben, benötigen wir in dieser Arbeit keine Kenntnis der Eigenschaften von Moore-Penrose Inversen, und möchten daher etwa auf [5] verweisen.

Satz A.1.
Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert eine eindeutige Matrix $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit folgenden Eigenschaften.

(i) $AA^\dagger = (AA^\dagger)^{\mathrm{T}}$.

(ii) $A^\dagger A = (A^\dagger A)^{\mathrm{T}}$.

(iii) $AA^\dagger A = A$.

(iv) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$.

Beweis
Es sei $\{u_1, \dots, u_r\}$ eine Basis von $\operatorname{Im} A$. Setzen wir $A_1 := (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^{m\times r}$, so ist $A_1^{\mathrm{T}} A_1$ regulär. Da jedes Element von $\operatorname{Im} A$ eindeutig als Linearkombination der Vektoren $u_1, \dots, u_r$ darstellbar ist, wird mit $A = A_1A_2$ eine eindeutige Matrix $A_2 \in \mathbb{R}^{r\times n}$ definiert. Da $\mathrm{rg} A_2 \geq \mathrm{rg} A_1A_2 = r$ ist, ist $A_2A_2^{\mathrm{T}}$ regulär. Setzen wir nun

$$A^\dagger := A_2^{\mathrm{T}}(A_2A_2^{\mathrm{T}})^{-1}(A_1^{\mathrm{T}}A_1)^{-1}A_1^{\mathrm{T}} = A_2^{\mathrm{T}}(A_1^{\mathrm{T}}AA_2^{\mathrm{T}})^{-1}A_1^{\mathrm{T}},$$

so rechnen wir für diese Matrix die Eigenschaften (i)-(iv) nach. Dies liefert die Existenz der Matrix $A^\dagger$. Um die Eindeutigkeit nachzuweisen nehmen wir an, sowohl die Matrizen $A^\dagger$ als auch $\widetilde{A}$ erfüllen die Eigenschaften (i)-(iv). Dann folgt

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \widetilde{A}A\widetilde{A} = \widetilde{A}AA^\dagger A\widetilde{A} = (\widetilde{A}A)^{\mathrm{T}}(A^\dagger A)^{\mathrm{T}}\widetilde{A} = A^{\mathrm{T}}\widetilde{A}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}{A^\dagger}^{\mathrm{T}}\widetilde{A} = (A\widetilde{A}A)^{\mathrm{T}}{A^\dagger}^{\mathrm{T}}\widetilde{A} \\
&= A^{\mathrm{T}}{A^\dagger}^{\mathrm{T}}\widetilde{A} = (A^\dagger A)^{\mathrm{T}}\widetilde{A} = A^\dagger A\widetilde{A} = A^\dagger(A\widetilde{A})^{\mathrm{T}} = A^\dagger\widetilde{A}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A^\dagger\widetilde{A}^{\mathrm{T}}(AA^\dagger A)^{\mathrm{T}} \\
&= A^\dagger\widetilde{A}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}{A^\dagger}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A^\dagger(A\widetilde{A})^{\mathrm{T}}(AA^\dagger)^{\mathrm{T}} = A^\dagger A\widetilde{A}AA^\dagger = A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger.
\end{aligned}$$

□

Definition A.1.
Die Matrix $A^{\dagger}$ aus Satz A.1 heißt die *Moore-Penrose Inverse* der Matrix A.

Bemerkung A.1.
Der Beweis zu Satz A.1 liefert ein Verfahren zur Berechnung von Moore-Penrose Inversen, die so genannte „full rank factorization“. Weitere Konstruktionsverfahren findet man etwa in [[5], Chapter 1 Theorem 4, Chapter 3 Übungsaufgabe 22, Chapter 6 Corollary 3, Chapter 7 Theorem 2]. Insbesondere sei in diesem Zusammenhang die Singulärwertzerlegung erwähnt, siehe etwa [[5], Chapter 6 Corollary 1] und [[21], Chapter 7.3 Problem 7].

Literatur

[1] Anderson, D.R.: „Kamenew-type oscillation criteria for linear Hamiltonian systems“, Panam. Math. J. **13**(4): 71-75, 2003.

[2] Arnold, V.I.: „The Sturm theorems and symplectic geometry“, Func. Anal. Appl. **19**(4): 1-10, 1985.

[3] Baur, G.: „Über selbstadjungierte Eigenwertprobleme bei Hamilton-Systemen“, Dissertation, Universität Ulm, Ulm 1986.

[4] Baur, G.: „Variationsrechnung und Kontrolltheorie“, Vorlesungsskript, Ulm 2000.

[5] Ben-Israel, A. und T.N.E. Greville: „Generalized Inverses: Theory and Applications“, Wiley, New York 1974.

[6] Birkhoff, G.D.: „Existence and oscillation theorem for a certain boundary value problem“, Trans. Amer. Math. Soc. **10**: 259-270, 1909.

[7] Birkhoff, G.D.: „On the solutions of ordinary linear homogeneous differential equations of the third order“, Ann. of Math. **12**: 103-127, 1911.

[8] Bohner, M.: „Zur Positivität diskreter quadratischer Funktionale“, Dissertation, Universität Ulm, Ulm 1995.

[9] Bohner, M. und A. Peterson: „Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications“, Birkhäuser, Boston 2001.

[10] Bohner, M. und A. Peterson: „Advances in Dynamic Equations on Time Scales“, Birkhäuser, Boston 2003.

[11] Bohner, M., O. Došlý und W. Kratz: „An oscillation theorem for discrete eigenvalue problems“, Rocky Mountain J. Math. **33**(4): 1-28, 2003.

[12] Bohner, M. und O. Došlý: „Oscillation of symplectic dynamic systems“, ANZIAM J. **46**: 17-32, 2004.

[13] Bohner, M. und R. Hilscher: „An eigenvalue problem for linear Hamiltonian dynamic systems“, Fasc. Math. **35**: 35-49, 2005.

[14] Carathéodory, C.: „Calculus of variations and partial differential equations of the first order, Part I and II“, Holden-Day, San Francisco 1967 (ursprünglich publiziert von Teubner, Leipzig 1935).

[15] Chen, S., F. Meng und Z. Zheng: „Oscillation of linear Hamiltonian systems“, Dyn. Syst. Appl. **8**(3-4): 353-360, 1999.

[16] Coppel, W.A.: „Disconjugacy, Lecture Notes in Mathematics“, vol. 220, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1971.

[17] Došlý, O. und W. Kratz: „Oscillation theorems for symplectic difference systems“, eingereicht.

[18] Erbe, L.H. und P. Yan: „Oscillation criteria for Hamiltonian matrix difference systems“, Proc. Am. Math. Soc. **119**(2): 525-533, 1993.

[19] Hartman, P.: „Ordinary differential equations“, 2nd Edition, Birkhäuser, Boston, Basel 1982.

[20] Hilbert, D.: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“, Chelsea, New York 1953 (ursprünglich publiziert von Teubner, Leipzig 1912).

[21] Horn, R.A. und C.R. Johnson: „Matrix Analysis“, Cambridge University Press, Cambridge 1985.

[22] Kamke, E.: „Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen I bis IV“, Math. Z. **45**: 759-787, 1939, **46**: 231-250 und 251-286, 1940, **48**: 67-100, 1942.

[23] Kratz, W., und A. Peyerimhoff: „An elementary treatment of the theory of Sturmian eigenvalue problems“, Analysis **4**: 73-85, 1984.

[24] Kratz, W., und A. Peyerimhoff: „A treatment of Sturm-Liouville eigenvalue problems via Picone's identity“, Analysis **5**: 97-152, 1985.

[25] Kratz, W.: „Quadratic functionals in variational analysis and control theory“, Akademie Verlag, Berlin 1995.

[26] Kratz, W.: „An index theorem for monotone matrix-valued functions“, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **16**(1): 113-122, 1995.

[27] Kratz, W., D. Liebscher und R. Schätzle: „On the definiteness of quadratic functionals“, Ann. Math. Pura Appl, IV Ser. **176**: 133-143, 1999.

[28] Kratz, W.: „Definiteness of quadratic functionals“, Analysis **23**: 163-183, 2003.

[29] Kratz, W.: „Discrete oscillation“, J. Difference Equ. Appl. **9**(1): 135-147, 2003.

[30] Kumari, I.S. und S. Umamaheswaram: „Oscillation criteria for linear matrix Hamiltonian systems“, J. Differ. Equations **165**: 174-198, 2000.

[31] Liouville, J.: „Sur le développment des fonctions en séries dont divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable“, J. Math. Pures Appl. **1**: 253-265, 1836 und **2**:16-35, 1837.

[32] Meng, F.: „Oscillation results for linear Hamiltonian systems“, Appl. Math. Comput. **131**(2-3): 357-372, 2002.

[33] Meng, F. und Y. Sun: „Oscillation of linear Hamiltonian systems“, Comput. Math. Appl. **44**(10-11): 1467-1477, 2002.

[34] Meng, F. und A.B.Mingarelli: „Oscillation of linear Hamiltonian systems“, Proc. Am. Math. Soc. **131**(3): 897-904, 2003.

[35] Morse, M.: „A generalization of the Sturm separation and comparison theorems in n-space“, Math. Ann. **103**: 52-69, 1930.

[36] Morse, M.: „Calculus of variations in the large“, 5. print, AMS Colloquium Publication 18, Providence (R.I.), 1966 (1. print 1934).

[37] Morse, M.: „Variational Analysis: Critical extremals and Sturmian extensions“, Wiley, New York 1973.

[38] Picone, M.: „Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte“, Math. Z. **28**: 519-555, 1928.

[39] Reid, W.T.: „Ordinary differential equations“, Wiley, New York 1971.

[40] Reid, W.T.: „Sturmian theory for ordinary differential equations“, Springer, New York, Heidelberg, Berlin 1980.

[41] Reynolds, C.N. jr.: „On the zeros of solutions of homogeneous linear differential equations“, Trans. Amer. Math. Soc. **22**: 220-229, 1921.

[42] Rudin, W.: „Reelle und komplexe Analysis“, Oldenbourg Verlag, München, Wien 1999.

[43] Sagan, H.: „Introduction to the calculus of variations“, McGraw-Hill, New York 1969.

[44] Sternberg, R.L.: „Variational theorems for systems of differential equations“, Duke Math. J. **19**: 311-322, 1952.

[45] Sturm, J.C.F.: „Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre“, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **1**: 106-186, 1836.

[46] Sun, Y.G.: „New oscillation criteria for linear matrix Hamiltonian systems“, J. Math. Anal. Appl. **279**(2): 651-658, 2003.

[47] Swanson, C.A.: „Comparison and oscillation theory of linear differential equations“, Academic Press, New York, London 1968.

[48] Walter, W.: „Gewöhnliche Differentialgleichungen“, 7. Auflage, Springer, New York, Heidelberg, Berlin 2000.

[49] Yang, Q. und S.S. Cheng: „On the oscillation of self-adjoint matrix Hamiltonian systems“, Proc. Edinb. Math. Soc. **46**(3): 609-625, 2003.

[50] Yang, Q., R. Mathsen und S. Zhu: „Oscillation theorems for self-adjoint matrix Hamiltonian systems“, J. Differ. Equations **190**(1): 306-329, 2003.

Lebenslauf

Personendaten

Name	Markus Wahrheit
Anschrift	Biberacher Str. 98, 88441 Mittelbiberach
Telefon	0 73 51 / 50 56 87
Geburtsdatum	3. Februar 1978
Geburtsort	Papenburg
Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	deutsch

Schulbildung und Studium

1984 - 1988	Grundschule Papenburg
1988 - 1990	Orientierungsstufe Papenburg
1990 - 1997	Gymnasium Papenburg Abschluss: Abitur Gesamt-Note: Gut (2,0)
1998 - 2003	Universität Ulm Studium der Mathematik und Informatik Abschluss: Diplom-Mathematiker Gesamt-Note: Sehr gut (1,1)
2001 - 2003	Studienförderung durch das Cusanuswerk
2003 -	Promotion an der Universität Ulm zum Thema „Eigenwertprobleme und Oszillation linearer Hamiltonscher Systeme“

Publikationen

2003	„Zur Definitheit quadratischer Funktionale“, Diplomarbeit an der Universität Ulm

Zivildienst

1997 - 1998	Deutsches Rotes Kreuz Papenburg

Sonstige Tätigkeiten

1996 - 1999	Organisation der Computermesse „Evoke“ in Aachen
1999 - 2001	Wiss. Hilfskraft an der Universität Ulm Tutor in den Fächern „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I/II“
2001	sechswöchiges Praktikum bei T-Systems, Ulm
2001	Ferienakademie des Cusanuswerks zum Thema „Globalisierung“
2001 - 2003	Wiss. Hilfskraft an der Universität Ulm Übungsleiter in den Fächern „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I-IV“
2002	Ferienakademie des Cusanuswerks zum Thema „Evolution“
2003 -	Wiss. Mitarbeiter an der Universität Ulm Abteilung Angewandte Analysis Übungsleiter in den Fächern „Analysis II“, „Kombinatorik I/II“, „Lineare Algebra“
2004 -	Mitarbeit am Projekt „Mathematik-Online“ der Universitäten Stuttgart und Ulm
2005	Dozent des Ulmer Universitäts-Trainingscamps

EDV

Programmiersprachen	C/C++, Java, Maple, Modula 2, Oberon, Pascal
Betriebssysteme	MS Windows, Linux, Unix

Sprachkenntnisse

Englisch	fließend in Wort und Schrift
Spanisch	Grundkenntnisse

Hobbys Graphikdesign, Fußball, Tanz

Ulm, den 13. März 2006

Zusammenfassung

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir das Oszillationsverhalten linearer Hamiltonscher Systeme. Dies sind Differentialgleichungssysteme der Form

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u \tag{H}$$

mit $n \times n$-matrixwertigen Funktionen A, B, C, C_0 auf dem nicht-entarteten Intervall $\mathcal{I} = [a, b]$ und einem reellen (Eigenwert-)Parameter λ.
Ferner untersuchen wir zugehörige Eigenwertprobleme mit separierten Randbedingungen der Form

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu, \ \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u \text{ auf } \mathcal{I}, \\ &R_1^a x(a) + R_2^a u(a) = R_1^b x(b) + R_2^b u(b) = 0. \end{aligned} \tag{E}$$

Dabei nehmen wir die folgenden Voraussetzungen an:

($\mathcal{A}$) A, B, C, C_0 sind stückweise stetige, reelle, auf dem Intervall $\mathcal{I}$ erklärte, $n \times n$-matrixwertige Funktionen;
$B(t), C(t)$ und $C_0(t)$ sind symmetrisch für alle $t \in \mathcal{I}$; und es ist
$B(t) \geq 0, C_0(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathcal{I}$

und

($\mathcal{R}$) $R_1^a, R_2^a, R_1^b, R_2^b \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit
$\mathrm{rg}(R_1^a, R_2^a) = \mathrm{rg}(R_1^b, R_2^b) = n, \ R_1^a {R_2^a}^{\mathrm{T}} = R_2^a {R_1^a}^{\mathrm{T}}, R_1^b {R_2^b}^{\mathrm{T}} = R_2^b {R_1^b}^{\mathrm{T}}.$

Das zentrale neue Resultat dieser Arbeit ist, dass wir keine weiteren Voraussetzungen wie etwa die Steuerbarkeit oder die starke Beobachtbarkeit an das Hamiltonsche System (H) stellen. Mit dieser Verallgemeinerung können wir etwa Eigenwertprobleme mit nicht separierten Randbedingungen, d.h. mit

$$R_1 \begin{pmatrix} -x(a) \\ x(b) \end{pmatrix} + R_2 \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} = 0$$

mit Matrizen $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, für die $R_1 R_2^{\mathrm{T}}$ symmetrisch ist und $\mathrm{rg}(R_1, R_2) = 2n$ gilt, auf ein Eigenwertproblem mit separierten Randbedingungen zurückführen.

Für die vorliegenden Betrachtungen ist es unerlässlich, dass die Eigenwerte des Eigenwertproblems (E) isoliert sind. Da dies ohne weitere Voraussetzungen nicht gewährleistet ist, fassen wir den Begriff eines Eigenwertes von (E) enger. Wir nennen $\lambda \in \mathbb{R}$ einen *eigentlichen Eigenwert von* (E), falls es eine Lösung (x, u) von (H) mit $C_0 x \not\equiv 0$ gibt und $\dim\{C_0(t)x(t) \mid (x, u)$ ist eine Lösung von (H), die die Randbedingungen erfüllt$\}$ die Vielfachheit von λ. Wir zeigen, dass die eigentlichen Eigenwerte von (E) isoliert sind. Diese neue Auffassung eines Eigenwertes vermag etwa das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem gerader Ordnung unter allgemeineren Voraussetzungen zu behandeln, als es in der bestehenden Literatur der Fall ist. Ferner formulieren wir zwei charakteristische Gleichungen für die eigentlichen Eigenwerte von (E).

Neben der Isoliertheit der eigentlichen Eigenwerte sind die Sätze zur Oszillation linearer Hamiltonscher Systeme das Hauptresultat dieser Arbeit. Der (erweiterte) lokale Oszillationssatz besagt, dass die Anzahl der eigentlichen Eigenwerte von (E) kleiner oder gleich einem gewissen $\lambda \in \mathbb{R}$ (inkl. Vielfachheiten) bis auf eine Konstante gleich der Anzahl eigentlichen fokalen Punkte einer speziellen $n \times n$-matrixwertigen Lösung (X_a, U_a) von (H) (inkl. Vielfachheiten) in $(a, b]$, plus der Anzahl der negativen Eigenwerte einer symmetrischen reellen Matrix und plus der Differenz von den Defekten zweier weiterer Matrizen. Dabei heißt ein Punkt $t_0 \in (a, b]$ eigentlicher fokaler Punkt von X_a, falls $\ker X_a(t_0) \supsetneqq \ker X_a(t_0-)$ gilt. Die Zahl $\operatorname{def} X_a(t_0) - \operatorname{def} X_a(t_0-)$ beschreibt die Vielfachheit des eigentlichen fokalen Punktes von X_a. Dabei sind die eigentlichen fokalen Punkte von X_a isoliert.

Setzen wir ferner die Positivität eines gewissen quadratischen Funktionals voraus, so ist die Konstante, die im lokalen Oszillationssatz auftritt, gleich Null. Dieses ist die Aussage des (erweiterten) globalen Oszillationssatzes.

Abstract

The present dissertation deals with the oscillation behavior of linear Hamiltonian systems. These are systems of differential equations of the form

$$\text{(H)} \qquad \dot{x} = Ax + Bu,\ \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u$$

with $n \times n$-matrixvalued functions A, B, C, C_0 on the non-degenerated interval $\mathcal{I} = [a, b]$ with a real (eigenvalue)parameter λ.
Moreover, we consider related eigenvalue problems with separated boundary conditions of the form

$$\text{(E)} \qquad \begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu,\ \dot{u} = (C - \lambda C_0)x - A^{\mathrm{T}}u \text{ on } \mathcal{I}, \\ &R_1^a x(a) + R_2^a u(a) = R_1^b x(b) + R_2^b u(b) = 0. \end{aligned}$$

We assume that

$$(\mathcal{A}) \qquad \begin{array}{l} A, B, C, C_0 \text{ are piecewise continuous, real } n \times n\text{-matrix valued functions} \\ \text{defined on the interval } \mathcal{I}; \\ B(t), C(t) \text{ and } C_0(t) \text{ are symmetric for all } t \in \mathcal{I}; \text{ and} \\ B(t) \geq 0, C_0(t) \geq 0 \text{ for all } t \in \mathcal{I} \end{array}$$

and

$$(\mathcal{R}) \qquad \begin{array}{l} R_1^a, R_2^a, R_1^b, R_2^b \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ with} \\ \operatorname{rg}(R_1^a, R_2^a) = \operatorname{rg}(R_1^b, R_2^b) = n,\ R_1^a {R_2^a}^{\mathrm{T}} = R_2^a {R_1^a}^{\mathrm{T}}, R_1^b {R_2^b}^{\mathrm{T}} = R_2^b {R_1^b}^{\mathrm{T}}. \end{array}$$

The main new result of this dissertation is that we don't need any further assumptions as e.g. the controllability or the strong observability of the Hamiltonian system (H). With this generalization we can reduce eigenvalue problems with general (non-separated) boundary conditions, i.e.

$$R_1 \begin{pmatrix} -x(a) \\ x(b) \end{pmatrix} + R_2 \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} = 0$$

with matrices $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ with symmetric $R_1 R_2^{\mathrm{T}}$ and $\operatorname{rg}(R_1, R_2) = 2n$, to an eigenvalue problem with separated boundary conditions as in (E).
For the present observations it is vital that the eigenvalues of the eigenvalue problem (E) are isolated. As this does not hold without further assumptions on (E) in general, we need a closer definition of an eigenvalue of the eigenvalue problem (E). We call $\lambda \in \mathbb{R}$

a proper eigenvalue of (E), if there is a solution (x, u) of (H) with $C_0 x \not\equiv 0$ and we call $\dim\{C_0(t)x(t) \mid (x, u)$ is a solution of (H) which fulfills the boundary conditions$\}$ the multiplicity of λ. We show that the proper eigenvalues of (E) are isolated. With this new understanding of an eigenvalue we are in a position which allows us to treat more general Sturm-Liouville eigenvalue problems as in existing literature. Moreover, we formulate two characteristic equations for proper eigenvalues of (E).

Besides the isolation of the proper eigenvalues the theorems on the oscillation of linear Hamiltonian systems are the main results of this paper. The (extended) local oscillation theorem states that the number of proper eigenvalues of (E) smaller or equal than a certain λ (incl. multiplicities) are up to constant equal to the number of proper focal points of the special $n \times n$-matrix valued solution (X_a, U_a) of (H) (incl. multiplicities) in $(a, b]$ plus the number of negative eigenvalues of a symmetric matrix plus the difference of the defects of two certain matrices. A proper focal point of X_a is a point $t_0 \in (a, b]$ with $\ker X_a(t_0) \supsetneqq \ker X_a(t_0-)$. The value $\operatorname{def} X_a(t_0) - \operatorname{def} X_a(t_0-)$ is called the multiplicity of the focal point of X_a. The proper focal points of X_a are isolated.

If we additionally assume the positivity of a certain quadratic functional we can show that the constant occurring in the local oscillation theorem ist equal to zero. This is the statement of the (extended) global oscillation theorem.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe. Es wurden keine außer den angegebenen Quellen verwendet und die aus diesen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Ulm, den 13. März 2006 Markus Wahrheit