



ulm university universität
uulm

Polarisierungen der Jacobi-Varietäten von Mumford-Kurven

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat. der Fakultät für
Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm

vorgelegt von
Alexander Morozov

Ulm 2014

Erstgutachter:
Prof. Dr. Werner Lütkebohmert

Zweitgutachter:
Prof. Dr. Stefan Wewers

Amtierender Dekan:
Prof. Dr. Dieter Rautenbach

Tag der Promotion: 15. July 2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Grundlagen aus der rigiden und formellen Geometrie	15
1.1 Affinoide Räume	15
1.2 Rigid-analytische Räume	19
1.3 Formelle Schemata	23
2 Mumford-Kurven	27
2.1 Schottky-Gruppen und Mumford-Kurven	27
2.2 Skelette	33
2.3 Meromorphe Funktionen	38
2.4 Einheitensatz	41
2.5 Trivialisierungssatz	44
3 Geradenbündel auf Mumford-Kurven	49
3.1 Linearisierungen auf Geradenbündeln	49
3.2 p -adische Tori und ihre Dualen	53
4 Drinfelds Polarisierung	63
4.1 p -adische automorphe Formen	63
4.2 Drinfelds Konstruktion der Polarisierung	69
4.3 Jacobische einer Mumford-Kurve	72
5 Beziehung zwischen Drinfelds und Theta-Polarisierung	81
5.1 Theta-Polarisierung	81
5.2 Riemannscher Verschwindungssatz	83

Einleitung

Eine g -dimensionale komplexe kompakte Lie-Gruppe G , $g \geq 1$, ist isomorph zu einem Torus \mathbb{C}^g/Λ , wobei $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ ein Gitter von Rang $2g$ ist. G ist genau dann algebraisch, d.h. eine abelsche Varietät, wenn es eine prinzipale Polarisierung von G gibt. Eine prinzipale Polarisierung H von G ist eine positiv-definite hermitesche Form auf \mathbb{C}^g , derart dass der Imaginärteil $\Im(H)$ von H Werte in \mathbb{Z} auf Λ annimmt.

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g . Dann hat die Jacobische $\text{Jac}(X)$ von X eine Darstellung

$$\text{Jac}(X) = \Omega_{X/\mathbb{C}}^1(X)' / H_1(X, \mathbb{Z}),$$

wobei $\Omega_{X/\mathbb{C}}^1(X)'$ die Duale des Vektorraums der holomorphen 1-Formen auf X ist und die Homologie-Gruppe $H_1(X, \mathbb{Z})$ durch die Abbildung

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Omega_{X/\mathbb{C}}^1(X)'; \quad [\alpha] \longmapsto \left[\Omega_{X/\mathbb{C}}^1(X) \ni \omega \longmapsto \int_{\alpha} \omega \right]$$

in $\Omega_{X/\mathbb{C}}^1(X)'$ eingebettet wird. Sei $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ eine Basis des Vektorraums $\Omega_{X/\mathbb{C}}^1(X)$ der holomorphen 1-Formen auf X und $([\alpha_1], \dots, [\alpha_{2g}])$ eine Basis von $H_1(X, \mathbb{Z})$. Das Gitter von $\text{Jac}(X)$ ist durch die Riemannsche Periodenmatrix

$$A := \left(\int_{\alpha_j} \omega_i \right)_{i=1, \dots, g, j=1, \dots, 2g}$$

bezüglich $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ und $([\alpha_1], \dots, [\alpha_{2g}])$ gegeben. Das Cup-Produkt

$$Q : H_1(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

auf $H_1(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(X, \mathbb{Z})$ liefert eine prinzipale Polarisierung

$$\lambda : \Lambda := H_1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda' := \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z}) = H^1(X, \mathbb{Z})$$

von $\text{Jac}(X)$, d.h. einen Isomorphismus von Λ in seine Duale Λ' , und λ ist schließlich äquivalent zu einem Isomorphismus von $\text{Jac}(X)$ in die Duale von $\text{Jac}(X)$.

Im nicht-archimedischen Fall sieht die Situation wesentlich komplizierter aus. In diesem Fall bildet die Menge der g -dimensionalen Jacobischen über einem nicht-archimedischen Körper K , die eine Uniformisierung durch den affinen Torus $\mathbb{G}_{m,K}^g$

erlauben, für $g > 1$ nur einen kleinen Teil des Torelli-Orts des Modulraums der prinzipal polarisierten g -dimensionalen abelschen Varietäten über K . Der tiefe Grund für diesen Unterschied zum komplexen Fall sind die Phänomene der *guten* und *schlechten Reduktion*, die im allgemeinen gemischt vorkommen und keine Analoga im komplexen haben.

Sei X von nun an stets eine glatte geometrisch zusammenhängende eigentliche Kurve vom Geschlecht g über K , \tilde{X} eine semistabile Reduktion von X und $J = \text{Jac}(X)$ die Jacobische von X . Dann passt die universelle Überlagerung \hat{J} von J in eine sogenannte *Raynaud-Erweiterung*

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}^t \longrightarrow \hat{J} \longrightarrow B \longrightarrow 1,$$

wobei $t := \text{rk } H_1(X, \mathbb{Z})$ und B eine abelsche Varietät mit guter Reduktion \tilde{B} ist. Dabei ist \tilde{B} die Jacobische der Normalisierung \tilde{X}' von \tilde{X} , während der $\mathbb{G}_{m,K}^t$ -Teil durch bestimmte Singularitäten von \tilde{X} verursacht wird.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns ausschließlich mit dem *total degenerierten* Fall, in dem $B = 1$ und $t = g$ gilt und der daher zum komplexen Fall korrespondiert. Es stellt sich heraus, dass dieser Fall genau dann auftritt, wenn X eine Mumford-Kurve ist. Erstaunlicherweise sind Mumford-Kurven ebenfalls nicht-archimedische Analoga der kompakten Riemannschen Flächen in dem Sinne, dass sie eine Uniformisierung durch eine offene dichte Teilmenge von \mathbb{P}_K^1 erlauben, und natürliche Verallgemeinerungen von Tates elliptischer Kurve für beliebiges Geschlecht. Eine Mumford-Kurve vom Geschlecht g über K ist nämlich die *Algebraisierung* eines rigid-analytischen Quotienten $\Gamma \backslash \Omega$, wobei Γ eine Schottky-Gruppe von Rang g und $\Omega = \Omega_\Gamma := \mathbb{P}_K^1 \setminus L_\Gamma$ die Menge der gewöhnlichen Punkte von Γ ist, wobei L_Γ die Menge der Limit-Punkte von Γ ist (vgl. 2.1). Für $g = 1$ ist $\Gamma \backslash \Omega = \mathbb{G}_{m,K}/q^{\mathbb{Z}}$ mit einem geeigneten $q \in K^\times$, $|q| < 1$, gerade Tates elliptische Kurve. Von jetzt an sei X stets eine Mumford-Kurve vom Geschlecht g über K .

Sei $H := \Gamma_{\text{ab}}$ die Abelisierung von Γ . Es gibt eine kanonische Abbildung

$$h' : H \xrightarrow{\sim} H_1(S_{\tilde{X}}, \mathbb{Z}) = H_1(X, \mathbb{Z}); \quad \bar{\alpha} \mapsto \bar{c}_\alpha$$

von H nach $H_1(X, \mathbb{Z})$, wobei $S_{\tilde{X}}$ der Graph von \tilde{X} und \bar{c}_α der Teil der Achse von α in S_Ω ist, der im Fundamentalbereich von $\alpha^{\mathbb{Z}}$ liegt (vgl. 2.2.10). Wir definieren den g -dimensionalen affinen Torus

$$T := \text{Spec } K[H_1(X, \mathbb{Z})],$$

dessen abgeschlossene Punkte Gruppenhomomorphismen $H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{G}_{m,K}$ sind. Die Homologie-Gruppe $H_1(X, \mathbb{Z})$ wird durch die kanonische Auswertungsabbildung

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} M' := \text{Hom}(T, \mathbb{G}_{m,K}); \quad c \mapsto [T \ni t \mapsto t(c)]$$

mit der Charaktergruppe M' von T identifiziert. Dies liefert einen Gruppenhomomorphismus

$$h' : H \xrightarrow{\sim} M'; \quad \bar{\alpha} \mapsto [T \ni t \mapsto t(\bar{c}_\alpha)].$$

Für einen endlichen Divisor $d := \sum_{i=1}^r n_i z_i$ vom Grad 0 auf Ω definieren wir die meromorphe Funktion

$$\theta(d; z) := \prod_{i=1}^r (z - z_i)^{n_i}$$

auf Ω , die ihn löst. Sei $z_1 \in \Omega \setminus \text{supp} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d \right)$ ein abgeschlossener Punkt. Dann löst die kanonische Theta-Funktion

$$\Theta(d; z) := \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(d; \gamma z)}{\theta(d; \gamma z_1)}$$

auf Ω den Γ -invarianten Divisor $D := \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d$ auf Ω und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Theta(d; \alpha z) = c(d)(\alpha) \cdot \Theta(d; z)$$

für $\alpha \in \Gamma$, wobei

$$c : \mathcal{D}_0^f \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad (d, \alpha) \longmapsto c(d)(\alpha) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(d; \gamma z_1)}{\theta(d; \gamma \alpha^{-1} z_1)}$$

die *Automorphie-Faktor-Abbildung* ist, die nicht von der Wahl von z_1 abhängt und bilinear ist, und \mathcal{D}_0^f die Gruppe der endlichen Divisoren vom Grad 0 auf Ω bezeichnet. $c(d) \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{G}_{m,K})$ heißt *Automorphie-Faktor von $\Theta(d)$* . Die Automorphie-Faktor-Abbildung c induziert einen weiteren von der Wahl eines abgeschlossenen Punkts $z_0 \in \Omega$ unabhängigen Gruppenhomomorphismus

$$h : H \longrightarrow T = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{G}_{m,K}); \quad \bar{\alpha} \longmapsto c(\alpha z_0 - z_0)$$

Aufgrund der positiven Definitheit von *Drinfelds Paarung*

$$\langle -, - \rangle : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad (\alpha, \beta) \longmapsto \langle \alpha, \beta \rangle := c(\beta z_0 - z_0)(\alpha)$$

(vgl. 4.2.2) ist h injektiv und

$$M := h(H) \subset T$$

daher ein Gitter von vollem Rang g . Dies versetzt uns in die Lage, *Drinfelds prinzipale Polarisierung* in der Form

$$\lambda_D := h' \circ h^{-1} : M \xrightarrow{\sim} M'; \quad c(\beta z_0 - z_0) \longmapsto [\Gamma \ni \alpha \longmapsto \langle \alpha, \beta \rangle]$$

zu definieren, wobei β alle Elemente von Γ durchläuft. Wir führen den dualen affinen Torus

$$T' := \text{Spec } K[M]$$

ein. Seine abgeschlossenen Punkte sind Gruppenhomomorphismen $t' : M \rightarrow \mathbb{G}_{m,K}$. Insbesondere gibt es eine Paarung

$$\langle -, - \rangle : T \times M' \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad (t, m') \longmapsto \langle t, m' \rangle := m'(t).$$

Drinfelds Paarung induziert eine nicht-ausgeartete Paarung

$$\langle -, - \rangle : M \times M' \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad (m, m') \longmapsto m'(m),$$

wobei für $m = h(\bar{\beta})$ und $m' = h'(\bar{\alpha})$ mit $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in H$ $m'(m) = \langle \alpha, \beta \rangle$ gilt. Mittels der kanonischen Abbildung

$$M' \longrightarrow T'; \quad m' \longmapsto m'|_M$$

können wir M' als eine Untergruppe von T' auffassen. Wir definieren die "rigid-analytische" Jacobische

$$J_{\text{an}} := T/M$$

von X , die sich als die *Analytifizierung* der "algebraischen" Jacobischen J von X herausstellt, und ihre Duale

$$J' := T'/M'.$$

Sei $x_0 \in X$ das Bild von z_0 in X . Die Albanese-Abbildung

$$j : X \times \{x_0\} \longrightarrow J; \quad x \longmapsto [x - x_0] := [\mathcal{O}_X(x - x_0)]$$

von $X \times \{x_0\}$ nach J hebt sich zu der kanonischen Abbildung

$$\widehat{j} : \Omega \times \{z_0\} \longrightarrow T; \quad z \longmapsto c(z - z_0)$$

der universellen Überlagerungen hoch, wobei $c(z - z_0) \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{G}_{m,K}) = T$ der Automorphie-Faktor der kanonischen Theta-Funktion $\Theta(z - z_0)$ zum Divisor $d = z - z_0$ auf Ω ist. Eine prinzipale Polarisierung von J ist ein Isomorphismus

$$\varphi : J \xrightarrow{\sim} J'$$

von J in seine Duale J' . Eine prinzipale Polarisierung von J ist gleichbedeutend mit einer prinzipalen Polarisierung von M , also einem Isomorphismus

$$\lambda : M \xrightarrow{\sim} M'$$

von M in seine Duale M' , mit Zusatzbedingungen (vgl. 3.2.10). Neben Drinfelds prinzipaler Polarisierung λ_D gibt es eine kanonische prinzipale Polarisierung von M , die wie folgt gegeben ist: Bezeichne mit \widehat{W}_n , $1 \leq n \leq g$, das Bild von $\Omega^{(n)} \times \{z_0\}$ unter der kanonischen Abbildung

$$\Omega^{(n)} \times \{z_0\} \longrightarrow T; \quad d = \sum_{i=1}^n z_i \longmapsto c(d - nz_0)$$

des n -fachen symmetrischen Produkts $\Omega^{(n)}$ von Ω nach T und die *prinzipale Theta-Polarisierung von T* ist der Isomorphismus

$$\varphi_{\widehat{\Theta}} : T \xrightarrow{\sim} T'; \quad t \longmapsto \left[\tau_t^* \mathcal{O}_T(\widehat{W}_{g-1}) \otimes \mathcal{O}_T(\widehat{W}_{g-1})^{-1} \right],$$

wobei $\tau_t : T \rightarrow T$ die Translation um t ist. \widehat{W}_{g-1} heißt *Theta-Divisor auf T* . $\varphi_{\widehat{\Theta}}$ induziert die *Theta-Polarisierung*

$$\lambda_{\widehat{\Theta}} : M \xrightarrow{\sim} M'$$

von M (wir verwenden hier der Einfachheit halber eine etwas andere Notation als in Kapitel 5). Ein Hauptergebnis dieser Arbeit besagt, dass

$$\lambda_{\widehat{\Theta}} = \lambda_D$$

(vgl. 5.2.16). Man kann diese Gleichheit als eine Variante des Riemannsches Verschwindungssatzes auffassen: Zu Drinfelds prinzipaler Polarisierung λ_D kann man eine nicht-kanonische Theta-Funktion

$$\vartheta(t) := \sum_{m \in M} b(m, m) \cdot \langle t, \lambda_D(m) \rangle, \quad t \in T$$

assoziiieren, wobei $b(m, m) := \sqrt{\langle m, \lambda_D(m) \rangle}$ für $m \in M$. Bezeichne mit $\widehat{\Theta}$ den Nullstellendivisor von ϑ . Man zeigt, dass $\widehat{\Theta}$ invariant unter der Wirkung von Γ ist. Somit ist das Bild Θ von $\widehat{\Theta}$ in J ein effektiver Divisor auf J . Dann lässt sich der Riemannsches Verschwindungssatz folgendermaßen formulieren:

Riemannsches Verschwindungssatz (vgl. 5.2.12) *Sei \widehat{W}_{g-1} das Bild von $\Omega^{(g-1)} \times \{z_0\}$ unter*

$$\widehat{\iota}^{(g-1)} : \Omega^{(g-1)} \times \{z_0\} \longrightarrow T; \quad d = \sum_{i=1}^{g-1} z_i \longmapsto c(d - (g-1)z_0).$$

Dann gilt $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}} = \widehat{W}_{g-1}$, wobei $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}} := \text{div}(\vartheta_{\widehat{\kappa}})$ und $\vartheta_{\widehat{\kappa}}(t) := \vartheta(\widehat{\kappa}^{-1} \cdot t)$ für ein geeignetes modulo M eindeutig bestimmtes $\widehat{\kappa} \in T$.

In Kapitel 1 wiederholen wir die für uns relevanten Tatsachen der klassischen rigiden und formellen Geometrie. Während die Konstruktionen der rigiden Geometrie durch die komplexe Analysis inspiriert sind, fassen wir die formelle Geometrie in gewissem Sinne als die "Hochhebung" der klassischen algebraischen Geometrie über dem Restklassenkörper eines nicht-archimedischen Körpers auf das Niveau seines Ganzzahlrings auf. Ein nicht-archimedisches Analogon von Serres GAGA-Funktor macht das Verhältnis zwischen der klassischen algebraischen und der rigiden Geometrie über einem nicht-archimedischen Körper deutlich. Der Vorteil der rigiden Geometrie gegenüber der klassischen algebraischen Geometrie liegt darin, dass die

Grothendieck-Topologie feiner als die Zariski-Topologie ist und es daher auf einem rigid-analytischen Raum im allgemeinen "mehr" meromorphe Funktionen als auf dem zugehörigen Schema gibt. Ein zentrales Resultat von Raynaud erlaubt es, quasi-kompakte quasi-separierte rigid-analytische Räume als generische Fasern gewisser formeller Schemata aufzufassen, die bis auf zulässige formelle Aufblasungen, d.h. bestimmte Manipulationen der speziellen Faser, eindeutig bestimmt sind.

In Kapitel 2 führen wir zunächst die Theorie der Mumford-Kurven über einem nicht-archimedischen Körper K ein, die parallel zur Theorie der kompakten Riemannschen Flächen aufgebaut wird. Wir geben zunächst einen "naiven" Fundamentalbereich für die Wirkung einer Schottky-Gruppe Γ von Rang g , $g \geq 1$, auf der Menge $\Omega = \Omega_\Gamma := \mathbb{P}_K^1 \setminus L_\Gamma$ ihrer gewöhnlichen Punkte an, wobei L_Γ die Menge ihrer Limit-Punkte ist (vgl. Abschnitt 2.1), der aus $2g$ paarweise disjunkten offenen Kreisscheiben besteht, je zwei von denen zu einem freien Erzeuger von Γ assoziiert sind, derart dass dieser Erzeuger das Komplement des Abschlusses der einen Kreisscheibe in \mathbb{P}_K^1 auf die andere abbildet, und verfeinern ihn durch geschickte Variierung der Radien der Kreisscheiben, damit er hinreichend "schöne" geometrische Eigenschaften hat. Wir definieren die zu Γ assoziierte Mumford-Kurve $X = X_\Gamma$ als die Algebraisierung des rigid-analytischen Quotienten $\Gamma \backslash \Omega$, der topologisch eine Verklebung der Kreisscheiben im verfeinerten Fundamentalbereich für die Wirkung von Γ auf Ω ist. Der Satz von der semistabilen Reduktion impliziert, dass eine p -adische Kurve genau dann eine Mumford-Kurve ist, wenn sie (eventuell nach einer endlichen Erweiterung des Grundkörpers K) *zerfallende rationale Reduktion* hat. Wir führen Skelette, die kombinatorische Strukturen zur Beschreibung der semistabilen Reduktion einer p -adischen Kurve sind, im Spezialfall lokal planarer rigid-analytischer Räume ein und konstruieren eine positiv-definite symmetrische Bilinearform auf dem kartesischen Produkt der ersten Homologie-Gruppe des Graphen einer Mumford-Kurve mit Koeffizienten in \mathbb{Z} mit sich selbst, die ein Prototyp von Drinfelds prinzipialer Polarisierung ist. In Abschnitt 2.3 zeigen wir, wie sich die Norm einer meromorphen Funktion auf einer p -adischen Kurve beim "Übergang" über Doppelpunkte zwischen "benachbarten" irreduziblen Komponenten in der Reduktion ändert. Dies benötigen wir, um die Einheiten auf einem affinoiden Teilbereich von \mathbb{P}_K^1 explizit zu beschreiben. Dies wiederum benötigen wir, um zu zeigen, dass jedes Geradenbündel auf Ω trivial ist, d.h. von einem globalen Schnitt erzeugt wird. Ist der Grad eines solchen Geradenbündels gleich 0, so kann man seinen trivialisierenden Schnitt (natürlich nur bis auf eine multiplikative Konstante) sogar explizit angeben. Unter anderem ist dies der Gegenstand von Abschnitt 4.1

In Kapitel 3 untersuchen wir das Verhältnis zwischen Γ -linearisierten, d.h. mit einer bestimmten Γ -Wirkung ausgestatteten Geradenbündeln auf Ω und Geradenbündeln auf der zugehörigen Mumford-Kurve X bzw. zwischen M -linearisierten Geradenbündeln auf dem g -dimensionalen affinen Torus T und Geradenbündeln auf dem p -adischen Torus $A := T/M$. Es stellt sich heraus, dass das Datum eines Geradenbündels auf X äquivalent zu dem eines Geradenbündels auf Ω mit einer Γ -Linearisierung darauf bzw. dass das Datum eines Geradenbündels auf A äquivalent zu dem des trivialen Geradenbündels auf T mit einer M -Linearisierung darauf

ist. Desweiteren geben wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, wann ein p -adischer Torus T/M algebraisch, d.h. eine abelsche Varietät ist. In Kapitel 4 konstruieren wir zunächst die kanonische Theta-Funktion $\Theta(d)$ auf Ω zu einem endlichen K -Divisor d vom Grad 0 auf Ω und ihren Automorphie-Faktor $c(d) \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{G}_{m,K})$. Dies versetzt uns in die Lage, Drinfelds von der Wahl eines abgeschlossenen Punkts $z_0 \in \Omega$ unabhängige Paarung $\langle -, - \rangle$ als die durch $\langle \alpha, \beta \rangle := c(\beta z_0 - z_0)(\alpha)$ gegebene symmetrische Bilinearform auf $H \times H$ mit Werten in $\mathbb{G}_{m,K}$ zu definieren. In Abschnitt 4.2 zeigen wir, dass diese Bilinearform positiv-definit ist. In Abschnitt 4.3 folgern wir, dass die "rigid-analytische" Jacobische $J_{\text{an}} := T/M$ von X die Analytifizierung der "algebraischen" Jacobischen von X ist, konstruieren mit Hilfe von Drinfelds Paarung $\langle -, - \rangle$ Drinfelds prinzipale Polarisierung

$$\begin{aligned} \lambda_D : M &\xrightarrow{\sim} M' \\ c(\beta z_0 - z_0) &\mapsto [\Gamma \ni \alpha \mapsto c(\beta z_0 - z_0)(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle] \end{aligned}$$

von M und geben das universelle Geradenbündel auf $X \times J_{\text{an}}$ explizit an. In Kapitel 5 führen wir zuerst die prinzipale Theta-Polarisierung auf J ein und beschreiben den Zusammenhang zwischen der universellen Garbe auf $X \times J$ und dem Poincaré-Bündel auf $J \times J'$. Anschließend verifizieren wir den Riemannsches Verschwindungssatz, wobei unser Beweis weitgehend an den komplexen Fall angelehnt ist. Um dies zu tun, definieren wir eine nicht-kanonische Theta-Funktion

$$\vartheta(t) := \sum_{m \in M} b(m, m) \cdot \langle t, \lambda_D(m) \rangle, \quad t \in T$$

auf T . Der Riemannsches Verschwindungssatz besagt dann, dass der Nullstellendivisor $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}$ der translatierten Theta-Funktion $\vartheta_{\widehat{\kappa}}(t) := \vartheta(\widehat{\kappa}^{-1} \cdot t)$ mit einem geeigneten modulo M eindeutig bestimmten $\widehat{\kappa} \in T$ gleich \widehat{W}_{g-1} ist. Schließlich gehen wir auf Gerritzens und Van der Put's fehlerhaften Beweis des Riemannsches Verschwindungssatzes in [8] ein und folgern aus dem Riemannsches Verschwindungssatz die obige Gleichheit der prinzipalen Theta-Polarisierung von M und von Drinfelds prinzipaler Polarisierung von M .

Diese Arbeit ist bis auf Abschnitte 2.4 und 2.5, den ersten Teil von Abschnitt 4.3 bis einschließlich 4.3.9 und 5.2.13 dem Buch [9] nachempfunden. Wir verzichten daher auf die genaue Angabe von Referenzen für die von dort übernommenen Aussagen.

Danksagungen Ich danke Prof. Dr. Werner Lütkebohmert für die hervorragende Betreuung dieser Arbeit. Außerdem bedanke ich mich bei Irene Bouw und Stefan Wewers für herausfordernde Seminare und eine herzliche Atmosphäre in der Arbeitsgruppe. Meinen Eltern gebührt ein besonderer Dank für die vollständige finanzielle Förderung in den ersten fünf Monaten meines Promotionsstudiums.

1 Grundlagen aus der rigiden und formellen Geometrie

1.1 Affinoide Räume

Definition 1.1.1 Sei K ein Körper. Eine nicht-triviale Abbildung $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *nicht-archimedischer Absolutbetrag auf K* , wenn für alle $a, b \in K$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $|a| \geq 0$;
- (ii) $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$;
- (iii) $|ab| = |a||b|$;
- (iv) (Ultrametrische Dreiecksungleichung) $|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$.

Sei $|\cdot|$ ein nicht-archimedisches Absolutbetrag auf K . Die Teilmenge $R := \{a \in K; |a| \leq 1\}$ heißt *Bewertungsring von K bezüglich $|\cdot|$* . Offensichtlich ist R ein lokaler Ring mit $\mathbb{Z} \cdot 1_K \subset R$ und dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_R := \{a \in K; |a| < 1\}$. Bezeichne mit $k := R/\mathfrak{m}_R$ den *Resklassenkörper von K* . Ein *nicht-archimedischer Körper* ist ein Paar $(K, |\cdot|)$ bestehend aus einem Körper K und einem nicht-archimedisches Absolutbetrag $|\cdot|$ derart, dass K vollständig bezüglich $|\cdot|$ ist. Wir schreiben im folgenden " K " statt " $(K, |\cdot|)$ ", wenn $|\cdot|$ aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Ist R ein diskreter Bewertungsring mit $\text{Quot}(R) = K$, so induziert seine Bewertung $v : R \rightarrow \mathbb{Z}$ einen nicht-archimedisches Absolutbetrag $|\cdot|$ auf K , der durch

$$|x|_e := e^{-v(a)}$$

mit einem $e \in \mathbb{R}$, $e > 1$, definiert ist. Dann folgt $R = \{a \in K; |a|_e \leq 1\}$.

Von jetzt an sei K stets ein nicht-archimedisches Körper.

Die ultrametrische Dreiecksungleichung 1.1.1(iv) impliziert das folgende

- Lemma 1.1.2** (a) Eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $a_i \in K$, konvergiert genau dann in K , wenn $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$.
- (b) Für $a, b \in K$ mit $|a| \neq |b|$ gilt $|a + b| = \max\{|a|, |b|\}$.

Ferner induziert die ultrametrische Dreiecksungleichung eine sehr seltsame Topologie auf K .

Bemerkung 1.1.3 Eine *abgeschlossene* bzw. *offene Kreisscheibe* mit Mittelpunkt a und vom Radius r ist eine Teilmenge der Form

$$D(a, r)^+ := \{z \in \overline{K}; |z - a| \leq r\} \quad \text{bzw.}$$

$$D(a, r)^- := \{z \in \overline{K}; |z - a| < r\}$$

mit $a \in \overline{K}$ und $r \in |\overline{K}^\times|$. Es gilt

- (a) Sind D_1 und D_2 (*abgeschlossene* oder *offene*) Kreisscheiben mit $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, so folgt $D_1 \subset D_2$ oder $D_2 \subset D_1$.
- (b) Jede *offene Kreisscheibe* $D(a, r)^-$ ist offen und abgeschlossen.
- (c) Die *offenen Kreisscheiben* $D(a, r)^-$, $a \in K$, bilden eine Basis der Topologie auf K . Insbesondere ist K nach (b) total unzusammenhängend.

Infolge der total unzusammenhängenden Topologie auf K scheitert die Definition holomorpher Funktionen auf K durch lokale Darstellbarkeit durch konvergente Potenzreihen, da der Identitätssatz auf solche auf paarweise disjunkten offenen Mengen definierten Potenzreihen nicht anwendbar ist und sie sich daher nicht in einer sinnvollen Weise zu einer globalen Funktion "verkleben" lassen. Um dieses Problem zu umgehen, betrachtet man holomorphe Funktionen auf Kreisscheiben bzw. *Bällen*, d.h. höherdimensionalen Analoga der Kreisscheiben, vom Radius 1. Dort kann man nämlich einer Potenzreihe dank 1.1.2(a) bzw. seinem höherdimensionalen Analogon direkt ansehen, ob sie konvergiert.

Definition 1.1.4 Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. K -Algebren der Form

$$T_n := K\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}^n} c_i \underline{\xi}^i \in K[[\xi_1, \dots, \xi_n]]; \lim_{i \rightarrow \infty} c_i = 0 \right\}$$

heißen *Tate-Algebren* und ihre Restklassenalgebren $A := T_n/\mathfrak{a}$ mit Idealen $\mathfrak{a} \triangleleft T_n$ heißen *affinoide Algebren*. Die Elemente von T_n heißen *strikt konvergente Potenzreihen*.

Ferner setzen wir aus formalen Gründen $T_0 := K$.

Proposition 1.1.5 Sei die Notation wie oben und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- (a) T_n ist *noethersch, faktoriell, regulär und jacobsonsch*.
- (b)

$$T_n^\times = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}^n} c_i \underline{\xi}^i \in T_n; |c_0| > |c_i| \quad \forall i \neq 0 \right\}.$$

- (c) T_n ist eine K -Banach-Algebra bezüglich der Gauß-Norm

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{N}^n} c_i \underline{\xi}^i \right| := \max_{i \in \mathbb{N}^n} \{|c_i|\}.$$

- (d) Jedes Ideal $\mathfrak{a} \triangleleft T_n$ ist abgeschlossen bezüglich der Gauß-Norm.
 (e) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \triangleleft T_n$ ist $A := T_n/\mathfrak{a}$ eine noethersche Banach-Algebra mit der induzierten Norm.
 (f) Die Banach-Algebra-Struktur von A hängt nicht von der Darstellung von A als Restklassenalgebra eines T_n .
 (g) Jeder Homomorphismus affinoider K -Algebren ist stetig.

Diese Eigenschaften folgen im wesentlichen aus dem Weierstraßschen Divisionsatz für strikt konvergente Potenzreihen.

Definition 1.1.6 Sei die Notation wie oben und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ein $f \in T_n$ heißt ξ_n -ausgezeichnet der Ordnung $s \in \mathbb{N}$, wenn f eine Entwicklung $f = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \xi_n^i \in T_{n-1} \langle \xi_n \rangle$ hat, wobei $T_{n-1} \langle \xi_n \rangle$ analog wie $K \langle \xi_n \rangle$ definiert ist, mit $g_i \in T_{n-1}$ für alle i , $g_s \in T_{n-1}^\times$ und $|g_s| = |f| > |g_i|$ für alle $i \geq s+1$.

Ein normiertes Polynom $\omega \in T_{n-1} \langle \xi_n \rangle$, das als Element von T_n ξ_n -ausgezeichnet ist, heißt Weierstraß-Polynom.

Bemerkung 1.1.7 Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ein $f \in T_n$ liegt genau dann in T_n^\times , wenn es ξ_n -ausgezeichnet der Ordnung 0 ist.

Satz 1.1.8 (Weierstraß-Division) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $g \in T_n$ ξ_n -ausgezeichnet der Ordnung $s \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für jedes $f \in T_n$ ein $q \in T_n$ und ein Polynom $r \in T_{n-1}[\xi_n]$ vom Grad $r < s$, derart dass

$$f = q \cdot g + r.$$

q und r sind durch diese Bedingung eindeutig bestimmt. Ferner gilt

$$|f| = \max \{|q||g|, |r|\}.$$

Satz 1.1.9 (Weierstraßscher Vorbereitungssatz) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ist $g \in T_n$ ξ_n -ausgezeichnet der Ordnung $s \in \mathbb{N}$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Weierstraß-Polynom $\omega \in T_{n-1}[\xi_n]$ vom Grad s und ein $c \in T_n^\times$, derart dass $g = c \cdot \omega$ gilt.

Korollar 1.1.10 (Noether-Normalisierung) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \triangleleft T_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, gibt es einen endlichen K -Algebrenmonomorphismus $T_d \rightarrow T_n/\mathfrak{a}$ mit einem $d \in \mathbb{N}$. Die nicht-negative ganze Zahl d heißt die Dimension von T_n/\mathfrak{a} .

Korollar 1.1.11 (Hilbertscher Nullstellensatz, algebraische Version) Sei $\mathfrak{n} \in \text{MaxSpec } T_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann ist $(T_n/\mathfrak{n})/K$ eine endliche Körpererweiterung.

Insbesondere wird \mathfrak{n} von Polynomen in $\mathfrak{m} := \mathfrak{n} \cap K[\xi_1, \dots, \xi_n]$ erzeugt. Die \mathfrak{m} -adische Vervollständigung von $K[\xi_1, \dots, \xi_n]$ stimmt mit der \mathfrak{n} -adischen Vervollständigung von T_n überein und die Erweiterung $K[\xi_1, \dots, \xi_n] \rightarrow K \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle = T_n$ ist flach.

Definition 1.1.12 Sei A eine affinoid Algebra.

$$\mathrm{Sp} A := \mathrm{MaxSpec} A$$

mit einer noch zu definierenden Topologie heißt *affinoider Raum*.

Schreibe $A = T_n/\mathfrak{a}$ mit einem geeigneten $n \in \mathbb{N}$ und einem Ideal $\mathfrak{a} \triangleleft T_n = K \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$. Wie in der algebraischen Geometrie betrachtet man die Restklassen

$$f(\mathfrak{m}) := f \bmod \mathfrak{m},$$

$f \in T_n$, als Auswertungen von f in maximalen Idealen $\mathfrak{m} \triangleleft T_n$. Folglich impliziert die geometrische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes

$$\mathbb{B}^n := \mathrm{Sp} T_n = \{x \in \mathbb{A}_K^n; |\xi_i(x)| \leq 1 \ \forall i = 1, \dots, n\},$$

d.h. \mathbb{B}^n ist einfach die Menge der Punkte in \mathbb{A}_K^n , in denen die ξ_i 's Werte vom Betrag ≤ 1 annehmen. Man fasst T_n als die Menge der holomorphen Funktionen auf \mathbb{B}^n auf. Dann folgt wieder aus dem Hilbertschen Nullstellensatz

$$\mathrm{Sp} A = V(\mathfrak{a}) := \{x \in \mathbb{B}^n; f(x) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}.$$

Darüberhinaus vermittelt jeder Homomorphismus $\varphi : B \rightarrow A$ affinoider Algebren genauso wie im algebraischen Fall eine stetige Abbildung

$$\mathrm{Sp} \varphi : \mathrm{Sp} A \longrightarrow \mathrm{Sp} B; \quad x \longmapsto \varphi^{-1}(x)$$

affinoider Räume.

Definition 1.1.13 Sei $X = \mathrm{Sp} A$ ein affinoider Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt ein *affinoider Teilbereich* von X , wenn es einen Morphismus $\varphi : X' = \mathrm{Sp} A' \rightarrow X$ mit $\varphi(X') \subset U$ gibt, derart dass jeder Morphismus $\psi : Y \rightarrow X$ affinoider Räume mit $\psi(Y) \subset U$ auf eine eindeutig bestimmte Weise über φ faktorisiert. Wir nennen eine Überdeckung von X durch *affinoide Teilbereiche* *affinoid*.

Offensichtlich ist die Eigenschaft, ein affinoider Teilbereich von X zu sein, transitiv, d.h. ist $X' \subset X$ ein affinoider Teilbereich, so ist ein affinoider Teilbereich von X' auch einer von X .

Definition 1.1.14 Sei $X = \mathrm{Sp} A$ ein affinoider Raum und seien $f_0, \dots, f_r \in A$, $r \in \mathbb{N}$, ohne gemeinsame Nullstellen. Dann heißt

$$X_j := X \left(f_0 \cdot f_j^{-1}, \dots, f_r \cdot f_j^{-1} \right) := \{x \in X; |f_i(x)| \leq |f_j(x)| \ \forall i = 0, \dots, r\}$$

für ein $j = 0, \dots, r$ ein *rationaler affinoider Teilbereich* von X . Der Ring der holomorphen Funktionen auf X ist gegeben durch

$$A \left\langle f_0 \cdot f_j^{-1}, \dots, f_r \cdot f_j^{-1} \right\rangle := A \left\langle \xi_0 \cdot \xi_j^{-1}, \dots, \xi_r \cdot \xi_j^{-1} \right\rangle / (\xi_i \cdot f_j - \xi_j \cdot f_i; i = 0, \dots, r),$$

wobei $A \left\langle \xi_0 \cdot \xi_j^{-1}, \dots, \xi_r \cdot \xi_j^{-1} \right\rangle$ analog wie $K \left\langle \xi_0 \cdot \xi_j^{-1}, \dots, \xi_r \cdot \xi_j^{-1} \right\rangle$ definiert ist. Die Familie (X_1, \dots, X_r) heißt eine *rationale Überdeckung* von X . Offensichtlich sind *rationale affinoide Teilbereiche* von X offene affinoide Teilbereiche von X .

Für jedes $j = 1, \dots, r$ induziert die kanonische Abbildung $\varphi_j : A \rightarrow A \langle f_0 \cdot f_j^{-1}, \dots, f_r \cdot f_j^{-1} \rangle$ eine bijektive Abbildung

$$\mathrm{Sp} A \langle f_0 \cdot f_j^{-1}, \dots, f_r \cdot f_j^{-1} \rangle \xrightarrow{\sim} X \left(f_0 \cdot f_j^{-1}, \dots, f_r \cdot f_j^{-1} \right),$$

da f_j keine Nullstellen auf X_j hat und $\left| f_i(x) \cdot f_j^{-1}(x) \right| \leq 1$ für alle $x \in X_j$ gilt.

Satz 1.1.15 *Sei X ein affinoider Raum und $X' \subset X$ ein affinoider Teilbereich. Dann gibt es eine endliche Überdeckung (X_1, \dots, X_r) von X durch rationale affine Teilbereiche, derart dass $X' \cap X_i$ für alle $i = 1, \dots, r$ ein rationaler affinoider Teilbereich von X ist.*

Auf einem affinoiden Raum $X = \mathrm{Sp} A$ definiert man einen Funktor \mathcal{O}_X , der zu affinoiden Unterbereichen von X die zugehörigen affinoiden Algebren mit den kanonischen Einschränkungshomomorphismen assoziiert. Dann ist \mathcal{O}_X eine Garbe auf der Kategorie endlicher affinoider Überdeckungen von X .

Nach *Tates Azyklizitätssatz* ist \mathcal{O}_X azyklisch, d.h., ist (X_0, \dots, X_r) eine endliche affine Überdeckung von X , so ist der augmentierte Čech-Komplex

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(X) \rightarrow \prod_{i=0}^r \mathcal{O}_X(X_i) \rightarrow \prod_{i_0, i_1=0}^r \mathcal{O}_X(X_{i_0} \cap X_{i_1}) \rightarrow \dots$$

exakt.

1.2 Rigid-analytische Räume

Definition 1.2.1 Eine *schwache Grothendieck-Topologie* $\mathfrak{T} = (\mathrm{Cat} \mathfrak{T}, \mathrm{Cov} \mathfrak{T})$ besteht aus einer Kategorie $\mathrm{Cat} \mathfrak{T}$ und einer Menge $\mathrm{Cov} \mathfrak{T}$ von Familien $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ von Morphismen in $\mathrm{Cat} \mathfrak{T}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Ist $\varphi : U \rightarrow V$, $U, V \in \mathrm{Cat} \mathfrak{T}$, ein Isomorphismus, so folgt $\varphi \in \mathrm{Cov} \mathfrak{T}$.
- (ii) Liegt $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ in $\mathrm{Cov} \mathfrak{T}$ und liegt $(V_{i,j} \rightarrow U_i)_{j \in J_i}$ für alle $i \in I$ in $\mathrm{Cov} \mathfrak{T}$, so liegt die Komposition $(V_{i,j} \rightarrow U)$ für alle $i \in I$ ebenfalls in $\mathrm{Cov} \mathfrak{T}$.
- (iii) Liegen $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ und $(V \rightarrow U)$ in $\mathrm{Cov} \mathfrak{T}$, so existiert das Faserprodukt $U_i \times_U V$ in $\mathrm{Cat} \mathfrak{T}$ und die Einschränkung $(U_i \times_U V \rightarrow V)_{i \in I}$ liegt in $\mathrm{Cov} \mathfrak{T}$.

Definition 1.2.2 Eine *Prägarbe* \mathcal{F} auf einer Grothendieck-Topologie \mathfrak{T} mit Werten in einer abelschen Kategorie \mathfrak{A} ist ein Funktor $\mathcal{F} : \mathrm{Cat} \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{A}$. Eine Prägarbe \mathcal{F} auf einer Grothendieck-Topologie mit Werten in einer abelschen Kategorie \mathfrak{A} heißt *Garbe*, wenn die Sequenz

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

für alle $(U_i \rightarrow U)_{i \in I} \in \mathrm{Cov} \mathfrak{T}$ exakt ist.

Beispiel 1.2.3 Sei $X = \text{Sp } A$ ein affinoider Raum. Sei $\text{Cat } \mathfrak{T}$ die Kategorie affinoider Unterbereiche von X und $\text{Cov } \mathfrak{T}$ die Menge aller endlichen affinoiden Überdeckungen $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ affinoider Unterbereiche U von X . Dann ist $\mathfrak{T} = (\text{Cat } \mathfrak{T}, \text{Cov } \mathfrak{T})$ eine schwache Grothendieck-Topologie. Die Strukturgarbe \mathcal{O}_X auf X ist eine Garbe auf \mathfrak{T} .

Um das Verkleben auf affinoiden und noch zu definierenden rigid-analytischen Räumen zu ermöglichen, muss man die schwache Grothendieck-Topologie verfeinern.

Definition 1.2.4 Sei $X = \text{Sp } A$ ein affinoider Raum. Eine *starke Grothendieck-Topologie auf X* ist gegeben durch:

(0) $\emptyset, X \in \text{Cat } \mathfrak{T}$.

(i) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *zulässig*, wenn es eine (nicht notwendigerweise endliche) affinoide Überdeckung $\bigcup_{i \in I} U_i$ von X gibt, derart dass für alle Morphismen $\varphi : Y \rightarrow X$ affinoider Räume mit $\varphi(Y) \subset U$ die Überdeckung $(\varphi^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine Verfeinerung durch eine endliche affinoide Überdeckung erlaubt.

(ii) Eine Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ einer *zulässigen* offenen Teilmenge V von X durch *zulässige* offene Teilmengen V_j , $j \in J$, heißt *zulässig*, wenn für jeden Morphismus $\varphi : Y \rightarrow X$ mit $\varphi(Y) \subset V$ die Überdeckung $(\varphi^{-1}(V_j))_{j \in J}$ eine Verfeinerung durch eine endliche affinoide Überdeckung erlaubt.

Offensichtlich ist eine starke Grothendieck-Topologie auf X eine schwache Grothendieck-Topologie auf X . Eine starke Grothendieck-Topologie \mathfrak{T} auf X schränkt sich zu einer starken Grothendieck-Topologie $\mathfrak{T}|_{X'}$ auf jedem affinoiden Teilbereich X' von X ein und jeder Morphismus $\varphi : Y \rightarrow X$ affinoider Räume ist stetig bezüglich starker Grothendieck-Topologien auf Y und X in dem Sinne, dass Pull-Backs zulässiger offener Teilmengen und zulässiger offener Überdeckungen unter φ zulässig sind. Man kann leicht zeigen, dass Zariski-offene Teilmengen von X zulässig offen und Zariski-offene Überdeckungen von X zulässig sind.

Bemerkung 1.2.5 Starke Grothendieck-Topologien können lokal definiert werden: Sei X ein topologischer Raum und $\bigcup_{i \in I} X_i$ eine offene Überdeckung von X durch affinoide Räume. Betrachte Grothendieck-Topologien \mathfrak{T}_i , $i \in I$, auf den X_i 's derart, dass $\mathfrak{T}_i|_{X_i \cap X_j}$ für alle $i, j \in I$ die gleiche Grothendieck-Topologie auf $X_i \cap X_j$ induziert. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte starke Grothendieck-Topologie \mathfrak{T} auf X mit $\mathfrak{T}|_{X_i} = \mathfrak{T}_i$ für alle $i \in I$.

Lemma 1.2.6 Sei $X = \text{Sp } A$ ein affinoider Raum. Dann setzt sich jede Garbe auf X bezüglich einer schwachen Grothendieck-Topologie \mathfrak{T} zu einer bezüglich einer starken \mathfrak{T} verfeinernden Grothendieck-Topologie fort. Insbesondere hat die Strukturgarbe \mathcal{O}_X auf X eine Fortsetzung zu einer Strukturgarbe bezüglich einer starken Grothendieck-Topologie auf X .

Definition 1.2.7 Wir definieren eine *zulässige Teilmenge* und eine *zulässige Überdeckung* eines beliebigen topologischen Raums analog wie im affinoiden Fall. Ein

rigid-analytischer Raum ist ein mit einer starken Grothendieck-Topologie ausgestatteter lokal geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) , derart dass es eine zulässige Überdeckung $\bigcup_{i \in I} X_i$ von X durch affine Räume mit $\mathcal{O}_X|_{X_i} \cong \mathcal{O}_{X_i}$ für alle $i \in I$ gibt.

Ein Morphismus $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ *rigid-analytischer Räume* ist eine Abbildung lokal geringter Räume, die mit starken Grothendieck-Topologien auf (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) verträglich ist.

Offensichtlich vermittelt ein Homomorphismus $A \rightarrow B$ affinoide Algebren einen Morphismus

$$\mathrm{Sp} \varphi : Y = \mathrm{Sp} B \rightarrow X = \mathrm{Sp} A$$

der zugehörigen rigid-analytischen Räume und man kann zeigen, dass die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{AffAlg}}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_{\mathrm{RigSp}}(Y, X)$$

bijektiv ist.

Wir betrachten von jetzt an nur noch starke Grothendieck-Topologien und sagen "Grothendieck-Topologie" statt "starke Grothendieck-Topologie" und fassen affine Räume als rigid-analytische Räume auf.

Für eine Grothendieck-Topologie \mathfrak{T} auf X und eine Prägarbe \mathcal{F} auf \mathfrak{T} definiert man für ein $x \in X$ den Halm

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U \in \mathrm{Cat} \mathfrak{T}} \mathcal{F}(U)$$

von \mathcal{F} in x . Der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ der Strukturgarbe \mathcal{O}_X auf einem rigid-analytischen Raum ist ein lokaler Ring. Er ist noethersch, da er ein Restklassenring eines konvergenen Potenzreihenrings $K\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ist, der noethersch ist.

Für späteren Gebrauch benötigen wir den Begriff der eigentlichen Abbildung im rigid-analytischen Kontext.

Definition 1.2.8 Seien X' und Y affine Räume und $X \subset X'$ ein affinoide Unterraum. Bezeichne für ein $r \in |K^\times|$, $r \leq 1$, mit

$$\mathbb{B}^n(r) := \{z \in \mathbb{A}_K^n; |z| \leq r\}$$

den n -dimensionalen offenen Ball vom Radius $\leq r$, $n \in \mathbb{N}$.

Die Schreibweise $X \Subset_Y X'$ bedeutet, dass es eine abgeschlossene Immersion $X' \rightarrow \mathbb{B}_Y^n(1)$ in den relativen n -dimensionalen Einheitsball $\mathbb{B}_Y^n(1) := Y \times \mathbb{B}^n(1)$ gibt derart, dass X darunter in ein $\mathbb{B}_Y^n(r)$ mit einem $r < 1$ abgebildet wird. Letzteres bedeutet, dass die Koordinaten ξ_1, \dots, ξ_n auf $\mathbb{B}_Y^n(1)$ in jedem Punkt $x \in X$ Werte vom Absolutbetrag $|\xi_i(x)| \leq r < 1$, $i = 1, \dots, n$, annehmen

Ein Morphismus $\varphi : X \rightarrow Y$ rigid-analytischer Räume heißt *separiert*, wenn die Diagonalabbildung $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ eine abgeschlossene Immersion ist.

Ein Morphismus $\varphi : X \rightarrow Y$ rigid-analytischer Räume heißt *eigentlich*, wenn er separiert ist und wenn es eine zulässige affinoidale Überdeckung $\bigcup_{i \in I} Y_i$ von Y und für jedes $i \in I$ zwei endliche affinoidale Überdeckungen $\bigcup_{k=1}^{n_i} X_{i,k}$, $\bigcup_{k=1}^{n_i} X'_{i,k}$, $n_i \in \mathbb{N}$, von X mit $X_{i,j} \subseteq_{Y_i} X'_{i,j}$ für alle $j = 1, \dots, n_i$ gibt.

Der Eigentlichkeitsbegriff wurde eingeführt, um Endlichkeitssätze mit den Methoden der p -adischen Funktionalanalysis herzuleiten. Für einen eigentlichen rigid-analytischen Raum X sind nämlich die Kohomologie-Gruppen $H^n(X, \mathcal{O}_X)$ endlich und verschwinden für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, woraus insbesondere der Riemann-Roch-Satz folgt.

Nun wiederholen wir Serres GAGA-Funktor im Kontext der rigid-analytischen Geometrie:

Sei $X = \mathrm{Sp} A$ ein affinoider Raum und $c \in K^\times$, $|c| > 1$. Betrachte den affinoiden Raum

$$\mathbb{B}_X^n(c) := X \times \mathbb{B}^n(c) := \mathrm{Sp} A \langle \xi_1/c, \dots, \xi_n/c \rangle.$$

Es gibt eine aufsteigende Sequenz

$$\mathbb{B}_X^n(c) \subset \mathbb{B}_X^n(c^2) \subset \dots \mathbb{B}_X^n(c^i) \subset \dots$$

Auf diese Weise erhält man eine rigid-analytische Struktur auf

$$A_X^n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{B}_X^n(c^i).$$

Ein ähnlicher Ansatz funktioniert für affine A -Schemata von endlichem Typ. Die Idee hinter dieser Konstruktion ist, dass man Polynome mit Koeffizienten in A als holomorphe Funktionen auffasst. Da Zariski-offene Teilmengen zulässig sind, überträgt sich die algebraische Verklebungskonstruktion in die Kategorie rigid-analytischer Räume. Folglich wird zu jedem A -Schema Z von endlichem Typ ein rigid-analytischer Raum Z^{an} assoziiert. Die abgeschlossenen Punkte von Z entsprechen eineindeutig den Punkten von Z^{an} in kanonischer Weise.

Um zu zeigen, dass die rigide Analytifizierung nicht von der Wahl der Konstanten $c \in K$ und der Darstellung von A als Restklassenalgebra einer Tate-Algebra abhängt, müssen wir sie durch eine universelle Eigenschaft definieren.

Definition 1.2.9 Sei $X = \mathrm{Sp} A$ ein affinoider Raum und (Z, \mathcal{O}_Z) ein A -Schema lokal von endlichem Typ. Die *rigide Analytifizierung* von (Z, \mathcal{O}_Z) ist ein rigid-analytischer A -Raum $(Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}})$ mit einem Morphismus $(\iota, \iota^*) : (Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ lokal Grothendieck-geringter Räume, der die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Für jeden rigid-analytischen A -Raum (Y, \mathcal{O}_Y) und jeden Morphismus $(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ lokal G-geringter Räume faktorisiert (ι, ι^*) über einen eindeutig bestimmten Morphismus $(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}})$ rigid-analytischer A -Räume.

Satz 1.2.10 Die rigide Analytifizierung induziert einen Funktor von der Kategorie der A -Schemata lokal von endlichem Typ in die der rigid-analytischen A -Räume, der jedoch im allgemeinen nicht volltreu ist.

1.3 Formelle Schemata

Sei R ein Bewertungsring und π eine Uniformisierende für R , d.h. ein Element von R mit $0 < |\pi| < 1$. Statt mit affinoiden Algebren startete Raynaud mit R -Algebren vom Typ

$$A := R \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle / \mathfrak{a}$$

ohne R -Torsion und von topologisch endlicher Präsentation mit einem endlich erzeugten Ideal $\mathfrak{a} \triangleleft R \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$. Solche Algebren heißen *zulässige R -Algebren*.

Das Definitionsideal von A ist πA . Folglich ist A mit der durch $(\pi^n A)_{n \in \mathbb{N}}$ induzierten Topologie ausgestattet und vollständig und separiert bezüglich dieser Topologie. Daher gilt

$$A = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A / \pi^{n+1} A.$$

Die Topologie hängt nicht von der Wahl von π ab. Ein R -Modul hat genau dann keine R -Torsion, wenn er flach über R ist. Da R nur dann noethersch ist, wenn die Bewertung diskret ist, benötigt man

Satz 1.3.1 Sei A eine R -Algebra von topologisch endlichem Typ und M ein endlich erzeugter über R flacher A -Modul. Dann ist M ein A -Modul von endlicher Präsentation. Insbesondere ist der Kern eines surjektiven Homomorphismus $A^n \rightarrow M$ von A -Moduln endlich erzeugt.

Korollar 1.3.2 Sei $A := R \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle / \mathfrak{a}$ eine zulässige R -Algebra von topologisch endlichem Typ.

- (a) Ist A eine flache topologisch endlich erzeugte R -Algebra, so ist es von topologisch endlicher Präsentation.
- (b) Jede R -Algebra von topologisch endlicher Präsentation ist ein kohärenter Ring.

Um affine formelle Schemata zu definieren, benötigt man darüberhinaus das Verfahren der vollständigen Lokalisierung.

Sei A eine R -Algebra von topologisch endlicher Präsentation und $f \in A$. Setze

$$A \langle f^{-1} \rangle := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A [f^{-1}] / \pi^{n+1} A [f^{-1}] = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (A / \pi^{n+1} A) [f^{-1}].$$

$A \langle f^{-1} \rangle$ ist ebenfalls eine R -Algebra von topologisch endlicher Präsentation. Wenn $f_1, \dots, f_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, das Eins-Ideal erzeugen, so ist die Sequenz

$$(*) \quad A \langle f^{-1} \rangle \rightarrow \prod_{i=1}^n A \langle f_i^{-1} \rangle \rightrightarrows \prod_{i,j=1}^n A \langle f_i^{-1} \cdot f_j^{-1} \rangle$$

exakt.

Definition 1.3.3 Sei A eine zulässige R -Algebra von topologisch endlicher Präsentation. Dann heißt $X = \mathrm{Spf} A := \mathrm{Spec} A / \pi A$ das zu A assoziierte affine formelle Schema. Die Strukturgarbe \mathcal{O}_X auf X wird durch

$$\mathcal{O}_X(U) := \ker \left(\prod_{i=1}^n A \langle f_i^{-1} \rangle \rightrightarrows \prod_{i,j=1}^n A \langle f_i^{-1} \cdot f_j^{-1} \rangle \right)$$

für eine offene Teilmenge $U \subset X$ definiert, wobei $f_1, \dots, f_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, eine offene Überdeckung von U induzieren, d.h. $U = \bigcup_{i=1}^n A \langle f_i^{-1} \rangle$.

\mathcal{O}_X ist tatsächlich eine Garbe, da die Sequenz (*) exakt ist. Man definiert für ein $x \in X$ den Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ von X in x durch

$$\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{x \in U \subset X} \mathcal{O}_X(U).$$

Definition 1.3.4 Ein *formelles R -Schema* X ist ein lokal geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) , derart dass jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U erlaubt, wobei $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph zu einem affinen formellen Schema $\mathrm{Spf} A$ ist. X heißt ein *zulässiges formelles R -Schema*, wenn mit der obigen Notation die R -Algebra A zusätzlich für jedes $x \in X$ keine R -Torsion hat.

Definition 1.3.5 Sei A eine zulässige R -Algebra und $X = \mathrm{Spf} A$ das zugehörige affine formelle Schema.

(a) Ein Ideal $\mathcal{I} = (f_0, \dots, f_n) \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, $f_i \in A$, heißt *offen*, wenn $\pi^n \in \mathcal{I}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(b) Eine *zulässige formelle Aufblasung* $X' \rightarrow X$ von X entlang eines endlich erzeugten offenen Ideals $\mathcal{I} \subset A$ ist die Vervollständigung der algebraischen Aufblasung $X'_{\mathrm{alg}} \rightarrow X$ von X entlang \mathcal{I} bezüglich ihrer speziellen Faser $X'_{\mathrm{alg}} \times_R \mathrm{Spec} R / \pi R$.

Offensichtlich stimmt die generische Faser der algebraischen Aufblasung X'_{alg} von X mit der von X überein, da $\mathcal{I} \otimes K =: A_{\mathrm{rig}}$ lokal invertierbar ist. Seien f_0, \dots, f_n , $n \in \mathbb{N}$, Erzeuger von \mathcal{I} . Dann kann X'_{alg} als das abgeschlossene Unterschema

$$X'_{\mathrm{alg}} := V \left((\xi_i f_j - \xi_j f_i; i, j = 0, \dots, n) : \pi^{\mathbb{N}} \right) \subset \mathbb{P}_A^n$$

aufgefasst werden, wobei die ξ_i 's Koordinaten auf \mathbb{P}_A^n sind und die Schreibweise " : $\pi^{\mathbb{N}}$ " bedeutet, dass jedes Element in $(\xi_i f_j - \xi_j f_i; i, j = 0, \dots, n)$ mit einer hinreichend großen natürlichen π -Potenz aufmultipliziert wird, so dass das Ideal $\mathcal{I} \mathcal{O}_{X'_{\mathrm{alg}}}$ lokal invertierbar ist. Alternativ kann die formelle zulässige Aufblasung von X entlang \mathcal{I} auch durch

$$X' := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Proj} \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I} \otimes_R R / \pi^n R$$

definiert werden. Für ein allgemeines zulässiges offenes Schema X kann die *formelle zulässige Aufblasung entlang eines offenen kohärenten Ideals* $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ (vgl. 2.5.1) auf analoge Weise durch

$$X_{\mathcal{J}} := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj} \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{J} \otimes_R R/\pi^n R$$

definiert werden. $X_{\mathcal{J}}$ ist ein zulässiges formelles R -Schema und das Ideal $\mathcal{J}\mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}$ ist invertierbar. Zulässige formelle Aufblasungen kommutieren mit flachem Basiswechsel. Ist K'/K eine endliche Erweiterung und R/R' die zugehörige Erweiterung der Bewertungsringe, so dehnt sich jeder K' -wertige Punkt von X zu einem R' -wertigen Punkt von $X_{\mathcal{J}}$ aus. Ist X *quasi-kompakt*, d.h. erlaubt es eine endliche formelle zulässige affine Überdeckung, so ist die Komposition zweier formeller zulässiger Aufblasungen von X wieder eine formelle zulässige Aufblasung von X .

Definition 1.3.6 Für eine zulässige R -Algebra $A = R \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle / \mathfrak{a}$ setze

$$A_{\text{rig}} := A \otimes_R K = K \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle / \mathfrak{a}K.$$

A_{rig} ist eine affinoidale K -Algebra.

$$X_{\text{rig}} := \text{Sp } A_{\text{rig}}$$

heißt die *generische Faser des formellen affinen Schemas* $X := \text{Spf } A$. Diese Assoziierung ordnet Morphismen affiner formeller R -Schemata Morphismen affinoider K -Räume zu. Folglich vermittelt sie einen Funktor. Man definiert auf analoge Weise die *generische Faser eines zulässigen formellen R -Schemas*.

Ist X_K die *generische Faser eines zulässigen formellen R -Schemas* X , so nennt man X ein *R -Modell von X_K* .

Ist $X' \rightarrow X$ ein Morphismus zulässiger formeller Schemata, so bezeichnet man mit $\varphi_{\text{rig}} : X'_{\text{rig}} \rightarrow X_{\text{rig}}$ den induzierten Morphismus rigid-analytischer K -Räume.

Proposition 1.3.7 Sei $X = \text{Spf } A$ ein zulässiges formelles affines R -Schema, $\mathcal{I} = (f_0, \dots, f_n) \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, $f_i \in A$, ein offenes Ideal und $\varphi : X' \rightarrow X$ eine formelle Aufblasung von X entlang \mathcal{I} . Dann gilt

- (a) $\varphi_{\text{rig}} : X'_{\text{rig}} \rightarrow X_{\text{rig}}$ ist ein Isomorphismus.
- (b) Setze $X'_i := \{x \in X'; f_i \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{I} \mathcal{O}_{X'}\}$, $i = 0, \dots, n$. Dann bildet φ_{rig} die Teilmenge X'_i auf den rationalen Unterbereich $X(f_0 \cdot f_i^{-1}, \dots, f_n \cdot f_i^{-1})$ ab.

Satz 1.3.8 Der Funktor

$$\text{rig}: (\text{Zulässige formelle } R\text{-Schemata}) \longrightarrow (\text{Rigid-analytische Räume}); X \longmapsto X_{\text{rig}}$$

vermittelt eine Äquivalenz zwischen

- (1) der Kategorie quasi-kompakter zulässiger formeller R -Schemata, die durch zulässige formelle Aufblasungen lokalisiert sind, und
- (2) der Kategorie quasi-kompakter quasi-separierter rigid-analytischer K -Räume.

Ein rigid-analytischer Raum heißt *quasi-kompakt*, wenn er eine endliche zulässige affinoidale Überdeckung erlaubt. Er heißt *quasi-separiert*, wenn der Durchschnitt zweier seiner affinoider Unterräume quasi-kompakt ist.

Man sagt, die Kategorie der quasi-kompakten zulässigen formellen R -Schemata ist *lokalisiert durch Isomorphismen*, wenn jeder Morphismus $\chi : X \dashrightarrow Y$ in dieser Kategorie in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ \downarrow \varphi & \searrow \psi & \\ X & \xrightarrow{\chi} & Y. \end{array}$$

passt, wobei φ eine zulässige formelle Aufblasung von X und ψ ein echter Isomorphismus ist. Insbesondere ist χ ein Isomorphismus, wenn es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X' & & Y' \\ \varphi \downarrow & \swarrow & \searrow \psi \\ X & \xrightarrow{\chi} & Y, \end{array}$$

gibt, in dem alle echten Pfeile und darüberhinaus $\phi \circ \alpha$ und $\psi \circ \beta$ Aufblasungen sind.

Ist χ_{rig} quasi-endlich bzw. eine offene (oder abgeschlossene) Immersion, so kann man ψ so wählen, dass $X' \rightarrow Y'$ ebenfalls dies ist.

Satz 1.3.9 (a) Sei X_K ein quasi-kompakter quasi-separierter rigid-analytischer Raum und \mathcal{U}_K eine endliche affinoidale Überdeckung von X_K . Dann gibt es ein formelles R -Modell X von X_K , derart dass \mathcal{U}_K durch eine offene Überdeckung \mathcal{U} von X induziert wird.

(b) Seien X und Y zulässige formelle quasi-kompakte R -Schemata und $f_K : X_{\text{rig}} \rightarrow Y_{\text{rig}}$ ein rigid-analytischer Morphismus. Dann gibt es eine zulässige formelle Aufblasung $X' \rightarrow X$, derart dass f_K durch einen formellen Morphismus $f' : X' \rightarrow Y$ induziert wird.

2 Mumford-Kurven

2.1 Schottky-Gruppen und Mumford-Kurven

Sei $(K, |\cdot|)$ ein nicht-archimedischer Körper. Eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$ vermittelt einen algebraischen K -Automorphismus

$$\gamma_A : \mathbb{P}_K^1 \longrightarrow \mathbb{P}_K^1; \quad z = [t_0, t_1] \longmapsto \frac{az + b}{cz + d} = [at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1]$$

mit der üblichen Konvention

$$\frac{az + b}{cz + d} := \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & \text{falls } cz + d \neq 0, z \neq \infty, \\ \infty, & \text{falls } cz + d = 0, z \neq \infty, \\ \frac{a}{c}, & \text{falls } z = \infty, c \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } z = \infty, c = 0, \end{cases}$$

für $z = [z, 1]$. Eine solche Abbildung heißt *Möbius-Transformation*. Es gilt genau dann $\gamma_A = \mathrm{id}$, wenn $A = \lambda \cdot E_2$ mit einem $\lambda \in K^\times$. Für $A, B \in \mathrm{GL}_2(K)$ gilt $\gamma_{A \circ B} = \gamma_A \circ \gamma_B$. Man kann zeigen, dass $\mathrm{GL}_2(K)/K^\times =: \mathrm{PGL}_2(K) = \mathrm{Aut}_K(\mathbb{P}_K^1)$. Die Gruppe $\mathrm{PGL}_2(K)$ wird wegen

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2} \left(z + \frac{d}{c} \right)^{-1} + \frac{a}{c}$$

mit $a, b, c, d \in K$, $c \neq 0$, von Elementen der Form $(z \mapsto z + b, z \mapsto az, z \mapsto z^{-1})$, $a, b \in K$, erzeugt. Eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ hat zwei Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in K'^\times$, wobei K'/K eine algebraische Erweiterung vom Grad $[K' : K] \leq 2$ ist. Gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so hat γ_A zwei Fixpunkte $z_1, z_2 \in \mathbb{P}_K^1(K')$. Nach einer Koordinatentransformation können wir ohne Einschränkung $z_1 = 0$ und $z_2 = \infty$ annehmen.

Dann ist γ_A einfach die Multiplikation mit $q := \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Gilt $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, so heißt z_1 der *anziehende* und z_2 der *abstoßende Fixpunkt* von γ_A , da in diesem Fall die Folge $(\gamma_A^n(w))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $w \in \mathbb{P}_K^1(K) \setminus \{0, \infty\}$ gegen z_1 konvergiert. Da K vollständig ist, folgt daraus $z_1, z_2 \in \mathbb{P}_K^1(K)$. Ein γ_A , das die Bedingung $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ erfüllt, heißt *hyperbolisch*. Ist $\gamma_A = \gamma$ hyperbolisch, so heißt $q_\gamma = q$ der *Multiplikator* von γ . Er ist wegen der Bedingung $|q_\gamma| < 1$ eindeutig durch γ bestimmt. Gilt $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, so heißt γ_A *elliptisch*. In diesem Fall ist γ_A vom Typ $z \mapsto az$

2 Mumford-Kurven

mit einem $a \in K$, $|a| = 1$. Gilt $\lambda_1 = \lambda_2$, so heißt γ_A *parabolisch*. In diesem Fall ist γ_A von der Form $z \mapsto z + b$. Zusammenfassend gilt

$$\begin{aligned} \gamma_A \text{ elliptisch oder parabolisch} &\iff \left| \frac{(a+d)^2}{ad-bc} \right| \leq 1, \\ \gamma_A \text{ hyperbolisch} &\iff \left| \frac{(a+d)^2}{ad-bc} \right| > 1. \end{aligned}$$

Für ein $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ und $w \in \mathbb{P}_K^1(K)$ setze

$$L_\Gamma(w) := \{z \in \mathbb{P}_K^1(K) ; \exists (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}, \gamma_n \in \Gamma, \text{ mit } \gamma_i \neq \gamma_j \text{ für } i \neq j \text{ und } \gamma_n(w) \rightarrow z\}.$$

Wenn man in dieser Definition auch Punkte in $\mathbb{P}_K(K')$ für eine Erweiterung K'/K zuließe, so wären sie trotzdem K -wertig, da K vollständig und w K -wertig ist. Sei ferner

$$\begin{aligned} L_\Gamma &:= \bigcup_{w \in \mathbb{P}_K^1(K)} L_\Gamma(w) \text{ die Menge der Limit-Punkte von } \Gamma \text{ und} \\ \Omega_\Gamma &:= \mathbb{P}_K^1 \setminus L_\Gamma \text{ die Menge der gewöhnlichen Punkte von } \Gamma. \end{aligned}$$

Γ heißt *diskontinuierlich*, wenn $L_\Gamma \neq \mathbb{P}_K^1$ und für jedes $w \in \mathbb{P}_K^1(K)$ der topologische Abschluss $\overline{\Gamma w}$ kompakt bezüglich der metrischen Topologie auf $\mathbb{P}_K^1(K)$ ist.

Definition 2.1.1 Eine endlich-erzeugte torsionsfreie diskontinuierliche Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ heißt *Schottky-Gruppe*. Eine *Schottky-Gruppe* ist nach [9, Proposition 2.2.2(a),(b)] diskret und jedes Element von $\Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ ist hyperbolisch.

Notation 2.1.2 Sei Γ eine Schottky-Gruppe mit $\infty \notin L_\Gamma$ und $\gamma = \gamma_A \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ mit einem $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$. Setze

$$\begin{aligned} r_\gamma &:= \frac{\sqrt{|ad-bc|}}{|c|} && ; \quad r_{\gamma^{-1}} = r_\gamma, \\ m_\gamma &:= \gamma^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} && ; \quad m_{\gamma^{-1}} = \gamma(\infty) = \frac{a}{c}, \\ v_\gamma(z) &:= \gamma'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} && ; \quad v_{\gamma^{-1}}(z) = (\gamma^{-1})'(z) = \frac{ad-bc}{(-cz+a)^2}, \\ |v_\gamma(z)| &= \frac{r_\gamma^2}{|z - m_\gamma|^2}, \\ V_\gamma^- &:= \{z \in \mathbb{P}_K^1 ; |v_\gamma(z)| > 1\} = \{z \in \mathbb{P}_K^1 ; |m_\gamma - z| < r_\gamma\}, \\ V_\gamma^+ &:= \{z \in \mathbb{P}_K^1 ; |v_\gamma(z)| \geq 1\} = \{z \in \mathbb{P}_K^1 ; |m_\gamma - z| \leq r_\gamma\}. \end{aligned}$$

Bereiche vom Typ V_γ^- bzw. V_γ^+ heißen ebenfalls *offene* bzw. *abgeschlossene Kreisscheiben*. Ist das Koordinatensystem so gewählt, dass die beiden Fixpunkte von γ

durch $z_1 = 0$ (anziehend) und $z_2 = \infty$ (abstoßend) gegeben sind, so folgt $V_\gamma^+ = \{z; |z| \leq \sqrt{|q_\gamma|}\}$ und $V_\gamma^- = \{z; |z^{-1}| \leq \sqrt{|q_\gamma|}\}$. Nach [9, Lemma 2.2.6(b),(d)] gilt $\gamma(\mathbb{P}_K^1 \setminus V_\gamma^\pm) = V_\gamma^\mp$ und $V_\gamma^+ \cap V_{\gamma^{-1}}^+ = \{\emptyset\}$.

Definition 2.1.3 Sei Γ eine Schottky-Gruppe. Ein *Fundamentalebereich* für Γ ist das Komplement

$$E := \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i \quad \text{bzw.} \quad E^- := \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i^+,$$

wobei $B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{P}_K^1$ bzw. $B_1^+, \dots, B_n^+ \subset \mathbb{P}_K^1$, $n \in \mathbb{N}$, offene bzw. abgeschlossene Kreisscheiben sind, mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(E) = \Omega_\Gamma$,
- (b) $E \cap \gamma(E) = \{\emptyset\}$ für fast alle $\gamma \in \Gamma$,
- (c) $E^- \cap \gamma(E^-) = \{\emptyset\}$ für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$.

Lemma 2.1.4 (vgl. [9, Lemma 2.2.9]) Sei Γ eine Schottky-Gruppe. Setze $\mathfrak{R}(\Gamma) := \{V_\gamma^-; \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}\}$ und $R(\Gamma) := \{\gamma \in \Gamma; V_\gamma^- \text{ ist maximal in } \mathfrak{R}(\Gamma)\}$. Dann ist $R(\Gamma)$ endlich und stabil unter der Abbildung $\Gamma \ni \gamma \mapsto \gamma^{-1}$.

Proposition 2.1.5 (vgl. [9, Proposition 2.2.10]) Sei die Notation wie in 2.1.4.

- (a) $E := \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{\gamma \in R(\Gamma)} V_\gamma^-$ ist ein Fundamentalebereich für Γ .
- (b) $\Gamma = \langle \{\gamma \in R(\Gamma)\} \rangle$.

Die V_γ 's, $\gamma \in R(\Gamma)$, haben den Nachteil, dass es $\alpha, \beta \in \Gamma$ geben kann, derart dass $V_\alpha^- = V_\beta^-$, aber $V_{\alpha^{-1}}^- \neq V_{\beta^{-1}}^-$ oder $V_\alpha^- \subsetneq V_\beta^+ \setminus V_\beta^-$. Daher kann der in 2.1.5 angegebene Fundamentalebereich E für Γ sehr kompliziert aussehen. Um dieses Problem zu beheben, variiert man die Radien der V_γ 's in geeigneter Weise.

Notation 2.1.6 Sei Γ eine Untergruppe von $\text{PGL}_2(K)$ und $\rho : \Gamma \rightarrow \overline{K}^\times$ ein Gruppenhomomorphismus. Setze für ein $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} w_\gamma(z) &:= \rho(\gamma) \cdot v_\gamma(z), \quad \text{so dass } w_{\alpha\beta}(z) = w_\alpha(\beta(z)) \cdot w_\beta(z) \text{ für alle } \alpha, \beta \in \Gamma, \\ W_\gamma^- &:= \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}); |w_\gamma(z)| > 1\} = \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}); |z - m_\gamma| < \sqrt{|\rho(\gamma)|}r_\gamma\}, \\ W_\gamma^+ &:= \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}); |w_\gamma(z)| \geq 1\} = \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}); |z - m_\gamma| \leq \sqrt{|\rho(\gamma)|}r_\gamma\}. \end{aligned}$$

Insbesondere $\gamma(\mathbb{P}_K^1 \setminus W_\gamma^\pm) = W_{\gamma^{-1}}^\mp$ nach [9, Lemma 2.2.4.(b)]. ρ heißt *separierend*, wenn es ein endliches Erzeugendensystem $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ von Γ gibt, derart dass $W_{\alpha_1}^+, \dots, W_{\alpha_g}^+, W_{\alpha_1^{-1}}^+, \dots, W_{\alpha_g^{-1}}^+$ paarweise disjunkt sind. In diesem Fall setze $\alpha_{g+i} := \alpha_i^{-1}$ für $i = 1, \dots, g$. Setze ferner

$$\begin{aligned} F^- &:= \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}); |w_\gamma(z)| < 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma\} = \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{2g} W_{\alpha_i}^+, \\ F &:= \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}); |w_\gamma(z)| \leq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma\} = \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{2g} W_{\alpha_i}^-. \end{aligned}$$

Lemma 2.1.7 (vgl.[9, Lemma 2.2.12(c),(d)]) Sei Γ eine Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(K)$ und $\rho : \Gamma \rightarrow \overline{K}^\times$ ein separierender Homomorphismus. Sei die Notation wie in 2.1.6. Dann gilt

- (a) Für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ gibt es ein $i \in \{1, \dots, 2g\}$ mit $W_\gamma^- \subset W_{\alpha_i}^-$.
- (b) Für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt $\gamma(F) \cap F \neq \{\emptyset\} \iff \gamma \in \{\mathrm{id}, \alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$.
- (c) $\alpha_i(F) \cap F = W_{\alpha_{g+i}}^+ \setminus W_{\alpha_{g+i}}^-$ für alle $i = 1, \dots, g$.

Der Beweis des folgenden Satzes ist kompliziert.

Satz 2.1.8 (vgl.[9, Satz 2.2.14]) Sei Γ eine Schottky-Gruppe und $R(\Gamma)$ wie in 2.1.4. Für alle $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$, gibt es einen separierenden Gruppenhomomorphismus $\rho : \Gamma \rightarrow \overline{K}^\times$ und ein endliches Erzeugendensystem $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ von Γ gibt, derart dass die abgeschlossenen Kreisscheiben $W_{\alpha_1}^+, \dots, W_{\alpha_g}^+, W_{\alpha_1^{-1}}, \dots, W_{\alpha_g^{-1}}$ paarweise disjunkt sind, (vgl. 2.1.6) mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $\alpha_i \in R(\Gamma)$ für alle $i = 1, \dots, g$.
- (b) $q < \sqrt{|\rho(\alpha_i)|} < 1$ für alle $i = 1, \dots, g$.

Insbesondere ist F mit der Notation in 2.1.6 nach 2.1.5(a) und 2.1.4(b) ein Fundamentalbereich für Γ .

Korollar 2.1.9 Schottky-Gruppen sind frei.

Das folgende Beispiel zeigt, wie man Schottky-Gruppen mit Hilfe von 2.1.7 konstruieren kann.

Beispiel 2.1.10 Sei $g \in \mathbb{N}$ und betrachte für $i = 1, \dots, g$ Paare (B_i^-, B_{g+i}^-) bzw. (B_i^+, B_{g+i}^+) offener Kreisscheiben bzw. ihrer (topologischen) Abschlüsse in \mathbb{P}_K^1 . Seien die B_j^\pm 's, $j = 1, \dots, 2g$, paarweise disjunkt und sei $\infty \notin B_j^\pm$ für alle $j = 1, \dots, 2g$. Ferner gebe es $\alpha_1, \dots, \alpha_g \in \mathrm{PGL}_2(K)$, derart dass $\alpha_i(\mathbb{P}_K^1 \setminus B_i^+) = B_{g+i}^-$ für alle $i = 1, \dots, g$. Dann ist $\Gamma := \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \rangle$ eine Schottky-Gruppe und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ bildet ein freies Erzeugendensystem von Γ . Ferner ist $F := \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{2g} B_i^-$ ein Fundamentalbereich für Γ und $\Omega_\Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F)$ ist die Menge der gewöhnlichen Punkte von Γ .

Beweis. Man rechnet direkt nach, dass Γ frei und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ ein freies Erzeugendensystem für Γ ist. Dann konstruiert man einen Gruppenhomomorphismus $\rho : \Gamma \rightarrow \overline{K}^\times$, derart dass mit der Notation in 2.1.6 $B_i^\pm = W_{\alpha_i}^\pm$ für alle $i = 1, \dots, 2g$ gilt. Dann rechnet man wie im Beweis von [9, Lemma 2.2.12] nach, dass F ein Fundamentalbereich für Γ und Ω_Γ die Menge der gewöhnlichen Punkte von Γ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass Γ diskontinuierlich ist. Wegen $\infty \notin L_\Gamma$ reicht es, zu zeigen, dass $\overline{\Gamma w}$ für alle $w \in \mathbb{P}_K^1(K)$ kompakt ist. Da F nach Konstruktion ein Vertretersystem der Bahnen von Γ ist, reicht es, $w \in \mathbb{P}_K^1 \cap F$ zu betrachten. Es bleibt zu zeigen, dass jede Folge $(\gamma_n(w))_{n \in \mathbb{N}}$ mit paarweise verschiedenen $\gamma_n \in \Gamma$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei $\ell(\gamma)$ für ein $\gamma \in \Gamma$ die Länge von γ , d.h. die Anzahl der Faktoren in der reduzierten Darstellung $\gamma = \prod_{i=1}^{\ell(\gamma)} \gamma_i$ von γ . Beachte,

dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ mit $\ell(\gamma) < n$ gibt. Setze für ein $n \in \mathbb{N}$

$$F(n) := \bigcup_{\ell(\gamma) < n} \gamma(F) = \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{r(n)} B_{n,i}$$

mit offenen Kreisscheiben $B_{n,1}, \dots, B_{n,r(n)}$, die wegen $\infty \in F$ in einer größeren offenen Kreisscheibe $B_0 := \{z \in \mathbb{P}_K^1; |z| < c\}$, $c \in |K^\times|$, $c > 0$, enthalten sind, und einem von n abhängigen $r(n) \in \mathbb{N}$. Da F ein Fundamentalbereich für Γ ist, sind fast alle $\gamma_i(w)$'s, $i \in \mathbb{N}$, in $\mathbb{P}_K^1 \setminus F(n)$ und damit in $\bigcup_{i=1}^{r(n)} B_{n,i}$ enthalten. Dann gibt es eine Folge $(B_{n,r(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, derart dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ unendlich viele $\gamma_i(w)$'s, $i \in \mathbb{N}$, in $B_{n,r(n)}$ liegen. Wir können die Folge ohne Einschränkung so wählen, dass

$$B_{n+1,r(n+1)} \subset B_{n,r(n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Höhen der *Kreisringe* $B_{n,r(n)} \setminus B_{n+1,r(n+1)}$ (vgl. 2.2.1) können nur endlich viele Werte annehmen, da sie biholomorphe Invarianten sind und es nur endlich viele Äquivalenzklassen von Kreisscheiben in Ω_Γ modulo Γ gibt. Folglich konvergieren die Radien der Kreisscheiben $B_{n,r(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Nun können wir von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Zahlen $i(n) \in \mathbb{N}$ wählen, derart dass $\gamma_{i(n)}(w) \in B_{n,r(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Radien der $B_{n,r(n)}$'s gegen 0 konvergieren, ist $(\gamma_{i(n)}(w))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge \square

Korollar 2.1.11 *Sei Γ eine Schottky-Gruppe und $\rho : \Gamma \rightarrow \overline{K}^\times$ ein separierender Homomorphismus, der für ein geeignetes $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$, die Bedingungen in 2.1.8 erfüllt. Sei die Notation wie in 2.1.6. Setze*

$$E^\circ := \mathbb{P}_K^1 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^g V_{\alpha_i}^- \cup \bigcup_{i=g+1}^{2g} V_{\alpha_i}^+ \right).$$

Dann ist E° für ein q , das hinreichend nah bei 1 ist, ein vollständiges Vertretersystem. Seien ferner $\beta \in \Gamma$ und $z, z_0 \in E^\circ$. Dann

(a) Für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$|\gamma z - \gamma z_0| \leq \max \left\{ \frac{r_\gamma r_{\gamma\beta^{-1}}}{r_\beta}, r_\gamma, r_{\beta\gamma^{-1}} \right\}.$$

Insbesondere $|\gamma z - \gamma z_0| \xrightarrow{\ell(\gamma) \rightarrow \infty} 0$.

(b) Ist $V \subset \Omega_\Gamma$ affinoid, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $V \cap \gamma(V) = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$ mit $\ell(\gamma) \geq n$, wobei $\ell(\gamma) \in \mathbb{N}$ die Länge von γ ist.

Beweis. Lassen wir die $\rho(\alpha_i)$'s, $i = 1, \dots, g$, gegen 1 streben, so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die V_{α_i} 's, $i = 1, \dots, 2g$, maximal in $\{V_\gamma^+; \gamma \in \Gamma\}$ sind, was die Behauptung über E° zeigt.

(a) Nach [9, Lemma 2.2.6(b)] gilt $\gamma z \in V_{\gamma^{-1}}^+$ und $\gamma z_0 = \gamma \beta^{-1} z_1 \in V_{\beta \gamma^{-1}}^+$. Folglich

$$|\gamma z - m_{\gamma^{-1}}| \leq r_\gamma \xrightarrow{\ell(\gamma) \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad |\gamma z_0 - m_{\beta \gamma^{-1}}| \leq r_{\beta \gamma^{-1}} \xrightarrow{\ell(\gamma) \rightarrow \infty} 0$$

nach [9, Lemma 2.2.4(d)]. Andererseits gilt nach [9, Lemma 2.2.6(c),(d)]

$$|m_{\gamma^{-1}} - m_{\beta \gamma^{-1}}| = \frac{r_{\gamma^{-1}} r_{\beta \gamma^{-1}}}{r_\beta} \xrightarrow{\ell(\gamma) \rightarrow \infty} 0.$$

Dann folgt die Behauptung aus der ultrametrischen Dreiecksungleichung.

(b) Sei $E \subset \Omega_\Gamma$ ein Fundamentalbereich für Γ . Da V affinoid ist, gibt es $\beta_1, \dots, \beta_r \in \Gamma$, $r \in \mathbb{N}$, mit $V \subset \beta_1(E) \cup \dots \cup \beta_r(E)$. Folglich reicht es, zu zeigen, dass $E \cap \gamma(E) \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\gamma \in \Gamma$ gilt. Aber, da Γ frei ist, gibt es für jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ein $n \in \mathbb{N}$, derart dass jedes $\gamma \in \Gamma$ mit $\ell(\gamma) \geq n$ nicht in Γ_0 liegt. \square

Sei Γ eine Schottky-Gruppe mit $\infty \notin L_\Gamma$. Nach 2.1.9 ist Γ frei, etwa von Rang g . Sei die Notation wie in 2.1.6 bzw. 2.1.10. Sei

$$F := \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{2g} W_{\alpha_i}^- = \{z \in \mathbb{P}_K^1; |w_{\alpha_i}(z)| \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, 2g\}$$

der in 2.1.6 angegebene Fundamentalbereich für Γ , der nach 2.1.8 nach einer geeigneten Wahl von $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$, und Erzeugern $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ von Γ existiert, und

$$\Omega_\Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{P}_K^1 \setminus L_\Gamma$$

die Menge der gewöhnlichen Punkte von Γ , auf der Γ diskontinuierlich wirkt.

Definition 2.1.12 Sei Γ eine Schottky-Gruppe und Ω_Γ die Menge der gewöhnlichen Punkte von Γ . Dann heißt $X_\Gamma := \Gamma \setminus \Omega_\Gamma$ die zu Γ assoziierte Mumford-Kurve.

Satz 2.1.13 (vgl. [9, Satz 2.3.2]) Sei Γ eine Schottky-Gruppe.

(a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Struktur einer rigid-analytischen Varietät auf X_Γ , derart dass die Restklassenabbildung $p: \Omega_\Gamma \rightarrow X_\Gamma$ eine rigid-analytische Überlagerung im topologischen Sinne ist.

(b) X_Γ ist eine glatte eigentliche rigid-analytische Kurve vom Geschlecht g .

(c) X_Γ ist die Analytifizierung einer glatten eigentlichen algebraischen Kurve X^{alg} .

(d) Jede meromorphe Funktion auf X_Γ ist eine rationale Funktion auf X^{alg} .

Beweis. (c) folgt im wesentlichen aus (b), der Äquivalenz der Kategorien endlich-erzeugter Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über K und eigentlicher glatter algebraischer Kurven über K und dem Riemann-Roch-Satz, der wiederum aus Kiehls Endlichkeitssatz folgt, wonach die Kohomologie-Gruppen $H^i(X_\Gamma, \mathcal{O}_{X_\Gamma})$ endlich-dimensionale K -Vektorräume sind (dort geht auch die Bedingung ein, dass X_Γ eigentlich ist), und (d) folgt sofort aus (c).

Definition 2.1.14 Eine glatte eigentliche (algebraische) Kurve X über K hat *zerfallende rationale Reduktion*, wenn es ein semistabiles Modell \mathcal{X} von X über R gibt, derart dass die *Reduktion* $\tilde{X} := \mathcal{X} \times_R \text{Spec } k$ von \mathcal{X} über k eine Konfiguration rationaler Kurven ist, die sich in gewöhnlichen Doppelpunkten schneiden.

Satz 2.1.15 (vgl. [9, Satz 4.7.2]) *Sei X eine geometrisch zusammenhängende eigentliche glatte (algebraische) Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$ mit semistabiler Reduktion. Dann sind äquivalent:*

- (a) X ist eine Mumford-Kurve.
- (b) X hat zerfallende rationale Reduktion.
- (c) $\text{rk } H^1(X, \mathbb{Z}) = g$.

Sei X ein glatter affinoider Raum von reiner Dimension 1 über K , der ein formelles Modell \mathcal{X} über R erlaubt, mit Reduktion $\tilde{X} := \mathcal{X} \times_R \text{Spec } k$ und betrachte die kanonische surjektive Reduktionsabbildung

$$\text{red} : X \longrightarrow \tilde{X}; \quad x \longmapsto \tilde{x},$$

wobei \tilde{x} als der abgeschlossene Punkt $x_{R \times_R \text{Spec } k}$ der Erweiterung $x_R : \text{Spec } R \rightarrow \mathbb{A}_R^1$ von x definiert ist.

Definition 2.1.16 Für ein $\tilde{x} \in \tilde{X}$ heißt $X_+(\tilde{x}) := \text{red}^{-1}(\tilde{x})$ die *formelle Faser* von \tilde{x} . Eine zulässige formelle affinoid Varietät $U \subset X$ mit $\rho^{-1}(\tilde{x}) \subset U$ heißt eine *formelle Umgebung der formellen Faser* von \tilde{x} .

Notation 2.1.17 Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}) ; |z| \leq 1\}$ die abgeschlossene und $\mathbb{D}_+ := \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}) ; |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe.

Proposition 2.1.18 (vgl. [9, Proposition 4.1.12]) *Sei X ein glatter formell-analytischer affinoider Raum von reiner Dimension 1 über K mit Reduktion \tilde{X} und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ abgeschlossen.*

- (a) \tilde{x} ist genau dann glatt, wenn $X_+(\tilde{x}) \cong \mathbb{D}_+$.
- (b) \tilde{x} ist genau dann ein gewöhnlicher Doppelpunkt, wenn $X_+(\tilde{x}) \cong A(\varepsilon, 1) := \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}) ; \varepsilon < |z| < 1\}$ mit einem $\varepsilon \in \sqrt{|K^\times|}$, $0 < \varepsilon < 1$.

2.2 Skelette

Definition 2.2.1 Sei $r \in \sqrt{|K^\times|}$ mit $r \leq 1$. Teilmengen von \mathbb{P}_K^1 der Form

$$A^+ := \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}) ; r \leq |z| \leq 1\} \text{ bzw.}$$

$$A := \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}) ; r \leq |z| < 1\} \text{ bzw.}$$

$$A^- := \{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}) ; r < |z| < 1\}$$

für eine geeignete Wahl einer Koordinate z auf \mathbb{P}_K^1 heißen *abgeschlossene* bzw. *halboffene* bzw. *offene Kreisringe*.

$\text{ht}(A) := r$ heißt die *Höhe von A* . Beachte, dass $\text{ht}(A)$ eine biholomorphe Invariante von A ist.

$A^+ \setminus A^-$ heißt der *Rand von A^+* .

Definition 2.2.2 Eine *Standard-Reduktionsabbildung* $\pi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ der projektiven Geraden ist die Abbildung, die einem K -wertigen Punkt x von \mathbb{P}_K^1 seine Reduktion \tilde{x} zuordnet, die als der abgeschlossene Punkt $x_R \times_R \text{Spec } k$ der Erweiterung $x_R : \text{Spec } R \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ von x definiert ist.

Eine *kanonische Reduktionsabbildung* $\pi : \mathbb{B}_K^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ einer abgeschlossenen Kreisscheibe \mathbb{B}_K^1 ist die Abbildung, die einem K -wertigen Punkt x von \mathbb{B}_K^1 seine Reduktion \tilde{x} zuordnet, die als der abgeschlossene Punkt $x_R \times_R \text{Spec } k$ der Erweiterung $x_R : \text{Spec } R \rightarrow \mathbb{A}_R^1$ von x definiert ist.

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{P}_K^1(K)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$. Man sagt, eine (*Standard- oder kanonische*) *Reduktionsabbildung* π *separiert* a_1, \dots, a_n , wenn $\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)$ paarweise verschieden sind.

Definition 2.2.3 Sei Z ein geometrisch zusammenhängender rigid-analytischer Raum, der lokal planar ist, d.h. sich durch offene affinoide Teilbereiche von \mathbb{P}_K^1 überdecken lässt.

Ein *semistabiles Skelett von Z* ist eine surjektive Abbildung $\rho : Z \rightarrow S$ in einen Graphen S mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Für einen Knoten $v \in V(S)$ in S ist $\rho^{-1}(v) \cong \mathbb{P}_K^1$ oder $\rho^{-1}(v) \cong \mathbb{B} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{B}_i^-$, wobei $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}_K^1$ eine abgeschlossene Kreisscheibe und $\mathbb{B}_i^- \subset \mathbb{B}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, maximale offene Kreisscheiben in \mathbb{B} sind.
- (ii) Für eine Kante $e \in E(S)$ in S ist $\rho^{-1}(e)$ isomorph zu einem offenen Kreisring $A(\varepsilon(e), 1)^-$ der Höhe $\varepsilon(e)$.
- (iii) ρ ist stetig, d.h. für zwei benachbarte, d.h. durch eine Kante miteinander verbundene, Knoten $v_-, v_+ \in V(S)$ und ihre verbindende Kante $e \in E(S)$ in S ist $\rho^{-1}(\{v_-, e, v_+\})$ eine zulässige Untervarietät von Z .

Man sagt, ein *semistabiles Skelett von Z* *separiert* a_1, \dots, a_n , wenn diese Punkte derart auf Knoten in S abgebildet werden, dass für alle $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, a_i und a_j entweder auf verschiedene Knoten abgebildet werden oder, wenn sie auf

denselben Knoten abgebildet werden, unterschiedliche Reduktion unter der kanonischen Reduktionsabbildung haben.

Ein *semistabiles Skelett* von Z heißt *stabil* bzgl. a_1, \dots, a_n , $n \geq 3$, wenn es a_1, \dots, a_n separiert und jeder Knoten $v \in V(S)$ mit mindestens drei anderen Knoten benachbart ist, oder es mindestens zwei a_i 's, $i = 1, \dots, n$, mit $\rho(a_i) = v$ gibt oder wenn er mit mindestens zwei anderen Knoten benachbart ist und es mindestens ein a_i , $i = 1, \dots, n$, mit $\rho(a_i) = v$ gibt.

Ein Skelett $\rho : Z \rightarrow S$ von Z heißt *baumartig*, wenn S baumartig ist.

Satz 2.2.4 (vgl. [9, Lemma 2.4.5]) *Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{P}_K^1(K)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, paarweise verschieden. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes baumartiges stabiles a_1, \dots, a_n separierendes Skelett von \mathbb{P}_K^1 .*

Proposition 2.2.5 *Sei Γ eine Schottky-Gruppe von Rang $g \in \mathbb{N}$ und $F := \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{2g} W_i^- \subset \Omega = \Omega_\Gamma$ ein Fundamentalbereich für Γ , wobei die W_i^- 's offene Kreisscheiben und die W_i^+ 's ihre Abschlüsse in \mathbb{P}_K^1 sind. Dann gilt*

(a) *Es gibt ein semistabiles baumartiges Skelett $\rho_F : F \rightarrow S_F$ von F mit $V(S_F) = \{v_1, \dots, v_{2g}\}$ und $\rho^{-1}(v_i) = W_i^+ - W_i^-$ für alle $i = 1, \dots, 2g$.*

(b) *Es gibt ein semistabiles baumartiges Skelett $\rho_\Omega : \Omega \rightarrow S_\Omega$ von Ω , das ρ_F ausdehnt, so dass Γ kanonisch auf S_Ω wirkt.*

(c) *Es gibt ein von ρ_Ω induziertes semistabiles Skelett $\rho_X : X \rightarrow S_X$ von X , das der Quotient von ρ_Ω bzgl. der Wirkung von Γ ist. Insbesondere ist die Quotientenabbildung $p_S : S_\Omega \rightarrow S_X$ die universelle Überlagerung von S_X in der Kategorie der Graphen.*

Beweis. (a) Betrachte den zu einem separierenden Erzeugendensystem $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ von Γ assoziierten Fundamentalbereich

$$F = \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{2g} W_{\alpha_i}^-$$

mit $\alpha_{i+g} := \alpha_i^{-1}$ für alle $i = 1, \dots, g$ (vgl. 2.1.6). Wähle Punkte $a_{i,0} \in W_i^-$ und $a_{i,1} \in W_i^+ \setminus W_i^-$, $i = 1, \dots, 2g$. Dann gibt es nach 2.2.4 ein diese Punkte separierendes stabiles Skelett $\rho_F : F \rightarrow S_0$ von F und S_0 erfüllt die Behauptung.

(b) Das in (a) konstruierte Skelett S_0 hat $2g$ terminale Knoten v_1, \dots, v_{2g} . Daher bildet jedes α_i den Bereich $\rho^{-1}(v_i)$ bijektiv auf $\rho^{-1}(v_{i+g})$ ab. So erhalten wir ein Skelett

$$S_1 := S_0 \cup \bigcup_{i=1}^{2g} \alpha_i(S_0)$$

durch Verkleben von S_0 mit den Skeletten $\alpha_i(S_0)$ von $\alpha_i(F)$ entlang v_{i+g} , $i = 1, \dots, g$. Nach Konstruktion ist S_1 ein Skelett von

$$\Omega(n) := \bigcup_{\gamma \in \Gamma; \ell(\gamma) \leq n} \gamma(F)$$

für $n = 1$. Induktiv erhalten wir so für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Skelett S_n von $\Omega(n)$ und damit ein Skelett $S_\Omega := \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ von $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega(n)$. Γ wirkt durch Linkstranslation auf S_Ω und ist verträglich mit der Wirkung auf Ω .

(c) Das Skelett S_X erhält man aus S_0 durch Identifizieren der terminalen Knoten v_i und v_{i+g} , $i = 1, \dots, g$. Dies ist wie in (a) erklärt verträglich mit der Wirkung von Γ auf Ω . \square

Definition 2.2.6 Sei S ein Skelett und fixiere eine Orientierung auf den Kanten von S . Ein Pfad $c := e_1 + \dots + e_n$, $n \in \mathbb{N}$, in S ist eine endliche Folge aufeinander folgender orientierter Kanten $e_i \in E(S)$, $i = 1, \dots, n$.

Korollar 2.2.7 Sei die Notation wie in Proposition 2.2.5. Fixiere einen Knoten $v_0 \in V(S_\Omega)$ und bezeichne für zwei Knoten $v_1, v_2 \in V(S_\Omega)$ mit

$$\overline{v_1, v_2} := \sum_{e \in E(S_\Omega) \cap \overline{v_1, v_2}} e$$

den (kürzesten) Pfad von v_1 nach v_2 in S_Ω . Dann identifiziert die natürliche Abbildung

$$\Gamma \longrightarrow H_1(S_X, \mathbb{Z}); \alpha \longmapsto c_\alpha := \left(\overline{v_0, \alpha v_0} = \sum_{e \in E(S_\Omega) \cap \overline{v_0, \alpha v_0}} e \longmapsto \sum_{e \in E(S_\Omega) \cap \overline{v_0, \alpha v_0}} p_S(e) \right)$$

die Abelisierung $H = \Gamma_{\text{ab}} = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ von Γ mit der ersten Homologie-Gruppe $H_1(S_X, \mathbb{Z})$ von S_X mit Koeffizienten in \mathbb{Z} .

Definition 2.2.8 (a) Mit der Notation und unter den Annahmen von 2.2.6 ist die Länge $\ell(c)$ eines Pfads $c = e_1 + \dots + e_n$ definiert durch

$$\ell(c) := - \sum_{i=1}^n \log |\varepsilon(e_i)|,$$

wobei $\varepsilon(e_i) := \text{ht}(\rho^{-1}(e_i))$.

(b) Für zwei Pfade $p = \sum_{i=1}^m e_i$, $p' = \sum_{j=1}^n e'_j$ ist die Paarung $[p, p']$ definiert durch

$$[p, p'] := \sum_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} [e_i, e'_j],$$

wobei

$$[e_i, e'_j] := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } e_i \neq e'_j, \\ -\log(\text{ht}(\rho^{-1}(\{e\}))) & , \text{ falls } e = e_i = e'_j, \\ \log(\text{ht}(\rho^{-1}(\{e\}))) & , \text{ falls } e = e_i = -e'_j, \end{cases}$$

für alle $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Das nächste Lemma zeigt, dass der in 2.2.8 eingeführte Längenbegriff nicht von der Wahl eines Skeletts von Z abhängt.

Lemma 2.2.9 *Mit der Notation in 2.2.8 sei $\rho' : Z \rightarrow S'$ ein weiteres semistabiles Skelett von Z . Sei eine Abbildung $S' \rightarrow S$ in der Kategorie der Graphen gegeben, die Unterbäume zusammenzieht und $\pi \circ \rho' = \rho$ erfüllt. So erhalten wir zwei Längenbegriffe je nach gewähltem Skelett. Seien $v'_1, v'_2 \in V(S')$ Knoten in S' . Dann hat der Pfad $\overline{v'_1, v'_2}$ in S' die gleiche Länge wie der Pfad $\overline{\pi(v'_1), \pi(v'_2)}$ in S .*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\pi(v'_1)$ und $\pi(v'_2)$ durch genau eine Kante $e \in E(S)$ miteinander verbunden sind. Sei $c := (v'_1, e'_1, w'_1, \dots, w'_{n-1}, e'_n, v'_2)$ mit Kanten $e'_i \in E(S')$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und Knoten $w'_j \in V(S')$, $j = 1, \dots, n-1$, die Kette in S' , die von v'_1 nach v'_2 führt, wobei wir ohne Einschränkung annehmen, dass w'_i und w'_{i+1} für alle $i = 1, \dots, n-2$ (falls $n > 2$) durch genau eine Kante e'_{i+1} miteinander verbunden sind. Dann folgt $\rho'^{-1}(c) = \rho^{-1}(e)$. Da

$$\begin{aligned} \text{ht}(A(r_1 r_2)^-) &= \text{ht}(\{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}); r_1 r_2 < |z| < 1\}) \\ &= r_1 r_2 \\ &= \text{ht}(\{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}); r_1 < |z| < 1\}) \cdot \text{ht}(\{z \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K}); r_2 < |z| < 1\}) \\ &= \text{ht}(A(r_1)^-) \cdot \text{ht}(A(r_2)^-) \end{aligned}$$

für alle $r_1, r_2 \in \sqrt{|K^\times|}$, $r_1, r_2 \leq 1$, zeigt dies die Behauptung □

Notation 2.2.10 Für jedes $\alpha \in \Gamma$, $\bar{\alpha} \neq 1$, gibt es eine Achse $x_\alpha \in S_\Omega$, die wir vom anziehenden Fixpunkt z_α^+ von α hin zum abstoßenden Fixpunkt z_α^- orientieren. Bezeichne mit c_α den Teil von x_α , der zum Fundamentalbereich von $\alpha^{\mathbb{Z}}$ gehört. Beachte, dass c_α ein endlicher Pfad in S_Ω ist. Sei $c_\alpha = e_1 + \dots + e_r$ mit aufeinander folgenden Kanten $e_1, \dots, e_r \in E(S_\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$, in S_Ω mit der induzierten Orientierung von c_α . Dann ist

$$\overline{c_\alpha} := \overline{\rho_S(c_\alpha)} := \sum_{i=1}^r p_S(e_i) \in Z_1(S_X, \mathbb{Z}) = H_1(S_X, \mathbb{Z})$$

eine 1-Kette. Ihre Homologie-Klasse in $H_1(S_X, \mathbb{Z})$ kann über $H_1(S_X, \mathbb{Z}) \cong H$ mit $\bar{\alpha}$ identifiziert werden.

Korollar 2.2.11 *Die Abbildung*

$$[-, -] : H_1(S_X, \mathbb{Z}) \times H_1(S_X, \mathbb{Z}) \longrightarrow |K^\times|; \quad (p_S(c), p_S(c')) \longmapsto \sum_{i,j=1}^n m_i m'_j [e_1, e_2],$$

wobei $c := \sum_{i=1}^n m_i e_i$, $c' = \sum_{i=1}^n m'_i e_i \in S$, $m_i, m'_i \in \mathbb{Z}$, $\{e_i; i = 1, \dots, n\}$ eine Basis von $E(S)$ ist und

$$[e_1, e_2] := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } e_1 \neq \pm e_2, \\ -\log|\varepsilon(e)| & , \text{ falls } e_1 = e_2 =: e, \\ \log|\varepsilon(e)| & , \text{ falls } e_1 = -e_2 =: e, \end{cases}$$

wobei wie oben $\varepsilon(e) := \text{ht}(\rho_\Omega^{-1}(e))$, ist eine positiv-definite symmetrische Bilinearform.

Lemma 2.2.12 *Sei $e \in E(S_\Omega)$ eine Kante in S_Ω . Wenn ein $\gamma \in \Gamma$ die Kante e fest lässt, dann folgt $\gamma = \text{id}$.*

Beweis. Angenommen, $\gamma \neq \text{id}$. Es gilt wie oben $\rho_\Omega^{-1}(e) = A(\varepsilon(e), 1)^-$. Nach 2.1.11(b) gilt für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$

$$A(\varepsilon(e), 1)^- \cap \gamma^n A(\varepsilon(e), 1)^- = \emptyset,$$

da $A(\varepsilon(e), 1)^-$ affinoid ist. Dies widerspricht der Annahme, dass γ die Kante e fest lässt. \square

2.3 Meromorphe Funktionen

Sei K algebraisch abgeschlossen und X eine glatte projektive geometrisch zusammenhängende rigid-analytische Kurve über K und \mathcal{M} die Garbe der meromorphen Funktionen auf X . Jedes nicht-konstante $f \in \mathcal{M}(X)$ definiert eine endliche Überlagerung $X \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ und die Teilmengen

$$U_\alpha^0 := \{x \in X; |f(x)| \leq \alpha\} \quad \text{und} \quad U_\alpha^\infty := \{x \in X; |f(x)| \geq \alpha\}$$

sind für alle $\alpha \in |K^\times|$ affinoid. Sei $U \subset X$ affinoid offen. Jedes $m \in \mathcal{M}(U)$ hat einen wohldefinierten Divisor $\text{div}(m)$. Hat U eine kanonische irreduzible Reduktion \tilde{U} , so ist die Norm $|m|$ von m wohldefiniert, denn in diesem Fall ist die Sup-Norm auf $\mathcal{O}_X(U)$ multiplikativ und setzt sich zu einer Bewertung auf $\mathcal{M}(U) = \text{Frac}(\mathcal{O}(U))$ fort. Insbesondere gilt

$$|m| = |f| \cdot |g|^{-1},$$

falls $m = f \cdot g^{-1}$ mit $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$. Beachte, dass jede Einschränkung

$$\mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{M}(U'),$$

wobei $U' \subset U$ ein nicht-leerer formeller Teilbereich ist, die Normen meromorpher Funktionen auf X invariant lässt.

Sei \mathcal{U} eine formelle Überdeckung von X und $\tilde{X} := \tilde{X}_{\mathcal{U}}$ die zugehörige kanonische Reduktion von X . Seien $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ die irreduziblen Komponenten von \tilde{X} und wähle offene dichte affine Teilmengen $\tilde{U}_i \subset \tilde{X}_i$, $i = 1, \dots, n$, die offen in \tilde{X} sind. Sei $U_i \subset X$ für alle $i = 1, \dots, n$ (die generische Faser) eine(r) Hochhebung von \tilde{U}_i nach R . Für jedes $m \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ definieren wir die *Norm von m über \tilde{X}_i* für alle $i = 1, \dots, n$ durch

$$|m|_i := |m|_{U_i}$$

(beachte, dass $|m|_i$ nicht von der Wahl von \tilde{U}_i bzw. U_i , sondern nur von \tilde{X}_i abhängt). Es gibt Konstanten $c_i \in K^\times$, $i = 1, \dots, n$, mit

$$|m_i| = |c_i|$$

für alle $i = 1, \dots, n$. Daher gilt

$$|c_i^{-1} \cdot m|_i = 1$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und $\widetilde{c_i^{-1} \cdot m}$ reduziert sich folglich für alle $i = 1, \dots, n$ zu einer rationalen Funktion $\widetilde{c_i^{-1} \cdot m}$ auf \tilde{X}_i . Ihr Divisor auf der Normalisierung \tilde{X}' von \tilde{X} hängt nur von m und nicht von der Wahl von c_i ab. Folglich können wir die *Ordnung von m in einem $\tilde{y} \in \tilde{X}'_i$* für alle $i = 1, \dots, n$ durch

$$\text{ord}_{\tilde{y}}(m) := \text{ord}_{\tilde{y}}(c_i^{-1} \cdot m)$$

definieren, wobei \tilde{X}'_i das Urbild von \tilde{X}_i in \tilde{X}' ist.

Lemma 2.3.1 (Einheitensatz für reduzierte Kreisinge, relative Version)
 Sei $U := \text{Sp}B$ eine zusammenhängende affinoid Varietät und $A = A(r, R) \subset \mathbb{P}_K^1$, $r, R \in \sqrt{|K^\times|}$, $r < R$, ein Kreisring um 0 vom inneren Radius r und äußeren Radius R . Dann

$$\mathcal{O}_{U \times \mathbb{P}_K^1}(A)^\times = \left\{ c \cdot \zeta^n \cdot (1 + h); c \in B^\times, n \in \mathbb{Z}, h \in \mathcal{O}_{U \times \mathbb{P}_K^1}(U \times A), |h|_{U \times A} < 1 \right\},$$

wobei ζ eine Koordinate auf \mathbb{P}_K^1 ist.

Beweis. Es reicht, die " \subset "-Inklusion zu zeigen. Nach [2, Lemma 9.7.1/1] hat jedes $u \in \mathcal{O}_{U \times \mathbb{P}_K^1}(U \times A)^\times$ eine Laurent-Entwicklung

$$u = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i \cdot \zeta^i,$$

wobei $c_i \in B$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, mit einem dominanten Term $c_n \cdot \zeta^n$, $c_n \in B^\times$, $n \in \mathbb{Z}$, wobei "dominant"

$$1 > \max_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} \{|c_n^{-1} \cdot c_i|_B R^{i-n}, |c_n^{-1} \cdot c_i|_B r^{i-n}\}$$

bedeutet. Die Voraussetzung, dass U zusammenhängend ist, benötigt man, da n auf verschiedenen Zusammenhangskomponenten von U verschiedene Werte annehmen könnte, wenn U nicht zusammenhängend wäre. Setzen wir

$$h := c_n^{-1} \cdot \sum_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}} c_i \cdot \zeta^i \in \mathcal{O}_{U \times \mathbb{P}_K^1}(U \times A),$$

so hat

$$u = c_n \cdot \zeta^n \cdot (1 + h)$$

die geforderte Gestalt. □

Proposition 2.3.2 *Sei $m \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und seien $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_r \in \tilde{X}'$, $r \in \mathbb{N}$, sämtliche Punkte, die über \tilde{x} liegen. Ist \tilde{x} glatt oder ein gewöhnlicher Doppelpunkt, so folgt*

$$\deg(\operatorname{div}(m|_{X_+(\tilde{x})})) = \sum_{i=1}^r \operatorname{ord}_{\tilde{y}_i}(m).$$

Beweis. Betrachte zunächst den Fall, dass \tilde{x} glatt ist. Dann ist $X_+(\tilde{x})$ nach 2.1.18(a) eine offene Kreisscheibe. Sei ζ eine Koordinate auf $X_+(\tilde{x})$. Da m ein Quotient analytischer Funktionen ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass m keine Pole in $X_+(\tilde{x})$ hat. Ferner können wir ohne Einschränkung $|m| = 1$ in einer offenen Umgebung von \tilde{x} annehmen. Dann gibt es eine Potenzreihendarstellung

$$m|_{X_+(\tilde{x})} = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \zeta^i \in R[[\zeta]],$$

wobei $d_i \in K$ für alle $i = 0, 1, \dots$ und

$$\zeta : X_+(\tilde{x}) \longrightarrow \overline{\mathbb{G}}_{m,K}$$

eine Koordinate auf $X_+(\tilde{x})$ mit $\operatorname{ord}_{\tilde{x}}(\zeta) = 1$ ist. Die Potenzreihe auf der rechten Seite dieser Gleichheit hat einen dominanten Term vom Grad $i_0 = \operatorname{ord}_{\tilde{x}}(m)$ auf der Peripherie von $X_+(\tilde{x})$. Folglich hat m nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz genau i_0 Nullstellen in $X_+(\tilde{x})$.

Betrachte nun den Fall, dass \tilde{x} ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist. Dann ist $X_+(\tilde{x})$ nach 2.1.18(b) ein (offener) Kreisring. Sei ε die Höhe von $X_+(\tilde{x})$. Wir können

ohne Einschränkung $r = 2$ annehmen. Sei \tilde{X}_i die irreduzible Komponente von \tilde{X}' , die \tilde{y}_i , $i = 1, 2$, enthält. Insbesondere $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$ genau dann, wenn \tilde{x} auf einer einzigen Komponente von \tilde{X} liegt. Sei

$$\zeta : X_+(\tilde{x}) \longrightarrow \overline{\mathbb{G}}_{m,K}$$

ähnlich wie oben eine Koordinate auf $X_+(\tilde{x})$ mit $\text{ord}_{\tilde{y}_1}(\zeta) = 1$. Für ein $c \in K^\times$, $|c| = \epsilon$, ist $\eta := c \cdot \zeta^{-1} \in \hat{\mathcal{O}}_X(X_+(\tilde{x}))$ eine Koordinate auf $X_+(\tilde{x})$ mit $\text{ord}_{\tilde{y}_2}(\eta) = 1$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass m keine Polstellen auf $X_+(\tilde{x})$ hat und $|m| = 1$ in einer offenen Umgebung von \tilde{x} . Dann besitzt m eine Laurent-Entwicklung

$$m = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \zeta^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i c^{-i} \eta^i \in R[[\zeta, \zeta^{-1}]]$$

auf $X_+(\tilde{x})$. Nach 2.3.1 erfüllt der Koeffizient d_{i_1} des Terms $d_{i_1} \zeta^{i_1}$ vom Grad $i_1 := \text{ord}_{\tilde{y}_1}(m)$ die Bedingung $|d_{i_1}| = |m|_1$ und ist dominant auf der Komponente der Peripherie von $X_+(\tilde{x})$, die zu \tilde{y}_1 gehört. Genauso erfüllt der Koeffizient d_{i_2} des Terms $d_{i_2} \zeta^{i_2}$ vom Grad $i_2 := \text{ord}_{\tilde{y}_2}(m)$ die Bedingung $|d_{i_2}| = |m|_1$ und ist dominant auf der Komponente der Peripherie von $X_+(\tilde{x})$, die zu \tilde{y}_2 gehört. Dann sieht man genauso wie im Fall, in dem \tilde{x} glatt ist, dass m $i_1 + i_2$ Nullstellen in $X_+(\tilde{x})$ hat. \square

Hat m im Beweis von 2.3.2 keine Null- oder Polstellen auf $X_+(\tilde{x})$, so folgt $i_1 + i_2 = 0$ und somit

$$|m|_2 = |d_{i_1} c^{i_1}| = |c|^{i_1} |m|_1.$$

Korollar 2.3.3 *Sei die Notation wie oben und $m \neq 0$ eine meromorphe Funktion auf X , die keine Null- und Polstellen auf $X_+(\tilde{x})$ hat, wobei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist. Seien $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in \tilde{X}'$ die Punkte, die über \tilde{x} liegen, und \tilde{X}_1 bzw. \tilde{X}_2 die zugehörigen irreduziblen Komponenten, wobei $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$, wenn \tilde{x} auf einer einzigen Komponente liegt. Dann gilt*

$$|m|_2 = \epsilon^{i_1} |m|_1.$$

2.4 Einheitensatz

Lemma 2.4.1 *Sei $B \subset \mathbb{P}_K^1$ ein Teilbereich mit $\infty \notin B$, der zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe isomorph ist. Dann ist B eine Kreisscheibe im gewöhnlichen Sinne, d.h. es gibt eine meromorphe Funktion ζ auf \mathbb{P}_K^1 , derart dass*

$$B = \{x \in \mathbb{P}_K^1; |\zeta(x)| \leq 1\}.$$

Beweis. Sei $b \in B$. Nach [9, Lemma 4.2.9] gibt es eine meromorphe Funktion ζ auf \mathbb{P}_K^1 mit $\zeta(b) = 0$ und $\text{Pol}(\zeta) = \infty$, derart dass $\zeta|_B$ eine Koordinate auf B ist. Daraus folgt die Behauptung. \square

Satz 2.4.2 (Einheitensatz) *Seien $B_0^-, \dots, B_n^- \subset \mathbb{P}_K^1$, $n \in \mathbb{N}$, offene paarweise disjunkte Kreisscheiben und*

$$\Omega^+ := \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=0}^n B_i^-.$$

Sei $\infty \in B_0^-$, wähle K -wertige Punkte $a_i \in B_i^-(K)$, $i = 1, \dots, n$, und setze

$$\epsilon_i := \zeta - a_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(\Omega^+)^\times$$

für alle $i = 1, \dots, n$, wobei ζ eine Koordinate auf \mathbb{P}_K^1 ist. Dann

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(\Omega^+)^\times = \left\{ c \cdot \prod_{i=1}^n \epsilon_i^{m_i} \cdot (1+h); c \in K^\times, m_i \in \mathbb{Z}, h \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(\Omega^+), |h|_{\Omega^+} < 1 \right\}.$$

Beachte, dass die a_i 's, $i = 1, \dots, n$, nicht eindeutig bestimmt sind. Man kann jedes $a_i \in B_i^-(K)$ nehmen.

Beweis. Es reicht, die " \subset "-Inklusion zu zeigen. Sei

$$\rho_{\Omega^+} = \rho : \Omega^+ \rightarrow S_{\Omega^+} = S$$

ein semistabiles Skelett von Ω^+ und seien $v(B_0^-), \dots, v(B_n^-)$ die terminalen Knoten von S , die zu B_0^-, \dots, B_n^- gehören. Dann fehlen die Reduktionen $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_n \in \tilde{\Omega}^+ \setminus \text{Sing}(\tilde{\Omega}^+)$ von a_0, \dots, a_n in den zu $v(B_0^-), \dots, v(B_n^-)$ assoziierten irreduziblen Komponenten der Reduktion $\tilde{\Omega}^+$ von Ω^+ und wir können S durch terminale Kanten e_i , $i = 1, \dots, n$, sowie eine Kante $e_0 \in E(S)$ und einen terminalen Knoten $v(B_0^-)_{\text{term}}$ verfeinern, wobei e_i für alle $i = 1, \dots, n$ von $v(B_i^-)$ ausgeht und e_0 den Knoten $v(B_0^-)$ mit dem Knoten $v(B_0^-)_{\text{term}}$ verbindet. Auf diese Weise erhalten wir ein neues semistabiles Skelett

$$\rho' : \Omega^+ \rightarrow S'$$

von Ω^+ , in dem $v(B_0^-)$ nicht mehr terminal ist, wohl aber $v(B_0^-)_{\text{term}}$. Sei

$$A_i := \rho'^{-1}(e_i) \subset \Omega^+$$

für alle $i = 1, \dots, n$,

$$A_0 := \rho'^{-1}(\{e_0, v(B_0^-)_{\text{term}}\})$$

und $u \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(\Omega^+)^{\times}$. Dann ist $u|_{A_i}$ nach 2.3.1 für alle $i = 0, \dots, n$ von der Form

$$u|_{A_i} = c_i \cdot \epsilon_i^{m_i} \cdot (1 + h_i)$$

mit $c_i \in K^{\times}$, $m_i := \text{ord}_{\tilde{a}_i}(u) \in \mathbb{Z}$, $h_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(A_i)$, $|h_i|_{A_i} < 1$. Beachte, dass nach 2.4.1 $m_0 = 0$. Setze

$$w := u \cdot \prod_{i=1}^n \epsilon_i^{-m_i},$$

also

$$w|_{A_i} = c_i \cdot (1 + h_i)$$

für alle $i = 0, \dots, n$. Ist die Reduktion \tilde{w} von w konstant, so ist nichts zu zeigen. Sei also \tilde{w} nicht konstant. Seien $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_s$, $s \in \mathbb{N}$, die irreduziblen Komponenten (der Normalisierung) von \tilde{X} und sei X_i für alle $i = 1, \dots, s$ eine dichte offene affinoide Teilmenge der generischen Faser der Hochhebung von $\tilde{X}_i \setminus \text{Sing}(\tilde{X})$ nach R . Da \tilde{w} nicht konstant ist, gibt es ein $i_1 = 1, \dots, s$, so dass es auf $\tilde{X}_{i_1} \setminus \text{Sing}(\tilde{X})$ ohne Einschränkung eine Nullstelle hat. Dann hat \tilde{w} nach 2.3.2 eine Polstelle auf \tilde{X}_{i_1} . Sei $v_{i_1} \in V(S')$ der zu \tilde{X}_{i_1} assoziierte Knoten in S' , $v_{i_2} \in V(S')$, $i_2 = 1, \dots, s$, $i_2 \neq i_1$, ein mit v_{i_1} benachbarter Knoten in S' und \tilde{X}_{i_2} die zu v_{i_2} assoziierte irreduzible Komponente von \tilde{X} . Da w keine Null- und Polstellen in singulären formellen Fasern von Ω^+ hat, hat es folglich nach 2.3.3 eine Nullstelle auf \tilde{X}_{i_2} , und

$$|w|_{X_{i_1}} =: |c'_{i_1}| < |c'_{i_2}| := |w|_{X_{i_2}}$$

mit $c'_{i_1}, c'_{i_2} \in K^{\times}$. Da S' baumartig ist, erhalten wir so induktiv eine aufsteigende Kette

$$|c'_{i_1}| < |c'_{i_2}| < \dots < |c'_{i_m}| := |w|_{X_{i_m}}$$

mit einem $m \in \{1, \dots, s\}$. Man kann diese Kette beliebig lange fortsetzen. Da \tilde{X} nur $s \in \mathbb{N}$ irreduzible Komponenten hat, führt dies zu einem Widerspruch. \square

Korollar 2.4.3 (Einheitsatz, relative Version) *Seien die Notation und die Voraussetzungen wie in 2.4.2. Ferner sei $U = \text{Sp } B$ eine zusammenhängende affinoide Varietät. Dann*

$$\mathcal{O}_{U \times \mathbb{P}_K^1}(U \times \Omega^+)^{\times} = \left\{ c \cdot \prod_{i=1}^n \epsilon_i^{m_i} \cdot (1 + h); c \in B^{\times}, m_i \in \mathbb{Z}, h \in \mathcal{O}_{U \times \mathbb{P}_K^1}(U \times \Omega^+), |h|_{U \times \Omega^+} < 1 \right\}.$$

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass K algebraisch abgeschlossen ist. Sei $u \in \mathcal{O}_{U \times \mathbb{P}_K^1}(U \times \Omega^+)^{\times}$ und $x \in U$. Dann hat $u|_{\{x\} \times \Omega^+}$ nach 2.4.2 die Gestalt

$$u|_{\{x\} \times \Omega^+} = c_x \cdot \prod_{i=1}^n \epsilon_i^{m_i} \cdot (1 + h_x)$$

mit einem $c_x \in K^\times$, ϵ_i und m_i für alle $i = 0, \dots, n$ wie in 2.3.1 bzw. der Behauptung und einem $h_x \in \mathcal{O}_{\{x\} \times \Omega^+}(\{x\} \times \Omega^+)$, $|h_x|_{\{x\} \times \Omega^+} < 1$ (beachte, dass c_x und h_x in dieser Darstellung nicht eindeutig bestimmt sind). Da U zusammenhängend ist, hängt m_i für alle $i = 0, \dots, n$ nicht von der Wahl von x ab. Setze wie im Beweis von 2.4.2

$$v := \prod_{i=0}^n \epsilon^{-m_i} \cdot u,$$

d.h.

$$v|_{\{x\} \times \Omega^+} = c_x \cdot (1 + h_x).$$

Normiere h_x für ein $z \in \Omega^+$ durch $\sigma_z^* h_x \equiv 0$, wobei

$$\sigma_z : U \longrightarrow U \times \Omega; \quad u \longmapsto (u, z),$$

und betrachte

$$w_z := (v|_{U \times \{z\}})^{-1} \cdot v = 1 + h_z$$

mit einem $h_z \in \mathcal{O}_{U \times \Omega^+}(U \times \Omega^+)$ mit

$$h_z(x, z) = 0$$

für alle $x \in U$. Insbesondere

$$|h_z|_{U \times \Omega^+} < 1.$$

Da dies für alle $z \in \Omega^+$ gilt, folgt daraus die Behauptung. \square

2.5 Trivialisierungssatz

Definition 2.5.1 Sei X ein rigid-analytischer Raum. Ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} heißt *kohärent*, wenn es eine zulässige affinoide Überdeckung $\mathcal{U} = (\mathrm{Sp} A_i)_{i \in I}$ von X gibt, so dass für alle $i \in I$

$$\mathcal{F}|_{\mathrm{Sp} A_i} = M_i \otimes_A A_i$$

gilt, wobei M_i ein endlicher A_i -Modul ist.

Satz 2.5.2 (Kiehls "Theorem A" und "Theorem B") (vgl. [2, Theorem 9.4.3])
 Sei $X := \mathrm{Sp} A$ eine affinoide Varietät und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. Dann sind äquivalent:

- (a) \mathcal{F} ist ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul.
- (b) $\mathcal{F}(X)$ ist zu einem endlichen A -Modul assoziiert.

Ist \mathcal{F} ein invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul, so ist $\mathcal{F}(X) = M$ nach 2.5.2 ein lokal freier A -Modul von Rang 1. Ist A faktoriell, so wird \mathcal{F} von einem globalen Schnitt erzeugt.

Sei $\Gamma \subset \mathrm{PGL}(2, K)$ eine Schottky-Gruppe und $\Omega = \Omega_\Gamma = \mathbb{P}_K^1 \setminus L_\Gamma$ die Menge der gewöhnlichen Punkte von Γ , wobei L_Γ die Menge der Limit-Punkte von Γ ist.

Satz 2.5.3 (Trivialisierungssatz) *Jedes Geradenbündel L auf Ω (vgl. 3.1.1(b)) ist trivial.*

Beweis. Sei

$$\rho : \Omega \rightarrow \widehat{S}$$

ein semistabiles Skelett von Ω . Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $\widehat{S}(n)$ der vollständige Unterbaum von \widehat{S} , der alle Knoten enthält, die Abstand $\leq n$ von $\rho(z_0)$ haben, wobei der Abstand zwischen zwei benachbarten Knoten 1 ist, und

$$\Omega_n := \rho^{-1}(\widehat{S}(n)).$$

Beachte, dass $\Omega_n \subset \mathbb{P}_K^1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei \mathcal{L} die invertierbare Garbe, die zu L gehört (vgl. 3.1.1(a) und 3.1.2). Es reicht zu zeigen, dass \mathcal{L} von einem globalen Schnitt erzeugt wird. Nach [9, Korollar 4.2.8] ist $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(\Omega_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ faktoriell. Nach 2.5.2 wird daher

$$\mathcal{L}_n := \mathcal{L}|_{\Omega_n}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ von einem Schnitt $f_n \in \mathcal{L}_n(\Omega_n)$ über \mathcal{O}_{Ω_n} erzeugt, d.h.

$$\mathcal{L}_n(\Omega_n) = \mathcal{O}_\Omega(\Omega_n) \cdot f_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man kann \mathcal{L} durch globale Schnitte erzeugen, d.h. es gibt $g_1, \dots, g_r \in \mathcal{L}(\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$, mit

$$f_n = \sum_{i=1}^r a_i \cdot g_i,$$

wobei $a_i \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega_n)$ für alle $i = 1, \dots, r$. Da $\mathcal{O}_\Omega(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ dicht in $\mathcal{O}_\Omega(\Omega_n)$ liegt, kann man die a_i 's durch geeignete $b_i \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)$, $i = 1, \dots, r$, approximieren, so dass

$$\sum_{i=1}^r b_i \cdot g_i$$

auch \mathcal{L}_n erzeugt. Also können wir f_n ohne Einschränkung als einen globalen Schnitt in $\mathcal{L}_n(\Omega)$ auffassen. Da $f_n|_{\Omega_m}$ für alle $n \geq m$, $n, m \in \mathbb{N}$, ein Erzeuger von \mathcal{L}_m ist, gibt es für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, eine Einheit $u_{n,m} \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega_n)^\times$, so dass

$$(*) \quad u_{n,m} \cdot f_n|_{\Omega_m} = f_m \cdot$$

Schreibe Ω_n bzw. Ω_m in der Form

$$\Omega_n = \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{r_n} B_{n,i}^-$$

bzw.

$$\Omega_m = \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{j=1}^{r_m} B_{m,j}^-$$

mit $n_i \in \mathbb{N}$ bzw. $m_j \in \mathbb{N}$ für alle $i = 1, \dots, r_n$ bzw. $j = 1, \dots, r_m$, $r_n, r_m \in \mathbb{N}$, wobei $B_{n,i}^-, B_{m,j}^- \subset \mathbb{P}_K^1$ offene Kreisscheiben sind. Wegen $\Omega_m \subset \Omega_n$ folgt

$$\bigcup_{i=1}^{r_n} B_{n,i}^- \subset \bigcup_{j=1}^{r_m} B_{m,j}^-.$$

Daraus folgt, dass es für jedes i ein j mit

$$B_{n,i}^- \subset B_{m,j}^-.$$

gibt. Wähle nun Punkte $a_{n,i} \in B_{n,i}^-, a_{m,j} \in B_{m,j}^-$. Nach 2.4.2 gilt

$$\mathcal{O}_\Omega(\Omega_n)^\times = \left\{ c \cdot \prod_{i=1}^{r_n} \epsilon_{n,i}^{n_i} \cdot (1 + h_n); c \in K^\times, n_i \in \mathbb{Z}, h_n \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega_n), |h_n|_{\Omega_n} < 1 \right\}$$

bzw.

$$\mathcal{O}_\Omega(\Omega_m)^\times = \left\{ c \cdot \prod_{j=1}^{r_m} \epsilon_{m,j}^{m_j} \cdot (1 + h_m); c \in K^\times, m_j \in \mathbb{Z}, h_m \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega_m), |h_m|_{\Omega_m} < 1 \right\},$$

wobei $\epsilon_{n,i} := \zeta - a_{n,i}$, $\epsilon_{m,j} := \zeta - a_{m,j}$ und ζ eine Koordinate auf \mathbb{P}_K^1 ist. Schreibe nun $u_{n,m}$ in der Form

$$u_{n,m} = c \cdot \prod_{i=1}^{r_n} \epsilon_{n,i}^{n_i} \cdot (1 + h_{n,m})$$

mit $c \in K^\times$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $h_{n,m} \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega_n)$, $|h_{n,m}|_{\Omega_n} < 1$. Sei

$$u_n := u_{n,m} \cdot (1 + h_{n,m})^{-1} = c \cdot \prod_{i=1}^{r_n} \epsilon_{n,i}^{n_i} \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega_n)^\times \cap \mathcal{O}_\Omega(\Omega_m)^\times.$$

Indem wir beide Seiten von $(*)$ mit u_n^{-1} aufmultiplizieren, können wir ohne Einschränkung

$$u_{n,m} = 1 + h_{n,m}$$

für alle m, n , $n \geq m$, annehmen. Außerdem können wir nach einer geeigneten Wahl der $a_{n,i}$'s ohne Einschränkung

$$h_{n,m}(z_0) = 0$$

für alle m, n , $n \geq m$, annehmen. Dann können wir ausgehend von einem fest gewählten f_1 alle anderen f_n 's, $n > 1$, induktiv nach der Vorschrift

$$(1 + h_{n,n-1}) \cdot f_n|_{\Omega_{n-1}} = f_{n-1}, \quad h_{n,n-1}(z_0) = 0$$

konstruieren. Es reicht ohne Einschränkung,

$$f_n|_{\Omega_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_1$$

zu zeigen. Dazu reicht es,

$$h_{n,1}|_{\Omega_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

zu zeigen. Aber wegen $h_{n,m}(z_0) = 0$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m \geq 1$, folgt aus 2.3.3

$$|h_{n,1}|_{\Omega_1} \leq \varepsilon^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für alle $n > 1$, wobei $\varepsilon < 1$ die größte Höhe eines Kreisrings (des formalen Modells) von Ω ist, der zu einer Kante von \hat{S} assoziiert ist. Dies zeigt die Behauptung. \square

2.5.3 zeigt, dass jede invertierbare Garbe \mathcal{L} auf Ω von der Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_\Omega(d)$$

mit einem Divisor $d \in \text{Div}(\Omega)$ ist, nämlich $d = \text{div}(f)$, wobei f ein globaler Erzeuger von \mathcal{L} ist.

3 Geradenbündel auf Mumford-Kurven

3.1 Linearisierungen auf Geradenbündeln

Betrachte einen rigid-analytischen Raum Ω , der mit einer Gruppenwirkung

$$\Gamma \times \Omega \longrightarrow \Omega; \quad (\gamma, z) \longmapsto \gamma z$$

ausgestattet ist, so dass der Quotient

$$X := \Gamma \backslash \Omega$$

wohldefiniert in der Kategorie rigid-analytischer Räume ist und die natürliche Projektionsabbildung

$$p : \Omega \longrightarrow X$$

unverzweigt im topologischen Sinne ist, d.h. dass es eine zulässige offene Überdeckung $\bigcup_{i \in I} V_i$ von X gibt, so dass $p^{-1}(V_i) = \bigsqcup_{j \in J_i} U_{i,j}$ für alle $i \in I$ eine disjunkte Vereinigung zulässiger offener Teilmengen von Ω und $p|_{U_{i,j}} : U_{i,j} \xrightarrow{\sim} V_i$ für alle $i \in I$ und $j \in J_i$ ein Isomorphismus ist.

Definition 3.1.1 Sei Y ein rigid-analytischer Raum.

(a) Eine *invertierbare Garbe* \mathcal{L} auf Y ist ein lokal-freier \mathcal{O}_Y -Modul von Rang 1

(b) Ein *Geradenbündel* auf Y ist ein rigid-analytischer Raum $\pi : L \longrightarrow Y$ über Y , derart dass es eine zulässige offene Überdeckung $\bigcup_{i \in I} U_i$ von Y gibt, so dass $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{A}_K^1$ für alle $i \in I$ und die durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_i \times \mathbb{A}_K^1 \cong L|_{U_i} & \dashrightarrow & L|_{U_i} & & (x, \ell) & \longmapsto & (x, \ell) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (U_i \times U_j) \times \mathbb{A}_K^1 & \xrightarrow{\tau_{j,i}} & (U_j \times U_i) \times \mathbb{A}_K^1 & & (x, \pi|_{U_i}(\ell)) & \longmapsto & (x, \tau_{j,i}(x) \cdot \pi|_{U_j}(\ell)) \end{array}$$

gegebenen Übergangsabbildungen $\tau_{j,i} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}$, $i, j \in I$, Faserbündelmorphismen und linear auf den Halmen sind.

(c) Ein $\mathbb{G}_{m,K}$ -Torsor über Y ist ein treu-flacher Morphismus $L \longrightarrow Y$ in der Kategorie rigid-analytischer Räume, der lokale Schnitte bezüglich der G -Topologie erlaubt und mit einer $\mathbb{G}_{m,Y}$ -Wirkung ausgestattet ist, so dass

$$\mathbb{G}_{m,Y}|_U \longrightarrow L|_U; \quad t \longmapsto t \cdot \ell$$

für alle offenen $U \subset Y$ ein Isomorphismus ist, falls $\ell : U \rightarrow L$ ein Schnitt ist.

(d) Sei S ein rigid-analytischer Raum. Wenn Y einen K -rationalen Punkt y_0 enthält, dann vermittelt er einen holomorphen Schnitt

$$S \rightarrow Y_S := Y \times_K S \quad s \mapsto (y_0, s).$$

Ein Geradenbündel $\pi_S : L \rightarrow Y_S$ über Y_S heißt *rigidifiziert*, wenn es einen nicht-verschwindenden Schnitt $\ell : S \rightarrow L$ mit $\pi_S \circ \ell = s$ gibt. Ein solcher Schnitt heißt *Rigidifikator von L* .

Ein *rigidifiziertes Geradenbündel über Y* ist ein Paar (L, ℓ) , wobei L ein Geradenbündel über Y und ℓ ein Rigidifikator von L ist. Ein *Morphismus rigidifizierter Geradenbündel* ist ein Morphismus von Geradenbündeln, der die zugehörigen Rigidifikatoren aufeinander abbildet.

(e) Sei Y zusätzlich eine rigid-analytische Gruppe. Ein Geradenbündel L auf Y heißt *translationsinvariant*, wenn für alle $a \in Y(\overline{K})$

$$\tau_a^* L \cong L,$$

wobei

$$\tau_a : Y \times_K \mathrm{Sp} \overline{K} = Y_{\overline{K}} \rightarrow Y_{\overline{K}}$$

die Translation um a ist.

Bemerkung 3.1.2 Sei Y ein rigid-analytischer Raum. Es gibt eine kanonische Korrespondenz zwischen den Isomorphie-Klassen von Geradenbündeln über Y und den invertierbaren Garben auf Y bzw. von $\mathbb{G}_{m,K}$ -Torsoren über Y :

Die Schnitte eines Geradenbündels L über Y definieren eine invertierbare Garbe $\mathcal{S}(L)$. Die zu L assoziierte invertierbare Garbe auf Y ist das Dual von $\mathcal{S}(L)$. Umgekehrt ist das zu einer invertierbaren Garbe \mathcal{L} auf Y assoziierte Geradenbündel L über Y gegeben durch

$$L := \mathrm{MaxSpec} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^{\otimes n}.$$

Folglich

$$\mathcal{L} = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{A}_Y^1),$$

d.h.

$$\mathcal{S}(L) = \mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_Y).$$

Insbesondere ist die Korrespondenz zwischen L und \mathcal{L} kontravariant.

Der zu einem Geradenbündel L auf Y assoziierte $\mathbb{G}_{m,K}$ -Torsor $L^* := L \setminus \{0\}$ entsteht durch die Entfernung des Null-Schnitts aus L , d.h.

$$L^* = \mathbf{MaxSpec} \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}^{\otimes n}.$$

Ein $\mathbb{G}_{m,K}$ -Torsor induziert über die lokalen Schnitte einen Kozykel $(\lambda_{i,j}) \in H^1(Y, \mathcal{O}_Y^\times)$ und damit eine invertierbare Garbe auf Y . $(\lambda_{i,j})$ stimmt mit dem L definierenden Kozykel $(t_{i,j}) \in H^1(Y, \mathcal{O}_Y^\times)$ überein.

Beispiel 3.1.3 Sei die Notation wie in 3.1.2 und $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y$. Dann ist das zu \mathcal{L} assoziierte Geradenbündel L gegeben durch

$$L = \mathbf{MaxSpec} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_Y^{\otimes n} = \mathbb{A}_Y^1$$

und der zu \mathcal{L} assoziierte $\mathbb{G}_{m,K}$ -Torsor ist gegeben durch

$$L^* = \mathbf{MaxSpec} \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_Y^{\otimes n} = \mathbb{G}_{m,Y}.$$

Definition 3.1.4 Eine Γ -Linearisierung auf einem Geradenbündel L auf Ω ist eine assoziative Familie

$$(c_\alpha; \alpha \in \Gamma)$$

von Geradenbündelisomorphismen von L , die in das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{c_\alpha} & L & (z, l_z) \mapsto & (\alpha z, c_\alpha(z)(l_z)) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \Omega & \xrightarrow{\alpha} & \Omega, & z \mapsto & \alpha z \end{array}$$

passen, wobei $(z, l_z) \in L_z := \pi^{-1}(z)$ ein Punkt über z ist, d.h.

$$c_{\alpha\beta}(z)(l_z) = c_\alpha(\beta z) \circ c_\beta(z)(l_z)$$

für alle $z \in \Omega$, $(z, l_z) \in L_z$ und $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Wenn $L = \Omega \times \mathbb{A}^1$, dann ist

$$c_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}$$

für alle $\alpha \in \Gamma$ eine holomorphe nullstellenfreie Funktion, die durch Multiplikation auf den Schnitten von L wirkt, d.h. in diesem Fall ist die Assoziativität gleichbedeutend mit

$$c_{\alpha\beta}(z)(l_z) = c_\alpha(\beta z) \cdot c_\beta(z)(l_z)$$

für alle $z \in \Omega$, $(z, l_z) \in L_z$ und $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Eine Γ -Linearisierung (L, c) auf Ω heißt *trivial*, wenn L trivial ist und es ein $u \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)^\times$ mit

$$c_\alpha(z) = u(\alpha z) \cdot u(z)^{-1}$$

gibt.

Auf den Isomorphie-Klassen von Linearisierungen auf Ω gibt es ein durch

$$(L_1, c_1) \otimes (L_2, c_2) := (L_1 \otimes L_2, c_1 \otimes c_2)$$

gegebenes Gruppengesetz " \otimes ". Sind L_1 und L_2 trivial, so ist $c_1 \otimes c_2$ die Multiplikation mit $c_1(z) \cdot c_2(z)$.

Bemerkung 3.1.5 Ist c_α für alle $\alpha \in \Gamma$ konstant, so ist

$$c : \Gamma \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad \alpha \longmapsto c_\alpha$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Satz 3.1.6 Sei die Notation wie oben. Der Quotient $X := \Gamma \backslash \Omega$ existiere in der Kategorie topologischer Räume.

(a) Sei $c := (c_\alpha; \alpha \in \Gamma)$ eine Γ -Linearisierung auf einem Geradenbündel L auf Ω . Dann existiert der Quotient

$$L(c) := L/c$$

in der Kategorie rigid-analytischer Räume. Die Restklassenabbildung $p_L : L \rightarrow L(c)$ ist eine unverzweigte Überlagerung in der Kategorie topologischer Räume und $L(c) \rightarrow X$ ist ein Geradenbündel auf X .

(b) Für jedes Geradenbündel \bar{L} auf X gibt es eine kanonische Γ -Linearisierung c auf $p^*\bar{L}$ mit

$$p^*\bar{L}/c \cong \bar{L}.$$

(c) Die Abbildungen aus (a) und (b) vermitteln eine Kategorienäquivalenz

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphie-Klassen } \Gamma\text{-linearisierter} \\ \text{Geradenbündel } (L, c) \text{ auf } \Omega \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphie-Klassen von} \\ \text{Geradenbündeln } \bar{L} \text{ auf } X \end{array} \right\}.$$

Beweis. (a) Da p eine Überlagerung von topologischem Typ ist, ist

$$L(c) \longrightarrow X$$

ein Geradenbündel.

(b) Wähle eine \bar{L} trivialisierende zulässige offene Überdeckung $\bigcup_{i \in I} V_i$ von X und für jedes $i \in I$ ein $U_i \in \Omega$ mit $U_i \xrightarrow{\sim} V_i$. Dann ist

$$\bigcup_{i \in I} W_i := \bigcup_{i \in I} p^{-1}(V_i) = \bigcup_{i \in I} \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \alpha U_i$$

eine $p^* \bar{L}$ trivialisierende Überdeckung von Ω . Die Abbildungen

$$c_{\gamma,i} : W_i \times \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow W_i \times \mathbb{A}_K^1; \quad (w, \ell) \longmapsto (\gamma w, \ell)$$

sind für alle $i \in I$ und $\gamma \in \Gamma$ wohldefiniert und mit den Übergangsabbildungen verträglich, da die letzteren Γ -invariant sind.

(c) Folgt aus (a) und (b). □

3.2 p -adische Tori und ihre Dualen

Sei M' eine freie abelsche Gruppe von Rang g , deren Gruppengesetz wir mit " + " bezeichnen, und

$$T := \text{Spec } K[M'] \cong \mathbb{G}_{m,K}^g$$

der zugehörige affine Torus, den wir als einen rigid-analytischen Raum auffassen.

Proposition 3.2.1 *Sei die Notation wie oben.*

(a) *Für jede Erweiterung L/K gilt*

$$T(L) = \text{Hom}(M', L^\times).$$

(b) *Seien $M'_1 := \mathbb{Z}^{q_1}$ und $M'_2 := \mathbb{Z}^{q_2}$, $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, freie abelsche Gruppen und $T_1 := \text{Spec } K[M'_1]$ bzw. $T_2 := \text{Spec } K[M'_2]$ die zugehörigen affinen Tori. Dann ist*

$$\text{Hom}(T_1, T_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(M'_2, M'_1); \quad \varphi \longmapsto \varphi^*|_{M'_2}$$

ein Gruppenisomorphismus. Insbesondere gibt es einen kanonischen Auswertungsisomorphismus

$$M' \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(T, \mathbb{G}_{m,K}); \quad m' \longmapsto [T \ni t \longmapsto t(m')].$$

Ein Gitter $M \subset T = \text{Spec } K[\mathbb{Z}^g]$ ist eine diskrete rigid-analytische Untergruppe von T , derart dass der Gruppenhomomorphismus

$$l : T(\bar{K}) \longrightarrow \mathbb{R}^g; \quad z = (z_1, \dots, z_g) \longmapsto l(z) := -(\log|z_1|, \dots, \log|z_g|) \quad (3.1)$$

einen Isomorphismus zwischen $M(\bar{K})$ und einem Gitter $\Lambda \subset \mathbb{R}^g$ induziert. M heißt *von vollem Rang g* , wenn $\text{rk} \Lambda = g$. Wir bezeichnen das Gruppengesetz auf M mit " + " und das auf T mit " · ".

Proposition 3.2.2 Seien M' und T wie oben, $M \subset T$ ein Gitter und $T' := \text{Spec}K[M]$.

(a) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\text{Hom}(M, \text{Hom}(M', K^\times)) \cong \text{Bihom}(M \times M', K^\times)$$

in die Menge der Bilinearformen.

(b) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\text{Hom}(M, T) \cong \text{Bihom}(M \times M', \mathbb{G}_{m,K}).$$

(c) Für einen Gruppenhomomorphismus $h : M \rightarrow T$ ist $h(M)$ genau dann ein Gitter von vollem Rang q , wenn die Bilinearform

$$-\log|b| : M \times M' \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (m, m') \longmapsto -\log|b(m, m')|$$

nicht ausgeartet ist, wobei $b \in \text{Bihom}(M \times M', \mathbb{G}_{m,K})$ die zu h assoziierte Bilinearform ist.

(d) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\text{Hom}(M, T) \cong \text{Hom}(M', T').$$

Ferner ist für ein $h \in \text{Hom}(M, T)$ $h(M)$ genau dann ein Gitter, wenn $h'(M')$ dies ist, wobei $h' \in \text{Hom}(M', T')$ der zu h assoziierte Homomorphismus ist. Insbesondere, wenn wir h und h' als Inklusionen auffassen, ist h' gegeben durch

$$h' : M' \longrightarrow T'; \quad m' \longmapsto [m'|_M : M \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}].$$

Beweis. (a) Für ein $h \in \text{Hom}(M, \text{Hom}(M', K^\times))$ ist

$$M \times M' \longrightarrow K^\times; \quad (m, m') \longmapsto h(m)(m').$$

eine Bilinearform. Umgekehrt ist für ein $b \in \text{Bihom}(M \times M', K^\times)$

$$h : M \longrightarrow \text{Hom}(M', K^\times); \quad m \longmapsto [m' \longmapsto b(m, m')]$$

ein Gruppenhomomorphismus. □

Die Aussagen von 3.2.2 sind wohlbekannt.

Proposition 3.2.3 Sei $M \subset T$ ein Gitter.

(a) Der rigid-analytische Quotient

$$p : T \longrightarrow A := T/M$$

existiert in der Kategorie rigid-analytischer Gruppen und ist glatt.

(b) M hat genau dann vollen Rang, wenn A (im rigid-analytischen Sinne) eigentlich ist.

Beweis. (a) Die G -Topologie auf A ist gegeben durch die Quotienten- G -Topologie auf T bezüglich der Wirkung von M durch Linkstranslation, d.h. eine Teilmenge $U \subset A$ bzw. eine Überdeckung \mathfrak{U} von A ist zulässig, wenn $p^{-1}(U)$ bzw. $p^*\mathfrak{U}$ dies ist. Ein Atlas von Karten auf A ist auf folgende Weise gegeben: Sei $Q \subset \mathbb{R}^g$ ein q -dimensionales Polytop, dessen Ecken Koordinaten in $\log|K^\times|$ annehmen und das in einem Fundamentalbereich von \mathbb{R}^g bezüglich der Wirkung von Λ liegt. Dann ist $U := l^{-1}(Q) \subset T$, wobei l in (3.1) definiert wurde, ein zusammenhängender affinoider Bereich, der keine M -kongruenten Punkte enthält. Solche Teilmengen bilden einen Atlas von Karten von A . $W := p^{-1}(U)$ zerfällt in eine disunkte Vereinigung

$$W = \bigsqcup_{m \in M} m \cdot U.$$

Das auf A induzierte Gruppengesetz ist analytisch bezüglich dieser holomorphen Struktur.

(b) Wenn M vollen Rang hat, dann wird A durch endlich viele Karten wie oben überdeckt. Wählen wir ein weiteres Polytop $Q' \Subset Q$, so erhalten wir eine Karte $U' \Subset U$. A wird durch endlich viele solche Karten wie U' überdeckt. Folglich gibt es zwei endliche Überdeckungen

$$\mathfrak{U} := \{U_1, \dots, U_n\}, \quad \mathfrak{U}' := \{U'_1, \dots, U'_n\}$$

von A durch affinoide Bereiche, so dass

$$U'_i \Subset U_i$$

für alle $i = 1, \dots, n$, d.h. A ist eigentlich.

Ist umgekehrt A eigentlich, so kann A durch endlich viele affinoide Karten überdeckt werden. Da diese Karten beschränkte Teilmengen von T sind, gibt es eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^g$, die \mathbb{R}^g/Λ überdeckt. Folglich hat M endlichen Rang. \square

Für den Rest dieses Abschnitts nehmen wir an, dass M vollen Rang hat.

Lemma 3.2.4 *Sei die Notation wie oben. Jedes Geradenbündel L auf T ist trivial. Die Menge der Trivialisierungen eines rigidifizierten Geradenbündels auf T ist ein prinzipal-homogener Raum unter M' .*

Beweis. Sei \mathcal{L} die zu L assoziierte invertierbare Garbe und $c \in |K^\times|$, $c < 1$. Setze

$$T(c) := \{(t_1, \dots, t_g) \in T; c \leq |t_i| \leq c^{-1}, i = 1, \dots, g\}.$$

Nach [9, 1.6.10] ist der Ring $\mathcal{O}_T(T(c))$ faktoriell. Folglich wird $\mathcal{L}|_{T(c^n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ von einem Schnitt ℓ_n erzeugt. Da $\ell_n|_{T(c^m)}$ für $n \geq m$ $T(c^m)$ erzeugt, gibt es für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, eine Beziehung

$$\ell_n|_{T(c^m)} = u_{n,m} \cdot \ell_m$$

3 Geradenbündel auf Mumford-Kurven

mit einem $u_{n,m} \in \mathcal{O}_{T(c^m)}(T(c^m))^\times$. Die $u_{n,m}$'s, $n \geq m$, können in der Form

$$u_{n,m} = c_{n,m} \cdot \zeta^{k(n,m)} \cdot (1 + h_{n,m})$$

geschrieben werden, wobei $c_{n,m} \in K^\times$, ζ eine Koordinate auf T ist, $h_{n,m} \in \mathcal{O}_T(T(c^m))$, $|h_{n,m}|_{T(c^m)} < 1$, und $k(n,m) \in \mathbb{Z}$ von n und m abhängt. Fixieren wir ein ℓ_1 , so können wir alle anderen ℓ_n 's, $n \geq 1$, dadurch eindeutig festlegen, indem wir ohne Einschränkung

$$c_{n,1} = 1, \quad k(n,1) = 0 \quad \text{und} \quad h_{n,1}(1) = 0$$

fordern. Dann folgt

$$c_{n,m} = 1 \quad \text{und} \quad k(n,m) = 0$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. Ferner gilt

$$|h_{n,1}|_{T(c)} \leq c^{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Folglich konvergiert die Folge $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $T(c)$ gegen einen Erzeuger von $\mathcal{L}|_{T(c)}$, insbesondere ist $L|_{T(c)}$ trivial. Da dies für alle $c \in |K^\times|$, $c < 1$, gilt, folgt daraus der erste Teil der Behauptung. Der zweite Teil folgt aus der Tatsache, dass die Einheiten $u \in \mathcal{O}_T(T)^\times$ mit $u(1) = 1$ Charaktere sind. \square

Proposition 3.2.5 *Sei die Notation wie oben.*

(a) *Die Kategorie der Isomorphie-Klassen von Geradenbündeln auf A ist äquivalent zur Kategorie der Isomorphie-Klassen von M -Linearisierungen auf dem trivialen Geradenbündel auf T .*

Eine solche M -Linearisierung ist durch ein Paar (r, λ) gegeben, wobei

$$\lambda : M \longrightarrow M'$$

ein Gruppenhomomorphismus und

$$r : M \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad m \longmapsto r_m$$

eine Abbildung ist, die die Beziehung

$$\langle m_2, \lambda(m_1) \rangle = \frac{r_{m_1+m_2}}{r_{m_1} \cdot r_{m_2}} \tag{3.2}$$

erfüllt, wobei

$$\langle -, - \rangle : T \times M' \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad (t, m') \longmapsto m'(t)$$

wie oben der Auswertungshomomorphismus ist.

(b) *Ein Geradenbündel \bar{L} auf A ist genau dann trivial, wenn in der zugehörigen*

M -Linearisierung (r, λ) der Homomorphismus λ trivial ist und r für alle $m \in M$ die Bedingung

$$r_m = \langle m, m' \rangle$$

mit einem $m' \in M'$ erfüllt.

(c) Ein Geradenbündel \bar{L} auf A ist genau dann translationsinvariant, wenn in der zugehörigen M -Linearisierung (r, λ) der Homomorphismus λ trivial ist. In diesem Fall ist r ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. (a) Es reicht nach 3.2.4, die Wirkung von M auf dem trivialen Geradenbündel $\mathbb{A}_T^1 = T \times \mathbb{A}_K^1$ auf T zu berechnen. Betrachte dazu eine M -Linearisierung $c = (c_m; m \in M)$ auf \mathbb{A}_T^1 mit

$$c_m : T \times \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow T \times \mathbb{A}_K^1 \quad (t, \ell) \longmapsto (m \cdot t, c_m(t) \cdot \ell)$$

für alle $m \in M$, wobei die c_m 's, $m \in M$, durch Morphismen

$$c_m : T \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K},$$

$m \in M$, induziert werden, die wir mit Missbrauch der Notation ebenfalls mit " c_m " bezeichnen. Entwickle die c_m 's, $m \in M$, in Laurent-Reihen

$$c_m(t) = \sum_{m' \in M'} r_{m'} \cdot \langle t, m' \rangle$$

mit Koeffizienten $r_{m'} \in K$. Dann gibt es nach 2.3.1 für jedes $m \in M$ ein $m' = \lambda(m) \in M'$ derart, dass

$$c_m = r_{\lambda(m)} \cdot \langle t, \lambda(m) \rangle.$$

Der zugehörige Automorphismus auf \mathbb{A}_T^1 ist notwendigerweise von der Form $(t, \ell) \longmapsto (t, \langle t, m' \rangle \cdot \ell)$. Dann ist die Assoziativität der M -Wirkung auf \mathbb{A}_T^1 gleichbedeutend mit

$$r_{m_1} \cdot r_{m_2} \cdot \langle t, \lambda(m_1) \rangle \cdot \langle m_1 \cdot t, \lambda(m_2) \rangle = r_{m_1+m_2} \cdot \langle t, \lambda(m_1 + m_2) \rangle$$

für alle $m_1, m_2 \in M$ und $t \in T$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass λ ein Gruppenhomomorphismus ist und

$$\langle m_1, \lambda(m_2) \rangle = \frac{r_{m_1+m_2}}{r_{m_1} \cdot r_{m_2}} \tag{3.3}$$

für alle $m_1, m_2 \in M$ gilt.

(b) Seien (r_1, λ_1) und (r_2, λ_2) M -Linearisierungen, die isomorphe Geradenbündel auf A induzieren. Dann sind die durch $r_1(m) \cdot \langle t, \lambda_1(m) \rangle$ und $r_2(m) \cdot \langle t, \lambda_2(m) \rangle$ gegebenen M -Wirkungen auf \mathbb{A}_T^1 isomorph. Der zugehörige Automorphismus von \mathbb{A}_T^1 ist von der Form $(t, \ell) \longmapsto (t, \langle t, m' \rangle \cdot \ell)$ für ein $m' \in M'$ und muss den Rigidifikator respektieren. Dann gilt

$$\langle m, m' \rangle \cdot (r_1)_m \cdot \langle t, \lambda_1(m) \rangle = (r_2)_m \cdot \langle t, \lambda_2(m) \rangle$$

für alle $m \in M$. Dies zeigt, dass $\lambda_1 = \lambda_2$ und $(r_2)_m = \langle m, m' \rangle \cdot (r_1)_m$ für alle $m \in M$. Umgekehrt führen diese Gleichungen durch Umkehrung der obigen Argumente zu isomorphen Geradenbündeln auf A .

(c) Wenn eine M -Linearisierung (r, λ) zu einem translationsinvarianten Geradenbündel auf A , dann sind die beiden M -Wirkungen

$$M \times T \longrightarrow T; \quad (m, t) \longmapsto r_m \cdot \langle t, \lambda(m) \rangle$$

und

$$M \times T \longrightarrow T; \quad (m, t) \longmapsto \langle t, \lambda(m) \rangle \cdot r_m \cdot \langle t, \lambda(m) \rangle$$

auf \mathbb{A}_T^1 für alle $t \in T$ zueinander isomorph. Nach (b) gibt es für alle $t \in T$ ein $m'(t) \in M'$ mit

$$\langle m, m'(t) \rangle = \langle t, \lambda(m) \rangle$$

für alle $m \in M$. Dies zeigt, dass $\lambda \equiv 0$ und damit auch $c \equiv 1$, da $M \subset T$ ein Gitter ist. Umgekehrt sieht man genauso, dass jede M -Linearisierung (r, λ) mit $\lambda \equiv 0$ zu einem translationsinvarianten Geradenbündel auf A führt. \square

Lemma 3.2.6 (a) Sei (r, λ) eine M -Linearisierung auf \mathbb{A}_T^1 und $a \in T(K)$. Bezeichne mit

$$\tau_a : T \longrightarrow T; \quad t \longmapsto a \cdot t$$

die Translation um a . Dann gilt

$$\tau_a^*(r_m, \lambda) = (\lambda(m)(a) \cdot r_m, \lambda).$$

(b) Seien (r_i, λ_i) , $i = 1, 2$, M -Linearisierungen auf \mathbb{A}_T^1 . Dann gilt

$$(r_1, \lambda_1) \otimes (r_2, \lambda_2) = (r_1 \cdot r_2, \lambda_1 + \lambda_2).$$

(c) (**Satz vom Quadrat**) Sei (r, λ) eine M -Linearisierung auf \mathbb{A}_T^1 . Dann gilt für alle $a, b \in T(K)$.

$$\tau_a^*(r, \lambda) \otimes \tau_b^*(r, \lambda) = \tau_{a+b}^*(r, \lambda) \otimes (r, \lambda).$$

Satz 3.2.7 Sei die Notation wie oben.

(a) Die Duale A' von A kann durch

$$A' = T'/M'$$

dargestellt werden, wobei die Inklusion $M' \hookrightarrow T'$ als die Abbildung

$$M' \longrightarrow T' = \text{Hom}(M, \mathbb{G}_{m,K}); \quad m' \longmapsto m'|_M$$

aufgefasst wird.

(b) Das Poincaré-Bündel P auf $A \times A'$ ist gegeben durch die $M \times M'$ -

Linearisierung (R, Λ) auf dem trivialen Geradenbündel $(T \times T') \times \mathbb{A}_K^1 = \mathbb{A}_{T \times T'}^1$ auf $T \times T'$, wobei

$$\begin{aligned} \Lambda : M \times M' &\longrightarrow M' \times M; & (m, m') &\longmapsto (m', m), \\ R : M \times M' &\longrightarrow \mathbb{G}_{m, K} & ; & (m, m') \longmapsto R_{(m', m)} := \langle m, m' \rangle. \end{aligned}$$

Beweis. Sei L ein Geradenbündel auf A . Nach 3.2.4 ist p^*L trivial. Dann ist die M -Linearisierung auf $p^*L \cong \mathbb{A}_T^1$ nach 3.2.5(c) gegeben durch einen Homomorphismus $r : M \rightarrow \mathbb{G}_{m, K}$. Dieser Homomorphismus ist in natürlicher Weise ein Punkt $t' \in T' = \text{Hom}(M, \mathbb{G}_{m, K})$, der die Bedingung $r_m = \langle t', m \rangle$ für alle $m \in M$ erfüllt. Folglich induziert t' einen Punkt $p'(t') \in A'$. $p'(t')$ ist nach 3.2.5(b) eindeutig durch L bestimmt. Schränke nun die durch (R, Λ) gegebene $M \times M'$ -Wirkung auf $\mathbb{A}_{T \times T'}^1$ auf $M \times \{1\}$ bzw. $T \times \{t'\}$ ein, d.h. betrachte die durch das Paar $(R|_{M \times \{1\}}, \Lambda|_{M \times \{1\}})$ gegebene $M \times \{1\}$ -Wirkung

$$\mathbb{A}_T^1 = T \times \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_T^1; \quad (t, \ell) \longmapsto (t, \langle m, t' \rangle \cdot \ell)$$

auf $\mathbb{A}_{T \times \{t'\}}^1$. Wegen $r_m = \langle t', m \rangle$ für alle $m \in M$ stimmt sie mit der durch r gegebenen M -Wirkung auf p^*L überein. Folglich gilt $L \cong (t' \times \text{id})^*P$.

(a) Es gilt

$$\langle (m_2, m'_2), \Lambda(m_1, m'_1) \rangle = m'_1(m_2) \cdot m'_2(m_1)$$

und

$$\frac{R_{(m_1, m'_1) \cdot (m_2, m'_2)}}{R_{(m_1, m'_1)} \cdot R_{(m_2, m'_2)}} = m'_1(m_2) \cdot m'_2(m_1)$$

für alle $m_1, m_2 \in M$ und $m'_1, m'_2 \in M'$, wobei wir das Gruppengesetz auf $(M \times M') \times (M \times M')$ mit " \cdot " bezeichnen. Folglich definiert das Paar (R, Λ) eine $M \times M'$ -Linearisierung auf $\mathbb{A}_{T \times T'}^1$. $P|_{\{1\} \times A'}$ und $P_{A \times \{1\}}$ sind offensichtlich trivial. Die universelle Eigenschaft von P übergehen wir hier, vgl. [9, §6.2]. \square

Bemerkung 3.2.8 Sei die Notation wie oben. Jedes Geradenbündel L auf A liefert einen holomorphen Morphismus

$$\varphi_L : A \longrightarrow A'; \quad x \longmapsto [\tau_x^*L \otimes L^{-1}].$$

Ist (r, λ) die zu L assoziierte M -Linearisierung auf \mathbb{A}_T^1 , so ist die Hochhebung $\Phi_L : T \longrightarrow T'$ von φ_L gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\Phi_L} & T' & t \longmapsto & [m \longmapsto \langle t, \lambda(m) \rangle] = t \circ \lambda \\ \downarrow p & & \downarrow p' & \downarrow & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\varphi_L} & A', & x \longmapsto & [\tau_x^*L \otimes L^{-1}]. \end{array}$$

Insbesondere ist φ_L genau dann surjektiv, wenn λ injektiv ist.

Beweis. Ist λ injektiv, so folgt $[M' : \lambda(M)] < \infty$. Da $K[M] \rightarrow K[M']$ endlich ist, zeigt dies, dass Φ_L und damit auch ϕ_L surjektiv ist.

Ist umgekehrt φ_L surjektiv, so auch Φ_L , und damit $[M' : \lambda(M)] < \infty$. Folglich ist λ injektiv. \square

Lemma 3.2.9 *Seien die Notation und die Voraussetzungen wie oben.*

(a) Sei $\lambda : M \rightarrow M'$ ein Gruppenhomomorphismus mit

$$\langle m_2, \lambda(m_1) \rangle = \langle m_1, \lambda(m_2) \rangle$$

für alle $m_1, m_2 \in M$. Dann vermittelt λ einen Morphismus $\widehat{\phi} : T \rightarrow T'$, der die Bedingung $\widehat{\phi}(M) \subset M'$ erfüllt. Insbesondere induziert $\widehat{\phi}$ einen Morphismus $\phi : A := T/M \rightarrow A' := T'/M'$.

(b) Für alle $m \in M$ und $t \in T$ gilt $m(\widehat{\phi}(t)) = t(m)$.

Beweis. (a) λ induziert einen K -Algebrenhomomorphismus $K[M] \rightarrow K[M']$ und damit einen Morphismus $\widehat{\phi} : T = \text{Spec } K[M'] \rightarrow T' = \text{Spec } K[M]$. Um $\widehat{\phi}(M) \subset M'$ zu sehen, beachte, dass für alle $m_1, m_2 \in M$

$$m_1(\widehat{\phi}(m_2)) = \widehat{\phi}^*(m_1)(m_2) = \lambda(m_1)(m_2) = \langle m_2, \lambda(m_1) \rangle = \langle m_1, \lambda(m_2) \rangle \in m_1 \subset M'$$

gilt. Folglich $\widehat{\phi}(M) \subset M'$.

(b) Folgt aus

$$m(\widehat{\phi}(t)) = \widehat{\phi}^*(m)(t) = \lambda(m)(t) = \langle t, \lambda(m) \rangle = t(m).$$

\square

Definition 3.2.10 Sei die Notation wie oben. Eine *Polarisierung* des Paares (T, M) ist eine lineare Abbildung $\lambda : M \rightarrow M'$, so dass die Bilinearform

$$M \times M \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad (m_1, m_2) \longmapsto \langle m_2, \lambda(m_1) \rangle$$

symmetrisch und positiv-definit ist, d.h. $|\langle m, \lambda(m) \rangle| < 1$ für alle $m \in M \setminus \{1\}$, wobei 1 das neutrale Element von M bezeichnet.

Satz 3.2.11 *Sei die Notation wie oben. Sei (r, λ) wie in 3.2.5 eine M -Linearisierung auf \mathbb{A}_T^1 , die zu einer invertierbaren Garbe \mathcal{L} auf A gehört. Dann sind äquivalent:*

(a) \mathcal{L} ist ampel.

(b) $\lambda : M \rightarrow M'$ liefert eine Polarisation von (T, M) .

(c) $\lambda : M \rightarrow M'$ ist injektiv und es gibt einen nicht-trivialen globalen Schnitt von \mathcal{L} . Insbesondere $\dim \mathcal{L}(A) = \sharp(M'/\lambda(M))$.

Beweis. Nach 3.1.2 gehört zu \mathcal{L} ein eindeutig bestimmtes Geradenbündel. Folglich hat \mathcal{L} nach 3.2.5 eine M -Linearisierung $(1/r, [-1] \circ \lambda)$, wobei (r, λ) die M -Linearisierung von L ist und

$$[-1] : T \longrightarrow T; \quad t \longmapsto -t.$$

(b) \iff (c): Betrachte ein $f \in \mathcal{L}(A)$, das wir als einen globalen Schnitt von L auffassen, d.h. wir fassen f als einen unter $(1/r, [-1] \circ \lambda)$ invarianten Morphismus auf. f induziert einen Morphismus $f : T \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$, den wir mit Missbrauch der Notation ebenfalls mit f bezeichnen. Betrachte die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{m' \in M'} a_{m'} \langle t, m' \rangle$$

von f . Die Invarianz von f unter der M -Wirkung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_T^1 = T \times \mathbb{A}_K^1 & \xrightarrow{c_m} & \mathbb{A}_T^1 \\ \uparrow f & & \uparrow f \\ T & \xrightarrow{m} & T \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (t, \ell) & \longmapsto & (m \cdot t, r_m^{-1} \cdot \langle -\lambda(m), t \rangle \cdot \ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ t & \longmapsto & m \cdot t \end{array}$$

impliziert

$$\begin{aligned} f(m \cdot t) &= r_m^{-1} \cdot \langle -\lambda(m), t \rangle \cdot f(t) = \sum_{m' \in M'} r_m^{-1} \cdot a_{m'} \cdot \langle t, m' - \lambda(m) \rangle \\ &= \sum_{m' \in M'} a_{m'} \cdot \langle m \cdot t, m' \rangle \end{aligned}$$

für alle $m \in M$. Durch Koeffizientenvergleich folgt daraus

$$\begin{aligned} r_m^{-1} \cdot a_{m'} &= \langle m, m' - \lambda(m) \rangle \cdot a_{m' - \lambda(m)} \\ &= \langle m, m' \rangle \cdot \langle m, -\lambda(m) \rangle \cdot a_{m' - \lambda(m)} \\ \iff a_{m' - \lambda(m)} &= \langle m, \lambda(m) \rangle \cdot r_m^{-1} \cdot \langle m, m' \rangle^{-1} \cdot a_{m'} \end{aligned} \quad (3.3)$$

für alle $m \in M$. Ersetze in der letzten Gleichheit m durch $-m$ und beachte, dass nach (3.2) $r_m^i = r_m^i \cdot \langle m, \lambda(m) \rangle^{\frac{i(i-1)}{2}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Dann liefert eine Iteration von (3.3)

$$a_{m' + \lambda(m^i)} = \langle m, \lambda(m) \rangle^{\frac{i(i+1)}{2}} \cdot r_m^i \cdot \langle m, m' \rangle^i \cdot a_{m'},$$

insbesondere

$$|a_{m' + \lambda(m^i)}| = |\langle m, \lambda(m) \rangle|^{\frac{i(i+1)}{2}} \cdot |r_m|^i \cdot |\langle m, m' \rangle|^i \cdot |a_{m'}|.$$

Gilt $f \not\equiv 0$, so ist die Reihe $\sum_{m' \in M'} a_{m'} \cdot \langle t, m' \rangle$ nicht identisch gleich 0, d.h. es gibt ein $m' \in M'$ mit $a_{m'} \neq 0$. Wegen der Injektivität von λ gilt für jedes

$1 \neq m \in M$ die Konvergenz $|\lambda(m^i)| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$ (linear). Da $|\langle m, \lambda(m) \rangle|^{\frac{i(i+1)}{2}}$ für jedes $1 \neq m \in M$ und $i \rightarrow \infty$ quadratisch gegen 0 bzw. ∞ konvergiert je nach dem, ob $|\langle m, \lambda(m) \rangle| < 1$ oder $|\langle m, \lambda(m) \rangle| > 1$, konvergiert $|a_{m'+\lambda(m^i)}|$ für $i \rightarrow \infty$ genau dann gegen 0, wenn $|\langle m, \lambda(m) \rangle| < 1$.

Ist umgekehrt die letzte Gleichheit für alle $m \in M \setminus \{1\}$ erfüllt, so ist λ injektiv und man kann nicht-triviale Laurent-Reihen in $\mathcal{L}(A)$ durch Vorgabe von Laurent-Koeffizienten $a_{m'}$, $m' \in M'/\lambda(M)$, auf einer Vertretermenge von $M'/\lambda(M)$ konstruieren. Insbesondere $\dim \mathcal{L}(A) = \#(M'/\lambda(M))$.

(a) \iff (c): Ist \mathcal{L} ampel, so ist A eine abelsche Varietät. $\varphi_{\mathcal{L}}$ ist nach [13, S. 60] surjektiv. Dann ist λ nach 3.2.8 injektiv. Ferner erlaubt \mathcal{L} nach [13, Korollar auf S. 159] einen nicht identisch verschwindenden globalen Schnitt.

Für die umgekehrte Inklusion beachte, dass $\varphi_{\mathcal{L}}$ nach 3.2.8 surjektiv ist, da λ injektiv ist. Dann folgt die Ampelheit von \mathcal{L} aus [9, Lemma 7.1.9]. \square

Korollar 3.2.12 *Sei $A := T/M$ ein p -adischer Torus. Dann sind äquivalent:*

- (a) *A ist eine abelsche Varietät.*
- (b) *Es gibt eine Polarisierung von (T, M) .*
- (c) *$\text{trdeg } K(A) = \dim A$, wobei $K(A)$ der Funktionenkörper von A ist.*

Beweis. (a) \implies (b): Ist A eine abelsche Varietät, so gibt es eine ample Garbe auf A und die Behauptung folgt aus 3.2.11.

(b) Sei λ eine Polarisierung von (T, M) . Nach 3.2.11 reicht es, eine M -Linearisierung (r, λ) auf \mathbb{A}_T^1 zu konstruieren. Setze dazu $r_{e_i} = 1$, $i = 1, \dots, q$, für eine Basis (e_1, \dots, e_q) von M und definiere r_m für alle anderen $m \in M$ induktiv nach der Funktionalgleichung in 3.2.5(a).

(a) \iff (c): Folgt sofort aus [9, Proposition 7.1.8(b)]. \square

4 Drinfelds Polarisierung

4.1 p -adische automorphe Formen

Sei $\Gamma \subset \mathrm{PGL}(2, K)$ eine p -adische Schottky-Gruppe und $\Omega = \Omega_\Gamma = \mathbb{P}_K^1 \setminus L_\Gamma$ die Menge der gewöhnlichen Punkte von Γ , wobei L_Γ die Menge der Limit-Punkte von Γ ist.

Definition 4.1.1 Ein K -Divisor auf Ω ist eine Funktion

$$\Omega(\overline{K}) \rightarrow \mathbb{Z}; \quad z \mapsto n_z$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Es gilt genau dann $n_{z_1} = n_{z_2}$, wenn z_1 und z_2 konjugiert über K sind.
- (b) Es gibt eine endliche Erweiterung L/K derart, dass

$$\{z; z \in \Omega(\overline{K}), n_z \neq 0\} \subset \Omega(L).$$

- (c) $\{z; z \in \Omega(\overline{K}), n_z \neq 0\}$ hat keine Häufungspunkte in Ω .

Für einen K -Divisor d auf Ω heißt die Menge

$$\mathrm{supp}(d) := \{z; z \in \Omega(\overline{K}), n_z \neq 0\}$$

der Träger von d . Wir schreiben $d = \sum_{z \in \mathrm{supp}(d)} n_z \cdot z$ und n_z wird für alle $z \in \mathrm{supp}(d)$ mit $n_z = \mathrm{ord}_z(d)$ bezeichnet. d heißt *endlich*, wenn $\mathrm{supp}(d)$ endlich ist. Wir sagen im folgenden "Divisor" statt " K -Divisor", wenn K aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Lemma 4.1.2 (a) Die Gruppe der Γ -invarianten K -Divisoren auf Ω besteht genau aus Divisoren der Form $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d$, wobei d ein endlicher K -Divisor auf Ω ist.

(b) Es gilt genau dann $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d = 0$, wenn es $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, und endliche K -Divisoren d_1, \dots, d_n auf Ω gibt, so dass $d = \sum_{i=1}^n (\mathrm{id} - \gamma_i) d_i$.

Beweis. (a) Sei $E \subset \Omega$ ein Fundamentalbereich für Γ und D ein Γ -invarianter Divisor auf Ω . Dann ist $D|_E$ ein endlicher Divisor. Setze $d := D|_{E^\circ}$, wobei $E^\circ \subset E$ ein Vertretersystem von X ist, vgl. 2.1.11. Dann folgt $D = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d$.

(b) Wir zeigen dies mit Induktion nach der Anzahl der (abgeschlossenen) Punkte in $\mathrm{supp}(d)$. Betrachte dazu ein $x \in \mathrm{supp}(d)$ und sei $n_x := \mathrm{ord}_x(d)$. Da $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d = 0$ und d endlich ist, gibt es $y_1, \dots, y_r \in \mathrm{supp}(d)$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$, $r \in \mathbb{N}$, so dass $x = \gamma_i y_i$ für alle $i = 1, \dots, r$ und $n_x = n_1 + \dots + n_r$, wobei $n_i := \mathrm{ord}_{y_i}(d)$ für alle $i = 1, \dots, r$. Setze $d_i := -n_i y_i$. Dann

$$\text{supp}((\text{id} - \gamma_i)d_i) = \text{supp}(-n_i \cdot y_i + n_i \cdot x) \subset \text{supp}(d)$$

sowie

$$\text{supp} \left(d - \sum_{i=1}^r d_i \right) \subset \text{supp}(d) \setminus \{x\}$$

und die Aussage folgt aus der Induktionsvoraussetzung. \square

Korollar 4.1.3 Sei \mathcal{D}^Γ die Menge der Γ -invarianten K -Divisoren auf Ω . Dann ist die Abbildung

$$\text{deg} : \mathcal{D}^\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}; \quad D = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d \mapsto \text{deg}(d) := \sum_{i=1}^r n_i \cdot [K(x_i) : K],$$

wobei $d = \sum_{i=1}^r n_i \cdot x_i$ ein endlicher K -Divisor auf Ω ist, ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

Definition 4.1.4 Für einen endlichen K -Divisor $d = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ auf Ω setze

$$\theta(d; z) := \frac{\prod_{i=1}^m (z - a_i)}{\prod_{j=1}^n (z - b_j)}.$$

Die a_i 's und b_j 's, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, sind nicht notwendigerweise K -wertig, aber $\theta(d; z)$ ist $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -invariant und somit eine K -rationale meromorphe Funktion auf Ω . Sei zusätzlich $\text{deg}(d) = 0$ und wähle einen Basispunkt $z_0 \in \Omega \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \text{supp}(\gamma d)$. Sei $D := \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d$ der zu d assoziierte Γ -invariante Divisor auf Ω und betrachte das formale Weierstraß-Produkt

$$\Theta(d; z) := \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(d; \gamma z)}{\theta(d; \gamma z_0)}, \quad z \in \Omega \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \text{supp}(\gamma d).$$

Um die Notation zu vereinfachen, unterdrücken wir die Abhängigkeit von $\Theta(d; z)$ von z_0 .

Satz 4.1.5 Sei d ein endlicher K -Divisor auf Ω vom Grad 0. Dann lässt sich $\Theta(d; z)$ auf jedem affinoiden Unterbereich $V \subset \Omega$ als ein Produkt endlich vieler Faktoren mit Null- und Polstellen in V und eines unendlichen konvergenten Faktors, der auf V gleichmäßig konvergiert und dort keine Nullstellen hat, schreiben. Folglich ist es eine K -meromorphe Funktion auf Ω . Darüberhinaus hat es die folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $\alpha \in \Gamma$ gilt

$$\Theta(d, \alpha z) = c(d)(\alpha) \cdot \Theta(d; z),$$

wobei

$$c : \mathcal{D}_0^f \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad (d, \alpha) \longmapsto c(d)(\alpha) := \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(d; \gamma z)}{\theta(d; \gamma \alpha^{-1} z_0)}$$

bilinear ist und nicht von der Wahl von z_0 abhängt. Für ein $d \in \mathcal{D}_0^f$ heißt $c(d) = c(d)(-)$ Automorphie-Faktor von $\Theta(d; -)$.

(b) Ist $D := \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d = 0$, so folgt $\Theta(d; z) \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)^\times$.

Definition 4.1.6 Eine meromorphe Funktion auf Ω , die die Bedingung in 4.1.5 erfüllt, heißt (p -adische) automorphe Form bzw. Funktion.

Beweis von 4.1.5. Nach 2.1.11 gibt es nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ mit $V \cap \gamma V \neq \emptyset$. Dies zeigt, dass $\Theta(d; z)$ höchstens endlich viele Null- und Polstellen in V hat. Um die Konvergenz des unendlichen Faktors zu zeigen, muss man zunächst zeigen, dass

$$|\gamma z - \gamma z_0| \xrightarrow{\ell(\gamma) \rightarrow \infty} 0,$$

wobei $\ell(\gamma)$ die Länge von $\gamma \in \Gamma$ ist. Schreibe dazu $z = \alpha w, z_0 = \alpha \beta z_1$ mit geeigneten $w, z_1 \in E^\circ$, wobei E° wie im Beweis von 4.1.2 ist, und $\alpha, \beta \in \Gamma$. Beachte, dass es nur endlich viele solche α 's und β 's gibt, da V affinoid ist und Γ diskontinuierlich auf Ω wirkt. Dann folgt aus 2.1.11

$$|\gamma z - \gamma z_0| \leq \max\{\ell(\gamma \alpha), \ell(\gamma)\} \xrightarrow{\ell(\gamma) \rightarrow \infty} 0.$$

Es bleibt, das Konvergenzverhalten der einzelnen Produkte

$$\frac{\theta(a; \gamma z)}{\theta(b; \gamma z)} = \frac{\gamma z - a}{\gamma z_0 - a} \cdot \frac{\gamma z_0 - b}{\gamma z - b}$$

mit $a, b \in \overline{K}$ zu untersuchen. Dazu reicht es, das Konvergenzverhalten von

$$\frac{\gamma z - a}{\gamma z_0 - a} = 1 - \frac{\gamma z - \gamma z_0}{a - \gamma z_0}$$

für $\ell(\gamma) \rightarrow \infty$ zu untersuchen. Da γz_0 für $\ell(\gamma) \rightarrow \infty$ gegen den Rand von Ω konvergiert, konvergiert $(\gamma z - \gamma z_0)/(a - \gamma z_0)$ für alle $z \in V$ gleichmäßig gegen 1. Dann sieht man mit Hilfe der ultrametrischen Dreiecksungleichung, dass der unendliche Faktor gleichmäßig auf V konvergiert.

Um die Eigenschaft (a) zu zeigen, beachte, dass

$$\Theta(d; \alpha z) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(d; \gamma \alpha z)}{\theta(d; \gamma z_0)} = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(d; \gamma z)}{\theta(d; \gamma \alpha^{-1} z_0)}.$$

Folglich

$$c(d)(\alpha) = \frac{\Theta(d; \alpha z)}{\Theta(d; z)} = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(d; \gamma z)}{\theta(d; \gamma \alpha^{-1} z_0)}.$$

Ist $z_1 \in \Omega(\overline{K})$, $z_1 \neq z_0$, ein anderer Basispunkt, so erhalten wir damit ein "neues" $\Theta(d; -)$, das wir mit $\Theta_1(d; -)$ bezeichnen. Dann gilt

$$\Theta(d; z) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(d; \gamma z_1)}{\theta(d; \gamma z_0)} \cdot \Theta_1(d; z),$$

d.h. das "ursprüngliche" $\Theta(d; -)$ und $\Theta_1(d; -)$ unterscheiden sich multiplikativ nur um eine Konstante und haben somit den gleichen Automorphie-Faktor. Die Transformationsregeln

$$c(d_1 + d_2)(\alpha) = c(d_1)(\alpha) \cdot c(d_2)(\alpha),$$

$$c(d)(\alpha_1 \alpha_2) = c(d)(\alpha_1) \cdot c(d)(\alpha_2),$$

wobei $d_1, d_2 \in \mathcal{D}_0^f$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$, sind offensichtlich und damit ist $c(-)(-)$ bilinear und $c(d)(\alpha) \in \mathbb{G}_{m,K}$ für alle $d \in \mathcal{D}_0^f$ und $\alpha \in \Gamma$. Wenn $z_0 \in \Omega(L) \setminus \Omega(K)$ für eine endliche Erweiterung L/K , dann ist $c(d)(\alpha) \in \mathbb{G}_{m,L}$ und $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ -invariant und damit $c(d)(\alpha) \in \mathbb{G}_{m,K}$ für alle $d \in \mathcal{D}_0^f$ und $\alpha \in \Gamma$.

Um die Eigenschaft (b) zu zeigen, reicht es nach 4.1.2, den Fall $d = \alpha z_1 - z_1$ für ein $\alpha \in \Gamma$ und $z_1 \in \Omega(\overline{K})$ zu betrachten. In diesem Fall hat $\Theta(d; z)$ offensichtlich keine Null- und Polstellen. \square

Bemerkung 4.1.7 Für ein $z_1 \in \Omega(\overline{K})$ und $\alpha \in \Gamma$ hat

$$\Theta(\alpha z_1 - z_1; z) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(\alpha z_1 - z_1; \gamma z)}{\theta(\alpha z_1 - z_1; \gamma z_0)}$$

keine Null- oder Polstellen und den Automorphie-Faktor

$$c(\alpha z_1 - z_1)(-) : \Gamma \rightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad \beta \mapsto c(\alpha z_1 - z_1)(\beta).$$

Dabei ist

$$c(\alpha z_1 - z_1)(\beta) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(\alpha z_1 - z_1; \gamma z_0)}{\theta(\alpha z_1 - z_1; \gamma \beta^{-1} z_0)} = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(\alpha z_1 - z_1; \gamma \beta z_0)}{\theta(\alpha z_1 - z_1; \gamma z_0)}.$$

Insbesondere

$$\Theta(\alpha z_1 - z_1; \beta z_0) = c(\alpha z_1 - z_1)(\beta)$$

für alle $\beta \in \Gamma$.

Proposition 4.1.8 Sei $z_1 \in \Omega(\overline{K})$, seien $\alpha, \beta \in \Gamma$ und $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in H$ die Bilder von α und β in H . Setze

$$\langle \alpha, \beta \rangle := c(\beta z_1 - z_1)(\alpha).$$

Dann hängt $\langle \alpha, \beta \rangle$ nur von $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ und nicht von z_0 und z_1 ab. Ferner induziert $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische bimultiplikative Paarung

$$\langle -, - \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{G}_{m,K} ,$$

die wir mit Missbrauch der Notation ebenfalls mit $\langle -, - \rangle$ bezeichnen.

Beweis. Nach der Wahl eines Basispunkts $z_0 \in \Omega(\overline{K}) \setminus (\Gamma_\infty \cup \Gamma z_1)$ gilt nach 4.1.5

$$c(\beta z_1 - z_1)(\alpha) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\gamma z_0 - \beta z_1}{\gamma z_0 - z_1} \frac{\gamma \alpha^{-1} z_0 - z_1}{\gamma \alpha^{-1} z_0 - \beta z_1} .$$

Unter Ausnutzung der projektiven Invarianz des Doppelverhältnisses lässt sich diese Gleichheit zu

$$\begin{aligned} c(\beta z_1 - z_1)(\alpha) &= \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\gamma^{-1} \beta z_1 - z_0}{\gamma^{-1} \beta z_1 - \alpha^{-1} z_0} \frac{\gamma^{-1} z_1 - \alpha^{-1} z_0}{\gamma^{-1} z_1 - z_0} \\ &= \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(\alpha^{-1} z_0 - z_0; \gamma^{-1} z_1)}{\theta(\alpha^{-1} z_0 - z_0; \gamma^{-1} \beta z_1)} \\ &= c(\alpha^{-1} z_0 - z_0)(\beta^{-1}) \end{aligned}$$

umschreiben. Die linke Seite der letzten Gleichheit ist multiplikativ in α und hängt nicht von z_0 ab. Die rechte Seite ist multiplikativ in β und hängt nicht von z_1 ab. Da die beiden Seiten Werte in $\mathbb{G}_{m,K}$ annehmen, hängen sie nur von α und β ab. Folglich

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta^{-1}, \alpha^{-1} \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle ,$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Bilinearität folgt.

Die Form $\langle -, - \rangle$ hängt nur von den Restklassen in H ab, da sie Werte in einer kommutativen Gruppe annimmt. \square

Definition 4.1.9 Für ein $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ bezeichne mit

$$z_\gamma^+ := \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n z_0$$

bzw.

$$z_\gamma^- := \lim_{n \rightarrow -\infty} \gamma^n z_0 ,$$

wobei $z_0 \in \mathbb{P}_K^1(\overline{K})$ ein Punkt ist, der kein Fixpunkt von γ ist, den *anziehenden* bzw. *abstoßenden Fixpunkt* von γ . Ist die Koordinate z so gewählt, dass $z(z_\gamma^+) = 0$ und $z(z_\gamma^-) = \infty$, so gilt $\gamma(z) = q_\gamma \cdot z$ mit einem $q \in \mathbb{P}_K^1$, $0 < |q_\gamma| < 1$. q_γ heißt der *Multiplikator* von γ .

Proposition 4.1.10 Für $\alpha, \beta \in \Gamma$ bezeichne mit $C(\beta|\alpha)$ die Menge der Doppelnebenklassenvertreter von $\beta^\mathbb{Z} \setminus \Gamma / \alpha^\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$(a) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \prod_{\gamma \in C(\beta|\alpha)} \frac{\theta(z_\beta^+ - z_\beta^-; \gamma z_\alpha^+)}{\theta(z_\beta^+ - z_\beta^-; \gamma z_\alpha^-)} .$$

(b) Sei $\bar{\alpha}$ nicht divisibel in H ist. Setze $C_0(\alpha|\alpha) := C(\alpha|\alpha) \setminus \{\text{id}\}$. Dann

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = q_\alpha \prod_{\gamma \in C_0(\alpha|\alpha)} \frac{\theta(z_\alpha^+ - z_\alpha^-; \gamma z_\alpha^+)}{\theta(z_\alpha^+ - z_\alpha^-; \gamma z_\alpha^-)}.$$

Beweis. (a) Nach 4.1.5 gilt (nach der Wahl eines $z_1 \in \Omega(\bar{K})$)

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= c(\beta z_1 - z_1)(\alpha) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(\beta z_1 - z_1; \gamma z_0)}{\theta(\beta z_1 - z_1; \gamma \alpha^{-1} z_0)} \\ &= \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\beta z_1 - \gamma z_0}{\beta z_1 - \gamma \alpha^{-1} z_0} \frac{z_1 - \gamma \alpha^{-1} z_0}{z_1 - \gamma z_0} \\ &= \prod_{\gamma \in C(\beta|\alpha)} \prod_{m \in \mathbb{Z}} \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\beta z_1 - \beta^{-m} \gamma \alpha^n z_0}{\beta z_1 - \beta^{-m} \gamma \alpha^{n-1} z_0} \frac{z_1 - \beta^{-m} \gamma \alpha^{n-1} z_0}{z_1 - \beta^{-m} \gamma \alpha^n z_0}. \end{aligned}$$

Für ein festes $m \in \mathbb{Z}$ berechnet sich das innere Produkt $\prod_{n \in \mathbb{Z}} \dots$ zu

$$\begin{aligned} \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\beta z_1 - \beta^{-m} \gamma \alpha^n z_0}{\beta z_1 - \beta^{-m} \gamma \alpha^{n-1} z_0} \frac{z_1 - \beta^{-m} \gamma \alpha^{n-1} z_0}{z_1 - \beta^{-m} \gamma \alpha^n z_0} &= \prod_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{\beta^{m+1} z_1 - \gamma \alpha^n z_0}{\beta^{m+1} z_1 - \gamma \alpha^{n-1} z_0}}_{:=a_n} \underbrace{\frac{\beta^m z_1 - \gamma \alpha^{n-1} z_0}{\beta^m z_1 - \gamma \alpha^n z_0}}_{:=b_n} \\ &= \frac{\beta^{m+1} z_1 - \gamma z_\alpha^+}{\beta^{m+1} z_1 - \gamma z_\alpha^-} \frac{\beta^m z_1 - \gamma z_\alpha^-}{\beta^m z_1 - \gamma z_\alpha^+} \\ &= \frac{\beta^{m+1} z_1 - \gamma z_\alpha^+}{\beta^m z_1 - \gamma z_\alpha^+} \frac{\beta^m z_1 - \gamma z_\alpha^-}{\beta^{m+1} z_1 - \gamma z_\alpha^-}, \\ & \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{:=c_m} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{:=d_m} \end{aligned}$$

da sich der Nenner von a_n bzw. der Zähler von b_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit dem Zähler von a_{n-1} bzw. dem Nenner von b_{n-1} weghebt. Der gleiche Rechenrick kann auf das mittlere Produkt $\prod_{m \in \mathbb{Z}} \dots$ über den letzten Term angewendet werden, wobei sich dann der Nenner von c_m bzw. der Zähler von d_m für alle $m \in \mathbb{Z}$ mit dem Zähler von c_{m-1} bzw. dem Nenner von d_{m-1} weghebt. So erhalten wir

$$\prod_{m \in \mathbb{Z}} \prod_{n \in \mathbb{Z}} \dots = \frac{z_\beta^+ - \gamma z_\alpha^+}{z_\beta^- - \gamma z_\alpha^+} \frac{z_\beta^- - \gamma z_\alpha^-}{z_\beta^+ - \gamma z_\alpha^-} = \frac{\theta(z_\beta^+ - z_\beta^-; \gamma z_\alpha^+)}{\theta(z_\beta^+ - z_\beta^-; \gamma z_\alpha^-)}.$$

(b) Da $\bar{\alpha}$ nicht divisibel ist, gehört jedes Element von Γ entweder zu $\alpha^{\mathbb{Z}}$ oder kann auf eindeutige Weise in der Form $\alpha^m \gamma \alpha^n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma \in C_0(\alpha|\alpha)$ geschrieben werden. Da das Doppelverhältnis invariant unter $\text{PGL}(2, K)$ ist, können wir ohne Einschränkung $z_\alpha^- = \infty$ und $z_\alpha^+ = 0$ annehmen. Dann gilt

$$\frac{\theta(z_\alpha^+ - z_\alpha^-; \alpha z_1)}{\theta(z_\alpha^+ - z_\alpha^-; z_1)} = \frac{\alpha z_1 - z_\alpha^+}{\alpha z_1 - z_\alpha^-} \frac{z_1 - z_\alpha^-}{z_1 - z_\alpha^+} = \frac{\alpha z_1 - 0}{\alpha z_1 - \infty} \frac{z_1 - \infty}{z_1 - 0} = \frac{\alpha z_1}{z_1} = q_\alpha$$

und die Behauptung folgt aus (a). \square

Proposition 4.1.11 *Nach der Wahl eines $z_1 \in \Omega(\overline{K})$ gilt*

$$\Theta(\alpha z_1 - z_1; z) = \prod_{\gamma \in C(\text{id}|\alpha)} \frac{\theta(\gamma z_\alpha^+ - \gamma z_\alpha^-; z)}{\theta(\gamma z_\alpha^+ - \gamma z_\alpha^-; z_0)}.$$

Diese Funktion hat keine Null- und Polstellen auf Ω , hängt nicht von der Wahl von z_1 und z_0 ab und ist multiplikativ in α .

Beweis. Der Beweis funktioniert ähnlich wie der Beweis von 4.1.10: Schreibe $\Theta(\alpha z_1 - z_1; z)$ in der Form

$$\Theta(\alpha z_1 - z_1; z) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(\alpha z_1 - z_1; \gamma z)}{\theta(\alpha z_1 - z_1; \gamma z_0)} = \prod_{\gamma \in C(\text{id}|\alpha)} \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\theta(\alpha z_1 - z_1; \gamma \alpha^n z)}{\theta(\alpha z_1 - z_1; \gamma \alpha^n z_0)}.$$

Das innere Produkt $\prod_{n \in \mathbb{Z}} \dots$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \prod_{n \in \mathbb{Z}} \dots &= \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\gamma \alpha^n z - \alpha z_1}{\gamma \alpha^n z - z_1} \frac{\gamma \alpha^n z_0 - z_1}{\gamma \alpha^n z_0 - \alpha z_1} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z - \gamma \alpha^n \alpha z_1}{z - \gamma \alpha^n z_1} \frac{z_0 - \gamma \alpha^n z_1}{z_0 - \gamma \alpha^n \alpha z_1} \\ &= \prod_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{z - \gamma \alpha^{n+1} z_1}{z - \gamma \alpha^n z_1}}_{:=e_n} \underbrace{\frac{z_0 - \gamma \alpha^n z_1}{z_0 - \gamma \alpha^{n+1} z_1}}_{:=g_n} \\ &= \frac{z - \gamma z_\alpha^+}{z - \gamma z_\alpha^-} \frac{z_0 - \gamma z_\alpha^-}{z_0 - \gamma z_\alpha^+} \\ &= \frac{\theta(\gamma z_\alpha^+ - \gamma z_\alpha^-; z)}{\theta(\gamma z_\alpha^+ - \gamma z_\alpha^-; z_0)}, \end{aligned}$$

da sich der Nenner von e_n bzw. der Zähler von g_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit dem Zähler von e_{n-1} bzw. dem Nenner von g_{n-1} weghebt. Beachte, dass das zweite Gleichheitszeichen in der ersten Zeile aus der Invarianz des Doppelverhältnisses unter projektiven Transformationen folgt. Die Multiplikativität folgt aus

$$(\alpha\beta - \text{id})z_1 = (\alpha - \text{id})(\beta z_1) + (\beta - \text{id})z_1$$

und

$$\Theta(\alpha z_1 - z_1; z) = \Theta((\alpha\beta)z_1 - \beta z_1; z)$$

für alle $\alpha, \beta \in \Gamma$. □

4.2 Drinfelds Konstruktion der Polarisierung

Lemma 4.2.1 *Seien $a_1, a_2, z_1, z_2 \in \Omega(K)$ und sei $\rho_\Omega = \rho : \Omega \rightarrow S_\Omega$ ein a_1, a_2, z_1, z_2 separierendes semistabiles Skelett von Ω . Bezeichne mit Missbrauch der Notation mit $\overline{a_1, a_2}$ bzw. $\overline{z_1, z_2}$ den orientierten Pfad von $\rho(a_1)$ nach $\rho(a_2)$ bzw. von $\rho(z_1)$ nach $\rho(z_2)$. Dann gilt*

$$-\log \left| \frac{\theta(a_1 - a_2; z_1)}{\theta(a_1 - a_2; z_2)} \right| = [\overline{a_1, a_2}, \overline{z_1, z_2}],$$

wobei die Paarung $[-, -]$ in 2.2.8(a) definiert wurde.

Beweis. Es gilt

$$\frac{\theta(a_1 - a_2; z_1)}{\theta(a_1 - a_2; z_2)} = \frac{z_1 - a_1}{z_1 - a_2} \frac{z_2 - a_2}{z_2 - a_1}.$$

Unter der Ausnutzung der projektiven Invarianz des Doppelverhältnisses können wir ohne Einschränkung $z_1 = 0, z_2 = \infty, a_2 = 1$ und $a_1 =: a \neq 0, 1, \infty$ annehmen. Dann ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichheit gleich $-\log|a|$. Gilt $|a| = |a - 1| = 1$, so sind die Bilder von a_1, a_2, z_1 und z_2 unter der Standard-Reduktionsabbildung von \mathbb{P}_K^1 paarweise verschieden und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass S_Ω trivial ist, d.h. aus genau einem Knoten besteht. Dann ist die rechte Seite der zu beweisenden Gleichheit gleich 0 und stimmt mit der linken Seite überein. Gilt $|a| = 1$ und $|a - 1| < 1$, so sind die Bilder von $a_1 = a$ und $a_2 = 1$ unter der Standard-Reduktionsabbildung von \mathbb{P}_K^1 gleich und wir müssen S_Ω wie in Bild 1 unten durch die Knoten $v_1 := \rho(0), v_2 := \rho(\infty), v_3 := \rho(a), v_4 := \rho(1) \in V(S_\Omega)$ und die Kanten $e_1, e_2, e_3 \in E(S_\Omega)$ verfeinern. Folglich sehen wir, dass $\overline{1, a}$ und $\overline{0, \infty}$ in diesem Fall keine gemeinsamen Kanten haben und die zu beweisende Gleichheit somit richtig ist. Gilt $|a| \neq 1$, so sind die Bilder von $a_1 = a$ und $z_2 = \infty$ bzw. $a_1 = a$ und $z_1 = 0$ je nach dem, ob $|a| > 1$ oder $|a| < 1$, unter der Standard-Reduktionsabbildung von \mathbb{P}_K^1 gleich und wir müssen S_Ω wie in Bild 2 bzw. Bild 3 unten je nach dem, ob $|a| > 1$ oder $|a| < 1$, durch die Knoten $v_1 := \rho(0), v_2 := \rho(1), v_3 := \rho(a), v_4 := \rho(\infty) \in V(S_\Omega)$ bzw. $v_1 := \rho(0), v_2 := \rho(a), v_3 := \rho(1), v_4 := \rho(\infty) \in V(S_\Omega)$ und die Kanten $e_1, e_2, e_3 \in E(S_\Omega)$ verfeinern. In diesem Fall haben $\overline{1, a}$ und $\overline{0, \infty}$ die Kante e_2 gemeinsam. Unter Berücksichtigung der Orientierung sehen wir, dass in diesem Fall die beiden Seiten der zu beweisenden Gleichheit ebenfalls gleich sind.

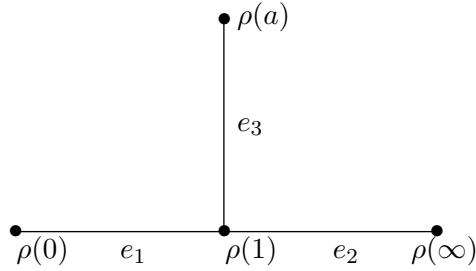


Bild 1

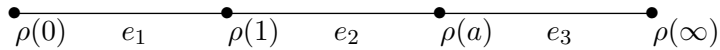


Bild 2

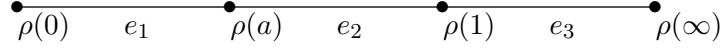


Bild 3

□

Satz 4.2.2 (Drinfeld) Für alle $\alpha \in \Gamma$ mit $\bar{\alpha} \neq 1$ gilt

$$|\langle \alpha, \alpha \rangle| < 1,$$

d.h.

$$-\log|\langle -, - \rangle| : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\alpha, \beta) \mapsto -\log|\langle \alpha, \beta \rangle|$$

induziert eine positiv-definite symmetrische Bilinearform auf $H \times H$, wobei $H = \Gamma_{\text{ab}}$ die Abelsierung von Γ ist.

Beweis. Nach 4.1.10(b) gilt

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = q_\alpha \prod_{\gamma \in C_0(\alpha|\alpha)} \frac{\theta(z_\alpha^+ - z_\alpha^-; \gamma z_\alpha^+)}{\theta(z_\alpha^+ - z_\alpha^-; \gamma z_\alpha^-)}$$

für alle $\alpha \in \Gamma$. Sei $r := -\log|q_\alpha| > 0$. Weiter seien wie in 2.2.10 $x_\alpha := \overline{z_\alpha^+, z_\alpha^-}$ die Achse, die von z_α^+ nach z_α^- orientiert ist, und c_α der im Fundamentalbereich von $\alpha^\mathbb{Z}$ enthaltene Teil von x_α . Dann ist

$$c_\alpha = \sum_{i=1}^r e_i$$

eine endliche Folge orientierter Kanten $e_1, \dots, e_r \in E(S_\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$. Folglich gilt

$$x_\alpha = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha^n c_\alpha = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^r \alpha^n e_i.$$

Daraus folgt nach 4.2.1

$$\begin{aligned}
 -\log|\langle \alpha, \alpha \rangle| &= -\log \left| q_\alpha \prod_{\gamma \in C(\alpha|\alpha) \setminus \{\text{id}\}} \frac{\theta(z_\alpha^+ - z_\alpha^-; \gamma z_\alpha^+)}{\theta(z_\alpha^+ - z_\alpha^-; \gamma z_\alpha^-)} \right| \\
 &= r + \sum_{\gamma \in C_0(\alpha|\alpha)} [x_\alpha, \gamma x_\alpha] \\
 &= r + \sum_{\gamma \in C_0(\alpha|\alpha)} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} [\alpha^m c_\alpha, \gamma \alpha^n c_\alpha] \\
 &= r + \sum_{\gamma \in C_0(\alpha|\alpha)} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} [c_\alpha, \alpha^{-m} \gamma \alpha^n c_\alpha] \\
 &= r + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} [c_\alpha, \gamma c_\alpha] \\
 &= \sum_{\gamma \in \Gamma} [c_\alpha, \gamma c_\alpha].
 \end{aligned}$$

Beachte, dass die vierte Gleichheit in dieser Folge von Gleichheiten aus der projektiven Invarianz des Doppelverhältnisses und die fünfte aus der Tatsache folgt, dass jedes Element von $\Gamma \setminus \{\alpha^{\mathbb{Z}}\}$ eine eindeutig bestimmte Darstellung von der Form $\alpha^m \gamma \alpha^n$ mit $\gamma \in C_0(\alpha|\alpha)$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ hat, da $\bar{\alpha}$ nicht divisibel ist. Die letzte Gleichheit folgt aus

$$[c_\alpha, \alpha^n c_\alpha] = \begin{cases} r, & \text{falls } n = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachte, dass x_α und γx_α für alle $\gamma \in C_0(\alpha|\alpha)$ höchstens einen endlich Pfad gemeinsam haben, da c_α und $\alpha^m \gamma \alpha^n c_\alpha$ nach 2.1.11 für fast alle $m, n \in \mathbb{Z}$ disjunkt sind. Es bleibt,

$$[c_\alpha, \gamma c_\alpha] = [\bar{c}_\alpha, \bar{c}_\alpha]$$

für alle $\gamma \in C_0(\alpha|\alpha)$ zu zeigen. Dazu reicht es wegen $x_\alpha = \sum_{i=1}^r e_i$, für ein $\gamma \in \Gamma$

$$[e_i, \gamma e_i] = \begin{cases} [e_i, e_i] = 1, & \text{falls } \gamma = \text{id}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

zu zeigen, was aus 2.2.12 folgt. □

4.3 Jacobische einer Mumford-Kurve

Sei $\Gamma \subset \text{PGL}(2, K)$ eine Schottky-Gruppe von Rang g , $\Omega = \Omega_\Gamma = \mathbb{P}_K^1 \setminus L_\Gamma$ die Menge der gewöhnlichen Punkte von Γ , wobei L_Γ die Menge der Limitpunkte von Γ ist, $X = X_\Gamma = \Gamma \setminus \Omega$ die zugehörige Mumford-Kurve, $H := \Gamma_{\text{ab}}$ die Abelisierung von Γ , $T := \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{G}_{m, K}) = \text{Spec } K[H] = \mathbb{G}_{m, K}^g$ der affine Torus von Rang g

und $c \in T$ eine eindimensionale Darstellung von $\Gamma = \pi_1(X)$. Dann definiert c eine Linearisierung

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \mathbb{A}_K^1 = \mathbb{A}_\Omega^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_\Omega^1 & (z, \ell) \longmapsto & (\gamma z, c(\gamma) \cdot \ell) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \Omega & \xrightarrow{\gamma} & \Omega, & z \longmapsto & \gamma z \end{array}$$

auf \mathbb{A}_Ω^1 und damit durch Quotientenbildung ein (rigid-analytisches) Geradenbündel

$$L(c) := \mathbb{A}_K^1 / c$$

auf X .

Bemerkung 4.3.1 Mit der obigen Notation gilt $\deg(L(c)) = 0$.

Beweis. $L(c)$ ist ein rigid-analytisches Geradenbündel, also ein Element der analytischen Picard-Gruppe $\text{Pic}^{\text{an}}(X)$ von X . $\text{Jac}(X)$ stellt nach GAGA auch den analytischen Picard-Funktor $\underline{\text{Pic}}_{X/K}^{\text{an}}$ auf X dar. Wir können $L(c)$ daher auch als ein algebraisches Geradenbündel auffassen. Nach relativem GAGA (vgl. [9, Satz 1.6.8]) ist die Abbildung

$$T = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{G}_{m,K}) \longrightarrow \text{Jac}(X); \quad c \longmapsto L(c)$$

holomorph, also insbesondere stetig. Da T zusammenhängend ist, hängt $\deg(L(c))$ nicht von der Wahl von c ab. Wegen $\deg(L(1)) = 0$ folgt daher $\deg(L(c)) = 0$ für alle $c \in T$. \square

Sei \mathcal{L} eine (rigid-analytische) invertierbare Garbe auf X und

$$p_X : \Omega \longrightarrow X$$

die natürliche Projektion. Dann kann $p_X^* \mathcal{L}$ nach 2.5.3 durch

$$p_X^* \mathcal{L} = \mathcal{O}_\Omega \cdot \ell$$

auf Ω trivialisiert werden, wobei $\ell \in p_X^* \mathcal{L}$ nur bis auf eine Einheit in $\mathcal{O}_\Omega^\times$ eindeutig bestimmt ist, und das zu \mathcal{L} assoziierte Geradenbündel $L = \mathbf{MaxSpec} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^{\otimes n}$ hat eine kanonische triviale Linearisierung c_L . Insbesondere gilt

$$c_L(\gamma) = \frac{\gamma^* \ell}{\ell}$$

für alle $\gamma \in \Gamma$.

Lemma 4.3.2 *Mit der obigen Notation und unter der Annahme $\deg(\mathcal{L}) = 0$ ist $c_L(\gamma)$ für alle $\gamma \in \Gamma$ konstant.*

Beweis. Wegen $\deg(\mathcal{L}) = 0$ gilt

$$p_X^* \mathcal{L} = \mathcal{O}_\Omega \cdot \Theta(d)$$

mit einem $d \in \mathcal{D}_0^f$ und damit nach 4.1.5(a) für alle $\gamma \in \Gamma$

$$\gamma^* p_X^* \mathcal{L} = c(d)(\gamma) \cdot \mathcal{O}_\Omega \cdot \Theta(d),$$

d.h. $c_L(\gamma) = c(d)(\gamma)$. Dann folgt die Behauptung wieder aus 4.1.5(a). \square

Korollar 4.3.3 *Mit der obigen Notation ist $c_L : \Gamma \rightarrow \mathbb{G}_{m,K}$ ein Gruppenhomomorphismus.*

Korollar 4.3.4 *Mit der obigen Notation ist*

$$\varphi : T \rightarrow \text{Jac}(X); \quad c \mapsto \mathbb{A}_\Omega^1/c$$

wohldefiniert und surjektiv.

Lemma 4.3.5 *Sei*

$$c : \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{G}}_{m,K} := \{z \in \mathbb{G}_{m,K}; |z| = 1\}$$

ein Gruppenhomomorphismus und es gebe ein $f \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)$, so dass für alle $\gamma \in \Gamma$

$$c(\gamma) = \frac{\gamma^* f}{f}$$

gilt. Dann ist f konstant.

Beweis. Nach Annahme gilt

$$c(\gamma) \cdot f(z) = f(\gamma z)$$

für alle $\gamma \in \Gamma$ und $z \in \Omega$. Folglich ist f beschränkt und damit nach [9, Proposition 4.5.5] konstant. \square

Korollar 4.3.6 *Sei $\overline{T} := \text{Hom}(\Gamma, \overline{\mathbb{G}}_{m,K}) \subset T$ der formelle affine Torus vom Rang g . Dann ist*

$$\varphi|_{\overline{T}} : \overline{T} \rightarrow \text{Jac}(X); \quad c \mapsto L(c)$$

mit der obigen Notation injektiv.

Notation 4.3.7 Setze

$$M = \left\{ c \in T; \exists u \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)^\times : \forall \gamma \in \Gamma : c(\gamma) = \frac{\gamma^* u}{u} \right\} \\ = \langle \{c(\gamma z_0 - z_0); \gamma \in \Gamma\} \rangle.$$

M ist eine diskrete Untergruppe von T und damit ein Gitter. Da Γ Rang g hat, hat M Rang $\leq g$. Um zu sehen, dass $\text{rk } M = g$, beachte, dass es nach 4.2.2 eine prinzipale Polarisierung von M gibt und der rigid-analytische Torus T/M nach 3.2.12 algebraisch, d.h. eine abelsche Varietät ist. Folglich hat M nach 3.2.3 vollen Rang g .

Definition 4.3.8 Mit der obigen Notation heißt

$$J_{\text{an}} := T/M$$

die *rigid-analytische Jacobische* von X .

Für jedes $\gamma \in \Gamma$ gibt es ein kommutatives Quadrat

$$(\dagger) \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\gamma} & \Omega \\ \downarrow \hat{i} & & \downarrow \hat{i} \\ T & \xrightarrow{\cdot \hat{i}(\gamma z_0)} & T, \end{array}$$

wobei die obere horizontale Abbildung die Wirkung von γ auf Ω , die untere die Addition mit $\hat{i}(\gamma z_0) \in \Lambda$, $\Lambda \cong M$ das Gitter von $\text{Jac}(X)$ und \hat{i} die Hochhebung der Albanese-Abbildung

$$\iota : X \longrightarrow \text{Jac}(X); \quad x \longmapsto [x - x_0]$$

ist, wobei $x_0 = \bar{z}_0$ das Bild von z_0 in X ist, denn für ein $z \in \Omega$ gilt

$$\hat{i} \circ \gamma(z) = \hat{i}(\gamma z) = \hat{i}(z) \cdot \hat{i}(\gamma z_0).$$

Es gibt nach 4.1.5 ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\hat{j}} & T \\ \downarrow p_X & & \downarrow p_J \\ X & \xrightarrow{j} & J_{\text{an}}, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} z \longmapsto & c(z - z_0) \\ \downarrow & \downarrow \\ \bar{z} \longmapsto & c(z - z_0), \end{array}$$

wobei p_J die natürliche Projektion ist.

Lemma 4.3.9 Mit der obigen Notation kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega & & \bar{z} \\ \hat{j} \downarrow & \searrow \hat{i} & \downarrow \\ J_{\text{an}} & \longrightarrow \text{Jac}(X), & c(z - z_0) \longmapsto [\bar{z} - \bar{z}_0], \end{array}$$

wobei \bar{z} für alle $z \in \Omega$ das Bild von z unter p_X ist.

Beweis. $c(z - z_0)$ liefert für alle $z \in \Omega$ das Geradenbündel

$$L(z - z_0) := \mathbb{A}_K^1 / c(z - z_0)$$

auf X . Sei

$$\mathcal{L}(z - z_0) = \mathcal{O}_\Omega(z - z_0)$$

die zu $L(z - z_0)$ assoziierte invertierbare Garbe, deren Pull-Back $p_X^* \mathcal{L}(z - z_0)$ unter p_X nach 2.5.3 durch

$$p_X^* \mathcal{L}(z - z_0) = \mathcal{O}_\Omega(\operatorname{div}(\Theta(z - z_0)))$$

auf Ω trivialisiert werden kann. Dann folgt

$$\mathcal{L}(z - z_0) = \mathcal{O}_X(\bar{z} - \bar{z}_0),$$

insbesondere nach 3.1.2

$$L(z - z_0) = [\bar{z} - \bar{z}_0]^{-1}.$$

□

Korollar 4.3.10 *Die kanonische Abbildung*

$$\psi : J_{\text{an}} \longrightarrow \operatorname{Jac}(X); \quad \prod_{i=1}^g \overline{c(\hat{x}_i - z_0)} \longmapsto \prod_{i=1}^g [x_i - x_0],$$

wobei $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_g \in \Omega$ (abgeschlossene) Punkte und $x_1 = p_J(\hat{x}_1), \dots, x_g = p_J(\hat{x}_g)$ ihre Bilder in X sind, ist ein Isomorphismus.

Beweis. ψ ist nach 4.3.9 surjektiv. Da J_{an} und $\operatorname{Jac}(X)$ (rigid-analytische bzw. algebraische) Gruppen derselben Dimension g sind und ψ surjektiv ist, sind die Fasern von ψ endlich-dimensional. Betrachte die induzierte kanonische Abbildung

$$X^{(g)} \xrightarrow{j^{(g)}} J_{\text{an}} \xrightarrow{\psi} \operatorname{Jac}(X); \quad d = \sum_{i=1}^g x_i \longmapsto \prod_{i=1}^g \overline{c(\hat{x}_i - z_0)} \longmapsto \prod_{i=1}^g [x_i - x_0]$$

vom g -fachen symmetrischen Produkt $X^{(g)}$ von X nach $\operatorname{Jac}(X)$. Die Fasern von $\psi \circ j^{(g)}$ sind isomorph zum linearen System $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(d)))$ über $[d - gx_0]$, wobei $d \in X^{(g)}$ (vgl. [12, Kapitel VII, Bemerkung 5.6(b)]). Insbesondere sind die letzteren zusammenhängend. Folglich sind die Fasern von $j^{(g)}$ auch zusammenhängend. Da sie endlich-dimensional sind, bestehen sie aus einem einzigen Punkt. Folglich ist ψ ein Isomorphismus. □

Korollar 4.3.11 (a) Jede rationale Funktion auf X wird bis auf Multiplikation mit einem Skalar durch $\Theta(d)$ mit einem geeigneten $d \in \mathcal{D}_0^f$ induziert.
 (b) Jede null- und polstellenfreie automorphe Funktion auf Ω wird bis auf Multiplikation mit einem Skalar durch $\Theta(d)$ mit einem geeigneten $d \in \mathcal{D}_0^f$, $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d = 0$, induziert.

Beweis. (a) Da $\text{Jac}(X)$ nach relativem GAGA die holomorphen Geradenbündel auf X darstellt und die letzteren durch rationale Funktionen auf X trivialisiert werden, folgt die Behauptung aus 4.3.10.
 (b) Folgt sofort aus 4.1.5(b). □

Korollar 4.3.12 Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\gamma} & \Omega \\ \downarrow \hat{i} & & \downarrow \hat{i} \\ T & \xrightarrow{\cdot \hat{i}(\gamma z_0)} & T, \end{array}$$

in (†) induziert für alle $\gamma \in \Gamma$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\gamma} & \Omega \\ \hat{j} \downarrow & & \hat{j} \downarrow \\ \hat{i} T & \xrightarrow{\cdot m_\gamma} & T \hat{i} \\ \psi \downarrow & & \psi \downarrow \\ T & \xrightarrow{\cdot \hat{i}(\gamma z_0)} & T, \end{array}$$

wobei die mittlere horizontale Abbildung die Addition mit

$$m_\gamma := \hat{j}(\gamma z_0) = c(\gamma z_0 - z_0) \in M$$

ist, wobei M in 4.3.7 definiert wurde

Dies versetzt uns in die Lage, einen Gruppenhomomorphismus

$$h : H = \Gamma_{\text{ab}} \longrightarrow M; \quad \gamma \longmapsto m_\gamma$$

zu definieren. Beachte, dass h nach Definition von M surjektiv und damit bijektiv ist, da H und M freie abelsche Gruppen von Rang g sind.

Darüberhinaus gibt es einen kanonischen Auswertungshomomorphismus

$$h' : H \longrightarrow M' := \text{Hom}(T, \mathbb{G}_{m,K}); \quad \gamma \longmapsto m'_\gamma := [T = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{G}_{m,K}) \ni t \longmapsto t(\gamma)].$$

Beachte, dass h' nach Definition von $T = \text{Spec}K[H]$ bijektiv ist. Dies führt uns zu

Definition 4.3.13 Mit der obigen Notation sei $\langle -, - \rangle_{M \times M'}$ die durch

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle : H \times H &\xrightarrow{h \times h'} M \times M' && \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto (h(\alpha), h'(\beta)) && \longmapsto h'(\beta)(h(\alpha)) \end{aligned}$$

definierte Bilinearform auf $M \times M'$, wobei α und β alle Elemente von Γ durchlaufen.

Lemma 4.3.14 Fixiere ein $z_0 \in \Omega(\overline{K})$. Dann gilt für alle $z \in \Omega(\overline{K})$ und $\alpha, \beta \in \Gamma$

- (a) $c(z - z_0)(\alpha) = \Theta(\alpha z_0 - z_0; z)$.
- (b) $h'(\alpha) \circ \widehat{j}(z) = \Theta(\alpha z_0 - z_0; z)$.
- (c) $\widehat{j}(\alpha z) = h(\alpha) \cdot \widehat{j}(z)$.
- (d) $h'(\beta)(h(\alpha)) = \langle \beta, \alpha \rangle$.

Beweis. (a) Nimm zunächst $\Gamma z_0 \neq \Gamma z$ an. Dann folgt für alle $\alpha \in \Gamma$ unter Berücksichtigung der projektiven Invarianz des Doppelverhältnisses

$$\begin{aligned} c(z - z_0)(\alpha) &= \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(z - z_0; \gamma z_0)}{\theta(z - z_0; \gamma \alpha^{-1} z_0)} \\ &= \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\gamma z_0 - z}{\gamma z_0 - z_0} \frac{\gamma \alpha^{-1} z_0 - z_0}{\gamma \alpha^{-1} z_0 - z} \\ &= \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\gamma z - z_0}{\gamma z - \alpha^{-1} z_0} \frac{\gamma z_0 - \alpha^{-1} z_0}{\gamma z_0 - z_0} \\ &= \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(z_0 - \alpha^{-1} z_0; \gamma z_0)}{\theta(z_0 - \alpha^{-1} z_0; \gamma z_0)} \\ &= \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\theta(\alpha z_0 - z_0; \gamma z)}{\theta(\alpha z_0 - z_0; \gamma z_0)} \\ &= \Theta(\alpha z_0 - z_0; z). \end{aligned}$$

Ist $z = \beta z_0$, $\beta \in \Gamma$, so folgt nach 4.1.7 und 4.1.8

$$\begin{aligned} c(z - z_0)(\alpha) &= c(\beta z_0 - z_0)(\alpha) = \langle \beta, \alpha \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \\ &= c(\alpha z_0 - z_0)(\beta) \\ &= \Theta(\alpha z_0 - z_0; \beta z_0) = \Theta(\alpha z_0 - z_0; z). \end{aligned}$$

(b) Beachte, dass $h'(\alpha) \in \text{Hom}(T, \mathbb{G}_{m,K})$, $T = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{G}_{m,K}) = \text{Hom}(H, \mathbb{G}_{m,K}) \ni \widehat{j}(z) : H \rightarrow \mathbb{G}_{m,K}$ und $h'(\alpha) \circ \widehat{j}(z)$ die Auswertung von $h'(\alpha)$ in $\widehat{j}(z)$ ist. Dann folgt nach (a)

$$h'(\alpha) \circ \widehat{j}(z) = c(z - z_0)(\alpha) = \Theta(\alpha z_0 - z_0; z).$$

(c) $h(\alpha) \cdot \widehat{j}(z) = c(\alpha z_0 - z_0) \cdot c(z - z_0)$ ist für alle $z \in \Omega(\overline{K})$ und $\alpha \in \Gamma$ der Automorphie-Faktor von $\Theta(\alpha z_0 - z_0) \cdot \Theta(z - z_0)$. Wegen

$$c(\alpha z_0 - z_0) = c(\alpha z - z)$$

für alle $z \in \Omega(\overline{K})$ (vgl. 4.1.8) ist es auch der Automorphie-Faktor von

$$\Theta(\alpha z - z) \cdot \Theta(z - z_0) = \Theta(\alpha z - z + z - z_0) = \Theta(\alpha z - z_0),$$

der durch $c(\alpha z - z_0) = \widehat{j}(\alpha z)$ gegeben ist.

(d) Folgt sofort aus der Definition von $\langle -, - \rangle_{M \times M'}$. \square

Im folgenden schreiben wir " $\langle -, - \rangle$ " statt " $\langle -, - \rangle_{M \times M'}$ ", um die Notation einfacher zu halten.

Satz 4.3.15 *Seien die Notation und die Voraussetzungen wie oben.*

(a) $\lambda := h' \circ h^{-1} : M \rightarrow M'$ ist eine prinzipale Polarisierung für (T, M) und induziert einen Isomorphismus $\varphi : J \rightarrow J' := T'/M'$ von J in seine Duale J' .

(b) J_{an} ist (die Analytifizierung) eine(r) abelsche(n) Varietät, insbesondere $J_{\text{an}} = \text{Jac}(X)$.

(c) Das universelle Geradenbündel auf $X \times J_{\text{an}}$ ist gegeben durch die $\Gamma \times M$ -Wirkung

$$\begin{aligned} C_{\Gamma \times M} : (\Gamma \times M) \times ((\Omega \times T) \times \mathbb{A}_K^1) &\longrightarrow (\Omega \times T) \times \mathbb{A}_K^1 \\ (\alpha, h(\beta), z, t, \ell) &\longmapsto h'(\beta)(\widehat{j}(z)) \cdot h(\alpha)(\widehat{\phi}(t)) \cdot \langle \beta, \alpha \rangle \cdot \ell \end{aligned}$$

auf dem trivialen Geradenbündel $\mathbb{A}_{\Omega \times T}^1 = (\Omega \times T) \times \mathbb{A}_K^1$ auf $\Omega \times T$, wobei β alle Elemente von Γ durchläuft und $\widehat{\phi} : T \rightarrow T'$ durch λ induziert wird.

Beweis. Die nach 3.2.9(b) symmetrische Bilinearform

$$M \times M \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad (m_1, m_2) = (h(\alpha), h(\beta)) \longmapsto \lambda(m_1)(m_2) = \langle \beta, \alpha \rangle,$$

wobei α und β alle Elemente von Γ durchlaufen, stimmt nach 4.3.14(d) mit der Form in 4.1.8 überein und ist positiv-definit nach 4.2.2. Folglich ist λ eine Polarisierung für (T, M) .

(b) Folgt sofort aus 3.2.12, (a) und GAGA.

(c) Das Poincaré-Bündel auf $J_{\text{an}} \times J'_{\text{an}}$ ist nach 3.2.7 gegeben durch die $M \times M'$ -Linearisierung

$$\begin{aligned} C_{M \times M'} : (M \times M') \times ((T \times T') \times \mathbb{A}_K^1) &\longrightarrow (T \times T') \times \mathbb{A}_K^1 \\ (m, m', t, t', \ell) &\longmapsto m'(t) \cdot m(t') \cdot \langle m, m' \rangle \cdot \ell \end{aligned}$$

auf $\mathbb{A}_{T \times T'}^1 = (T \times T') \times \mathbb{A}_K^1$. Das universelle Geradenbündel auf $X \times J_{\text{an}}$ ist das Pull-Back des Poincaré-Bündels auf $J_{\text{an}} \times J'_{\text{an}}$ unter $(j, \phi) : X \times J_{\text{an}} \rightarrow J_{\text{an}} \times J'_{\text{an}}$. Folglich ist die $\Gamma \times M$ -Linearisierung $C_{\Gamma \times M}$ auf $\mathbb{A}_{\Omega \times T}^1$ das Pull-Back der $M \times M'$ -Linearisierung $C_{M \times M'}$ auf $\mathbb{A}_{T \times T'}^1$ unter $(\widehat{j}, \widehat{\phi}) : \Omega \times T \rightarrow T \times T'$ und berechnet sich nach 3.2.9(b) und 4.3.14(b) zu

$$\begin{aligned} C_{\Gamma \times M}(\alpha, h(\beta), z, t) &= (\widehat{j}, \widehat{\phi})^* C_{M \times M'}(h(\alpha), h'(\beta), \widehat{j}(z), \widehat{\phi}(t)) \\ &= h'(\beta)(\widehat{j}(z)) \cdot h(\alpha)(\widehat{\phi}(t)) \cdot \langle \beta, \alpha \rangle \\ &= t(\alpha) \cdot [\Theta(\beta z_0 - z_0; z) \cdot \langle \beta, \alpha \rangle]. \end{aligned}$$

Der Term in eckigen Klammern vermittelt das triviale Geradenbündel auf X . Insbesondere liefert die Einschränkung des durch $C_{\Gamma \times M}$ induzierten Geradenbündels auf $\Omega \times t$ mit einem $t \in T$ die "richtige" $\Gamma \times \{0_M\}$ -Linearisierung und die auf $\{z_0\} \times T$ die triviale $\{1_\Gamma\} \times M$ -Linearisierung. \square

5 Beziehung zwischen Drinfelds und Theta-Polarisierung

5.1 Theta-Polarisierung

Bezeichne mit

$$\lambda_D : M \longrightarrow M' = \text{Hom}(T, \mathbb{G}_{m,K}); \quad c(\alpha z_0 - z_0) \longmapsto m'_\alpha,$$

wobei α alle Elemente von Γ durchläuft und m'_α die Bedingung $\widehat{j}^* m'_\alpha = \Theta(\alpha z_0 - z_0)$ erfüllt, wodurch es eindeutig bestimmt ist, *Drinfelds Polarisierung*. Seien wie in Abschnitt 4.3

$$h : H \xrightarrow{\sim} M; \quad \alpha \longmapsto c(\alpha z_0 - z_0)$$

und

$$h' : H \xrightarrow{\sim} M' = \text{Hom}(T, \mathbb{G}_{m,K}); \quad \alpha \longmapsto [T \ni t \longmapsto t(\alpha)]$$

und setze

$$\lambda := h' \circ h^{-1} : M \longrightarrow M'.$$

Ferner sei $\widehat{t} : \Omega \times \{z_0\} \rightarrow T$ die Hochhebung der Albanese-Abbildung

$$\iota : X \times \{x_0\} \longrightarrow \text{Jac}(X); \quad x \longmapsto [x - x_0],$$

wobei $x_0 = \bar{z}_0$ das Bild von z_0 in X ist, und

$$\widehat{j} : \Omega \times \{z_0\} \longrightarrow T; \quad z \longmapsto c(z - z_0).$$

Satz 5.1.1 *Mit der obigen Notation gilt $\lambda = \lambda_D$, insbesondere*

$$\widehat{t}^* h'(\alpha) = \Theta(\alpha z_0 - z_0)$$

(wenn wir \widehat{t} mit \widehat{j} identifizieren).

Beweis. Folgt sofort aus 4.3.14(b).

5 Beziehung zwischen Drinfelds und Theta-Polarisierung

Seien $J = \text{Jac}(X)$ die Jacobische von X und W_{g-1} das Bild von $X^{(g-1)} \times \{x_0\}$ unter

$$j^{(g-1)} : X^{(g-1)} \times \{x_0\} \longrightarrow J; \quad d = \sum_{i=1}^{g-1} x_i \longmapsto [d - (g-1)x_0].$$

Wir fassen W_{g-1} als einen Divisor auf J auf. Sei $L(W_{g-1})$ das zu $\mathcal{O}_J(W_{g-1})$ assoziierte Geradenbündel. Zu $L(W_{g-1})$ gehört nach 3.2.5 eine M -Linearisierung (r, λ_Θ) auf \mathbb{A}_T^1 , wobei $r : M \rightarrow \mathbb{G}_{m,K}$ eine Abbildung, die die in 3.2.5 angegebene Funktionalgleichung erfüllt, und $\lambda_\Theta : M \rightarrow M'$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Sei $\widehat{\varphi}_\Theta : T \rightarrow T'$ die Hochhebung der prinzipalen Theta-Polarisierung

$$\varphi_\Theta : J = T/M \longrightarrow J' = T'/M'; \quad x \longmapsto [\tau_x^* \mathcal{O}_J(W_{g-1}) \otimes \mathcal{O}_J(W_{g-1})^{-1}]$$

von J , wobei $T' = \text{Hom}(M, \mathbb{G}_{m,K})$ der zu T duale Torus und $M' = \text{Hom}(T, \mathbb{G}_{m,K})$ das zu M duale Gitter ist. Beachte, dass aufgrund der Symmetrie von φ_Θ nach [9, Proposition 6.4.1(c)] $\lambda_\Theta = \widehat{\varphi}_\Theta|_M$ gilt, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\widehat{\varphi}_\Theta} & T' \\ \uparrow & & \uparrow \\ M & \xrightarrow{\lambda_\Theta} & M' \end{array}$$

kommutiert.

Proposition 5.1.2 (vgl. [12, Kapitel VII, Lemma 6.7, Lemma 6.8, Lemma 6.9])
Sei X eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht $g \geq 1$ über einem Körper k und $x_0 \in X(k)$. Sei

$$\iota : X \longrightarrow J := \text{Jac}(X); \quad x \longmapsto [x - x_0]$$

die Albanese-Abbildung von X nach $\text{Jac}(X)$, wobei $[x - x_0]$ die Klasse von $\mathcal{O}_X(x - x_0)$ in $\text{Jac}(X)$ bezeichnet, $m : J \times J \rightarrow J$ das Gruppengesetz auf J und W_{g-1} das Bild von $X^{(g-1)} \times \{x_0\}$ unter

$$\iota^{(g-1)} : X^{(g-1)} \times \{x_0\} \longrightarrow J; \quad d = \sum_{i=1}^{g-1} x_i \longmapsto [d - (g-1) \cdot x_0]$$

ist. Dann gilt

(a) Für jeden effektiven Divisor D auf $X^{(g)}$ gilt

$$\iota^* \left(W_{g-1,a}^- \right) \cong \mathcal{O}_X(D),$$

wobei $W_{g-1,a}^- := \tau_a^*([-1]^* W_{g-1})$, $a := \iota^{(g)}(D) \in J$ und $\iota^{(g)}$ genauso wie $\iota^{(g-1)}$ definiert ist.

(b) Sei \mathcal{D} die universelle invertierbare Garbe auf $X \times J$. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\xrightarrow{\sim} (\iota \times [-1]_J)^* \mathcal{O}_{J \times J} \left(m^{-1} \left(W_{g-1}^- \right) \setminus \left(\left(W_{g-1}^- \times J \right) \cup \left(J \times W_{g-1}^- \right) \right) \right) \\ &\xrightarrow{\sim} (\iota \times \varphi_{-\Theta})^* \mathcal{P}_{J \times J'}, \end{aligned}$$

wobei $W_{g-1}^- := [-1] \circ W_{g-1}$ und $[-1] : J \rightarrow J$; $x \mapsto -x$ die Invertierung bezüglich des Gruppengesetzes auf J ist.

(c) Bezeichne mit

$$\varphi_{\Theta} : J \longrightarrow J'; \quad a \longmapsto \left[\tau_a^* \mathcal{O}_J(W_{g-1}) \otimes \mathcal{O}_J(W_{g-1})^{-1} \right]$$

die prinzipale Theta-Polarisierung von J . Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$(\text{id} \times \varphi_{\Theta})^* \mathcal{P}_{J \times J'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{J \times J} \left(m^{-1} \left(W_{g-1} \right) \setminus \left(\left(W_{g-1} \times J \right) \cup \left(J \times W_{g-1} \right) \right) \right),$$

wobei $\mathcal{P}_{J \times J'}$ das Poincaré-Bündel auf $J \times J'$ ist.

(d) Die invertierbare Garbe $(\iota \times \text{id}_{J'})^* \mathcal{P}_{J \times J'}$ auf $X \times J'$ vermittelt einen eindeutig bestimmten Morphismus $\varphi' : J' \rightarrow J$; $b' \mapsto [\iota^* \mathcal{P}_{J \times b'}]$, derart dass

$$(\text{id}_X \times \varphi')^* \mathcal{D} \cong (\iota \times \text{id}_{J'})^* \mathcal{P}_{J \times J'}.$$

Die Morphismen $[-1] \circ \varphi' : J' \rightarrow J$ und $\varphi_{\Theta} : J \rightarrow J'$ sind zueinander invers. φ' heißt Selbstdualitätsabbildung.

5.2 Riemannscher Verschwindungssatz

Lemma 5.2.1 Es gibt eine symmetrische Bilinearform $b : M \times M \rightarrow \mathbb{G}_{m,K}$, die die Beziehung

$$b(m_1, m_2)^2 = \langle m_1, \lambda_D(m_2) \rangle$$

für alle $m_1, m_2 \in M$ erfüllt.

Beweis. Sei (e_1, \dots, e_g) eine Basis von M und betrachte eine Matrixdarstellung der symmetrischen quadratischen Form $\langle h(-), \lambda(-) \rangle$ bezüglich der Basis (e_1, \dots, e_g) . Sei

$$b_{ij} := \sqrt{\langle e_j, \lambda(e_i) \rangle}$$

für alle $i \leq j$ und definiere b durch die symmetrische Matrix $(b_{ij})_{i,j}$. \square

Definition 5.2.2 Die formale Laurent-Reihe

$$\vartheta(t) := \sum_{m \in M} b(m, m) \cdot \langle t, \lambda(m) \rangle, \quad t \in T,$$

wobei hier " $\langle -, - \rangle$ " im Sinne von 3.2.5(a) gemeint ist, heißt die *Theta-Funktion* von T bezüglich λ .

Lemma 5.2.3 ϑ ist eine nicht identisch verschwindende holomorphe Funktion mit Werten in \mathbb{A}_K^1 und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\vartheta(t) = b(m, m) \cdot \langle t, \lambda(m) \rangle \cdot \vartheta(m \cdot t)$$

für alle $m \in M$ und $t \in T$.

Beweis. ϑ konvergiert wegen

$$|b(m, m)| \leq c^{2|m|}$$

nach 4.2.2 mit einem $c \in K$, $c < 1$, wobei $|m|$ eine geeignete Norm auf M ist. Sei $m \in M$ fest. Um die Funktionalgleichung zu zeigen, lasse die Summe in der Definition von ϑ über $m+n$, $n \in M$, laufen. Dann ist der Summand auf der linken Seite der zu beweisenden Funktionalgleichung, der zu $m+n$ mit einem $n \in M$ gehört, gegeben durch

$$b(m+n, m+n) \cdot \langle t, \lambda(m+n) \rangle = b(m, m) \cdot b(m, n)^2 \cdot b(n, n) \cdot \langle t, \lambda(m+n) \rangle.$$

Nun lasse die Summe in der Definition von ϑ über $n \in M$ laufen. Der Summand auf der rechten Seite der zu beweisenden Funktionalgleichung, der zu n gehört, berechnet sich dann zu

$$b(m, m) \cdot \langle t, \lambda(m) \rangle \cdot b(n, n) \cdot \langle m \cdot t, \lambda(n) \rangle = b(m, m) \cdot b(n, n) \cdot \langle m, \lambda(n) \rangle \cdot \langle t, \lambda(m) \rangle \cdot \langle t, \lambda(n) \rangle.$$

Die beiden Summanden stimmen wegen

$$b(m, n)^2 = \langle n, \lambda(m) \rangle = \langle m, \lambda(n) \rangle$$

miteinander überein. □

Korollar 5.2.4 Der durch

$$\widehat{\Theta} := \text{div}(\vartheta)$$

definierte effektive Divisor $\widehat{\Theta}$ auf T ist invariant unter der Wirkung von M durch Links-Translation auf T und heißt *Theta-Divisor von T* . Für $\sigma \in T$ setzen wir

$$\widehat{\Theta}_\sigma := \tau_\sigma^* \widehat{\Theta} = \text{div}(\vartheta_\sigma),$$

wobei ϑ_σ durch

$$\vartheta_\sigma : T \longrightarrow \mathbb{A}_K^1; \quad t \longmapsto \vartheta(\sigma^{-1} \cdot t)$$

gegeben ist.

Lemma 5.2.5 *Definiere die holomorphe Funktion*

$$\zeta : \Omega \longrightarrow \mathbb{A}_K^1; \quad z \longmapsto \vartheta(\widehat{j}(z)),$$

wobei $\widehat{j} : \Omega \rightarrow T$, $z \mapsto c(z - z_0)$, die Hochhebung der Albanese-Abbildung $j : X \rightarrow J$, $x \mapsto [x - x_0]$, ist. Sei $\alpha \in \Gamma$ und $m := h(\alpha) \in M$. Dann gilt

$$\zeta(\alpha z) = [b(m, m) \cdot \Theta(\alpha z_0 - z_0; z)]^{-1} \cdot \zeta(z)$$

für alle $z \in \Omega$. Insbesondere ist ein $z \in \Omega$ genau dann eine Nullstelle von ζ der Ordnung k , wenn αz für alle $\alpha \in \Gamma$ dies ist.

Beweis. Nach 4.3.14(b),(c) gilt $\langle \widehat{j}(z), \lambda(m) \rangle = \Theta(\alpha z_0 - z_0; z)$ und $\widehat{j}(\alpha z) = m + \widehat{j}(z)$. Dann folgt aus 5.2.3

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha z) &= \vartheta(\widehat{j}(\alpha z)) = \vartheta(m \cdot \widehat{j}(z)) \\ &= [b(m, m) \cdot \langle \widehat{j}(z), \lambda(m) \rangle]^{-1} \cdot \vartheta(\widehat{j}(z)) \\ &= [b(m, m) \cdot \Theta(\alpha z_0 - z_0; z)]^{-1} \cdot \zeta(z). \end{aligned}$$

□

Die gleiche Rechnung wie im Beweis von 5.2.5 zeigt

Lemma 5.2.6 *Definiere für $s \in T$ die holomorphe Funktion*

$$\zeta_s(z) := \vartheta(s^{-1} \cdot \widehat{j}(z)).$$

Sei $\alpha \in \Gamma$ und $m := h(\alpha) \in M$. Dann gilt

$$\zeta_s(\alpha z) = [b(m, m) \cdot \langle s^{-1}, \lambda(m) \rangle \cdot \Theta(\alpha z_0 - z_0; z)]^{-1} \cdot \zeta_s(z)$$

für alle $z \in \Omega$. Insbesondere ist ein $z \in \Omega$ genau dann eine Nullstelle von ζ_s der Ordnung k , wenn αz für alle $\alpha \in \Gamma$ dies ist.

Korollar 5.2.7 *Für $s \in T$ mit $\widehat{j}(\Omega) \not\subseteq \widehat{\Theta}_s$ betrachte die meromorphe Funktion*

$$\psi_s(z) := \frac{\zeta_s(z)}{\zeta(z)}.$$

ψ_s ist eine automorphe Form mit Automorphie-Faktor

$$s : \Gamma \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}; \quad \alpha \longmapsto \langle s, \lambda(h(\alpha)) \rangle.$$

Sei $\kappa \in T$ mit $\widehat{j}(\Omega) \not\subseteq \widehat{\Theta}_{\kappa \cdot s}$ und betrachte

$$\psi_{s,\kappa}(z) := \frac{\zeta_{s \cdot \kappa}(z)}{\zeta_\kappa(z)}.$$

Dann ist $\psi_{s,\kappa}$ eine automorphe Form und hat den gleichen Automorphie-Faktor wie ψ_s .

Beweis. Beachte zunächst, dass $\zeta(\Omega) \not\subseteq \Theta^*$ wegen $\widehat{j}(z_0) \notin \Theta^*$, denn $|\zeta(z_0)| = 1$ wegen der ultrametrischen Dreiecksungleichung und $b(0,0) = 1$ bzw. $|b(m,m)| < 1$ für alle $m \in M$, $m \neq 0$. Die Tatsache, dass ψ_s den Automorphie-Faktor s hat, folgt sofort aus 5.2.6. Die Tatsache, dass $\psi_{s,\kappa}$ und ψ_s den gleichen Automorphie-Faktor haben, ist trivial, da $\psi_{s,\kappa} = c(\kappa) \cdot \psi_s$ mit einem nur von κ abhängigen $c(\kappa) \in K^\times$ gilt. \square

Lemma 5.2.8 *Sei die Notation wie oben und $s \in T$. Wenn $\widehat{j}(\Omega) \not\subseteq \Theta_s$, dann hat der Divisor*

$$\operatorname{div}(\zeta_s) := \sum_{i=1}^g z_i(s) \cdot \Gamma$$

mit $z_1(s), \dots, z_g(s) \in \Omega$ den Grad g .

Beweis. (vgl. [8, S.199]) Es reicht ähnlich wie im Beweis von [9, Satz 2.4.9], die Nullstellen von ζ_s zu zählen. Sei dazu $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ eine separierende Basis von Γ , wobei $\alpha_{g+i} = \alpha_i^{-1}$ für alle $i = 1, \dots, g$, und betrachte den Fundamentalbereich

$$E := \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{2g} W_i^-,$$

wobei $W_i^\pm := W_{\alpha_i}^\pm$ wie in 2.1.6 definiert ist. Durch Variieren des separierenden Homomorphismus $\rho : \Gamma \rightarrow \overline{K}^\times$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass ζ_s keine Nullstellen auf $A_i := W_i^+ \setminus W_i^-$ für alle $i = 1, \dots, g$ hat. Um die Anzahl der Nullstellen von ζ_s zu berechnen, müssen wir die Ordnung von ζ_s auf den Kreisringen A_i bezüglich der Koordinaten $z - a_i$, $a_i \in W_i^-$, berechnen. Nach 5.2.6 gilt

$$\zeta_s(\alpha z) = [b(m, m) \cdot \langle s^{-1}, \lambda(m) \rangle \cdot \Theta(\alpha z_0 - z_0; z)]^{-1} \cdot \zeta_s(z)$$

für alle $\alpha \in \Gamma$ mit $m := h(\alpha)$. Wegen $\alpha_i(\mathbb{P}_K^1 \setminus W_i^-) = W_{i+g}^+$ folgt daraus

$$\operatorname{ord}_{A_i}(\zeta_s) + \operatorname{ord}_{A_{i+g}}(\zeta_s) = \operatorname{ord}_{A_i}(\Theta(\alpha_i z_0 - z_0)).$$

Schreibe $\Theta(\alpha_i z_0 - z_0; z)$ für alle $z \in \Omega$ in der Form

$$\Theta(\alpha_i z_0 - z_0; z) = \frac{z - \alpha_i z_0}{z - \alpha_i^{-1} z_0} \left[\frac{z_0 - \alpha_i z_0}{z_0 - \alpha_i^{-1} z_0} \prod_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1, \alpha_i} \frac{\gamma z - \alpha_i z_0}{\gamma z - z_0} \frac{\gamma z_0 - z_0}{\gamma z_0 - \alpha_i z_0} \right].$$

Der Term in eckigen Klammern hat Ordnung 0 und der andere Terme hat Ordnung 1 auf A_i . Beachte, dass wir $z_0 \in E^- := \mathbb{P}_K^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{2g} W_i^+$ gewählt haben, so dass z_0

außerhalb der A_i 's liegt. Dann folgt aus [9, 2.4.9]

$$\deg(\zeta_s) = \sum_{i=1}^{2g} \text{ord}_{A_i}(\zeta_s) = \sum_{i=1}^g \text{ord}_{A_i}(\Theta(\alpha_i z_0 - z_0)) = g,$$

d.h. ζ_s hat g Nullstellen. □

Lemma 5.2.9 *Seien die Notation und die Voraussetzungen wie in 5.2.8. Es gibt ein von der Wahl von s unabhängiges modulo M eindeutig bestimmtes $\widehat{\kappa} \in T$ derart, dass*

$$\prod_{i=1}^g \widehat{j}(z_i(s)) \cdot \widehat{\kappa}^{-1} \equiv s \pmod{M},$$

wobei $z_1(s) \cdot \Gamma, \dots, z_g(s) \cdot \Gamma$ die Nullstellen von ζ_s , $\widehat{\kappa} = \prod_{i=1}^g \widehat{j}(z_i) \cdot M$ und $z_1 \cdot \Gamma, \dots, z_g \cdot \Gamma$ die Nullstellen von ζ sind.

Beweis. ζ_s/ζ hat nach 5.2.7 den Automorphie-Faktor s . Nach 4.3.11 gilt

$$\frac{\zeta_s(z)}{\zeta(z)} = \prod_{i=1}^g \Theta(z_i(s) - z_i; z) \cdot \Theta(d; z)$$

mit einem $d \in \mathcal{D}_0^f$, $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma d = 0$. Da

$$\Theta(z_i(s) - z_i; z) = \frac{\Theta(z_i(\sigma) - z_0; z)}{\Theta(z_i - z_0; z)}$$

und $\Theta(d; z)$ null- und polstellenfrei ist, ist der Automorphie-Faktor von ζ_s/ζ gegeben durch

$$\prod_{i=1}^g \widehat{j}(z_i(s)) \cdot \prod_{i=1}^g \widehat{j}(z_i)^{-1} \equiv s \pmod{M}.$$

Folglich hängt

$$\widehat{\kappa} := \prod_{i=1}^g \widehat{j}(z_i) \equiv \prod_{i=1}^g \widehat{j}(z_i(s)) \cdot s^{-1} \pmod{M}$$

nicht von der Wahl von s ab. □

Definition 5.2.10 Sei $z_0 \in \Omega(K)$ bzw. $x_0 \in X(K)$. Ein $t \in T$ bzw. $s \in J$ heißt *in allgemeiner Lage bezüglich* z_0 , wenn die Faser von t bzw. s bezüglich $\widehat{j}^{(g)} : \Omega^g \times \{z_0\} \rightarrow T$ bzw. $j^{(g)} : X^{(g)} \times \{x_0\} \rightarrow J$ Dimension 0 hat.

$t \in T$ ist offensichtlich genau dann in allgemeiner Lage bezüglich z_0 , wenn $p_J(t)$ dies ist. Gilt $p_J(t) = [D - gz_0]$, wobei D ein effektiver Divisor vom Grad g auf X ist, so ist $p(t)$ genau dann in allgemeiner Lage, wenn $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = 1$, denn in diesem Fall gilt $(\widehat{j}^{(g)})^{-1}(t) = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)))$. Die Menge der Punkte von J , die in allgemeiner Lage sind, ist offen dicht in J . Es gibt sogar das folgende stärkere Resultat:

Lemma 5.2.11 (vgl. [7, 9.3 Lemma 4.]) *Die Teilmenge der Punkte von J , die in allgemeiner Lage bezüglich eines $z_0 \in \Omega$ sind, ist offen dicht in J und schneidet W_{g-1} in einer offenen dichten Teilmenge.*

Satz 5.2.12 (Riemannscher Verschwindungssatz) *Sei $\widehat{\kappa} \in T$ wie in 5.2.9 und \widehat{W}_{g-1} das Bild von $\Omega^{(g-1)} \times \{z_0\}$ unter*

$$\widehat{\iota}^{(g-1)} : \Omega^{(g-1)} \times \{z_0\} \longrightarrow T; \quad d = \sum_{i=1}^{g-1} z_i \longmapsto c(d - (g-1)z_0).$$

Dann gilt $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}} = \widehat{W}_{g-1}$.

Beweis. Der Beweis funktioniert genauso wie im komplex-analytischen Fall (vgl. [8, S. 338]).

” \supset ” : Es gibt nach 5.2.11 eine dichte offene Teilmenge $U \subset \widehat{\Theta}$, derart dass alle Punkte von U in allgemeiner Lage bezüglich z_0 sind. Außerdem können wir wegen $\widehat{j}(\Omega) \cdot \widehat{W}_{g-1} = T$ ohne Einschränkung annehmen, dass für alle $\delta \in U$ die Bedingung $\widehat{j}(\Omega) \not\subset \widehat{\Theta}_s$ mit $s := \delta \cdot \widehat{\kappa}^{-1}$ erfüllt ist. Für alle $\delta \in U$ gilt nach 5.2.9

$$\prod_{i=1}^g \widehat{j}(z_i(s)) \equiv s \cdot \widehat{\kappa} \equiv \delta \pmod{M},$$

wobei $z_1(s), \dots, z_g(s)$ wie in 5.2.8 gegeben sind. Wegen $\delta \in \widehat{W}_{g-1}$ können wir ohne Einschränkung $\delta = \prod_{i=1}^g \widehat{j}(p_i)$, $p_i \in \Omega$ für alle $i = 1, \dots, g$, $p_1 = z_0$, annehmen. Nach 5.2.11 gilt

$$\sum_{i=1}^g z_i(s) \equiv \sum_{i=1}^g p_i \pmod{\Gamma}.$$

Folglich $\zeta_s(p_1) = 0$. Wegen $\widehat{j}(p_1) = 1$ und $\vartheta(t) = \vartheta(-t)$ für alle $t \in T$ folgt

$$\begin{aligned} \vartheta_{\widehat{\kappa}}(\delta) &= \vartheta \left(\prod_{i=2}^g \widehat{j}(p_i) \cdot \widehat{\kappa}^{-1} \right) \\ &= \vartheta \left(s \cdot \widehat{j}(p_1)^{-1} \right) \\ &= \vartheta \left(\widehat{j}(p_1) \cdot s^{-1} \right) = \zeta_s(p_1) = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Folglich $\vartheta_{\widehat{\kappa}}(\delta) = 0$ für alle $\delta \in U$, d.h. $U \subset \widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}$ und damit auch $\widehat{W}_{g-1} \subset \widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}$, da $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}$ eine abgeschlossene Teilmenge von T ist.

” \subset ”: Nach dem obigen gilt

$$\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}} = n \cdot \widehat{W}_{g-1} + \widehat{\Theta}' \quad (4.2)$$

mit einem $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, und einem Divisor $\widehat{\Theta}' \subset T$, wobei die beiden Seiten als effektive Divisoren auf T aufgefasst werden. Wir zeigen zunächst, dass $n = 1$: Es gilt

$$\deg(\widehat{j}(\Omega) \cap \widehat{\Theta}) \geq g,$$

denn: Sei $t = \prod_{i=1}^g \widehat{j}(p_i) \in T$ ein generischer Punkt, derart dass $\widehat{j}(\Omega) \not\subset \widehat{W}_{g-1} \cdot t^{-1}$. Folglich schneiden sich $\widehat{j}(\Omega)$ und \widehat{W}_{g-1} in isolierten Punkten. Ferner gilt

$$\widehat{j}(p_j)^{-1} = \prod_{\substack{i=1, \dots, g \\ i \neq j}} \widehat{j}(p_i) \cdot t^{-1} \in \widehat{\Theta} \cdot t^{-1}$$

und damit auch $\#(j(X) \cap \Theta) \geq g$. (4.2) und 5.2.8 implizieren

$$\deg(\Theta_{\widehat{\kappa}}^*) = \deg(\operatorname{div}(\zeta_{\widehat{\kappa}})) = g = n \cdot (j(X), \Theta) + (j(X), \Theta'),$$

wobei Θ' das Bild von $\widehat{\Theta}'$ in J ist. Wegen $(j(X), \Theta) \geq g$ und $(j(X), \Theta') \geq 0$ folgt $n = 1$ und $(j(X), \Theta') = 0$. Es bleibt, $\Theta' = \emptyset$ zu zeigen. Wegen $(j(X), \Theta') = 0$ gilt für alle $t \in T$

$$j(X) \cap \Theta'_t \neq \emptyset \implies j(X) \subset \Theta'_t,$$

wobei Θ'_t das Bild von $\widehat{\Theta}'_t := \tau_t^* \widehat{\Theta}'$ in J ist. Bezeichne mit W_n für alle $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq g-1$, das Bild von $X^{(n)}$ unter

$$X^{(n)} \times \{x_0\} \longrightarrow J; \quad d = \sum_{i=1}^n x_i \longmapsto c \left(\overline{\sum_{i=1}^n x_i - n \cdot x_0} \right).$$

Dann folgt mit dieser Notation

$$\Theta'_t \cap W_2 \neq \emptyset \implies W_2 \subset \Theta'_t$$

für alle $t \in T$, denn

$$\begin{aligned} \Theta'_t \ni j(\bar{p}_1) \cdot j(\bar{p}_2) &\implies \Theta_{t, \widehat{j}(p_1)} \ni j(\bar{p}_2) \\ &\implies \Theta_{t, \widehat{j}(p_1)} \ni j(\bar{p}'_2) \quad \forall p_2 \in \Omega \\ &\implies \Theta'_t \ni j(\bar{p}_1) \cdot j(\bar{p}'_2) \quad \forall p'_2 \in \Omega \\ &\implies \Theta'_t \ni j(\bar{p}'_1) \cdot j(\bar{p}'_2) \quad \forall p'_1, p'_2 \in \Omega, \end{aligned}$$

wobei $\bar{p}_i \in X$, $i = 1, 2$, das Bild von p_i in X bezeichnet, d.h. $\Theta_2 \subset \Theta'_t$. Eine sukzessive Anwendung dieses Arguments zeigt

$$\Theta'_t \cap W_n \neq \emptyset \implies \Theta'_t \supset \Theta_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq g-1$. Aber das ist ein Widerspruch, da Θ'_t ein Divisor ist. Folglich $\Theta' \cap W_{g-1} = \{\emptyset\}$ und damit $\Theta' = \{\emptyset\}$. \square

Bemerkung 5.2.13 Gerritzen und van der Put versuchen, einen alternativen Beweis von 5.2.12 zu liefern, vgl. [8, SS. 206-207]. Sie beweisen jedoch zweimal auf zwei verschiedene Weisen die Inklusion " $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}} \supset \widehat{W}_{g-1}$ ". Ihr zweiter Beweis von " $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}} \supset \widehat{W}_{g-1}$ " funktioniert ungefähr genauso wie unserer. Sie zeigen nämlich unter "2)" mit derselben Rechnung wie wir unter "(4.1)" im Beweis von " $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}} \supset \widehat{W}_{g-1}$ ", dass es zu jedem Punkt in \widehat{W}_{g-1} eine gegen diesen Punkt konvergente Folge in $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}$ gibt und damit wegen der Abgeschlossenheit von $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}$ die Inklusion $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}} \supset \widehat{W}_{g-1}$ gilt.

Um dieselbe Inklusion unter "1)" zu zeigen, nehmen sie $\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}} \not\supset \widehat{W}_{g-1}$ an und wählen ein $a := (z_1, \dots, z_{g-1}, \infty) \in \Omega^{(g)}$, derart dass $d := \widehat{j}^{(g)}(a) \in \widehat{W}_{g-1} \setminus \widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}$, wobei

$$\widehat{j}^{(g)} : \Omega^{(g)} \times \{z_0\} \longrightarrow T; \quad \sum_{i=1}^g z_i \longmapsto c \left(\sum_{i=1}^g z_i - g \cdot z_0 \right)$$

die natürliche Abbildung von $\Omega^{(g)}$ nach T ist. Dann setzen sie

$$\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}-d} = \widehat{\Theta}_{d-\widehat{\kappa}} =: \sum_{i=1}^g \bar{b}_i,$$

wobei $\bar{b}_i \neq \infty$ für alle $i = 1, \dots, g$, da $\zeta_{\widehat{\kappa}-d} \neq 0$. Nach 5.2.9 gilt

$$\widehat{j}^{(g)}((b_1, \dots, b_g)) \equiv d \pmod{M},$$

wobei die b_i 's, $i = 1, \dots, g$, Hochhebungen der \bar{b}_i 's nach Ω sind. Folglich enthält die Faser von $j^{(g)} : X^{(g)} \times \{x_0\} \rightarrow J$ über $\bar{d} \in J$ das Bild von d in J ist, zwei Punkte, nämlich das Bild $\bar{a} \in X^{(g)}$ von a in $X^{(g)}$ und $\bar{b} := (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_g)$, was offensichtlich falsch ist. Sie haben sich jedoch am Ende von "1)" vertippt und (mit ihrer Notation) "This proves $N \subset W_{g-1}$." statt "... $N \supset W_{g-1}$." geschrieben, was den Leser verwirrt.

Bemerkung 5.2.14 Für jede invertierbare Garbe $\mathcal{D} = \mathcal{O}_J(D)$ auf J gibt es einen kanonischen Morphismus

$$\varphi_{\mathcal{D}} : J \longrightarrow J'; \quad a \longmapsto [\tau_a^* \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}^{-1}].$$

Sei (d, δ) die zu \mathcal{D} assoziierte M -Linearisierung auf dem trivialen Geradenbündel $\mathbb{A}_T^1 = T \times \mathbb{A}_K^1$ auf T . Dann wird $\varphi_{\mathcal{D}}$ vom Gruppenhomomorphismus $[-1] \circ \delta : M \rightarrow M'$ induziert. In Termen von Punkten ist die Hochhebung $\widehat{\varphi}_{\mathcal{D}}$ von $\varphi_{\mathcal{D}}$ gegeben durch

$$\widehat{\varphi}_{\mathcal{D}} : T \longrightarrow T'; \quad t \longmapsto [t' : m \longmapsto t([-1] \circ \delta(m))].$$

Beweis. Die M -Linearisierung (d, δ) von \mathcal{D} induziert aufgrund der Kontravarianz des Funktors von der Kategorie invertierbarer Garben auf J in die der Garben ihrer Schnitte (vgl. 3.1.2) die M -Linearisierung $(1/d, [-1] \circ \delta)$ der Garbe $V(\mathcal{D})$ der Schnitte von \mathcal{D} . Dann folgt die Behauptung aus 3.2.8. \square

Der Riemannsche Verschwindungssatz besagt, dass der kanonische Theta-Divisor $\widehat{W}_{g-1} = \widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}$ ein Translat des nicht-kanonischen Theta-Divisors $\widehat{\Theta}$ ist. Folglich stimmen die Daten ihrer M -Linearisierungen im Gruppenhomomorphismus $M \rightarrow M'$ überein.

Korollar 5.2.15 Seien die Notation und die Voraussetzungen wie in 5.2.12. Sei $(r_{\Theta}, \lambda_{\Theta})$ die M -Linearisierung von $\mathcal{L} := \mathcal{O}_J(W_{g-1})$ und (d, δ) die von $\mathcal{H} := \mathcal{O}_J(p_j(\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}))$. Dann gilt

$$\lambda_{\Theta} = \lambda = h' \circ h^{-1} : M \longrightarrow M'.$$

Insbesondere ist $[-1] \circ \varphi_{\mathcal{L}}$ die Umkehrabbildung der Selbstdualitätsabbildung φ' (vgl. 4.3.15(d)).

Beweis. Die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_J(p_j(\widehat{\Theta}))$ wird durch den globalen Schnitt $1/\vartheta$ trivialisiert. Die M -Linearisierung von $\mathcal{O}_J(\widehat{\Theta})$ ist nach 5.2.3 (b, λ) , wobei $b_m := b(m, m)$ für $m \in M$, d.h. gegeben durch die Funktionalgleichung

$$\frac{1}{\vartheta(m \cdot t)} = b(m, m) \cdot \langle t, \lambda(m) \rangle \cdot \frac{1}{\vartheta(t)}$$

von $1/\vartheta$. Ein Gruppenhomomorphismus $M \rightarrow M'$ wird durch eine Translation nicht verändert. Daraus folgt $\lambda_{\Theta} = \lambda$ und damit nach 5.2.12 $\varphi_{\mathcal{L}} = \varphi_{\mathcal{H}}$. Da die Selbstdualitätsabbildung nach 4.3.15(d) durch λ^{-1} induziert wird, folgt die Behauptung aus 5.2.14. \square

Bemerkung 5.2.16 Die Aussage des Riemannschen Verschwindungssatzes 5.2.12 ist äquivalent zur Gleichheit $\lambda_{\Theta} = \lambda$.

Beweis. Sei $\mathcal{L} := \mathcal{O}_J(W_{g-1})$ und $(r_{\Theta}, \lambda_{\Theta})$ seine M -Linearisierung, bzw. $\mathcal{H} = \mathcal{O}_J(p_j(\widehat{\Theta}))$ und (b, λ) die M -Linearisierung von \mathcal{H} , wobei $b_M := b(m, m)$ für $m \in M$. Aufgrund der Gleichheit $\lambda_{\Theta} = \lambda$ ist die invertierbare Garbe

$\mathcal{O}_J(p_J(\widehat{\Theta}) \setminus W_{g-1})$ translationsinvariant und das erste Datum ihrer M -Linearisierung ist der Gruppenhomomorphismus

$$\widehat{\kappa}' := \frac{b}{r_\Theta} : M \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K},$$

der als ein Punkt in $T' = \text{Hom}(M, \mathbb{G}_{m,K})$ aufgefasst werden kann. Folglich ist das erste Datum der M -Linearisierung von $\mathcal{O}_J(p_J(\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}) \setminus W_{g-1})$, wobei $\widehat{\kappa} := \widehat{\varphi}'(\widehat{\kappa}')$, der Gruppenhomomorphismus

$$b \cdot \frac{1}{\widehat{\kappa}} \cdot \frac{1}{r_\Theta} = b \cdot \frac{1}{\widehat{\kappa}' \circ \lambda^{-1}} \cdot \frac{1}{r_\Theta} = b \cdot \left(\left(\frac{r_\Theta}{b} \right) \circ \lambda^{-1} \right) \cdot \frac{1}{r_\Theta} = 1,$$

da die M -Linearisierung von $\mathcal{O}_J(\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}})$ nach 5.2.3 $(b/\widehat{\kappa}, \lambda)$ ist und nach 4.3.15(d) $\widehat{\kappa} = \widehat{\kappa}' \circ \lambda^{-1}$ gilt. Daher ist $\mathcal{O}_J(p_J(\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}}) \setminus W_{g-1}) = \mathcal{O}_J$ die triviale invertierbare Garbe auf J . Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}_T(T)$ auf T , derart dass $\mathcal{O}_T(\widehat{\Theta}_{\widehat{\kappa}} \setminus \widehat{W}_{g-1})$ durch f erzeugt wird und \widehat{f} die Funktionalgleichung

$$\widehat{f}(m \cdot t) = \widehat{f}(t)$$

für alle $m \in M$ und $t \in T$ erfüllt. Folglich wird \widehat{f} von einer meromorphen Funktion f auf J induziert und $p_J(\Theta - W_{g-1}) = \text{div}(f)$. Es bleibt zu zeigen, dass f konstant ist. Betrachte dazu für abgeschlossene Punkte $s \in S$ die Abbildung

$$j_s : X \longrightarrow J; z \longmapsto s \cdot j(z)^{-1}.$$

Es gibt eine dichte offene Teilmenge $V \subset J$, derart dass $D_s := j_s^{-1}(W_{g-1})$ für $s \in V$ aus genau g Punkten besteht, denn: Für ein $p \in X$ mit $j_s(p) = s \cdot j(p)^{-1} \in W_{g-1}$ gilt

$$s \cdot [p - x_0]^{-1} = s \cdot j(p)^{-1} = j_s(p) = \prod_{i=2}^g [p_i - x_0].$$

Ist $p \in j_s^{-1}(W_{g-1})$, so auch $p_2, \dots, p_g \in j_s^{-1}(W_{g-1})$. Folglich $p, p_2, \dots, p_g \in j_s^{-1}(W_{g-1})$. Für jedes $q \in X$ mit $j_s(q) \in W_{g-1}$ gilt

$$s = [q - x_0] \cdot \prod_{i=2}^g [p_i - x_0].$$

Ist s in allgemeiner Lage bzgl. x_0 , so gibt es genau einen Punkt $\sum_{i=1}^g p_i \in X^{(g)}$ mit

$$s = \prod_{i=1}^g [p_i - x_0].$$

Folglich $q \in \{p_1, \dots, p_g\}$. Sei $U \subset J$ eine dichte offene Teilmenge, derart dass $j^{-1}(s)$ für $s \in U$ Dimension 0 hat, d.h. jedes $s \in U$ ist in allgemeiner Lage bzgl. x_0 und $\deg D_s = g$ für alle $s \in U$.

Die invertierbare Garbe $j_s^* \mathcal{O}_J(W_{g-1}) = \mathcal{O}_X(D_s)$ hat den Grad g und $H^1(X, \mathcal{O}_X(D_s)) = 0$ für $s \in U$. Der Riemann-Roch-Satz (vgl. [9, 2.3.3]) impliziert

$$\dim \mathcal{O}_X(D_s)(X) = g + 1 - g = 1.$$

$j_s^* f$ ist ein globaler Erzeuger von $\mathcal{O}_X(D_s - E_s)$, wobei $E_s := j_s^{-1} \Theta$. Folglich stimmen $j_s^* f$ und $1 \in \mathcal{O}_X(D_s)(X)$ bis auf eine multiplikative Konstante überein. Dies zeigt $E_s = D_s$ für alle $s \in U$.

Nach 5.2.11 ist $W := U \cap W_{g-1}$ offen dicht in W_{g-1} . Insbesondere $s = j_s(x_0) \in W_{g-1}$ für $s \in W$ und damit $x_0 \in D_s$. Wegen $D_s = E_s$ ist $x_0 \in E_s$. Folglich $s = j_s(x_0) \in \Theta$ für alle $s \in W$, d.h. $W \subset \Theta$. Da W offen dicht in W_{g-1} und Θ eine abgeschlossene Teilmenge von J ist, folgt $W_{g-1} \subset \Theta$. Folglich ist $\Theta \setminus W_{g-1} = \text{div}(f)$ ein effektiver Divisor, d.h. f ist konstant. \square

Korollar 5.2.17 Sei $P_{J \times J'}$ das Poincaré-Bündel auf $J \times J'$. Dann wird die Hochhebung $\widehat{\varphi}' : T' \rightarrow T$ der Selbstdualitätsabbildung

$$\varphi' : J' \longrightarrow J; \quad a' \longmapsto [j^* P_{J \times a'}]$$

durch $\lambda^{-1} = h \circ h'^{-1}$ induziert.

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Morphismen $[-1] \cdot \varphi'$ und φ_Θ zueinander invers sind (vgl. 5.1.2(d)). \square

Literaturverzeichnis

- [1] S. Bosch. Formal and Rigid Geometry. *Preprintreihe Math. Inst. Univ. Münster*, Heft 378 (2008)
- [2] S. Bosch, U. Gützter, R. Remmert. Non-Archimedean analysis. Grundlehren Band 261, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1984
- [3] S. Bosch; W. Lütkebohmert. Stable reduction and uniformization of abelian varieties. I. *Math. Ann.* 270 (1985), no. 3, 349-379.
- [4] S. Bosch; W. Lütkebohmert. Stable reduction and uniformization of abelian varieties. II. *Invent. Math.* 78 (1984), no. 2, 257-297.
- [5] S. Bosch, W. Lütkebohmert. Degenerating abelian varieties. *Topology* 30, 653-698 (1991)
- [6] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. Formal and Rigid Geometry. *I Rigid Spaces*. *Math. Ann.* **295**, 291-317 (1993)
- [7] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. Néron Models. Springer, *Ergeb. 3. Folge*, Band 21, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1990)
- [8] L. Gerritzen, M. van der Put. Mumford Curves and Schottky Groups. *Lecture Notes in Mathematics*, 817, 1980.
- [9] W. Lütkebohmert. Rigid Geometry of Curves and Their Jacobians. Book in preparation, first version: june 2014.
- [10] J. Manin; V.G. Drinfeld. Periods of p -adic Schottky Groups. *J. reine angew. Math.* 262/263, 239-247 (1973).
- [11] J. Manin. p -adic Automorphic Forms. *Translated from Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennye Problemy Matematiki* Vol. 3, pp. 5-92 (1974).
- [12] J.S. Milne. Jacobian Varieties. In: *Arithmetic Geometry*. G. Cornell, J. Silverman, Eds. Springer-Verlag, 1986.
- [13] D. Mumford. Abelian Varieties. *Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics* **5**, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London 1970.