

Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften



**Irreversible Investitionsspiele
unter Unsicherheit**

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
"Dr. rer. nat."
der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der
Universität Ulm

vorgelegt von
PATRICK G. WALCH
aus Mannheim

Juli 2008

Amtierender Dekan : Prof. Dr. Frank Stehling

1. Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Rieder

2. Gutachter: Prof. Dr. Werner Smolny

Tag der Promotion: 28. November 2008

*In einer Welt voller Unsicherheit muss man
eine Menge Dinge ausprobieren.
Man kann nur hoffen, dass einige davon funktionieren.*

DOUGLASS C. NORTH,
Nobelpreisträger für Wirtschaftswissenschaften (1993).

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	vii
Abkürzungen und Bezeichnungen	ix
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Aufbau der Arbeit	3
2 Statische Spiele	9
2.1 Problemstellung	10
2.2 Modellierung	10
2.3 Analyse	11
2.4 Nash Gleichgewichte	17
3 Stopp-Spiele	23
3.1 Problemstellung	23
3.2 Modellierung	24
3.3 Analyse	26
3.4 Nash Gleichgewichte	29
3.5 Erweiterungen	36
4 Dynamische Spiele	43
4.1 Problemstellung	43
4.2 Modellierung	44
4.3 Analyse	45
4.4 Nash Gleichgewichte	51
5 Kooperative dynamische Spiele	85
5.1 Problemstellung	86
5.2 Modellierung	86
5.3 Analyse	87
5.4 Kooperative Gleichgewichte	89

A	Mathematische und ökonomische Grundlagen	105
A.1	Wichtiges aus der kooperativen Spieltheorie	105
A.2	Eine zentrale Differentialgleichung	107
	Literaturverzeichnis	111
	Summary	115
	Danksagung	121
	Erklärung	123
	Curriculum Vitae	125

Abbildungsverzeichnis

2.1	Auszahlungsfunktionen im Nash Gleichgewicht	19
2.2	Sensitivität der Auszahlungsfunktionen bzgl. Kostendifferenz.	20
2.3	Sensitivität der Einstiegslevels bzgl. Asymmetrie.	21
2.4	Sensitivität der Einstiegslevels bzgl. Volatilität.	21
2.5	Sensitivität der Auszahlungsfunktionen bzgl. Volatilität.	21
4.1	Sensitivität der optimalen Investitionsrate η_t^* bzgl. ρ bei festem $X_t > x^*$	65
4.2	Realisierung eines Pfades des Wechselkurses mit den Parametern $\mu = 0.01, \sigma = 0.2, r = 0.04$	73
4.3	Optimale Technologiestände bei linearen bzw. quadratischen Kostenfunktionen.	73
4.4	Schattenprozess und optimaler Technologiestand im Monopolspiel mit dynamischen Investitionen	75
4.5	Sensitivität des Schattenprozesses $\xi_t = \kappa X_t$ bzgl. Parameter α für festes $X_t = x$	84
4.6	Sensitivität des Schattenprozesses $\xi_t = \kappa X_t$ bzgl. Volatilität σ für festes $X_t = x$	84
5.1	Realisierung eines Pfades des Wechselkurses mit den Parametern $\mu = 0.01, \sigma = 0.2, r = 0.04$	101
5.2	Optimale Technologiestände von Spieler 1 bei Kooperation und Nicht-Kooperation.	101

Abkürzungen und Bezeichnungen

In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Notationen und Bezeichnungen dieser Arbeit in der Reihenfolge ihres Auftretens beschrieben. Bei keiner neuerlichen Definition gelten diese Bezeichnungen kapitelübergreifend.

Stochastische Prozesse notieren wir geklammert und mit Zeitindex, auf Funktionen folgen deren Argumenten in einer Klammer und Konstanten sind einfache Buchstaben. Optimalitäten werden mit * oder \sim versehen.

Kapitel 2

\mathcal{A}, \mathcal{B}	Mengen der zulässigen Strategien.
a, b	Strategien (Einstiegslevels) der Spieler.
$g_i(x, a, b)$	Zielfunktion von Spieler i .
$L_i(x, a, b)$	Auszahlungsfunktion von Spieler i als Leader.
$F_i(x, b)$	Auszahlungsfunktion von Spieler i als Follower.
$C_i(x)$	Auszahlungsfunktion bei simultanem Einstieg.
(X_t)	stochastischer Einfluss (Geometrische Brownsche Bewegung).
μ, σ	Drift und Volatilität der GBM.
r	risikofreier Zins.
$\psi(z)$	zentrale quadratische Funktion.
β_1	positive Nullstelle von ψ .
δ	Wechselkursrendite.
K_i	einmalige Investitionskosten von Spieler i .

Kapitel 3

τ	Strategie (Einstiegszeit) von Spieler 1.
--------	--

η	Strategie (Einstiegszeit) von Spieler 2.
$V_t^L(\mathbf{x}, \eta)$	erwarteter gesamter Betriebsgewinn des Leaders.
$V_t^F(\mathbf{x})$	erwarteter gesamter Betriebsgewinn des Followers.
(ξ_t)	Schattenprozess.
β_i	Nullstellen der zentralen quadratischen Funktion.

Kapitel 4

(η_t)	Strategie (Investitionsratenplan) von Spieler 1.
(θ_t)	Strategie (Investitionsratenplan) von Spieler 2.
\mathcal{U}, \mathcal{V}	Wertebereich der Strategien.
(C_t)	Technologiestand von Spieler 1.
(D_t)	Technologiestand von Spieler 2.
(Y_t)	Zustandsprozess bestehend aus X_t , C_t und D_t .
δ_i	Abschreibungsrate von Spieler i .
$J_i(\mathbf{y}; \eta, \theta)$	Zielfunktion von Spieler i .
$U(\mathbf{y}), V(\mathbf{y})$	Wertfunktionen der Spieler.
$\pi_i(\mathbf{y})$	Profitfunktion von Spieler i .
$\varphi_i(\mathbf{y})$	Kostenfunktion von Spieler i .
p	Fixkostenparameter.
ρ	Parameter der variablen Kosten bzw. Anpassungskosten.
m, a_i, b_i	Parameter der linearen Profitfunktionen.
α	Parameter der HARA Profitfunktionen.
(I_t)	kumulativer Investitionsplan

Kapitel 5

$\hat{J}(\mathbf{y}; \eta, \theta)$	gemeinsame (kooperative) Zielfunktion.
-------------------------------------	--

$J(\mathbf{y})$	kooperative Wertfunktion des Spiels.
$\tilde{U}(\mathbf{y})$	Auszahlung an Spieler 1 bei Start in \mathbf{y} .
$\tilde{V}(\mathbf{y})$	Auszahlung an Spieler 2 bei Start in \mathbf{y} .
$(\tilde{\eta}_t, \tilde{\theta}_t)$	kooperativ-optimale Strategien.
(η_t^*, θ_t^*)	Nash Gleichgewicht.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Investitionsbewertung unter Unsicherheit ist ein Themengebiet, welches im täglichen Leben eine Rolle spielt. So stand sicherlich ein jeder schon einmal vor der Entscheidung, beispielsweise einen Urlaub zu buchen. Dabei ist der individuelle Nutzen - bzw. der Erholungsgrad - unumstritten abhängig von einigen Unsicherheitsfaktoren. Werden wir das richtige Wetter haben? Bleiben wir gesund? Schmeckt das Essen? Etc. Bereits in einer eigentlich solch unwichtigen Fragestellung sieht man also, dass der Ausgang einiger noch unbekannter Dinge den Nutzen stark beeinflussen kann.

Gehen wir vom Privatleben über in die Ökonomie, so finden sich ständig - auch im Politik- oder Wirtschaftsteil der Tageszeitung - Beispiele, die aufzeigen, ob bei der Bewertung einer irreversiblen Investition Fehler gemacht wurden oder nicht, getreu dem Motto „Danach ist man immer schlauer“. Sollte nun der Transrapid den Münchner Hauptbahnhof mit dem Flughafen verbinden oder nicht? Soll die Fußball Weltmeisterschaft 2010 trotz möglicher Unruhen in Südafrika stattfinden? Hätte BMW wirklich Rover übernehmen sollen oder war die Fusion von Daimler und Chrysler gut durchdacht? Wie viel Geld sollte IBM in die Forschung und Entwicklung neuer Chipsätze mit Nanotechnologie stecken? Und, wie viel ist die Flexibilität wert, die in all diesen Entscheidungen enthalten ist?

Obwohl in der modernen Wissenschaft erst seit etwa 30 Jahren diskutiert, bewertete offenbar Thales von Milet schon im 6. Jh. v. Chr. irreversible Investitionen unter Unsicherheit mit Hilfe von Realoptionen. So soll der griechische Philosoph den Eigentümern von Olivenpressen bereits im Frühjahr zu einem festen Preis das Recht abgekauft haben, die Maschinen in der Erntezeit zu vermieten. Die Ernte fiel gut aus, es kam zu einem großen Ansturm der Bauern auf die Pressen und Thales wurde zu einem reichen Mann. Was bei einem verregneten Herbst passiert

wäre, interessiert nun niemanden mehr.

Als Vater des modernen Realloptionsansatzes gilt jedoch der MIT-Professor Steward C. Myers, der 1977 die in den frühen 70er Jahren von Black, Scholes und Merton entwickelte Optionspreistheorie von Finanzoptionen auf reale Handlungsalternativen übertrug. Seit dem wurden einige interessante Arbeiten und Lehrbücher über den Realloptionsansatz verfasst, so z.B. [Dan04] oder [Gei04]. Der entscheidende Vorteil dieses Ansatzes gegenüber den bis dahin üblichen Net-Present-Value oder Discounted-Cash-Flow Methoden ist, dass mittels Realloptionen auch die bereits erwähnte Flexibilität der Entscheidungsträger im Modell berücksichtigt wird.

Wie aber wird berücksichtigt, wie sich die anderen Akteure auf dem Markt verhalten? So ist die Investition in Nanotechnologie von IBM sicherlich deutlich wertvoller, wenn nicht Hewlett-Packard ihre „Crossbar Latch“ Architektur weiter verbessert. Und hätte Toshiba die Produktion und Weiterentwicklung der HD-DVD Technologie auch eingestellt, wenn es die Blue Ray Group mit Sony, Panasonic, Samsung und anderen nicht gegeben hätte?

Auf realen Märkten ist also gewöhnlich mehr als eine Firma tätig und zumeist beeinflusst die Entscheidung eines Unternehmens auch die Aktionen und Profite der anderen Marktteilnehmer. Eine entscheidungstheoretische Betrachtungsweise der Problemstellung ist also oft nicht ausreichend und verleitet nicht selten sogar zu kapitalen Fehlentscheidungen.

Mit der Zielsetzung der Bestimmung optimaler Strategien in solch kompetitiven Situationen wurde 1944 von Oskar Morgenstern und John von Neumann der Begriff der Spieltheorie geprägt. Wie auch bei der Bewertung irreversibler Investitionen wurden spieltheoretische Methoden jedoch bereits um einiges früher - wenn auch unbewusst - angewandt. So wird im babylonischen Talmud aus dem 5. Jh. n. Chr. eine Vorschrift über die Verteilung des Vermögens eines Mannes an seine drei Frauen beschrieben, welche den modernen Ausarbeitungen der kooperativen Spieltheorie folgt.

Wissenschaftlich anerkannt ist die Spieltheorie spätestens seit 1994 mit der Verleihung des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften an John F. Nash, John C. Harsanyi und Reinhardt Selten. 2005 durften sich dann zwei weitere Spieltheoretiker in die Liste der Nobelpreisträger eintragen: Robert Aumann und Thomas Schelling.

In dieser Arbeit möchten wir nun diese beiden wichtigen Gebiete miteinander verbinden und somit irreversible Investitionsspiele unter Unsicherheit analysieren. Wir werden uns hierbei aus der Investitionsbewertung zum einen auf die Fragestellung konzentrieren, wann ein Unternehmen einem unsicheren Markt beitreten soll, und

zum anderen darauf, wie viel ein Unternehmen zu jeder Zeit in ein bereits bestehendes unsicheres Projekt auf optimale Weise investiert. Aus spieltheoretischer Sicht untersuchen wir unsere Modelle auf Strategien von der Art, dass ein Wechsel der Strategie den Spieler schlechter stellen würde, falls alle anderen Akteure ihre Strategie nicht wechseln, d.h. auf so genannte Nash Gleichgewichte.

1.2 Aufbau der Arbeit

Wie bereits den Überschriften der einzelnen Kapitel zu entnehmen ist, kann diese Arbeit in drei Teile gegliedert werden: statische Spiele, Stopp-Spiele und dynamische Spiele. Das zweite Kapitel widmet sich voll und ganz den statischen Spielen, bei denen die Unternehmen nur ein einziges Mal entscheiden, wann sie ihre Investition tätigen, die dann eine auf den aktuellen Zeitpunkt diskontierte einmalige Auszahlung einbringt. Ab dem dritten Kapitel werden die Spiele dann dynamisch, wobei in Kapitel 3 weiterhin ein einziger Einstiegszeitpunkt in ein unsicheres Projekt gesucht ist, die Auszahlungen hingegen dynamisch modelliert werden. In den letzten beiden Kapiteln sind dann neben den Auszahlungen auch die Investitionen dynamisch - wir suchen einen kontinuierlichen Investitionsprozess. Im Folgenden möchten wir nun einen knappen und präzisen Überblick über die analysierten Modelle sowie deren Lösungsmethoden geben.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit statischen Duopolspielen. Wir erläutern zunächst die Problemstellung, stellen danach ein mathematisches Modell auf und bestimmen daraufhin das Nash Gleichgewicht.

Das Modell und die Lösungsmethoden in diesem Kapitel orientieren sich dabei vor allem an den Lehrbüchern von Dixit & Pindyck ([Dix94]) und Smit & Trigeorgis ([Smi01]) sowie den Arbeiten von Murto & Keppo ([Mur02], [Mur04]) und Joaquin & Butler ([Joa00]). Unser Modell ist eine Erweiterung von letztgenanntem; während die Autoren dort nur den Spezialfall einer linearen Preisfunktion betrachten, geben wir die Lösung im allgemeinen Fall an. Weitere interessante Arbeiten mit ähnlichen Problemstellungen wurden von Boyer, Gravel & Lasserre ([Boy04]), Grenadier ([Gre00]) und Huisman, Kort & Thijssen ([Hui01], [Hui03], [Thi02]) verfasst.

Wir suchen den optimalen Einstieg in einen ausländischen Markt, wobei die beiden Unternehmen (die Spieler) im gleichen Land firmieren und ins gleiche Land einsteigen wollen. Die Unsicherheit - also der Wechselkurs - wird als Geometrische Brownsche Bewegung modelliert; das Ziel der Unternehmen ist die Maximierung ihres Profits in eigener Währung.

Da in diesem Fall nun die Gesamtprofite der Unternehmen auch von der Entscheidung des Markteintritts des Konkurrenten abhängen, ist eine spieltheoretische Untersuchung vonnöten, d.h. wir untersuchen das Spiel auf Nash Gleichgewichte bestehend aus zwei Einstiegslevels - also den Werten des Wechselkurses, zu denen die Spieler dem Markt beitreten.

Um diese Gleichgewichte zu erhalten, bestimmen wir zunächst die Auszahlungsfunktionen der Spieler unter Berücksichtigung der Flexibilität mit dem Realloptionsansatz. Nachdem wir die Auszahlungsfunktionen im Falle simultaner Investitionen angegeben haben, bestimmen wir diese in den Theoremen 2.3.4 und 2.3.6 falls wir eine Leader-Follower Struktur vorfinden.

In Proposition 2.4.1 zeigen wir dann, dass die Unternehmen im Nash Gleichgewicht keinesfalls zum gleichen Zeitpunkt investieren sollten, da es - auf Grund des Wertes der Flexibilität bei Realloptionen - in allen Fällen dieser Art sogar besser ist als zweiter einzusteigen, als gemeinsam mit dem ersten. Da jedoch ein Einstieg als Leader präferabel gegenüber einem Einstieg als Follower ist, befinden wir uns - zumindest im Falle symmetrischer Firmen - in einem typischen Gefangenendilemma.

Im asymmetrischen Duopol ist die Lage etwas klarer. Durch die Asymmetrie ist eindeutig festgelegt, welcher Spieler zuerst dem Markt beitreten wird. Wie wir in Theorem 2.4.3 zeigen, tut er dies in dem Fall, in dem der andere Spieler keinerlei Interesse hat Leader zu sein, zu seinem monopolistisch optimalen Einstiegslevel und falls auch der zweite Spieler an einem vorzeitigen Einstieg interessiert ist, zu einem so genannten Preemption-Level. Eine konkrete Form der optimalen Levels geben wir in Proposition 2.4.2 an.

Kapitel 3 ist dynamischen Stopp-Spielen gewidmet. Während die Spieler nur einmalig entscheiden, wann sie die Investition tätigen sollen, sind die Auszahlungen beider dynamisch, sie hängen also direkt von dem gesamten Zeitintervall nach dem Investitionszeitpunkt ab. Auch können sich die Investitionskosten mit der Zeit ändern.

Der Monopolfall eines solchen Modells wurde bereits von Su ([Su06]) analysiert. Wie Su werden wir hierbei das Problem mit Hilfe eines so genannten Schattenprozesses umformulieren; einer Idee, die wiederum auf Arbeiten von Bank, Bank & El Karoui, bzw. Bank & Föllmer ([Ban00], [Ban02], [Ban03]) zurückgeht, in denen eine solche Methodik zur Ermittlung optimaler Ausübungszeitpunkte von amerikanischen Optionen, bei mehrarmigen Banditenproblemen und bei Problemen des optimalen Konsums verwendet wurde.

Die optimale Entscheidung der Spieler ist es dann, zu demjenigen Zeitpunkt zu

investieren, wenn dieser Schattenprozess - welcher natürlich abhängig vom Wechselkurs ist - die Investitionskosten erstmals überschreitet. Der Vorteil dieser Methode gegenüber klassischer Herangehensweisen ist, dass bei wechselnden Investitionskosten kein neuer Schattenprozess berechnet werden muss, sondern sich nur der Zeitpunkt des erstmaligen Überschreitens ändert und der optimale Einstiegszeitpunkt einfach abgelesen werden kann. Dies versuchen wir als Erweiterung des Grundmodells noch auf sich zeitlich ändernde Kosten anzuwenden (vgl. Propositionen 3.5.2 und 3.5.3).

Wie im statischen Spiel erhalten wir aber zunächst in Theorem 3.4.1 als wichtiges spieltheoretisches Resultat, dass es für die Spieler keinesfalls optimal sein kann, simultan zu investieren, es sei denn, der Schattenprozess befindet sich bereits vor Beginn des Spiels oberhalb der Investitionskosten. Das Spiel besitzt also ebenfalls eine sequentielle Leader-Follower Struktur.

Der Mechanismus über den Schattenprozess ist in unserem Duopolspiel jedoch nur partiell anzuwenden - nämlich zur Bestimmung des Einstiegszeitpunktes des Followers, welcher in Theorem 3.4.2 angegeben wird. Bei der Berechnung des optimalen Einstiegszeitpunktes des Leaders erweist es sich jedoch als enormes Problem, einen solchen Schattenprozess zu bestimmen. Dies hängt damit zusammen, dass bei der Ermittlung der Strategie des Leaders berücksichtigt werden muss, wann der Follower voraussichtlich dem Markt beitrifft.

Deshalb benutzen wir dort eine Methode von Beibel & Lerche ([Bei97]), welche suggeriert, dass wir das vorliegende Stopp-Problem mittels einer Maßtransformation auf ein einfaches Maximierungsproblem einer deterministischen Funktion reduzieren können. Die entscheidende Voraussetzung hierbei ist jedoch die Modellierung des stochastischen Einflusses als Geometrische Brownsche Bewegung. Nach einer Umformung der Zielfunktion des Leaders sind dann alle Voraussetzungen des Beibel-Lerche Ansatzes erfüllt und der Einstiegszeitpunkt kann in Theorem 3.4.5 bestimmt werden.

Mit Hilfe dieses Ansatzes schaffen wir es danach in Proposition 3.5.4 auch, Investitionsprobleme zu lösen, bei denen wir den deterministischen Auslandsmarkt durch einen stochastischen Markt ersetzen, wobei wir auch diese Unsicherheit als Diffusion modellieren.

Anschließend, in **Kapitel 4** entscheiden die Spieler nicht mehr einmalig, wann eine gewisse Investition getätigt werden soll, sondern wie viel zu jedem Zeitpunkt in ein bereits bestehendes Projekt investiert wird. Zusätzliche Investitionen bringen mehr Profit, erfordern jedoch auch Investitionskosten. Gesucht sind in diesem Kapitel also Investitionspläne, was eine Herangehensweise über stochastische Dif-

ferentialspiele erfordert. Wir interpretieren im gesamten Kapitel die Investitionen als Investitionen in Technologie, welche zusätzlich mit einer konstanten Rate abgeschrieben wird.

Der Fall eines Monopolspiels dieser Art wurde für bestimmte Spezialfälle vor allem in Arbeiten von Abel & Eberly ([Abe95], [Abe97]) und Bertola ([Ber98]) mit Methoden der stochastischen Kontrolltheorie analysiert. In einer weiteren Arbeit von Riedel & Su ([Rie06]) lösen die Autoren ein solches Ein-Personen Problem über einen alternativen Ansatz, nämlich - wie auch bei ihrer Ausarbeitung über Stopp-Spiele - mit Hilfe eines Schattenprozesses.

Wir gehen in dieser Arbeit den Weg über stochastische Differentialspiele und verwenden hierbei die Resultate aus dem Lehrbuch von Yeung & Petrosyan ([Yeu06]), wobei wir in Theorem 4.3.1 zunächst ein Verifikationstheorem für unendlichstufige Ein-Personen Kontrollprobleme angeben und beweisen. Theorem 4.3.3 - ein Verifikationstheorem für ein Duopolspiel - ist dann die Grundlage für die weitere Berechnung der Nash Gleichgewichte dieses Kapitels.

Nachdem wir das allgemeine mathematische Modell diskutiert und in den Korollaren 4.3.2 und 4.3.4 notwendige Bedingungen für dessen Lösung aufgezeigt haben, beginnen wir mit konkreten Berechnungen in einigen wichtigen Spezialfällen. Um die Vorgehensweise genau zu durchleuchten, analysieren wir zunächst ein reversibles Investitionsspiel, um dann die Ergebnisse auf ein irreversibles Spiel mit quadratischen Kosten- und linearen Profitfunktionen partiell zu übertragen. Das Nash Gleichgewicht im Falle eines symmetrischen Duopols ist in Theorem 4.4.4 gegeben, in Theorem 4.4.7 findet sich die Lösung des asymmetrischen Spiels.

Danach untersuchen wir Spiele mit linearen Kostenfunktionen und geben in Theorem 4.4.8 das Nash Gleichgewicht bei linearen Profitfunktionen an. Abschließend betrachten wir ein Spiel mit HARA-Profitfunktionen und lösen dieses in Theorem 4.4.10.

Im Falle von quadratischen Kostenfunktionen tritt auch in den Hamilton Funktionen ein quadratischer Term auf, der dafür sorgt, dass die optimalen Strategien und somit auch die Wertfunktionen der Spieler endlich bleiben. Dem Problem der Unendlichkeit der Investitionsraten stehen wir im Spiel mit linearen Kostenfunktionen gegenüber. Wir werden dann anhand unterschiedlicher Wahl der Profitfunktion zwei Umgehungsmöglichkeiten verdeutlichen. Im Falle von linearen Profitfunktionen führen wir maximale Investitionsraten ein, während wir bei Profitfunktionen des HARA Typs nicht mehr bzgl. der Investitionsraten optimieren, sondern bzgl. eines kumulativen Investitionsplans.

In letzterem Spiel finden wir im Ein-Personen Fall weiterhin über den Verifikationssatz die Lösung; bei zwei Akteuren führt jedoch die klassische Analyse mittels

der Hamilton Jacobi Isaacs Gleichungen zu keinem Ergebnis. Deshalb betrachten wir ein Nullsummenspiel, in dem die Zielfunktion insbesondere abhängt vom Quotienten der beiden Technologiestände. Ein Spieler - dessen Technologiestand sie positiv beeinflusst - versucht sie zu maximieren, der andere - von dessen Technologiestand sie negativ abhängt - hat das Ziel der Minimierung der Zielfunktion.

Im abschließenden **Kapitel 5** erlauben wir es dann den Spielern, in gewisser Art und Weise miteinander zu kommunizieren, d.h. wir werfen einen Blick auf kooperative dynamische Investitionsspiele, wobei wir vollständige Transferierbarkeit der Auszahlungen fordern und den Gesamtgewinn maximieren. Dieser wird dann im Sinne der Nash Verhandlungslösung fair auf die beiden Spieler verteilt.

Wie im vierten Kapitel greifen wir für die Methoden und den theoretischen Rahmen auch hier auf das Buch von Yeung & Petrosyan ([Yeu06]) zurück.

Nach Abklärung der mathematischen und ökonomischen Rahmenbedingungen und der Formulierung des zentralen Theorems 5.3.1 werden wir kooperative Varianten der Spiele mit quadratischen Kosten- und linearen Profitfunktionen aus Kapitel 4 auf optimale Investitionspläne und Nash Verhandlungsstrategien analysieren. Zunächst betrachten wir auch hier ein reversibles Spiel, in dem die Spieler ihre Technologie sowohl erweitern als auch zum gleichen Preis verkaufen dürfen, wobei wir wieder symmetrisches und asymmetrisches Duopol gesondert untersuchen müssen.

Die Ergebnisse im Falle von reversiblen Investitionen werden wir dann auf ein kooperatives Spiel mit irreversiblen Investitionen anwenden bzw. übertragen. Auch hier geben wir zunächst in Theorem 5.4.3 die Lösung in einem symmetrischen Duopol an und betrachten danach - in Theorem 5.4.4 - den Fall mit nicht-identischen Unternehmen.

Ein wichtiger Aspekt dieses Kapitels ist auch der Vergleich der kooperativen Strategien mit denen im Nash Gleichgewicht (vgl. Proposition 5.4.7). Deshalb untersuchen wir zum Ende auch ein kooperatives Spiel mit linearen Kostenfunktionen, wobei die Profitfunktionen nur linear gewählt werden.

Im **Anhang A** die wichtigsten mathematischen und ökonomischen Grundlagen erläutert, wobei wir uns auf die Begriffe der kooperativen Spieltheorie (der Vorlesung von Jerger ([Jer06]) folgend) und die Lösung sowie einige Eigenschaften der in dieser Arbeit zentralen Differentialgleichung konzentrieren.

Kapitel 2

Statische Spiele

Wir beginnen unsere Analyse von irreversiblen Investitionsspielen mit einem klassischen statischen Investitionsspiel. Das bedeutet, wir betrachten einen Markt mit zwei asymmetrischen Unternehmen (den Spielern), die zum aktuellen Zeitpunkt die Entscheidung zu treffen haben, wann sie eine bestimmte Investition mit unsicheren Profiten tätigen sollen. Die Unsicherheit wird durch einen multiplikativen Faktor ausgedrückt, den wir als Geometrische Brownsche Bewegung modellieren werden.

Eine ökonomische Interpretation, die wir im Verlauf dieser Arbeit des Öfteren heranziehen werden, ist die, dass sich zwei inländische Unternehmen entscheiden müssen, wann sie in einen ausländischen Markt einsteigen. Der stochastische Multiplikator ist dann der Wechselkurs.

Die Profite hängen dann zum einen von der Höhe des Unsicherheitsfaktors zum Einstiegszeitpunkt ab und zum anderen von der Entscheidung des Gegners. D.h. nämlich, falls ein Unternehmen vor dem anderen (d.h. zu einem niedrigeren Level) dem Markt beitrifft, kann dieses bis zum Eintritt des Gegners Monopolgewinne beziehen, wohingegen bei Aktivität beider Unternehmen nur Cournot Nash Profite erzielt werden.

In diesem Spiel beobachten die Spieler also den aktuellen Wechselkurs und entscheiden daraufhin, ob sie dem Markt beitreten möchten oder nicht - also ob sie noch warten möchten. Dies legt die Entscheidung bzw. Bewertung des Projekts über eine Warteoption nahe. Gesucht sind Schwellenwerte a (für Spieler 1) und b (für Spieler 2) des Wechselkurses; die Spieler investieren, falls der observierte Kurs größer oder gleich dem jeweiligen Schwellenwert ist.

2.1 Problemstellung

Wir betrachten zwei im gleichen Land ansässige asymmetrische Unternehmen, die die Möglichkeit besitzen, in einen ausländischen Markt einzusteigen, wobei wir die Asymmetrie auf dem ausländischen Markt, bzw. in den auf diesem erzielten Profiten modellieren. Auf dem Auslandsmarkt sehen sich die Unternehmen einer deterministischen Profitfunktion $\pi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegenüber, wobei die Höhe des Gewinns in ausländischer Währung auch davon abhängt, ob nur ein Unternehmen oder beide auf dem Markt aktiv sind. Produziert nur ein Unternehmen, so maximiert es seine Profite bzgl. der gegebenen inversen Nachfragefunktion $P : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ und fährt somit Monopolgewinne π_i^M ein. Befinden sich beide Unternehmen auf dem Markt, so entscheiden sie sich für die Produktionsmengen im Nash Gleichgewicht und erhalten somit die eindeutigen Cournot Nash Profite π_i^C . Ziel der Optimierung sind die Profite in eigener Währung, d.h. die Gewinne π_i^j multipliziert mit dem aktuellen Wechselkurs x .

Auf Grund der Asymmetrie nehmen wir an, dass Spieler 1 auf dem ausländischen Markt günstiger produzieren kann und deshalb höhere Profite einfährt, d.h. $\pi_1^j > \pi_2^j$, ($j = M, C$).

Die Spieler beobachten nun den aktuellen Wechselkurs und entscheiden daraufhin, ob sie dem Markt beitreten möchten oder nicht. Der Marktbeitritt verursacht bei dem eintretenden Spieler einmalige Investitionskosten in eigener Währung in Höhe von K_i .

Das im Folgenden untersuchte Modell ist eine Erweiterung des Modells von Joaquin & Butler (vgl. [Yoa00]), in welchem ausschließlich eine lineare Preisfunktion betrachtet wurde. Wir werden mit Hilfe ähnlicher Mechanismen die optimalen Einstiegslevels im Falle einer allgemeinen Preisfunktion angeben.

2.2 Modellierung

Die Unsicherheit in diesem Modell - also den Wechselkurs - modellieren wir als Geometrische Brownsche Bewegung, d.h. es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit den üblichen Voraussetzungen und (W_t) eine auf diesem definierte eindimensionale Brownsche Bewegung. Dann ist der Wechselkurs die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t(\mu dt + \sigma dW_t) \\ &= X_t((r - \delta)dt + \sigma dW_t), \quad X_0 = x, \end{aligned}$$

wobei $\sigma > 0$ die Volatilität, $\mu \in \mathbb{R}$ der Drift, $r > \mu$ der positive risikofreie Zins auf dem Inlandsmarkt und $\delta = r - \mu > 0$ die Wechselkursrendite ist.

Wir betrachten dann das Spiel $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, g_1, g_2)$ mit den Strategiemengen

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{R}_+$$

und den Auszahlungsfunktionen

$$g_1(x, a, b) = \begin{cases} F_1(x, a) & a \geq b \\ L_1(x, a, b) & a < b \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$g_2(x, a, b) = \begin{cases} F_2(x, b) & b \geq a \\ L_2(x, a, b) & b < a \end{cases} . \quad (2.2.2)$$

Dabei ist x der aktuelle Wechselkurs und $a \in \mathcal{A}$ bzw. $b \in \mathcal{B}$ die Strategien der Spieler, also potentielle Einstiegslevels des Wechselkurses.

$L_i(x, \cdot, \cdot)$ ist die Auszahlung, die Spieler i bekommt, falls er als erster (also als Leader) dem Markt beitrifft. Diese hängt zum einen vom aktuellen Wechselkurs x ab, zum anderen sowohl von der eigenen Entscheidung als auch von der des anderen Spielers. Dies liegt daran, dass der Leader nur bis zum Einstiegszeitpunkt des Followers Monopolgewinne bekommt.

Andererseits hängt $F_i(x, \cdot)$ - die Auszahlung, die Spieler i als Follower bekommt - nur von der eigenen Entscheidung ab, da der Einstiegszeitpunkt des anderen Spielers dann bereits vergangen ist und da der Follower als Ziel die Maximierung des eigenen Nutzens und nicht die Schmälerung des Nutzens des Leaders hat.

Gesucht ist ein Nash Gleichgewicht, also ein Tupel (a^*, b^*) mit

$$\begin{aligned} g_1(x, a^*, b^*) &\geq g_1(x, a, b^*) \quad \forall a \in \mathcal{A} \\ g_2(x, a^*, b^*) &\geq g_2(x, a^*, b) \quad \forall b \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

für beliebiges aber festes $x \in \mathbb{R}_+$.

2.3 Analyse

In diesem Abschnitt wollen wir die Auszahlungsfunktionen der Spieler mit Hilfe des Realoptionsansatzes bestimmen. Hierzu betrachten wir zunächst den Fall, dass beide Unternehmen gleichzeitig dem Markt beitreten. Anschließend untersuchen wir die sequentielle Investition, d.h. wir nehmen an, dass bereits ein Unternehmen (oBdA Spieler 1) auf dem ausländischen Markt tätig ist, und bestimmen die Auszahlungsfunktion des zweiten Spielers. Daraufhin leiten wir die Auszahlungs-

funktion für den ersten Spieler her.

2.3.1 Simultane Investition

Als erstes müssen wir die Cournot-Nash Mengen und die daraus resultierenden Payoffs im Auslandsmarkt bestimmen. Dies funktioniert analog zur Bestimmung des Nash Gleichgewichts in einem klassischen Cournot Duopol (vgl. z.B. [Sch03]). Allgemein gilt, dass die Profitfunktion auf dem Auslandsmarkt von Spieler i gegeben ist als

$$\pi_i(q_i, q_j) = (P(q_i, q_j) - c_i)q_i, \quad (i, j \in \{1, 2\}, i \neq j),$$

also dem Produkt aus produzierter Menge q_i und der Differenz zwischen Preis $P(q_1, q_2)$ und Produktionskosten c_i je Einheit, wobei $c_1 < c_2$ gelte.

Die Preisfunktion P hängt dabei insbesondere auch ab von der produzierten Menge q_j des anderen Spielers.

Die Reaktionsfunktion von Spieler i auf die produzierte Menge q_j von Spieler j kann dann mittels der Vorschrift

$$T_i(q_j) = \arg \max_{q_i \in \mathbb{R}^+} \pi_i(q_i, q_j)$$

berechnet werden. Die Cournot-Nash Mengen (q_1^*, q_2^*) sind dann der Schnittpunkt der Reaktionsfunktionen, d.h. die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} q_1^* &= T_1(q_2^*) \\ q_2^* &= T_2(q_1^*), \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

falls $q_i^* \geq 0 \forall i \in \{1, 2\}$.

Beispiel 2.3.1. (*Lineare Preisfunktion.*) Im linearen Fall gilt

$$P(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2).$$

Also sind die Profitfunktionen

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1, q_2) &= (a - b(q_1 + q_2) - c_1)q_1 \\ \pi_2(q_1, q_2) &= (a - b(q_1 + q_2) - c_2)q_2 \end{aligned}$$

und die Reaktionsfunktionen können einfach zu

$$\begin{aligned} T_1(q_2) &= \frac{a - c_1 - q_2}{2} \\ T_2(q_1) &= \frac{a - c_2 - q_1}{2} \end{aligned}$$

berechnet werden. Das System (2.3.1) hat also in diesem Fall die Lösung

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{a - 2c_1 + c_2}{3} \\ q_2^* &= \frac{a - 2c_2 + c_1}{3}, \end{aligned}$$

falls der Zähler nicht-negativ ist, was aber durch sinnvolle Wahl der Parameter vorausgesetzt werden kann. Die Cournot-Nash Payoffs auf dem ausländischen Markt sind deshalb die folgenden Konstanten:

$$\begin{aligned} \pi_1^C &= \frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{9} \\ \pi_2^C &= \frac{(a - 2c_2 + c_1)^2}{9}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.3.2. (*Exponentielle Preisfunktion.*) Ist die Preisfunktion auf dem Auslandsmarkt exponentiell, also $P(q_1, q_2) = ae^{-\varepsilon(q_1+q_2)}$, so ist die Profitfunktion von Spieler i gegeben als

$$\pi_i(q_1, q_2) = (ae^{-\varepsilon(q_1+q_2)} - c_i) q_i.$$

Damit hat die Reaktionsfunktion die Gestalt

$$T_i(q_j) = \frac{1 - W\left(\frac{c_i e^{1+\varepsilon q_j}}{a}\right)}{\varepsilon}$$

mit der *Lambert-Funktion* W , also der Funktion W , für die gilt

$$\begin{aligned} W(z)e^{W(z)} &= z \\ W(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die Cournot-Nash Mengen und Payoffs können also bei sinnvoller Wahl der Parameter als Konstanten berechnet werden.

Seien also im Folgenden die (zeitunabhängigen und konstanten) Cournot-Nash-Mengen im deterministischen Duopol gegeben als q_1^* bzw. q_2^* . Die resultierenden Profite der Spieler $\pi_i^C := \pi_i(q_1^*, q_2^*)$ sind also ebenfalls Konstanten mit $\pi_1^C > \pi_2^C$.

Falls beide Spieler zum gleichen Level investieren, so erhalten sie beide die diskon-

tierten Cournot Auszahlungen abzüglich ihrer Investitionskosten, also

$$C_i(x) = \frac{\pi_i^C}{\delta} x - K_i. \quad (2.3.2)$$

2.3.2 Sequentielle Investition: Follower

Zur Bestimmung der Auszahlungsfunktionen des Followers nehmen wir an, dass Firma 1 bereits zum Level a dem Markt beigetreten ist und Firma 2 zum Level b dem Markt beitreten wird. In diesem Fall besteht die Auszahlungsfunktion von Firma 2 aus zwei Teilen:

- einer Flexibilitäts- oder Optionskomponente $F_2^O(x, b)$ vor dem eigenen Marktbeitritt zum Level b und
- einer Cournotkomponente $F_2^C(x)$ nach dem eigenen Marktbeitritt.

Die Cournot-Komponente $F_2^C(x)$ entspricht (2.3.2) bei simultanem Investment. Die Optionskomponente $F_2^O(x, b)$ bestimmt man mittels Realoptionsansatz als den abdiskontierten Wert der Cournot-Komponente zum zukünftigen Einstiegslevel b .

Proposition 2.3.3. Im Falle der Modellierung des Wechselkurses als Geometrische Brownsche Bewegung erhalten wir für die Optionskomponente von Spieler 2 als Follower die Formel

$$F_2^O(x, b) = \left(\frac{x}{b}\right)^{\beta_1} F_2^C(b), \quad (2.3.3)$$

wobei $\beta_1 > 1$ die positive Nullstelle der zentralen quadratischen Funktion (vgl. Anhang A.2)

$$\psi(z) = \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) z - r \quad (2.3.4)$$

und b das noch nicht optimale Markteintrittslevel von Spieler 2 ist.

Beweis. Auf Grund der Flexibilität des Spielers muss für die Optionskomponente gelten:

$$F_2^O(x, b) = \mathbb{E} [e^{-r\tau_b} | X_0 = x] \cdot F_2^C(b),$$

wobei

$$\tau_b := \inf\{t \geq 0 : X_t = b\}.$$

Den Erwartungswert berechnen wir als

$$\mathbb{E} [e^{-r\tau_b} | X_0 = x] = \left(\frac{x}{b}\right)^{\beta_1}.$$

Durch Einsetzen der Cournotkomponente aus (2.3.2) erhalten wir die Behauptung. \square

Theorem 2.3.4. Die Auszahlungsfunktion von Spieler 2 als Follower ist

$$F_2(x, b) = \begin{cases} \frac{\pi_2^C}{\delta}x - K_2 & x \geq b \\ \left(\frac{x}{b}\right)^{\beta_1} \cdot \left(\frac{\pi_2^C}{\delta}b - K_2\right) & x < b. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Analog ist die Auszahlungsfunktion von Spieler 1 als Follower

$$F_1(x, a) = \begin{cases} \frac{\pi_1^C}{\delta}x - K_1 & x \geq a \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\beta_1} \cdot \left(\frac{\pi_1^C}{\delta}a - K_1\right) & x < a. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus obiger Proposition. \square

2.3.3 Sequentielle Investition: Leader

Zunächst müssen die Monopolgewinne im ausländischen Markt berechnet werden. Dies ist ein einfaches Optimierungsproblem ohne Unsicherheit, welches uns die optimalen Payoffs von Spieler i als Monopolist in ausländischer Währung als Konstante π_i^M liefert.

Mit ähnlichen Überlegungen wie in 2.3.2 erhalten wir dann die Auszahlungsfunktion des Leaders (oBdA Spieler 1). Unter der Annahme, dass die Unternehmen nicht simultan investieren, besteht diese nämlich aus drei Teilen:

- einer Optionskomponente $L_1^O(x, a, b)$ vor dem eigenen Marktbeitritt,
- einer Monopolkomponente $L_1^M(x, b)$ nach dem eigenen Marktbeitritt und vor dem des Followers,
- einer Cournotkomponente $L_1^C(x)$ nach dem Marktbeitritt des Followers.

Auch hier entspricht die Cournot-Komponente $L_1^C(x)$ gerade dem Wert $C_1(x)$ aus (2.3.2) bei simultanem Investment. Die Monopolkomponente $L_1^M(x, b)$ und die Optionskomponente $L_1^O(x, a, b)$ bestimmt man wieder mit Hilfe des Realloptionsansatzes.

Proposition 2.3.5. Im Falle der Modellierung des Wechselkurses als Geometrische Brownsche Bewegung erhalten wir

1. für die Monopolkomponente von Spieler 1 als Leader die Formel

$$L_1^M(x, b) = \frac{\pi_1^M}{\delta}x - K_1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\pi_1^C - \pi_1^M}{\delta}\right) b, \quad (2.3.7)$$

2. für die Optionskomponente von Spieler 1 als Leader die Formel

$$L_1^O(x, a, b) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\beta_1} L_1^M(a, b). \quad (2.3.8)$$

Beweis. Mit

$$\tau_y := \inf\{t \geq 0 : X_t = y\}$$

gilt wie oben, dass

$$\mathbb{E}[e^{-r\tau_y} | X_0 = x] = \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta_1}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} L_1^O(x, a, b) &= \mathbb{E}[e^{-r\tau_a} | X_0 = x] L_1^M(a, b) \\ &= \left(\frac{x}{a}\right)^{\beta_1} L_1^M(a, b). \end{aligned}$$

Für die Monopolkomponente gilt, dass der Spieler zum Level x die Monopolgewinne abzüglich der Investitionskosten bekommt sowie den diskontierten Wert des zukünftigen Cournotduopols, welches ab dem Level b gespielt wird. Also ist

$$L_M^1(x, b) = \frac{\pi_1^M}{\delta}x - K_1 + \mathbb{E}[e^{-r\tau_b} | X_0 = x] \frac{\pi_1^C - \pi_1^M}{\delta} b.$$

□

Theorem 2.3.6. Die Auszahlungsfunktion von Spieler 1 als Leader ist gegeben durch

$$L_1(x, a, b) = \begin{cases} \frac{\pi_1^C}{\delta}x - K_1 & x \geq b \\ \frac{\pi_1^M}{\delta}x - K_1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{\beta_1} \frac{\pi_1^C - \pi_1^M}{\delta} b & a \leq x < b \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\pi_1^M}{\delta}a - K_1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\pi_1^C - \pi_1^M}{\delta}\right) b\right) & x < a. \end{cases}$$

Für Spieler 2 als Leader erhalten wir die Auszahlungsfunktion durch Vertauschen von 1 und 2 bzw. a und b in obiger Formel.

Beweis. Folgt direkt aus obiger Proposition. □

Anmerkung. Beachte, dass der diskontierte Wert des zukünftigen Duopols in der

Monopolkomponente, also

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\pi_1^C - \pi_1^M}{\delta}\right) b$$

negativ ist, da $\pi_1^M > \pi_1^C$.

2.4 Nash Gleichgewichte

In diesem Abschnitt wollen wir nun die optimalen Strategien a^* und b^* der Spieler im Nash Gleichgewicht bestimmen, d.h. wir suchen Levels $a^*, b^* \in \mathbb{R}_+$ so dass

$$g_1(x, a^*, b^*) \geq g_1(x, a, b^*) \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (2.4.1)$$

$$g_2(x, a^*, b^*) \geq g_2(x, a^*, b) \quad \forall b \in \mathcal{B} \quad (2.4.2)$$

für beliebiges $x \in \mathbb{R}_+$.

Es bezeichne

$$a_F^* := \sup_{a \in \mathcal{A}} F_1(x, a)$$

$$b_F^* := \sup_{b \in \mathcal{B}} F_2(x, b)$$

$$a_L^* := \sup_{a \in \mathcal{A}} L_1(x, a, b_F^*)$$

$$b_L^* := \sup_{b \in \mathcal{B}} L_2(x, a_F^*, b)$$

die entscheidungstheoretisch optimalen Einstiegslevels der Firmen als Leader (Index L) bzw. Follower (Index F). Seien weiter

$$a_P := \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : F_1(x, a_F^*) \leq L_1(x, a, b_F^*) \quad \forall x > a\}$$

$$b_P := \inf\{b \in \mathbb{R}_+ : F_2(x, b_F^*) \leq L_2(x, a_F^*, b) \quad \forall x > b\}$$

die Levels, zu denen die Auszahlung als Leader erstmals die Auszahlung als Follower überschreitet.

Dann gilt auf Grund der Asymmetrie zum einen, dass $b_F^* > a_F^* > a_L^*$ und daraus resultierend die folgende Aussage:

Proposition 2.4.1. Ist $x < b_F^*$, d.h. ist es für mindestens einen der Spieler besser zu warten, so kann simultane Investition kein Nash Gleichgewicht sein.

Beweis. Es sei $a^* = b^* = x < b_F^*$. Dann ist

$$g_2(x, a^*, b^*) = C_2(x) = F_2(x, x) < F_2(x, b_F^*) = g_2(x, a^*, b_F^*).$$

Somit haben wir einen Widerspruch zur Bedingung (2.4.2). \square

Dann gilt:

Proposition 2.4.2. Es sind

$$b_F^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{\delta K}{\pi_2^C} \quad \text{und} \quad a_F^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{\delta K}{\pi_1^C} \quad (2.4.3)$$

sowie

$$a_L^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{\delta K}{\pi_1^M} \quad \text{und} \quad b_L^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{\delta K}{\pi_2^M}. \quad (2.4.4)$$

Beweis. Die Einstiegslevels erhalten wir durch die Bedingung, dass die Funktionen F_i und L_i in a bzw. b differenzierbar sein müssen (vgl. [Dix94]), d.h.

$$\frac{\partial F_2^C}{\partial x}(b) \stackrel{!}{=} \frac{\partial F_2^O}{\partial x}(b, b)$$

liefert b_F^* . Den Wert für a_L^* erhalten wir durch

$$\frac{\partial L_1^M}{\partial x}(a, b) \stackrel{!}{=} \frac{\partial L_1^O}{\partial x}(a, a, b)$$

und analog a_F^* und b_L^* durch Vertauschen der Spieler. \square

Fordern wir zusätzlich, dass die Parameter so gewählt sind, dass mindestens einer der Spieler (auf Grund der Asymmetrie ist das dann Spieler 1) Interesse daran hat, dem Markt als Leader beizutreten, so gilt mit (2.4.3) - (2.4.4):

Theorem 2.4.3. Sei $L_1(x, a_L^*, b_F^*) \geq F_1(x, a_F^*) \forall x \in \mathbb{R}_+$.

1. Gilt $F_2(x, b_F^*) > L_2(x, a_F^*, x) \forall x \in (0, a_L^*)$, so ist

$$\begin{aligned} a^* &= a_L^* \\ b^* &= b_F^* \end{aligned}$$

das Nash Gleichgewicht im statischen Investitionsspiel.

2. Falls $\exists b_P \in (0, a_L^*) : F_2(x, b_F^*) \leq L_2(x, a_F^*, b_P) \forall x \geq b_P$, so ist

$$\begin{aligned} a^* &= b_P - \varepsilon \\ b^* &= b_F^* \end{aligned}$$

mit $\varepsilon > 0$ das Nash Gleichgewicht des Spiels.

Beweis. 1. Dieser Fall bedeutet, dass Spieler 2 keinerlei Interesse daran hat, dem Markt als Leader beizutreten. Beide Spieler können also unabhängig voneinander optimieren. Da $a_L^* > b_F^*$, gilt

$$\begin{aligned} g_1(x, a^*, b^*) = L_1(x, a_L^*, b_F^*) &\geq L_1(x, a, b_F^*) = g_1(x, a, b^*) \quad \forall a \in \mathbb{R}_+ \\ g_2(x, a^*, b^*) = F_2(x, b_F^*) &\geq F_2(x, b) = g_2(x, a^*, b) \quad \forall b \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

für beliebiges $x \in \mathbb{R}_+$.

2. In Fall (2) hingegen existiert ein so genanntes *pre-emption* Level b_P , zu dem sich Spieler 2 frühestens auf den Markt drängen würde. Da Spieler 1 jedoch ebenso Leader des Spiels werden möchte, muss er investieren, bevor Spieler 2 dies tut, also zum Level $a^* = b_P - \varepsilon$. Da $L_1 > L_2$, ist dies für Spieler 1 auch rentabel. Nun wiederum ist es für Spieler 2 optimal zu warten, bis der stochastische Multiplikator sein entscheidungstheoretisch optimales Einstiegslevel erreicht. Also gilt

$$\begin{aligned} g_1(x, a^*, b^*) = L_1(x, b_P - \varepsilon, b_F^*) &\geq F_1(x, a, b_P) = g_1(x, a, b^*) \quad \forall a \in \mathbb{R}_+ \\ g_2(x, a^*, b^*) = F_2(x, b_F^*) &\geq F_2(x, b) = g_2(x, a^*, b) \quad \forall b \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

für beliebiges $x \in \mathbb{R}_+$.

□

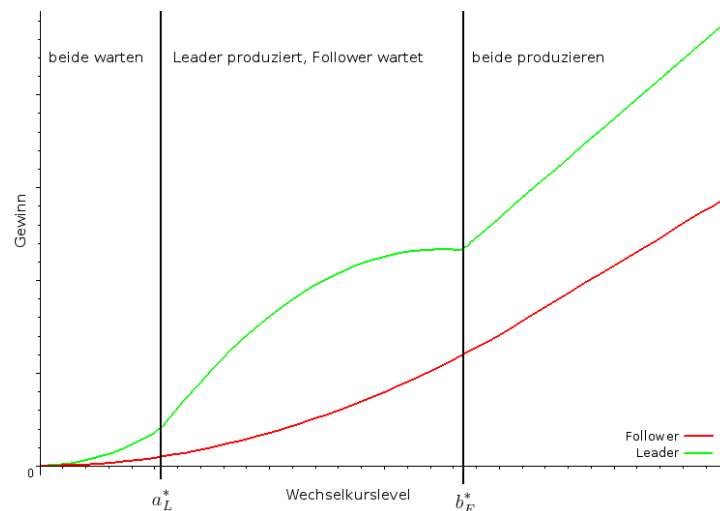


Abbildung 2.1: Auszahlungsfunktionen im Nash Gleichgewicht

Anmerkung. Da es sich um minimale Einstiegslevels handelt, kann es im Nash Gleichgewicht sehr wohl passieren, dass ein oder beide Spieler dem Markt sofort beitreten, nämlich Spieler 1, falls $x \geq a_L^*$ und beide Spieler, falls $x > b_F^*$.

2.4.1 Sensitivitätsanalyse

Interessant ist zusätzlich zu wissen, wie sich veränderte Rahmenbedingungen auf die optimalen Strategien auswirken. Deshalb betrachten wir zum einen die Einstiegszeitpunkte bei steigender Asymmetrie (also bei steigenden Produktionskosten einer der Firmen), sowie bei volatiler werdenden Wechselkursen. Dies kann als erster Schritt zu Modellen mit unvollständiger oder imperfekter Information gesehen werden. Da in obigem Theorem gezeigt wurde, dass simultane Investition kein Nash Gleichgewicht sein kann, unterstellen wir auch in diesem Abschnitt eine Leader-Follower Struktur mit Spieler 1 als Leader und Spieler 2 als Follower.

Sensitivität bzgl. Asymmetrie

In diesem Abschnitt möchten wir untersuchen, wie sich steigende Asymmetrie der Firmen in den Einstiegslevels niederschlagen. Wir modellieren die Asymmetrie in unterschiedlichen operativen Kosten, fixieren diese von Spieler 1 und lassen die von Spieler 2 steigen.

Proposition 2.4.4. Das optimale Einstiegslevel des Followers $b_F^*(c_2)$ ist streng monoton steigend in seinen operativen Kosten c_2 .

Beweis. Steigen die operativen Kosten c_2 , so sinken die Auslandspayoffs π_2^C . Da diese in b_F^* im Nenner stehen, folgt die Behauptung. \square

In Abb. 2.2 ist dies auch in den Auszahlungsfunktionen zu sehen.

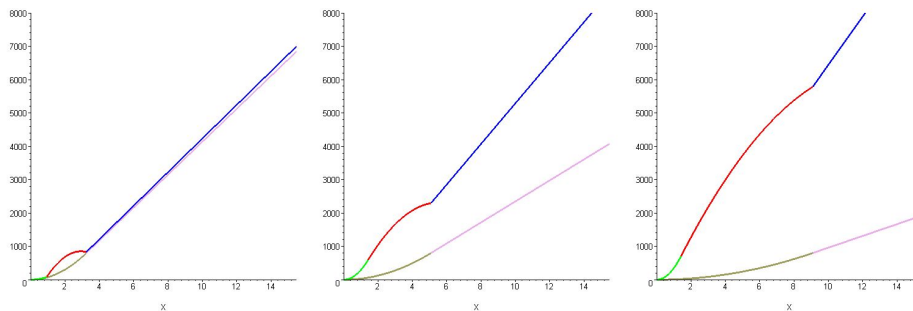


Abbildung 2.2: Sensitivität der Auszahlungsfunktionen bzgl. Kostendifferenz.

Sensitivität bzgl. Volatilität

Nun wollen wir noch beobachten, wie zunehmende Volatilität die Einstiegslevels von Leader und Follower beeinflusst.

Proposition 2.4.5. Die optimalen Einstiegslevels a_L^* und b_F^* sind streng monoton steigend in der Volatilität σ .

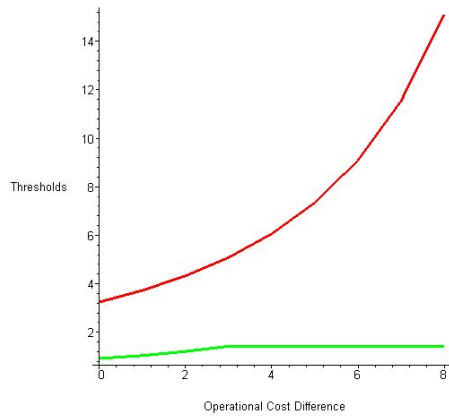


Abbildung 2.3: Sensitivität der Einstieglevels bzgl. Asymmetrie.

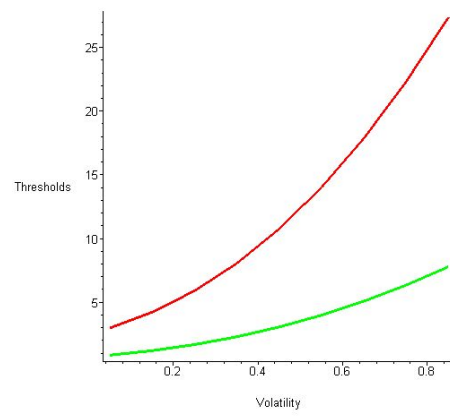


Abbildung 2.4: Sensitivität der Einstieglevels bzgl. Volatilität.

Beweis. δ , K und π_j^i sind unabhängig von σ . Es bleibt also der Term

$$f(\sigma) := \frac{\beta_1(\sigma)}{\beta_1(\sigma) - 1}$$

zu untersuchen.

Es gilt

$$f'(\sigma) = -\frac{\beta_1'(\sigma)}{(\beta_1(\sigma) - 1)^2}.$$

Dieser Ausdruck ist strikt positiv, da $\beta_1'(\sigma) < 0$ (vgl. Proposition A.2.6 im Anhang). Also folgt die Behauptung. \square

In Abb. 2.5 sehen wir diese Tatsache auch in den Auszahlungsfunktionen.

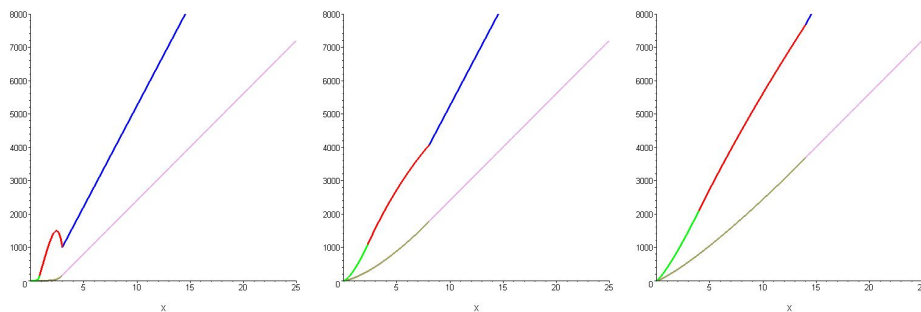


Abbildung 2.5: Sensitivität der Auszahlungsfunktionen bzgl. Volatilität.

Kapitel 3

Stopp-Spiele

In diesem Kapitel werden wir die Modelle aus dem vorigen Kapitel dynamisch erweitern, indem die Auszahlungen nicht mehr nur vom Level des stochastischen Prozesses zum Investitionszeitpunkt abhängen, sondern auch von dessen zukünftiger Entwicklung. Die Rahmenbedingungen bleiben also dieselben, in den Auszahlungsfunktionen sind jedoch nun Integrale über die Zeit des Projekts zu finden.

3.1 Problemstellung

Es wird auch in diesem Kapitel ein Duopolspiel untersucht, in dem zwei Unternehmen die Möglichkeit haben, in ein unsicheres Projekt zu investieren. Der Konsistenz zu den vorigen Kapiteln halber interpretieren wir dies auch hier wieder als zwei inländische Unternehmen, die in einen Auslandsmarkt einsteigen können und den optimalen Einstiegszeitpunkt suchen. Der Unsicherheitsfaktor ist erneut der Wechselkurs, während die Auszahlungen auf dem Auslandsmarkt zu jedem Zeitpunkt deterministisch sind. Diese Voraussetzung lassen wir jedoch in Abschnitt 3.5.2 fallen und untersuchen ein Problem mit stochastischem Auslandsmarkt.

Im Unterschied zum vorigen Kapitel bestimmen wir nun jedoch nicht mehr die Auszahlungsfunktionen der Spieler mittels Realoptionsansatz, sondern geben sie direkt vor. D.h. die Spieler erhalten ab ihrem Einstiegszeitpunkt ihren diskontierten erwarteten Betriebsgewinn abzüglich der einmalig anfallenden Investitionskosten. Somit erhält ein Spieler nach dem Einstieg zur Zeit τ die Auszahlungen

$$g(x, \tau) = \mathbb{E} \left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-r(s-\tau)} \pi(s) X_s ds - e^{-r\tau} K \mid X_0 = x \right], \quad (3.1.1)$$

wobei sich die deterministische Auszahlungsfunktion π danach richtet, ob der Spieler als Monopolist auf dem Markt tätig sein wird oder ob sein Konkurrent bereits dem Markt beigetreten ist.

Den Wechselkurs werden wir als Geometrische Brownsche Bewegung modellieren, der risikofreie Zinssatz auf dem Inlandsmarkt sei konstant über die Zeit.

Den Zeithorizont wählen wir als unendlich, was ökonomisch - [Doc00] und [Yeu06] folgend - so zu interpretieren ist, dass in vielen spieltheoretischen Fragestellungen dieser Art der Endzeitpunkt entweder unbekannt oder sehr weit in der Zukunft liegt und deshalb als unendlich definiert werden kann.

3.2 Modellierung

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit den üblichen Voraussetzungen sowie (W_t) eine auf diesem definierte eindimensionale Brownsche Bewegung.

Wir betrachten zunächst allgemein das Spiel $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, g_1, g_2)$ mit den Strategiemengen

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{\tau : \tau \text{ ist } (\mathcal{F}_t)\text{-Stopppzeit}\} =: \mathcal{S}$$

und den Auszahlungsfunktionen

$$g_1(x; \tau, \eta) = \begin{cases} F_1(x; \tau) & \tau \geq \eta \\ L_1(x; \tau, \eta) & \tau < \eta \end{cases}$$

$$g_2(x; \tau, \eta) = \begin{cases} F_2(x; \eta) & \eta \geq \tau \\ L_2(x; \tau, \eta) & \eta < \tau \end{cases},$$

wobei $\tau \in \mathcal{A}$ und $\eta \in \mathcal{B}$ die Strategien der Spieler - d.h. die Zeitpunkte, zu denen Spieler 1 bzw. 2 in den ausländischen Markt eintreten - sind und x der aktuelle Stand des Wechselkurses (X_t) ist.

$L_i(x; \cdot, \cdot)$ ist die Auszahlung, die Spieler i bekommt, falls er als erster (also als Leader) dem Markt beitrifft. Diese hängt zum einen vom Wechselkurs x ab, zum anderen sowohl von der eigenen Entscheidung als auch von der des anderen Spielers. Dies liegt daran, dass der Leader bis zum Einstiegszeitpunkt des Followers Monopolvergewinne bekommt.

Andererseits hängt $F_i(x; \cdot)$ - die Auszahlung, die Spieler i als Follower bekommt - nur von der eigenen Entscheidung ab, da der Einstiegszeitpunkt des anderen Spielers dann bereits vergangen ist und da der Follower als Ziel die Maximierung des eigenen Nutzens und nicht die Schmälerung des Nutzens des Leaders hat.

Gesucht ist ein Nash Gleichgewicht, also ein Tupel von Stoppzeiten (τ^*, η^*) mit

$$\begin{aligned} g_1(x; \tau^*, \eta^*) &\geq g_1(x; \tau, \eta^*) \quad \forall \tau \in \mathcal{S} \\ g_2(x; \tau^*, \eta^*) &\geq g_2(x; \tau^*, \eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

für beliebiges aber festes $x \in \mathbb{R}_+$.

Der einfacheren Notation halber betrachten wir im Folgenden nur ein symmetrisches Duopol, d.h. $F_1 = F_2 =: F$ und $L_1 = L_2 =: L$. Für die weiteren Berechnungen nehmen wir zusätzlich an, dass, falls die Investitionen sequentiell ablaufen, Spieler 1 als Leader und Spieler 2 als Follower dem Markt beitrifft.

Für das konkrete irreversible Investitionsspiel sei der Wechselkurs eine Geometrische Brownsche Bewegung X , d.h.

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad X_0 = x \in \mathbb{R}_+,$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ und der Zins $r > \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$.

Es seien weiter der Zeithorizont $T = \infty$, die Investitionskosten in eigener Währung $K \in \mathbb{R}_+$ und die Produktionskosten in Fremdwährung $c \in \mathbb{R}_+$ gegeben.

Dann können wir die erwarteten gesamten Betriebsgewinne der beiden Spieler definieren:

Definition 3.2.1. 1. Der erwartete gesamte Betriebsgewinn des Followers bei Investition zur Zeit η ist

$$V_\eta^F(X) := \mathbb{E} \left[\int_\eta^\infty e^{-r(t-\eta)} \pi_C X_t dt \mid \mathcal{F}_\eta \right].$$

2. Der erwartete gesamte Betriebsgewinn des Leaders - unter der Voraussetzung, dass der Follower zur Zeit η investieren wird - bei Investition zur Zeit $\tau < \eta$ ist

$$V_\tau^L(X; \eta) := \mathbb{E} \left[\int_\tau^\eta e^{-r(t-\tau)} X_t \pi_M dt + \int_\eta^\infty e^{-r(t-\tau)} X_t \pi_C dt \right].$$

Die Funktionen und Parameter seien so gewählt, dass alle Integrale existieren und endlich sind. Über diese beiden Größen definieren wir nun die Auszahlungsfunktionen L und F :

Definition 3.2.2. In diesem irreversiblen Investitionsspiel erhält der Leader beim Einstieg zur Zeit τ die Auszahlung

$$L(x; \tau, \eta) = \mathbb{E} [V_\tau^L(X; \eta) - e^{-r\tau} K \mid X_0 = x].$$

Der Follower erhält bei Einstieg zur Zeit $\eta > \tau$ die Auszahlung

$$F(x; \eta) = \mathbb{E} [V_\eta^F(X) - e^{-r\tau} K \mid X_0 = x].$$

3.3 Analyse

Zunächst untersuchen wir in diesem Abschnitt die Auszahlungsfunktionen der Spieler. Hierbei müssen wir unterscheiden, ob die Unternehmen simultan oder sequentiell dem Markt beitreten. Wir betrachten zuerst den simultanen Fall, bevor wir im sequentiellen Fall zunächst die Auszahlungsfunktion des Followers und dann die des Leaders bestimmen.

Die Profite der Spieler auf dem Auslandsmarkt π sind davon abhängig, wer der beiden bereits dem Markt beigetreten ist. Sind beide Unternehmen auf dem Markt tätig, so können die optimalen Produktionsmengen der Spieler im Cournot Duopol sowie insbesondere die daraus resultierenden Auszahlungen auf dem ausländischen Markt $\pi_C \geq 0$ analog zu 2.3 berechnet werden.

Auch in dem Fall, dass nur ein Spieler dem Markt beigetreten ist, können die optimale Produktionsmenge im Monopol und die daraus resultierenden Monopolgewinne π_M analog zu 2.3 bestimmt werden und somit seien im Folgenden die Konstanten $\pi_M > \pi_C \geq 0$ gegeben.

3.3.1 Simultane Investition

Falls beide Spieler zum gleichen Zeitpunkt t in den Markt einsteigen, erhalten sie beide die Auszahlungen

$$C(x; t) = \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)} \pi_C X_s ds - e^{-rt} K \mid X_0 = x \right]. \quad (3.3.1)$$

3.3.2 Sequentielle Investition: Follower

Betrachten wir nun zunächst die Auszahlungsfunktion des Followers. Sei also Spieler 1 bereits auf dem ausländischen Markt tätig. Ab dem Zeitpunkt der Investition erhält Spieler 2 dann zu jedem Zeitpunkt t die diskontierten Cournot-Auslandspayoffs, die mit dem jeweils aktuellen Wechselkurs multipliziert werden müssen.

Proposition 3.3.1. Der erwartete gesamte Betriebsgewinn des Followers bei Investition zur Zeit $\eta > 0$ und bei der Modellierung des Wechselkurses als Geometrische Brownsche Bewegung ist nur vom Wechselkurs zum Einstiegszeitpunkt

abhängig und es gilt

$$V_\eta^F(X_\eta) = \frac{\pi_C}{r - \mu} \cdot X_\eta. \quad (3.3.2)$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} V_\eta^F(X) &= \mathbb{E} \left[\int_\eta^\infty e^{-r(t-\eta)} \pi_C X_0 e^{Y_t} dt \mid \mathcal{F}_\eta \right] \\ &= X_0 \pi_C \int_\eta^\infty e^{-r(t-\eta)} \underbrace{\mathbb{E} [e^{Y_t} \mid \mathcal{F}_\eta]}_{\substack{= \mathbb{E}[e^{Y_\eta} e^{Y_t - Y_\eta} \mid \mathcal{F}_\eta] \\ = e^{Y_\eta} \mathbb{E}[e^{Y_t - Y_\eta}]} dt \\ &= \pi_C X_\eta \int_\eta^\infty e^{(-r+\mu)(t-\eta)} dt \\ &= \frac{\pi_C}{r - \mu} \cdot X_\eta =: V_\eta^F(X_\eta). \end{aligned}$$

□

Um die Auszahlungsfunktion des Followers zu erhalten, müssen wir jetzt nur noch die diskontierten Investitionskosten vom erwarteten gesamten Betriebsgewinn subtrahieren.

Proposition 3.3.2. Die Auszahlungsfunktion des Followers bei Modellierung des Wechselkurses als Geometrische Brownsche Bewegung hat die Form

$$F(x; \eta) = \mathbb{E} [e^{-r\eta} h_F(X_\eta) \mid X_0 = x] \quad (3.3.3)$$

mit

$$h_F(x) = \frac{\pi_C}{r - \mu} x - K.$$

Beweis. Der Follower erhält als Auszahlung den erwarteten gesamten Betriebsgewinn abzüglich der diskontierten Investitionskosten, also

$$F(x; \eta) = \mathbb{E} [e^{-r\eta} (V_\eta^F(X_\eta) - K) \mid X_0 = x].$$

Einsetzen von (3.3.2) liefert die Behauptung. □

3.3.3 Sequentielle Investition: Leader

Nehmen wir nun an, der Leader wüsste, dass zum Zeitpunkt η ein Follower dem Markt betreten wird. Dann erhält er von seinem eigenen Einstiegszeitpunkt τ bis

zum Einstiegszeitpunkt η des Followers Monopolgewinne und ab dem Einstieg des Followers Cournot Auszahlungen. Also gilt:

Proposition 3.3.3. Der erwartete gesamte Betriebsgewinn des Leaders bei Investition zur Zeit $\tau < \eta$ bei der Modellierung des Wechselkurses als Geometrische Brownsche Bewegung ist sowohl vom Wechselkurs zum Einstiegszeitpunkt als auch von den Einstiegszeitpunkten beider Spieler abhängig und es gilt bei gegebenem η

$$V_\tau^L(X_\tau; \eta) = \frac{\pi_M}{r - \mu} \cdot X_\tau \cdot f(\tau, \eta)$$

mit

$$f(\tau, \eta) = \begin{cases} (\pi_M - (\Delta\pi)e^{(r-\mu)(\tau-\eta)}) & \tau < \eta \\ \pi_C & \tau \geq \eta, \end{cases}$$

wobei $\Delta\pi := \pi_M - \pi_C$.

Beweis. Es gilt für $\tau < \eta$, dass

$$\begin{aligned} V_\tau^L(X; \eta) &= \mathbb{E} \left[\int_\tau^\infty e^{-r(t-\tau)} X_t \pi_M dt - \int_\eta^\infty e^{-r(t-\tau)} X_t (\pi_M - \pi_C) dt \right] \\ &= \frac{X_\tau}{r - \mu} (\pi_M - \Delta\pi e^{(r-\mu)(\tau-\eta)}) \\ &= \frac{X_\tau}{r - \mu} \cdot f(\tau, \eta) =: V_\tau^L(X_\tau; \eta). \end{aligned}$$

Ist $\tau \geq \eta$, so ist der Spieler kein Leader mehr und erhält deshalb die Cournot Profite π_C . \square

Die Tatsache, dass der erwartete gesamte Betriebsgewinn nicht nur von τ sondern auch von η abhängt, wird uns bei der Bestimmung der optimalen Strategie des Leaders deutlich mehr Probleme bereiten als bei der Berechnung des Einstiegszeitpunktes des Followers.

Deshalb gehen wir einen anderen Weg und versuchen, die Auszahlungsfunktion des Leaders in den für die Maximierung relevanten Teil und einen von τ unabhängigen Teil zu separieren. In der folgenden Proposition werden wir sehen, dass die Auszahlungsfunktion des Leaders eine bzgl. der Optimierung sehr ähnliche Form annimmt wie die des Followers.

Proposition 3.3.4. Die Auszahlungsfunktion des Leaders hat die Form

$$L(x; \eta, \tau) = \varphi(\eta) + \mathbb{E} [e^{-r\tau} h_L(X_\tau) \mid X_0 = x] \quad (3.3.4)$$

mit

$$h_L(x) = \frac{\pi_M}{r - \mu} x - K.$$

Beweis. Sei η beliebig aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned}
L(x; \eta, \tau) &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \left(\int_{\tau}^{\eta} e^{-r(t-\tau)} \pi_M X_t dt + \int_{\eta}^{\infty} e^{-r(t-\tau)} \pi_C X_t dt - K \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_{\tau}^{\eta} e^{-rt} \pi_M X_t dt + \int_{\eta}^{\infty} e^{-rt} \pi_C X_t dt - e^{-r\tau} K \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-rt} \pi_M X_t dt - \int_{\eta}^{\infty} e^{-rt} \pi_M X_t ds + \int_{\eta}^{\infty} e^{-rt} \pi_C X_t ds - e^{-r\tau} K \right] \\
&= (\pi_C - \pi_M) \mathbb{E} \left[\int_{\eta}^{\infty} e^{-rt} X_t dt \right] + \mathbb{E} \left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-rt} \pi_M X_t dt - e^{-r\tau} K \right] \\
&= \varphi(\eta) + \mathbb{E} \left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-rs} \pi_M X_s ds - e^{-r\tau} K \right].
\end{aligned}$$

Der zweite Summand kann nun genau wie in Proposition 3.3.2 bzw. Proposition 3.3.1 umgeformt werden und wir erhalten die Behauptung. \square

Im folgenden Abschnitt möchten wir ein Nash Gleichgewicht in diesem irreversiblen Investitionsspiel bestimmen.

3.4 Nash Gleichgewichte

Das Ziel der Unternehmen ist die Maximierung der eben bestimmten Auszahlungen - wir suchen also die im Sinne des Nash Gleichgewichts optimalen Einstiegszeitpunkte τ^* und η^* in den ausländischen Markt, d.h.

$$L(x; \tau^*, \eta^*) \geq L(x; \tau, \eta^*) \quad \forall \tau \in \mathcal{S} \quad (3.4.1)$$

$$F(x; \eta^*) \geq L(x; \eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{S}. \quad (3.4.2)$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+$.

Wir werden nun versuchen Schwellenwerte X_L^* und X_F^* anzugeben, für die gilt, dass die optimalen Investitionszeitpunkte als Zeitpunkte des ersten Überschreitens des Wechselkurses dieser Werte abgelesen werden können, d.h. der Leader sollte zur Zeit $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq X_L^*\}$ investieren, der Follower zur Zeit $\eta^* = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq X_F^*\}$.

Unter der Annahme, dass solche Schwellenwerte existieren, müssen zur Bestimmung des Nash Gleichgewichtes in reinen Strategien drei Fälle unterschieden wer-

den, je nachdem, auf welchem Level sich der Wechselkurs zur Zeit $t_0 = 0$ befindet.

Das folgende Theorem liefert eine Aussage zur Form des Nash Gleichgewichts unter der Annahme, dass solche Schwellenwerte existieren. Deren Existenz und konkrete Bestimmung diskutieren wir in den Abschnitten 3.4.1 und 3.4.2.

Theorem 3.4.1. Seien

$$\begin{aligned}\eta^* &= \arg \max_{\eta \in \mathcal{S}} F(x; \eta) = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq X_F^*\} \\ \tau^* &= \arg \max_{\tau \in \mathcal{S}} L(x; \tau, \eta^*) = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq X_L^*\}\end{aligned}$$

die im Sinne des Nash Gleichgewichts optimalen Einstiegszeitpunkte der Spieler. Dann gilt:

1. $X_0 \geq X_F^*$: Es wird sofort simultan investiert, d.h. (t_0, t_0) ist das eindeutige Nash Gleichgewicht.
2. $X_L^* \leq X_0 < X_F^*$: Ein Spieler investiert sofort, der andere wartet bis η^* , d.h. (t_0, η^*) und (η^*, t_0) sind Nash Gleichgewichte.
3. $X_0 \leq X_L^*$: Ein Spieler wartet bis τ^* , der andere bis η^* , d.h. (τ^*, η^*) und (η^*, τ^*) sind Nash Gleichgewichte. Insbesondere investieren die Spieler keinesfalls simultan.

Beweis. 1. Sei $X_0 \geq X_F^*$. Dann gilt trivialerweise, dass $\eta^* = \tau^* = t_0$, da

$$X_F^* \leq X_L^* \leq X_0.$$

2. Sei nun $X_L^* \leq X_0 < X_F^*$. Dann gilt trivialerweise, dass $\tau^* = 0$, da

$$X_L^* \leq X_0.$$

Für den Follower gilt aufgrund der Definition von η^* , dass

$$F(x; \eta) \leq F(x; \eta^*) \quad \forall \eta \in \mathcal{S}.$$

Deshalb würde er seine Auszahlungen verringern, wenn er seine Strategie wechseln würde.

3. Sei letztlich $X_0 < X_L^*$. Wegen der Definitionen von τ^* und η^* gilt hier

$$C(x; \tau) = F(x; \tau) \leq F(x; \eta^*) \leq L(x; \tau^*, \eta^*) \quad \forall \tau \neq \eta^*.$$

Somit würde jeder Spieler seine Auszahlungen verringern, wenn er zu simultaner Investition wechseln würde.

□

Was nun noch bleibt ist zu zeigen, dass solche Schwellenwerte X_L^* bzw. X_F^* existieren. In den folgenden Abschnitten werden wir dies auf eine konstruktive Art und Weise tun, indem wir diese konkret bestimmen um daraufhin die optimalen Einstiegszeitpunkte ablesen zu können. Wie in spieltheoretischen Analysen mit sequentiellen Zügen üblich, tun wir dies zunächst für den Follower und anschließend für den Leader.

3.4.1 Optimaler Einstiegszeitpunkt Follower

Die Methode zum Auffinden des optimalen Einstiegszeitpunktes des Followers beruht auf der Idee von Bank & El Karoui (vgl. [Ban03]), dass jeder optionale Prozess (Z_t) eine Darstellung über die laufenden Suprema eines anderen Prozesses - des so genannten Schattenprozesses (ξ_t) - besitzt.

Wir werden hier jedoch kein Resultat aus der oben genannten Arbeit verwenden, um die Existenz eines solchen Prozesses nachzuweisen, sondern einen konstruktiven Beweis in unserem Fall führen, der uns direkt eine Formel für den Schattenprozess liefert.

Das folgende Theorem gibt Auskunft über den Zusammenhang zwischen erwartetem gesamten Betriebsgewinn und Schattenprozess, woraufhin ihn Theorem 3.4.3 konkret angibt.

Theorem 3.4.2. Es gelte für den erwarteten gesamten Betriebsgewinn des Followers die Darstellung

$$e^{-r\eta}V_\eta^F(X_\eta) = \mathbb{E} \left[\int_{L_\eta}^{\infty} r e^{-rt} \sup_{\eta < s < t} \xi_s dt \middle| \mathcal{F}_\eta \right]. \quad (3.4.3)$$

Dann ist der optimale Investitionszeitpunkt im Sinne von Theorem 3.4.1 gegeben als

$$\eta^* := \inf\{t \geq 0 : \xi_t \geq K\}. \quad (3.4.4)$$

Beweis. Wir führen den Beweis in drei Schritten durch. Zunächst zeigen wir, dass Investition zur Zeit η^* auf jeden Fall positive Auszahlungen bringt. Im zweiten (bzw. dritten) Schritt wird gezeigt, dass Investition vor (bzw. nach) η^* schlechtere

Auszahlungen zur Folge haben würde, d.h. zz. ist für alle $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x; \eta^*) \geq 0, \quad F(x; \eta^*) \geq F(x; \eta) \quad \forall \eta < \eta^* \quad \text{und} \quad F(x; \eta^*) \geq F(x; \eta) \quad \forall \eta > \eta^*.$$

Sei also $x \in \mathbb{R}_+$ beliebig.

1. Sei weiter $\eta^* := \inf\{t \geq 0 : \xi_t \geq K\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x; \eta^*) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{\eta^*}^{\infty} r e^{-rt} \sup_{\eta^* \leq s \leq t} \xi_s dt \mid \mathcal{F}_{\eta^*} \right] - e^{-r\eta^*} K \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &\geq \int_{\eta^*}^{\infty} r e^{-rt} \xi_{\eta^*} dt - e^{-r\eta^*} K \\ &\geq \int_{\eta^*}^{\infty} r e^{-rt} K dt - e^{-r\eta^*} K \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Sei nun $\eta < \eta^*$ beliebig aber fest. Dann ist

$$\begin{aligned} F(x; \eta) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{\eta}^{\infty} r e^{-rt} \sup_{\eta \leq s \leq t} \xi_s dt \mid \mathcal{F}_{\eta} \right] - e^{-r\eta} K \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= F(x; \eta^*) + \mathbb{E} \left[\underbrace{\mathbb{E} \left[\int_{\eta}^{\eta^*} r e^{-rt} \sup_{\eta \leq s \leq t} \xi_s dt \mid \mathcal{F}_{\eta} \right]}_{\leq \int_{\eta}^{\eta^*} r e^{-rt} K dt = (e^{-r\eta} - e^{-r\eta^*})K} - (e^{-r\eta} - e^{-r\eta^*})K \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &\leq F(x; \eta^*). \end{aligned}$$

3. Sei letztlich $\eta > \eta^*$ beliebig aber fest. Dann können wir auf analoge Art und Weise zeigen, dass

$$\begin{aligned} F(x; \eta^*) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{\eta}^{\infty} r e^{-rt} \sup_{\eta \leq s \leq t} \xi_s dt \mid \mathcal{F}_{\eta} \right] - e^{-r\eta} K \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &\geq F(x; \eta). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Wir haben also gezeigt, dass falls für den erwarteten gesamten Betriebsgewinn eine Darstellung durch Gleichung (3.4.3) existiert, der Prozess (ξ_t) in (3.4.3) tatsächlich der gesuchte Schattenprozess ist. Es bleibt jedoch noch zu zeigen, dass ein solcher Prozess existiert, und zu bestimmen, welche Form dieser annimmt. Diese Resultate liefert die folgende Proposition.

Theorem 3.4.3. Folgt der Wechselkurs X im irreversiblen Investitionsproblem

einer Geometrischen Brownschen Bewegung, d.h.

$$X_t = X_0 e^{Y_t} \quad \text{mit} \quad Y_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t,$$

so ist der Schattenprozess (ξ_t) gegeben durch

$$\xi_t = \frac{X_t \pi_C}{\kappa} \tag{3.4.5}$$

mit

$$\kappa = (r - \mu) \cdot \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}, \tag{3.4.6}$$

wobei β_1 die positive Nullstelle der zentralen quadratischen Funktion

$$\psi(z) = \frac{1}{2} \sigma^2 z(z-1) + \mu z - r \tag{3.4.7}$$

(vgl. Anhang A.2) ist.

Der optimale Einstiegszeitpunkt des Followers ist somit

$$\eta^* = \inf \{ t \geq 0 : X_t \geq X_F^* \} = \frac{\kappa K}{\pi_C}.$$

Beweis. Laut Proposition 3.3.1 gilt für den erwarteten gesamten Betriebsgewinn

$$V_\eta^F(X_\eta) = \frac{X_\eta \pi_C}{r - \mu}.$$

Also folgt mit dem Ansatz $\xi_t = \frac{\pi_C X_t}{\kappa}$

$$\begin{aligned} e^{-r\eta} \frac{X_\eta \pi_C}{r - \mu} &= \mathbb{E} \left[\int_\eta^\infty r e^{-rt} \sup_{\eta \leq s \leq t} \xi_s dt \middle| \mathcal{F}_\eta \right] = e^{-r\eta} V_\eta^F \\ &= \mathbb{E} \left[\int_\eta^\infty r e^{-rt} \sup_{\eta \leq s \leq t} \frac{X_0 \pi_C e^{Y_s}}{\kappa} dt \middle| \mathcal{F}_\eta \right] \\ &= \frac{1}{\kappa} e^{-r\eta} X_0 \pi_C e^{Y_\eta} \mathbb{E} \left[\int_\eta^\infty r e^{-r(t-\eta)} \sup_{\eta \leq s \leq t} e^{Y_s - Y_\eta} dt \middle| \mathcal{F}_\eta \right] \\ &= \frac{1}{\kappa} e^{-r\eta} X_\eta \pi_C \mathbb{E} \left[\int_0^\infty r e^{-rt} \sup_{0 \leq s \leq t} e^{Y_s} dt \right] \\ &= \frac{1}{\kappa} e^{-r\eta} X_\eta \pi_C \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit mit Hilfe der Wiener-Hopf-Faktorisierung von Lévy-

Prozessen (im Spezialfall der Geometrischen Brownschen Bewegung) aus [Ber96] folgt. Auflösen nach κ liefert (3.4.6).

Nun kann mit Hilfe von Theorem 3.4.2 der Schwellenwert X_F^* abgelesen werden, indem die Ungleichung

$$\frac{x\pi_C}{\kappa} \geq K$$

nach x aufgelöst wird. □

3.4.2 Optimaler Einstiegszeitpunkt Leader

Aufgrund der Tatsache, dass der erwartete gesamte Betriebsgewinn des Leaders neben X_τ auch noch separat von τ abhängt, ist es unmöglich, die obige Methode auch zum Aufinden des Schwellenwertes für den Leader zu verwenden. Deshalb verwenden wir den so genannten Beibel & Lerche - Ansatz (vgl. [Bei97]), welcher suggeriert, Stopp-Probleme der Form

$$\mathbb{E}[e^{-r\tau}h(X_\tau)] \rightarrow \max_{\tau \in \mathcal{S}}$$

mittels einer Maßtransformation zu lösen.

Dabei muss $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $r \in \mathbb{R}^+$ und $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Geometrische Brownsche Bewegung sein. Die Methodik dieses Ansatzes zeigt das folgende Theorem aus [Bei97] auf:

Theorem 3.4.4. (Beibel-Lerche, [Bei97], Th. 2, S. 96)

Sei β_1 die positive Nullstelle der zentralen quadratischen Funktion ψ aus (3.4.7) und

$$0 < C_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} (e^{-\beta_1 x} h(x)) < \infty$$

sowie

$$C_1 = e^{-\beta_1 x^*} h(x^*)$$

für ein $x^* \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt unter den obigen Voraussetzungen:

$$\sup_{\tau} \mathbb{E} [e^{-r\tau} h(X_\tau) \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] = C_1$$

und das Supremum wird für $\tau^* = \inf\{t > 0 : X_t = x^*\}$ erreicht.

Beweis. vgl. [Bei97], S. 96f. □

Sei also im Folgenden (X_t) eine Geometrische Brownsche Bewegung, d.h.

$$X_t = X_0 e^{Y_t} \quad \text{mit} \quad Y_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t.$$

Theorem 3.4.5. Folgt der Wechselkurs im irreversiblen Investitionsspiel einer Geometrischen Brownschen Bewegung, so ist der optimale Einstiegszeitpunkt des Leaders gegeben durch

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq X_L^*\} \quad (3.4.8)$$

mit

$$X_L^* = \frac{\kappa K}{\pi_M} \quad (3.4.9)$$

und

$$\kappa = (r - \mu) \cdot \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}, \quad (3.4.10)$$

wobei β_1 die positive Nullstelle der zentralen quadratischen Funktion ψ aus (3.4.7) ist.

Beweis. Laut Proposition 3.3.4 hat die Auszahlungsfunktion des Leaders für $\tau \leq \eta$ die Form

$$L(x; \tau, \eta) = \varphi(\eta) + \mathbb{E} [e^{-r\tau} h_L(X_\tau)]$$

mit

$$h_L(x) = \frac{\pi_M}{r - \mu} x - K.$$

Da der erste Summand unabhängig von τ ist, lässt sich unser Optimierungsproblem schreiben als

$$\mathbb{E}[e^{-r\tau} h(Y_\tau)] \rightarrow \max_{\tau \in \mathcal{S}}$$

mit

$$h(Y_t) = (ce^{Y_t} - K)$$

und einer gegebenen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Laut obigem Theorem genügt es nun, die deterministische Funktion $f(y) = e^{-\beta_1 y} h(y)$ zu maximieren. In unserem Fall gilt

$$f(y) = e^{-\beta_1 y} (ce^y - K).$$

Ableiten, Nullsetzen und Auflösen liefert

$$e^y = \frac{\beta_1 K}{(\beta_1 - 1)c}.$$

Daraus lässt sich der Schwellenwert nun ablesen.

Es bleibt zu zeigen, dass $\tau \leq \eta$, da dies die Nebenbedingung für die Darstellung

der Auszahlungsfunktion war. Dies ist jedoch trivialerweise gegeben, da

$$\pi_M \geq \pi_C.$$

□

3.5 Erweiterungen

In diesem Abschnitt möchten wir einige Erweiterungen des obigen Modells näher betrachten. Wir beschränken uns bei der Analyse jedoch auf die Einstiegszeitpunkte des Followers, da wir bereits im Abschnitt 3.4 gezeigt haben, dass die Bestimmung der Strategie des Leaders mit Hilfe von Proposition 3.3.4 weitestgehend analog erfolgen kann.

Des Weiteren führen wir im Folgenden alle Rechnungen für beliebiges aber festes $x = X_0$ und X_η durch und schreiben deshalb $F(\eta) := F(x; \eta)$ und $V_\eta^F := V_\eta^F(X_\eta)$.

3.5.1 Zeitabhängige Investitionskosten

Ein entscheidender Vorteil der Lösung über den Schattenprozess aus (3.4.3) ist es, dass für unterschiedliche Investitionskosten und/oder Auszahlungen auf dem Auslandsmarkt keine neuen Berechnungen durchgeführt werden müssen. Andere Investitionskosten heben oder senken nur die Schwelle, andere Auslandspayoffs wirken sich nur als Multiplikator auf den Schattenprozess aus. Vor einem komplizierteren Problem steht das Unternehmen jedoch, falls sich die Investitionskosten über die Zeit verändern können. Wir betrachten hierzu zunächst monoton fallende bzw. steigende Investitionskosten.

Proposition 3.5.1. Seien die Investitionskosten im irreversiblen Investitionsspiel als Funktion $K : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton steigend oder monoton fallend. Sei weiter

$$e^{-r\eta} V_\eta^F = \mathbb{E} \left[\int_\eta^\infty r e^{-rt} \sup_{\eta < s < t} \xi_s dt \middle| \mathcal{F}_\eta \right]. \quad (3.5.1)$$

Dann ergibt die Investition zur Zeit $\eta^* = \inf\{t \geq 0 : \xi_t \geq K(t)\}$ positive Auszahlungen.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
F(\eta^*) &= \mathbb{E} [e^{-r\eta^*} V_{\eta^*}^F - e^{-r\eta^*} K(\eta^*)] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{\eta^*}^{\infty} r e^{-rt} \sup_{\eta^* \leq s \leq t} \xi_s dt \middle| \mathcal{F}_{\eta^*} \right] - e^{-r\eta^*} K(\eta^*) \right] \\
&\geq \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{\eta^*}^{\infty} r e^{-rt} \xi_{\eta^*} dt \middle| \mathcal{F}_{\eta^*} \right] - e^{-r\eta^*} K(\eta^*) \right] \\
&\geq \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{\eta^*}^{\infty} r e^{-rt} K(\eta^*) dt \middle| \mathcal{F}_{\eta^*} \right] - e^{-r\eta^*} K(\eta^*) \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Monoton steigende Investitionskosten

Proposition 3.5.2. Bei monoton steigenden Investitionskosten ist

$$\eta^* := \inf\{t \geq 0 : \xi_t \geq K(t)\}$$

mit (ξ_t) aus (3.5.1) eine obere Schranke für den optimalen Einstiegszeitpunkt.

Beweis. Sei $\eta \in [\eta^*, \infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
F(\eta^*) &= \mathbb{E} [e^{-r\eta^*} V_{\eta^*}^F - e^{-r\eta^*} K(\eta^*)] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{\eta^*}^{\infty} r e^{-rt} \sup_{\eta^* \leq s \leq t} \xi_s dt \middle| \mathcal{F}_{\eta^*} \right] - e^{-r\eta^*} K(\eta^*) \right] \\
&= F(\eta) + \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{\eta^*}^{\eta} r e^{-rt} \sup_{\eta^* \leq s \leq t} \xi_s dt \middle| \mathcal{F}_{\eta^*} \right] - e^{-r\eta^*} K(\eta^*) + e^{-r\eta} K(\eta) \right] \\
&\geq F(\eta) + \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{\eta^*}^{\eta} r e^{-rt} \xi_{\eta^*} dt \middle| \mathcal{F}_{\eta^*} \right] - e^{-r\eta^*} K(\eta^*) + e^{-r\eta} K(\eta) \right] \\
&\geq F(\eta) + \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{\eta^*}^{\eta} r e^{-rt} K(\eta^*) dt \middle| \mathcal{F}_{\eta^*} \right] - e^{-r\eta^*} K(\eta^*) + e^{-r\eta} K(\eta) \right] \\
&\geq F(\eta) + \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [K(\eta^*) (e^{-r\eta^*} - e^{-r\eta}) \mid \mathcal{F}_{\eta^*}] - e^{-r\eta^*} K(\eta^*) + e^{-r\eta} K(\eta) \right] \\
&= F(\eta) - \mathbb{E} [e^{-r\eta} (K(\eta^*) - K(\eta))] \\
&\geq F(\eta).
\end{aligned}$$

□

Anmerkung. Für den Fall $\eta \in [0, \eta^*)$ kann ohne weitere Kenntnis der Funktion K keine Aussage getroffen werden.

Monoton fallende Investitionskosten

Proposition 3.5.3. Bei monoton fallenden Investitionskosten ist

$$\eta^* := \inf\{t \geq 0 : \xi_t \geq K(t)\}$$

mit (ξ_t) aus (3.5.1) eine untere Schranke für den optimalen Einstiegszeitpunkt.

Beweis. Sei $\eta \in [0, \eta^*]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(\eta) &= \mathbb{E} [e^{-r\eta} V_\eta^F - e^{-r\eta} K(\eta)] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_\eta^\infty r e^{-rt} \sup_{\eta^* \leq s \leq t} \xi_s dt \middle| \mathcal{F}_\eta \right] - e^{-r\eta^*} K(\eta) \right] \\ &= F(\eta^*) + \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_\eta^{\eta^*} r e^{-rt} \sup_{\eta \leq s \leq t} \xi_s dt \middle| \mathcal{F}_\eta \right] - e^{-r\eta} K(\eta) + e^{-r\eta^*} K(\eta^*) \right] \\ &\leq F(\eta^*) + \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_\eta^{\eta^*} r e^{-rt} K(\eta) dt \middle| \mathcal{F}_\eta \right] - e^{-r\eta} K(\eta) + e^{-r\eta^*} K(\eta^*) \right] \\ &\leq F(\eta^*) + \mathbb{E} [\mathbb{E} [K(\eta) (e^{-r\eta} - e^{-r\eta^*}) \mid \mathcal{F}_\eta] - e^{-r\eta} K(\eta) + e^{-r\eta^*} K(\eta^*)] \\ &= F(\eta^*) + \mathbb{E} [e^{-r\eta} (K(\eta^*) - K(\eta))] \\ &\leq F(\eta^*). \end{aligned}$$

□

Anmerkung. Für den Fall $\eta > \eta^*$ kann ohne weitere Kenntnis der Funktion K keine Aussage getroffen werden.

3.5.2 Stochastischer Auslandsmarkt

In diesem Abschnitt wollen wir eine kurze Analyse des Falles durchführen, dass auch auf dem Auslandsmarkt ein Unsicherheitsfaktor auftritt, d.h. die Auszahlung in Fremdwährung ist nicht wie in den vorigen Abschnitten deterministisch und somit sicher gegeben, sondern ein stochastischer Prozess (π_t) . Wir untersuchen in den folgenden Unterabschnitten zunächst den Fall, dass die Unsicherheit auf dem Auslandsmarkt unabhängig von der im Wechselkurs ist. Im Abschnitt

3.5.2 betrachten wir dann eine vom Wechselkurs abhängige Unsicherheit auf dem Auslandsmarkt.

Stochastisch unabhängiger Auslandsmarkt

Für diesen Abschnitt treffen wir die folgenden Annahmen:

- Der Wechselkurs folgt weiterhin einer Geometrischen Brownschen Bewegung, d.h.

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t + \sigma_1 W_t^{(1)}\right).$$

- Die Auszahlungen auf dem Auslandsmarkt folgen nun auch einer Geometrischen Brownschen Bewegung, d.h.

$$\pi_t = \pi_0 \exp\left(\left(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t + \sigma_2 W_t^{(2)}\right).$$

- Die Prozesse (X_t) und (π_t) sind stochastisch unabhängig.
- Es gelte $r > \mu_1 + \mu_2$.

Dann gilt unter den Voraussetzungen und mit denselben Bezeichnungen wie in Abschnitt 3.3.2 für den erwarteten gesamten Betriebsgewinn

$$\begin{aligned} V_t^F &= \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)} X_s \pi_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{X_t \pi_t}{r - \mu_1 - \mu_2}. \end{aligned}$$

Also funktioniert die Bestimmung des Schattenprozesses nahezu analog zum Grundmodell - mit dem Unterschied, dass im letzten Schritt der Rechnung der Wiener-Hopf-Faktor des Prozesses (e^{Z_t}) mit

$$Z_t = \left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t + \sigma_1 W_t^{(1)} + \sigma_2 W_t^{(2)}$$

verwendet werden muss.

Stochastisch abhängiger Auslandsmarkt

Im Unterschied zum vorigen Abschnitt lassen wir nun den stochastischer Prozess (π_t) der die Auslandsauszahlungen beschreibt in diesem Teil stochastisch abhängig vom Wechselkurs (X_t) sein, d.h

- Der Wechselkurs folgt weiterhin einer Geometrischen Brownschen Bewegung, d.h.

$$X_t = X_0 \exp(\mu t + \sigma W_t).$$

- Die Auslandsauszahlungen sind durch eine gegebene Funktion f abhängig vom Wechselkurs, d.h.

$$\pi_t = f(X_t), \quad \text{z.B. linear: } \pi_t = a + bX_t.$$

Dann gilt unter den Voraussetzungen und mit denselben Bezeichnungen wie im Abschnitt 3.3.2 für den erwarteten gesamten Betriebsgewinn

$$\begin{aligned} V_t^F &= \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)} X_s \pi_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)} X_s f(X_s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Also lässt sich V_t^F nur nach geeigneter Wahl der Funktion f auf eine angenehme Form bringen. Jedoch wird dies selbst im scheinbar einfachen Fall eines linearen Zusammenhangs der Form $\pi_t = f(X_t) = a + bX_t$ äußerst kompliziert:

$$\begin{aligned} V_t^F &= \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)} X_s \pi_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)} X_s (a + bX_t) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{a}{r - \mu - \frac{\sigma^2}{2}} X_t + \frac{b}{r - 2\mu - 2\sigma^2} X_t^2. \end{aligned}$$

Zur geschlossenen Berechnung des Schattenprozesses benötigen wir also hier einen Ansatz für (ξ_t) mit

$$\frac{a}{r - \mu - \frac{\sigma^2}{2}} X_t + \frac{b}{r - 2\mu - 2\sigma^2} X_t^2 = \mathbb{E} \left[\int_t^\infty r e^{-rs} \sup_{t \leq \nu \leq s} \xi_\nu ds \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

was nicht einfach gelingt.

Wir können jedoch die Lösung mit ähnlichen Überlegungen wie in Abschnitt 3.4.2 über eine Maßtransformation finden. Die Problemstellung ist hier

$$\mathbb{E} [e^{-rt} h(Y_t)] \rightarrow \max_t$$

mit

$$h(y) = c_1 e^y + c_2 e^{2y} - K. \quad (3.5.2)$$

Der Beibel-Lerche Ansatz (vgl. Theorem 3.4.4) funktioniert also problemlos und liefert nach einigen kleinen Rechnungen die Lösung, welche in folgender Proposition angegeben wird:

Proposition 3.5.4. Unter den üblichen Voraussetzungen ist der optimale Einstiegszeitpunkt im obigen Modell gegeben durch

$$X^* = \frac{c_1 - \beta_1 c_1 + \sqrt{\beta_1^2 c_1^2 - 2\beta_1 c_1^2 + c_1^2 + 4\beta_1^2 K c_2 - 8\beta_1 K c_2}}{2(\beta_1 c_2 - 2c_2)}.$$

Beweis. Die Aussage folgt nach Theorem 3.4.4 durch Maximierung der Funktion

$$f(y) = e^{-\beta_1 y} h(y)$$

mit h aus (3.5.2). □

Kapitel 4

Dynamische Spiele

In diesem Kapitel soll nun nicht mehr geplant werden, wann die Unternehmen (die Spieler) eine bestimmte Investition optimalerweise tätigen sollten, sondern wie viel sie zu jedem Zeitpunkt t in ein bereits bestehendes Projekt investieren. Auch hier sehen sich die Unternehmen natürlich einem unsicheren Markt gegenüber, wobei die Unsicherheit wieder durch einen multiplikativen Effekt auftritt, was - zumindest in den ersten Abschnitten - wiederum so interpretiert werden kann, dass in ein ausländisches Projekt auf einem deterministischen Markt investiert wird und die Unsicherheit der Wechselkurs ist. Investitionen erhöhen dabei den eigenen Gewinn und schmälern den des Konkurrenten. Ebenso können die anfallenden Kosten der Investitionen von den Investitionsraten bzw. -mengen beider Spieler abhängen.

Wir interpretieren im Folgenden die Investitionen als Erhöhung des Technologiestandes der Unternehmen. Im nächsten Abschnitt gehen wir zunächst auf die allgemeine Problemstellung in diesem Fall ein und stellen daraufhin das mathematische Modell des Duopolspiels in allgemeiner Art und Weise auf. Dann gehen wir kurz auf die allgemeine Lösungstechnik ein. Im Hauptteil dieses Kapitels versuchen wir daraufhin, anhand einiger interessanter Spezialfälle konkrete Lösungen für die optimalen Strategien im Nash Gleichgewicht zu berechnen.

4.1 Problemstellung

Wir betrachten nun also das folgende Problem: zwei Unternehmen haben die Möglichkeit, zeitstetig ihren eigenen Technologiestand zu erhöhen. Bereits getätigte Investitionen können nicht rückgängig gemacht bzw. verkauft werden. Es handelt sich also hierbei um ein irreversibles Investitionsspiel.

Der Profit des Unternehmens ist zum einen abhängig von seinem eigenen Technologiestand - je höher dieser ist, umso höher sind seine Profite - als auch von dem des Konkurrenten, welcher sich negativ auf die eigenen Profite auswirkt.

Bestehende Technologie wird mit konstanter Rate exponentiell abgeschrieben, wobei die Unternehmen unterschiedliche Abschreibungsraten haben können. Zusätzliche Technologieinvestition verursacht variable Kosten, die sowohl von der Höhe der eigenen Investition als auch von der des Konkurrenten bestimmt werden.

Des Weiteren herrscht auf dem Markt Unsicherheit, was durch einen stochastischen Einfluss (z.B. den Wechselkurs) ausgedrückt wird. Dieser Unsicherheitsfaktor ist für beide Spieler derselbe und kann von ihnen nicht beeinflusst werden. Wir modellieren diesen Faktor erneut als Geometrische Brownsche Bewegung, der risikofreie Zins sei konstant über die Zeit.

Da in vielen Problemstellungen dieser Art der Endzeitpunkt entweder sehr weit in der Zukunft liegt oder sogar völlig unbekannt bzw. nicht spezifiziert ist, betrachten wir - [Doc00] und [Yeu06] folgend - ein Modell mit unendlichem Zeithorizont.

Gesucht sind Investitionsratenpläne $\eta^* = (\eta_t^*)$ und $\theta^* = (\theta_t^*)$ - also zu jeder Zeit t ein Paar von Investitionsraten (η_t^*, θ_t^*) - für die die Eigenschaft des Nash Gleichgewichts gilt, d.h. dass es für keinen der Spieler optimal ist, von seiner Strategie abzuweichen, solange der andere Spieler dies nicht tut. Investitionsrate bedeutet dabei, dass die Unternehmen im infinitesimalen Zeitintervall dt genau $\eta_t dt$ bzw. $\theta_t dt$ Einheiten in neue Technologie investieren.

Im folgenden Abschnitt geben wir nun die mathematischen Rahmenbedingungen für Probleme solcher Art an.

4.2 Modellierung

Für das allgemeine Duopolmodell im Fall dynamischer irreversibler Investitionen sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ gegeben, der die üblichen Voraussetzungen erfülle sowie eine auf diesem definierte eindimensionale Brownsche Bewegung (W_t) .

Die zulässigen Strategien in diesem Spiel sind Prozesse $\eta = (\eta_t)$ (für Spieler 1) und $\theta = (\theta_t)$ (für Spieler 2), wobei $\eta_t : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ und $\theta_t : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$ und die Prozesse messbar bzgl. $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ und adaptiert zur Filtration (\mathcal{F}_t) seien. Die Wertebereiche \mathcal{U} und \mathcal{V} sind entweder \mathbb{R} (bei reversiblen Investitionen), \mathbb{R}_+ (bei irreversiblen Investitionen) oder kompakte Intervalle. Die Menge der zulässigen Strategien von Spieler i bezeichnen wir mit \mathcal{A}_i .

Für den Zustandsprozess (Y_t) mit $Y_t^{\eta, \theta} = (X_t, C_t^\eta, D_t^\theta)$, bestehend aus stochasti-

schem Einfluss und den Technologieständen beider Spieler, gelte

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 \in \mathbb{R}_+ \quad (4.2.1)$$

$$dC_t^\eta = (\eta_t - \delta_1 C_t^\eta) dt, \quad C_0^\eta \in \mathbb{R}_+ \quad (4.2.2)$$

$$dD_t^\theta = (\theta_t - \delta_2 D_t^\theta) dt, \quad D_0^\theta \in \mathbb{R}_+ \quad (4.2.3)$$

mit den Abschreibungsraten $\delta_i > 0$ der Volatilität $\sigma > 0$ und dem Drift $\mu \in \mathbb{R}$. Zusätzlich gelte für den risikolosen Zins $r > \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$. Es ist dabei zu beachten, dass jeder Spieler nur genau seinen eigenen Technologiestand beeinflussen kann, nicht jedoch den des anderen oder den stochastischen Einfluss (X_t).

Die Auszahlungsfunktionen des Spiels sind

$$J_1(y; \eta, \theta) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} G_1 \left(Y_t^{\eta, \theta}; \eta_t, \theta_t \right) dt \middle| Y_0 = y \right] \quad (4.2.4)$$

$$J_2(y; \eta, \theta) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} G_2 \left(Y_t^{\eta, \theta}; \eta_t, \theta_t \right) dt \middle| Y_0 = y \right] \quad (4.2.5)$$

mit dem Anfangszustand $y = (x, c, d) = (X_0, C_0, D_0) \in \mathbb{R}_+^3$ und zunächst nicht weiter spezifizierten Gewinnfunktionen G_1 und G_2 , wobei diese ökonomisch sinnvoll gewählt und von der Art seien, dass die Integrale existieren und endliche Werte annehmen.

Gesucht ist ein Nash Gleichgewicht, d.h. ein Paar von Prozessen $(\eta^*, \theta^*) = (\eta_t^*, \theta_t^*)$, so dass für jeden Zustand $y = (x, c, d)$ gilt:

$$\begin{aligned} J_1(y; \eta^*, \theta^*) &\geq J_1(y; \eta, \theta^*) \quad \forall \eta \in \mathcal{A}_1 \quad \text{und} \\ J_2(y; \eta^*, \theta^*) &\geq J_2(y; \eta^*, \theta) \quad \forall \theta \in \mathcal{A}_2. \end{aligned}$$

Wir wollen im folgenden Abschnitt versuchen, dieses Spiel $\Gamma = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, J_1, J_2)$ zunächst allgemein mit den Methoden der klassischen Theorie stochastischer Differentialspiele (vgl. [Yeu06], Kap. 2) zu untersuchen und danach anhand einiger Spezialfälle - d.h. unter Angabe spezieller Gewinnfunktionen - die Gleichgewichtslösungen konkret zu berechnen.

4.3 Analyse

Um dieses Vorhaben zu realisieren, gehen wir einen ähnlichen Weg wie im Ein-Personen Spiel, d.h. in der stochastischen Kontrolltheorie. Dies geschieht über die so genannte Hamilton Jacobi Bellman Gleichung bzw. das Verifikationstheorem,

welches nun kurz erläutert wird.

4.3.1 Lösung im Monopolspiel

Um nur kurz aufzuzeigen, wie im Falle eines Monopolspiels die optimale Strategie für irreversible Investitionsprobleme gefunden werden kann, sei das komplette Setting von Abschnitt 4.2 gegeben, mit dem Unterschied, dass wir nur einen Spieler betrachten und dass dessen Zielfunktion nur von seiner eigenen Entscheidung abhängt. Wir betrachten also das Problem

$$(MDI) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(y; \eta) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} G(Y_t^\eta, \eta_t) dt \mid Y_0 = y \right] \rightarrow \max_{\eta \in \mathcal{A}} \\ Y_t^\eta = (X_t, C_t^\eta), \quad Y_0 \in \mathbb{R}_+^2 \\ dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 \in \mathbb{R}_+ \\ dC_t^\eta = (\eta_t - \delta C_t^\eta) dt, \quad C_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \mathcal{A} = \{ \eta = (\eta_t) \mid \eta_t : \Omega \rightarrow \mathcal{U} \} \end{array} \right.$$

mit den Voraussetzungen an die Prozesse, Parameter und Funktionen wie in Abschnitt 4.2. Mit der Definition der Hamilton-Funktion H als

$$H(y, u, q_1, q_2, q_3) := G(y, u) + (u - \delta c)q_1 + \mu x q_2 + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 q_3$$

gilt dann das folgende allgemeine Verifikationstheorem für die optimale Strategie η^* (vgl. auch [Kor01] oder [Pha05]):

Theorem 4.3.1. Existiert eine Funktion $V : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V \in C^{2,1}$ und

$$|V(y)| \leq k \cdot (1 + |y|^n)$$

für gewisse Konstanten $k \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ sowie eine Funktion $\tilde{u} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathcal{U}$ mit

$$\begin{aligned} rV(y) &= \sup_{u \in \mathcal{U}} H(y, u, V_c(y), V_x(y), V_{xx}(y)) \\ &= H(y, \tilde{u}(y), V_c(y), V_x(y), V_{xx}(y)) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

für alle $y = (x, c) \in \mathbb{R}_+^2$, so ist

$$\eta_t^* := \tilde{u}(Y_t^*)$$

eine optimale Lösung von (MDI), wobei (Y_t^*) der Zustandsprozess unter Verwendung der Strategie η^* ist. Es gilt

$$V(y) = J(y; \eta^*) = \sup_{\eta \in \mathcal{A}} J(y; \eta). \quad (4.3.2)$$

Die Funktion V nennen wir die Wertfunktion des Spielers.

Beweis. Es seien Funktionen V und \tilde{v} mit obigen Voraussetzungen gegeben, die die Gleichung (4.3.1) erfüllen.

Dann können wir uns den Prozess $(Y_t^*) = (X_t^*, C_t^*)$ definieren als Lösung der stochastischen Differentialgleichungen für $(Y_t) = (X_t, C_t)$ aus (MDI), wobei wir in den Gleichungen jeweils η_t durch $\tilde{u}(Y_t^*)$ ersetzen.

Dann folgt mit Hilfe der Itô Formel in Integralform (vgl. z.B. [Kor01] oder [Dec05]), dass

$$\begin{aligned} e^{-rt}V(Y_t^*) &= V(Y_0^*) + \int_0^t e^{-rs} (\mu X_s^* V_x(Y_s^*) + (\tilde{u}(Y_s^*) - \delta C_s^*) V_c(Y_s^*) \\ &\quad - rV(Y_s^*) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^{*2} V_{xx}(Y_s^*)) ds \\ &\quad + \int_0^t e^{-rs} \sigma X_s^* V_x(Y_s^*) dW_s. \end{aligned}$$

Da die V die HJB Gleichung erfüllt und

$$\tilde{u}(y) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} H(y, u, V_c(y), V_x(y), V_{xx}(y)) \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^2,$$

gilt also

$$e^{-rt}V(Y_t^*) - V(Y_0^*) = - \int_0^t e^{-rs} G(Y_s^*, \tilde{u}(Y_s^*)) ds + \int_0^t e^{-rs} \sigma X_s^* V_x(Y_s^*) dW_s$$

und somit

$$\mathbb{E} [e^{-rt}V(Y_t^*) - V(y) \mid Y_0^* = y] = -\mathbb{E} \left[\int_0^t e^{-rs} G(Y_s^*, \tilde{u}(Y_s^*)) ds \mid Y_0^* = y \right],$$

da das stochastische Integral auf Grund der Wachstumsbedingung an V ein Martingal ist.

Also folgt nach Grenzübergang $t \rightarrow \infty$

$$V(y) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rs} G(Y_s^*, \tilde{u}(Y_s^*)) ds \mid Y_0 = y \right]$$

und somit Gleichung (4.3.2) und die Optimalität von $\eta_t^* := \tilde{u}(Y_t^*)$. \square

Um nun mit Hilfe dieses Verifikationstheorems eine notwendige Bedingung an die

optimale Strategie im Ein-Personen Investitionsspiel herzuleiten, definieren wir die Gewinnfunktion G als $G(y, u) := \pi(y) - \varphi(u)$ mit der Profitfunktion π und der Kostenfunktion φ .

Die Profitfunktion sei monoton steigend im stochastischen Einfluss x und im Technologiestand c , die Kostenfunktion sei streng monoton steigend in der Investitionsrate u und konvex.

In diesem Fall kann die optimale Strategie mit dem folgenden Korollar bestimmt werden:

Korollar 4.3.2. Im Problem (MDI) sei $G(y, u) = \pi(y) - \varphi(u)$. Existiert eine Funktion $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+^2)$ mit den Voraussetzungen von Theorem 4.3.1 und (4.3.1), so erfüllt der Kandidat $\tilde{u}(y)$ für die optimale Strategie die folgende Bedingung:

$$\varphi'(\tilde{u}(y)) = V_c(y) \quad (4.3.3)$$

für alle $y = (x, c) \in \mathbb{R}_+^2$.

Beweis. Mit $G(y, u) = \pi(y) - \varphi(u)$ folgt, dass

$$\frac{\partial H}{\partial u}(y, u, V_c, V_x, V_{xx}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u) + V_c(y)$$

Nullsetzen liefert Bedingung (4.3.3).

Es handelt sich sicher um ein Maximum, da

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(y, u, V_c, V_x, V_{xx}) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U},$$

weil φ konvex ist. □

Im folgenden Abschnitt wollen wir nun ein Verifikationstheorem für das allgemeine dynamische irreversible Investitionsspiel im Duopol angeben, wobei zu beachten ist, dass wir die Konkurrenzsituation mit einfließen lassen müssen. Aus dem Begriff der Hamilton Jacobi Bellman Gleichung wird deshalb der Begriff der Hamilton Jacobi Isaacs Gleichungen, bei denen es sich - wie der Name schon sagt - um mehrere (im Duopol genau zwei) Gleichungen handelt.

4.3.2 Lösung im Duopolspiel

Sei nun also wieder die Problemstellung aus 4.1 bzw. das Modell aus 4.2 mit zwei Spielern gegeben. Mit der Definition der Hamilton-Funktionen

$$\begin{aligned} H_1(y, u, v, q_1, q_2, q_3, q_4) &:= G_1(y, u, v) + (u - \delta_1 c)q_1 + (v - \delta_2 d)q_2 \\ &\quad + \mu x q_3 + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 q_4 \\ H_2(y, u, v, q_1, q_2, q_3, q_4) &:= G_2(y, u, v) + (v - \delta_2 d)q_2 + (u - \delta_1 c)q_1 \\ &\quad + \mu x q_3 + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 q_4 \end{aligned}$$

liefert dann das folgende Verifikationstheorem für Differentialspiele den zentralen Zusammenhang zwischen den Hamilton Jacobi Isaacs Gleichungen und dem Nash Gleichgewicht (η^*, θ^*) .

Theorem 4.3.3. Existieren Funktionen $U, V : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U, V \in C^{2,1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ und

$$|f(y)| \leq k \cdot (1 + |y|^n), \quad (f = U, V)$$

für gewisse Konstanten $k \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ sowie Funktionen $\tilde{u} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathcal{U}$ und $\tilde{v} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathcal{V}$ mit

$$\begin{aligned} rU(y) &= \sup_{u \in \mathcal{U}} H_1(y, u, \tilde{v}(y), U_c(y), U_d(y), U_x(y), U_{xx}(y)) \\ &= H_1(y, \tilde{u}(y), \tilde{v}(y), U_c(y), U_d(y), U_x(y), U_{xx}(y)) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

und

$$\begin{aligned} rV(y) &= \sup_{v \in \mathcal{V}} H_2(y, \tilde{u}(y), v, V_c(y), V_d(y), V_x(y), V_{xx}(y)) \\ &= H_2(y, \tilde{u}(y), \tilde{v}(y), V_c(y), V_d(y), V_x(y), V_{xx}(y)), \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

so ist $(\eta^*, \theta^*) = (\eta_t^*, \theta_t^*)$ mit

$$\begin{aligned} \eta_t^* &:= \tilde{u}(Y_t^*) \\ \theta_t^* &:= \tilde{v}(Y_t^*) \end{aligned}$$

ein Nash Gleichgewicht des Spiels Γ , wobei $Y_t^* = (X_t, C_t^*, D_t^*)$ der Zustandsprozess unter Verwendung der Strategien η^* und θ^* ist. Es gilt

$$\begin{aligned} U(y) &= J_1(y; \eta^*, \theta^*) = \sup_{\eta \in \mathcal{A}_1} J_1(y; \eta, \theta^*) \\ V(y) &= J_2(y; \eta^*, \theta^*) = \sup_{\theta \in \mathcal{A}_2} J_2(y; \eta^*, \theta). \end{aligned}$$

Die Funktionen U und V nennen wir Wertfunktionen der Spieler.

Beweis. Es seien Funktionen $U, V, \tilde{u}, \tilde{v}$ mit obigen Voraussetzungen gegeben, die die Gleichungen (4.3.4) und (4.3.5) erfüllen.

Dann können wir den Prozess (Y_t^*) als Lösung der stochastischen Differentialgleichungen (4.2.1) - (4.2.3) definieren, wobei wir in den Gleichungen jeweils η_t durch $\tilde{u}(Y_t^*)$ und θ_t durch $\tilde{v}(Y_t^*)$ ersetzen und definieren (η_t^*, θ_t^*) mit

$$\begin{aligned}\eta_t^* &:= \tilde{u}(Y_t^*) \\ \theta_t^* &:= \tilde{v}(Y_t^*).\end{aligned}$$

Fixieren wir nun für Spieler 2 die Strategie θ^* , so befinden wir uns in einem Ein-Personen-Spiel, in dem Spieler 1 seine Auszahlungsfunktion über die zulässigen Strategien $\eta \in \mathcal{A}_1$ maximiert, d.h.

$$J_1(y; \eta, \theta^*) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} G_1(Y_t; \eta_t, \theta_t^*) dt \mid Y_0 = y \right] \rightarrow \max_{\eta \in \mathcal{A}_1}.$$

Die Lösung dieses Problems kann durch Theorem 4.3.1 - dessen Voraussetzungen erfüllt sind - bestimmt werden zu

$$\eta_t^* = \tilde{u}(Y_t^*)$$

mit

$$\tilde{u}(y) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} H_1(y, u, \tilde{v}(y), U_c(y), U_d(y), U_x(y), U_{xx}(y)).$$

Also gilt:

$$J_1(y; \eta^*, \theta^*) \geq J_1(y; \eta, \theta^*) \quad \forall \eta \in \mathcal{A}_1. \quad (4.3.6)$$

Auf analoge Art und Weise bestimmen wir unter der fixierten Strategie η^* von Spieler 1 die optimale Strategie von Spieler 2 als

$$\theta_t^* = \tilde{v}(Y_t^*)$$

mit

$$\tilde{v}(y) = \arg \max_{v \in \mathcal{U}} H_2(y, \tilde{u}(y), v, U_c(y), U_d(y), U_x(y), U_{xx}(y)).$$

Somit gilt:

$$J_2(y; \eta^*, \theta^*) \geq J_2(y; \eta^*, \theta) \quad \forall \theta \in \mathcal{A}_2. \quad (4.3.7)$$

Die Ungleichungen (4.3.6) und (4.3.7) sind nun gerade die Bedingungen für ein Nash Gleichgewicht in (η^*, θ^*) . \square

Wir möchten nun aus diesem Theorem eine notwendige Bedingung für das Nash Gleichgewicht in unserem Investitionsspiel herleiten. Hierzu seien die Funktionen

$$G_1(y, u, v) = \pi_1(y) - \varphi_1(u, v) \quad (4.3.8)$$

$$G_2(y, u, v) = \pi_2(y) - \varphi_2(u, v), \quad (4.3.9)$$

wobei π_i die operative Profitfunktion von Spieler i und φ_i seine Kostenfunktion ist ($i = 1, 2$).

Für die operative Profitfunktionen $\pi_i : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gelte, dass sie monoton steigend im stochastischen Einfluss und in der eigenen Technologie sowie monoton fallend im Technologiestand des Gegners sind.

Die Kostenfunktionen $\varphi_i : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ seien streng monoton steigend in der eigenen Investitionsrate und konvex.

Dann erhalten wir die folgende Aussage:

Korollar 4.3.4. Existieren Funktionen $U, V \in C^{2,1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ mit den Voraussetzungen von Theorem 4.3.3 sowie (4.3.4) und (4.3.5), so erfüllen die Kandidaten $\tilde{u}(y)$ und $\tilde{v}(y)$ im Nash Gleichgewicht die folgende Bedingung:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\tilde{u}(y), \tilde{v}(y)) = U_c(y) \quad (4.3.10)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(\tilde{u}(y), \tilde{v}(y)) = V_d(y). \quad (4.3.11)$$

Beweis. Mit $G_1(y, u, v) = \pi_1(y) - \varphi_1(u, v)$ folgt, dass

$$\frac{\partial H_1}{\partial u}(y, u, \tilde{v}(y), U_c(y), U_d(y), U_x(y), U_{xx}(y)) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, \tilde{v}(y)) + U_c(y).$$

Nullsetzen liefert Bedingung (4.3.10).

Es handelt sich um ein Maximum, da

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial u^2}(y, u, \tilde{v}(y), U_c(y), U_d(y), U_x(y), U_{xx}(y)) = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2}(u, \tilde{v}(y)) \leq 0,$$

weil φ_1 konvex ist.

Eine analoge Rechnung für Spieler 2 liefert die Bedingung (4.3.11). \square

4.4 Nash Gleichgewichte

In den folgenden Abschnitten werden wir nun konkrete Nash Gleichgewichte in einigen Spezialfällen bestimmen, d.h. wir geben die Funktionen φ_i und π_i in den

Funktionen G_i aus (4.3.8) und (4.3.9) an. Wir untersuchen zunächst einen Fall, in dem die Spieler quadratischen Kostenfunktionen gegenüberstehen. Im darauf folgenden Abschnitt lassen wir den quadratischen Parameter verschwinden und betrachten lineare Kostenfunktionen, sowohl kombiniert mit linearen als auch mit HARA-Profitfunktionen.

4.4.1 Quadratische Kostenfunktionen

In diesem Abschnitt bestimmen wir das Nash Gleichgewicht für den Fall, dass die Funktionen G_i gegeben sind durch

$$G_i(y, u, v) = \pi_i(y) - \varphi_i(u, v)$$

mit

$$\varphi_1(u, v) = (p + (u + v)\rho)u \quad (4.4.1)$$

$$\varphi_2(u, v) = (p + (u + v)\rho)v \quad (4.4.2)$$

und den zunächst noch nicht weiter spezifizierten Profitfunktionen $\pi_i : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Dies kann ökonomisch wie folgt interpretiert werden: die Kosten für die gesamte Technologieerweiterung eines Spielers setzt sich zusammen aus einem Fixanteil $p \in \mathbb{R}_+$ und einem variablen Anteil, der sich linear mit Faktor $\rho \in \mathbb{R}_+$ in der Gesamtmenge der Technologieerweiterung von beiden Spielern entwickelt.

Demnach ist, Korollar 4.3.4 folgend, der Kandidat für das Nash Gleichgewicht gegeben als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\tilde{u}(y) = \left(\frac{U_c(y) - p - \tilde{v}(y)\rho}{2\rho} \right)^+ \quad (4.4.3)$$

$$\tilde{v}(y) = \left(\frac{V_d(y) - p - \tilde{u}(y)\rho}{2\rho} \right)^+ \quad (4.4.4)$$

mit beliebigem aber festem $y = (x, c, d) \in \mathbb{R}_+^3$.

Wir haben es also hier mit so genannten *singulären* Steuerungen zu tun, d.h. die im Sinne des Nash Gleichgewichts optimalen Strategien werden an einer unteren Schranke „abgeschnitten“. Sie könnten also zu einem potentiellen Knick in den Wertfunktionen führen, womit die Voraussetzungen von Theorem 4.3.3 missachtet wären.

Dieses Problem versuchen wir durch die Aufspaltung der Wertfunktion in verschiedene Regimes zu lösen, wobei sich die Art und Anzahl der Regimes je nach Art des Spiels ändert, was dann in den jeweiligen Abschnitten erläutert wird. Die

Glattheit der Wertfunktion bei Wechsel der Regimes wird dann durch die später erläuterten *value matching*, *smooth pasting* und *high contact* Bedingungen (vgl. auch [Dix94], [Dum91] oder [Sur07]) erreicht.

Um jedoch zunächst die Vorgehensweise in stochastischen Differentialspielen genauer zu durchleuchten, beginnen wir die Spezialfallanalyse im Duopolspiel damit, dass wir ein reversibles Investitionsspiel betrachten, d.h. die Unternehmen können ihre Technologie zum gleichen Preis verkaufen, zu dem sie sie auch erweitern können. Das bedeutet, dass die Investitionsraten η_t bzw. θ_t auch negative Werte annehmen dürfen. Dadurch sind die Kandidaten aus (4.4.3) und (4.4.4) nicht mehr singulär.

Nach dem kurzen Exkurs zu reversiblen Spielen werden wir dann versuchen, die dort gefundenen Resultate auf das irreversible Investitionsspiel anzuwenden.

Lineare Profitfunktionen

In diesem Abschnitt untersuchen wir Spiele mit linearen Profitfunktionen, d.h.

$$\pi_1(y) = \pi_1(x, c, d) = x \cdot (m + a_1c - b_1d) \quad (4.4.5)$$

$$\pi_2(y) = \pi_2(x, c, d) = x \cdot (m + a_2d - b_2c) \quad (4.4.6)$$

mit $m, a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$. Diese Funktionen erfüllen die oben erläuterten Voraussetzungen.

Eine ökonomische Interpretation für diese Art von Profitfunktionen ist es, Technologieinvestitionen auf einem deterministischen Auslandsmarkt zu betrachten; der Unsicherheitsfaktor ist der Wechselkurs. Auf dem Auslandsmarkt erhalten die Unternehmen Auszahlungen, die positiv linear in der eigenen und negativ linear in der gegnerischen Technologie sind.

Reversible Investitionen

Im Falle des reversiblen Investitionsspiels gilt

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathbb{R}.$$

Die Auszahlungsfunktionen und der Zustandsprozess sind dieselben wie im allgemeinen Spiel und damit durch die Gleichungen (4.2.1) - (4.2.5) gegeben.

Die Kostenfunktionen seien nach (4.4.1) und (4.4.2) gegeben, die Profitfunktionen wählen wir linear nach (4.4.5) und (4.4.6).

Da die Suprema über die gesamten reellen Zahlen genommen werden, entfällt hier bei den Kandidaten für das Nash Gleichgewicht aus (4.4.3) und (4.4.4) die Beschränkung auf den positiven Teil. Das Problem der Singularität ist also nicht mehr vorhanden und wir erhalten das folgende Theorem für die Wertfunktionen und das Nash Gleichgewicht im reversiblen Investitionsspiel mit quadratischen Kosten- und linearen Profitfunktionen:

Theorem 4.4.1. In diesem Spiel gilt für die optimalen Wertfunktionen

$$\begin{aligned} U(y) &= \frac{a_1xc}{r + \delta_1 - \mu} - \frac{b_1xd}{r + \delta_2 - \mu} + g_1(x) \\ V(y) &= \frac{a_2xd}{r + \delta_2 - \mu} - \frac{b_2xc}{r + \delta_1 - \mu} + g_2(x) \end{aligned}$$

mit $g_i \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Das Nash Gleichgewicht hat die Form $(\eta^*, \theta^*) = (\eta_t^*, \theta_t^*)$ mit

$$\begin{aligned} \eta_t^* = \eta_t^*(X_t) &= \frac{1}{3\rho} \cdot \left(\frac{2a_1X_t}{r + \delta_1 - \mu} - p - \frac{a_2X_t}{r + \delta_2 - \mu} \right) \\ \theta_t^* = \theta_t^*(X_t) &= \frac{1}{3\rho} \cdot \left(\frac{2a_2X_t}{r + \delta_2 - \mu} - p - \frac{a_1X_t}{r + \delta_1 - \mu} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Aus Korollar 4.3.4 folgt, dass die Kandidaten für die Strategien im Nash Gleichgewicht gegeben sind als Lösung $(\tilde{u}(y), \tilde{v}(y))$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y) &= \frac{U_c(y) - p - \tilde{v}(y)\rho}{2\rho} \\ \tilde{v}(y) &= \frac{V_d(y) - p - \tilde{u}(y)\rho}{2\rho} \end{aligned}$$

mit festem $y = (x, c, d) \in \mathbb{R}_+^3$.

Dieses LGS hat als eindeutige Lösung

$$\tilde{u}(y) = \frac{2U_c(y) - p - V_d(y)}{3\rho} \quad (4.4.7)$$

$$\tilde{v}(y) = \frac{2V_d(y) - p - U_c(y)}{3\rho}. \quad (4.4.8)$$

Wählen wir nun als Ansatz

$$\begin{aligned} U(y) &= A_1xc + B_1xd + g_1(x) \\ V(y) &= A_2xd + B_2xc + g_2(x), \end{aligned}$$

so sind die partiellen Ableitungen gegeben durch

$$\begin{aligned}
U_c(y) &= A_1x & V_c(y) &= B_2x \\
U_d(y) &= B_1x & V_d(y) &= A_2x \\
U_x(y) &= A_1c + B_1d + g'_1(x) & V_x(y) &= B_2c + A_2d + g'_2(x) \\
U_{xx}(y) &= g''_1(x) & V_{xx}(y) &= g''_2(x).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch Einsetzen der gewählten Kosten- und Profitfunktionen, dieser Ableitungen und der Kandidaten (4.4.7) sowie (4.4.8) für das Nash Gleichgewicht in die Hamilton Jacobi Isaacs Gleichungen (4.3.4) und (4.3.5) durch Umstellen

$$\begin{aligned}
rA_1xc &= a_1xc - \delta_1A_1xc + \mu A_1xc \\
+rB_1xd &+ b_1xd - \delta_2B_1xd + \mu B_1xd \\
+rg_1(x) &+ \mu xg'_1(x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2g''_1(x) + \sum_{j=0}^2 k_j^{(1)}x^j \quad (4.4.9)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
rB_2xc &= b_2xc - \delta_1B_2xc + \mu B_2xc \\
+rA_2xd &+ a_2xd - \delta_2A_2xd + \mu A_2xd \\
+rg_2(x) &+ \mu xg'_1(x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2g''_1(x) + \sum_{j=0}^2 k_j^{(2)}x^j \quad (4.4.10)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
k_0^{(i)} &= \frac{p^2}{9\rho} \\
k_1^{(i)} &= m + \frac{2A_jp - 4A_i p - 3B_i p}{9\rho} \\
k_2^{(i)} &= \frac{4A_i^2 - 4A_iA_j + A_j^2 - 3A_iB_i + 6A_jB_i}{9\rho}
\end{aligned}$$

Da diese DGLn für alle zulässigen c und d gelten müssen, dürfen wir sie jeweils auf beiden Seiten nach c bzw. d ableiten und erhalten die Konstanten A_i und B_i als

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{a_1}{r + \delta_1 - \mu} & B_1 &= -\frac{b_1}{r + \delta_2 - \mu} \\
A_2 &= \frac{a_2}{r + \delta_2 - \mu} & B_2 &= -\frac{b_2}{r + \delta_1 - \mu}.
\end{aligned}$$

Übrig bleiben gewöhnliche Differentialgleichungen in x , welche die Form

$$rg_i(x) = \mu x g_i'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 g_i''(x) + \sum_{j=0}^2 k_j^{(i)} x^j$$

haben. Diese DGLn sind eine leichte Abwandlung der zentralen Differentialgleichung (vgl. Anhang A.2) und haben die allgemeinen Lösungen

$$g_i(x) = H_1^{(i)} x^{\beta_1} + H_2^{(i)} x^{\beta_2} - \sum_{j=0}^2 \frac{k_j^{(i)} x^j}{\psi(j)}$$

mit der zentralen quadratischen Funktion ψ und deren Nullstellen β_i (vgl. Anhang A.2).

Die freien Konstanten $H_j^{(i)}$ können wir wegen $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \stackrel{!}{=} 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \stackrel{!}{<} \infty$ null setzen.

Also gilt $g_i \in C^2(\mathbb{R}_+)$ und somit $U, V \in C^{2,1,1}(\mathbb{R}_+^3)$. Deshalb sind die Voraussetzungen des Verifikationstheorems erfüllt und es folgen die Behauptungen. \square

Wir möchten im Hinblick auf die Vergleichbarkeit mit den optimalen Strategien im irreversiblen Fall im folgenden Abschnitt und den optimalen Strategien im kooperativen Spiel (vgl. Kapitel 5) noch als Spezialfall die Lösung des symmetrischen Spiels angeben. Im symmetrischen Fall sind alle Parameter der Firmen identisch, d.h. $\delta = \delta_1 = \delta_2$, $a = a_1 = a_2$ und $b = b_1 = b_2$. Dann ergibt sich die folgende Aussage:

Korollar 4.4.2. Im symmetrischen Spiel mit reversiblen Investitionen gilt für die optimalen Wertfunktionen

$$\begin{aligned} U(y) &= \frac{axc - bxd}{r + \delta - \mu} + g(x) \\ V(y) &= \frac{axd - bxc}{r + \delta - \mu} + g(x) \end{aligned}$$

mit $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Das Nash Gleichgewicht hat die Form $(\eta^*, \theta^*) = (\eta_t^*, \theta_t^*)$ mit

$$\begin{aligned} \eta_t^* = \eta_t^*(X_t) &= \frac{1}{3\rho} \cdot \left(\frac{aX_t}{r + \delta - \mu} - p \right) \\ \theta_t^* = \theta_t^*(X_t) &= \frac{1}{3\rho} \cdot \left(\frac{aX_t}{r + \delta - \mu} - p \right). \end{aligned}$$

Irreversible Investitionen

Betrachten wir irreversibles Investment (d.h. $\eta_t, \theta_t \geq 0 \forall t$), so ist der Kandidat für das Nash Gleichgewicht in den Gleichungen (4.4.3) bzw. (4.4.4) gegeben, was bedeutet, dass wir mit singulären Steuerungen - und deshalb mit Regimes - arbeiten müssen. Um dieses Vorgehen an einem einfachen Beispiel zu erläutern, werfen wir zunächst einen Blick auf ein Monopolspiel im gleichen Setting.

Monopol

In diesem Abschnitt betrachten wir das Problem (MDI) aus 4.3.1 mit einer quadratischen Kosten- und linearen Profitfunktion, d.h.

$$G(x, c, u) = \pi(x, c) - \varphi(u)$$

mit

$$\begin{aligned} \pi(x, c) &= (m + ac)x \\ \varphi(u) &= pu + \rho u^2, \end{aligned}$$

wobei $m, a, p, \rho \in \mathbb{R}_+$.

Demnach ist - unter der Annahme, dass die Voraussetzungen an das Verifikationstheorem erfüllt sind - der Kandidat für die optimale Strategie gegeben durch Korollar 4.3.2:

$$\tilde{u}(x, c) = \left(\frac{V_c(x, c) - p}{2\rho} \right)^+ \quad \forall (x, c) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (4.4.11)$$

Gesucht ist also zum einen ein Gebiet \mathcal{D} , so dass $\tilde{u}(x, c) = 0 \forall (x, c) \notin \mathcal{D}$ und zum anderen die genaue Form von \tilde{u} , falls $(x, c) \in \mathcal{D}$, d.h. der Spieler investiert genau dann, wenn sich der Zustandsprozess in \mathcal{D} befindet.

Wir müssen dafür die Wertfunktion in zwei *Regimes* ("investieren" bzw. "nicht investieren") aufsplitten und beachten, dass die Wertfunktion in den Zuständen, in denen von einem Regime ins andere gewechselt wird, die nötigen Voraussetzungen erfüllt bleiben. Das bedeutet insbesondere, dass sie zweimal in der ersten und einmal in der zweiten Komponente differenzierbar sein muss.

In diesem Fall gilt glücklicherweise, dass ein $x^* \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass $\mathcal{D} = [x^*, \infty)$, was bedeutet, dass wir die Glattheit der Wertfunktion nur an einem kritischen Punkt x^* sicherstellen müssen.

Auskunft über die Form der Wertfunktion des Spielers und über seine optimale Strategie gibt das folgende Theorem:

Theorem 4.4.3. Im irreversiblen Investitionsproblem mit quadratischer Kosten- und linearer Profitfunktion gilt für die optimale Wertfunktion

$$V(x, c) = \frac{acx}{r + \delta - \mu} + g(x) \quad (4.4.12)$$

mit $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Die optimale Strategie des Spielers hat die Form

$$\eta_t^* = \eta_t^*(X_t) = \begin{cases} \frac{aX_t}{2\rho(\delta + r - \mu)} - \frac{p}{2\rho} & X_t \geq x^* \\ 0 & X_t < x^* \end{cases} \quad (4.4.13)$$

mit

$$x^* := \frac{(r + \delta - \mu)p}{a}. \quad (4.4.14)$$

Beweis. Durch Einsetzen der Kosten- und Profitfunktionen sowie dem Kandidaten aus (4.4.11) erhalten wir mit $y := (x, c)$ die HJB Gleichung

$$\begin{aligned} rV(y) &= (m + ac)x - \delta cV_c(y) + \mu xV_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx}(y) \\ &\quad + \left(\frac{(V_c(y) - p)^2}{4\rho} \right)^+. \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Wir müssen nun die Wertfunktion in zwei *Regimes* $i \in \{0, 1\}$ untersuchen, wobei der Spieler genau dann investiert, wenn er sich in Regime 1 befindet. Der Regimewechsel findet immer dann statt, wenn

$$\frac{(V_c(y) - p)^2}{4\rho} = 0$$

also wenn $V_c(y) = p$.

Wählen wir als Ansatz für die Wertfunktion

$$V(y) = \begin{cases} V^{(0)}(y) & V_c(y) < p \\ V^{(1)}(y) & V_c(y) \geq p \end{cases}$$

mit

$$V^{(i)}(y) = Axc + g^{(i)}(x) \quad (4.4.16)$$

mit $A \in \mathbb{R}$ und $g^{(i)} \in C^2(\mathbb{R}_+)$, so erhalten wir die partiellen Ableitungen von V

als

$$\begin{aligned} V_c^{(i)}(y) &= Ax \\ V_x^{(i)}(y) &= Ac + g_x^{(i)}(x) \\ V_{xx}^{(i)}(y) &= g_{xx}^{(i)}(x) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Ableitungen in die HJB Gleichung (4.4.15) erhalten wir

$$\begin{aligned} r(Axc + g^{(i)}(x)) &= x(m + ac) - \delta cAx + \mu x(Ac + g_x^{(i)}(x)) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 g_{xx}^{(i)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{(Ax - p)^2}{4\rho} \right)^+. \end{aligned}$$

Da diese Differentialgleichung für alle Werte c gelten muss, dürfen wir sie auf beiden Seiten nach c ableiten. Dies liefert

$$rAx = ax - \delta Ax + \mu xA$$

und somit die Konstante A als

$$A = \frac{a}{r + \delta - \mu}. \quad (4.4.17)$$

Also ist der Kandidat aus (4.4.11) gegeben durch

$$\tilde{u}(y) = \begin{cases} \frac{Ax - p}{2\rho} & x \geq x^* \\ 0 & x < x^* \end{cases} \quad (4.4.18)$$

mit dem Investitionsschwellenwert

$$x^* = \frac{p}{A}.$$

Einsetzen von A aus (4.4.17) liefert die Behauptung (4.4.14).

Es bleibt noch zu zeigen, dass eine Funktion $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$ mit

$$g(x) = \begin{cases} g^{(0)}(x) & Ax < p \\ g^{(1)}(x) & Ax \geq p \end{cases}$$

existiert, die die Gleichung (4.4.15) erfüllt, denn daraus folgt, dass die Funktion V aus Gleichung (4.4.16) dies ebenfalls tut und somit aus $C^{2,1}(\mathbb{R}_+^2)$ ist. Damit wäre mit Hilfe des Verifikationstheorems die Optimalität von \tilde{u} aus Gleichung (4.4.18) bewiesen.

Setzen wir (4.4.17) in (4.4.15) ein, so erhalten wir für g die folgende gewöhnliche

Differentialgleichung:

$$rg^{(i)}(x) = mx + \mu x g_x^{(i)}(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 g_{xx}^{(i)}(x) + \left(\frac{(Ax - p)^2}{4\rho} \right)^+.$$

Diese DGL kann in zwei separate DGLn in den beiden Regimes aufgeteilt werden, nämlich

$$rg^{(0)}(x) = mx + \mu x g_x^{(0)}(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 g_{xx}^{(0)}(x) \quad (4.4.19)$$

und

$$rg^{(1)}(x) = \mu x g_x^{(1)}(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 g_{xx}^{(1)}(x) + \sum_{j=0}^2 k_j x^j \quad (4.4.20)$$

mit

$$k_0 = \frac{p^2}{4\rho}, \quad k_1 = m - \frac{Ap}{2\rho} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{A^2}{4\rho}, \quad (4.4.21)$$

wobei die DGL (4.4.19) genau dann gilt, wenn der Spieler nicht investiert und die DGL (4.4.20) genau dann, wenn der Spieler investiert.

Die beiden DGLn haben die folgenden allgemeinen Lösungen (vgl. Abschnitt A.2):

$$g^{(0)}(x) = H_1^{(0)} x^{\beta_1} + H_2^{(0)} x^{\beta_2} - \frac{mx}{\psi(1)}$$

und

$$g^{(1)}(x) = H_1^{(1)} x^{\beta_1} + H_2^{(1)} x^{\beta_2} - \sum_{j=0}^2 \frac{k_j x^j}{\psi(j)}$$

wobei ψ die quadratische Funktion aus Abschnitt A.2 ist und β_1 bzw. β_2 deren positive bzw. negative Nullstelle.

Da $V(0, \cdot) \stackrel{!}{=} 0$, folgt, dass $H_2^{(0)} = 0$ gelten muss. Die anderen Konstanten werden durch die *value matching*, *smooth pasting* und *high contact* Bedingungen bestimmt, welche dafür sorgen, dass am Schwellenwert des Wechsels der Regimes x^* gilt, dass

$$\begin{aligned} g^{(0)}(x^*) &= g^{(1)}(x^*) \\ g_x^{(0)}(x^*) &= g_x^{(1)}(x^*) \\ g_{xx}^{(0)}(x^*) &= g_{xx}^{(1)}(x^*). \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Das aus (4.4.22) entstehende Gleichungssystem liefert die Konstanten $H_j^{(i)}$:

$$H_1^{(0)} = H_1, \quad H_1^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad H_2^{(1)} = H_2$$

mit

$$H_i = -x^{*1-\beta_i} \left(\frac{(m - k_1)(\beta_j - 1)}{(\beta_1 - \beta_2)\beta_i\psi(1)} + \frac{2k_2x^*(2 - \beta_j)}{(\beta_1 - \beta_2)\beta_i\psi(2)} \right). \quad (4.4.23)$$

Diese Wahl der freien Konstanten sichert also die Voraussetzung $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$. Somit folgt, dass $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+^2)$ und deshalb mit Hilfe des Verifikationstheorems die Behauptungen (4.4.12) und (4.4.13). \square

Duopol

Im Duopolfall ist das Regime-Splitting nicht analog zum Monopolfall durchzuführen, da zum einen je nach Art des Duopols (symmetrisch oder asymmetrisch) unterschiedlich viele Regimes betrachtet werden müssen und zum anderen im zweiten Fall die Differenzierbarkeit der Wertfunktion am Regimewechsel des Konkurrenten nicht gegeben sein muss, da die *smooth pasting* und *high contact* Eigenschaften dort i.A. nicht erfüllt werden können, weil der Spieler keinen Einfluss auf die Entscheidung seines Gegenüber hat. Dieses Problem kann jedoch durch eine natürliche Einschränkung des Definitionsbereiches der Wertfunktionen gelöst werden.

Im folgenden Abschnitt betrachten wir jedoch zunächst ein symmetrisches Duopol, in welchem dieses Problem noch nicht auftritt.

Symmetrisches Duopol

Sind die Firmen symmetrisch - sind also alle Parameter der Spieler dieselben - folgt aus den Bedingungen (4.3.10) und (4.3.11), dass der Schwellenwert für Investitionen für beide Spieler derselbe sein muss. Wir müssen die Wertfunktionen also nur in zwei Regimes aufsplitten - das Regime "nur ein Spieler investiert" entfällt. Damit erhalten wir das folgende Theorem:

Theorem 4.4.4. Im symmetrischen irreversiblen Investitionsspiel mit quadratischen Kosten- und linearen Profitfunktionen gilt für die optimalen Wertfunktionen

$$\begin{aligned} U(y) &= \frac{axc - bxd}{r + \delta - \mu} + g(x) \\ V(y) &= \frac{axd - bxc}{r + \delta - \mu} + g(x) \end{aligned}$$

mit $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Das Nash Gleichgewicht hat die Form $(\eta^*, \theta^*) = (\eta_t^*, \theta_t^*)$ mit

$$\eta_t^*(X_t) = \theta_t^*(X_t) = \begin{cases} \frac{1}{3\rho} \cdot \left(\frac{aX_t}{r + \delta - \mu} - p \right) & X_t \geq x^* \\ 0 & X_t < x^* \end{cases} \quad (4.4.24)$$

mit

$$x^* := \frac{(r + \delta - \mu)p}{a}. \quad (4.4.25)$$

Beweis. Der Beweis funktioniert im Wesentlichen analog zu dem von Theorem 4.4.1 bzw. Korollar 4.4.2 im reversiblen Fall mit dem entscheidenden Unterschied, dass wir - ähnlich wie beim Monopolspiel - zwei Regimes (“beide investieren” (Regime 1) und “keiner investiert” (Regime 0)) zu betrachten haben.

Zunächst müssen aufgrund der Irreversibilität die Suprema in den Hamilton Jacobi Isaacs Gleichungen nicht über \mathbb{R} sondern über \mathbb{R}_+ gebildet werden, was uns mit den gleichen Rechenschritten wie im Beweis von Theorem 4.4.1 die Kandidaten für das Nash Gleichgewicht liefert:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y) &= \left(\frac{2U_c(y) - p - V_d(y)}{3\rho} \right)^+ \\ \tilde{v}(y) &= \left(\frac{2V_d(y) - p - U_c(y)}{3\rho} \right)^+ \end{aligned}$$

für festes $y = (x, c, d) \in \mathbb{R}_+^3$.

Die Strategien sind genau dann null, wenn die Unternehmen nicht investieren - also für $X_t < x^*$ - wir uns also im Regime 0 befinden. Ist dies der Fall, so sind die Suprema in den HJI Gleichungen null und diese lauten somit

$$\begin{aligned} rU(y) &= x \cdot (m + ac - bd) - \delta c U_c(y) + \mu x U_x(y) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 U_{xx}(y) \\ &\quad + (\tilde{v}(y) - \delta d) U_d(y) \\ rV(y) &= x \cdot (m + ad - bc) - \delta d V_d(y) + \mu x V_x(y) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 V_{xx}(y) \\ &\quad + (\tilde{u}(y) - \delta c) V_c(y). \end{aligned}$$

Befinden wir uns in Regime 1, so nehmen die Suprema die gleichen Werte an wie im reversiblen Fall und somit bleiben auch die HJI Gleichungen dieselben (mit $a_i = a$, $b_i = b$ und $\delta_i = \delta$).

Wählen wir nun als Ansatz für die Wertfunktionen

$$\begin{aligned} U(y) &= Axc + Bxd + g(x) \\ V(y) &= Axd + Bxc + g(x) \end{aligned}$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) & x \geq x^* \\ g_1(x) & x < x^*, \end{cases}$$

so erhalten wir im Regime 0 die HJI Gleichungen

$$\begin{aligned} rAxc &= axc - \delta Axc + \mu Axc \\ +rBxd &+ bxd - \delta Bxd + \mu Bxd \\ +rg_0(x) &+ mx + \mu x g_0'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 g_0''(x) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} rBxc &= bxc - \delta Bxc + \mu Bxc \\ +rAxd &+ axd - \delta Axd + \mu Axd \\ +rg_0(x) &+ mx + \mu x g_0'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 g_0''(x) \end{aligned}$$

und im Regime 1 die Gleichungen (4.4.9) und (4.4.10) mit $a_i = a$, $b_i = b$, $\delta_i = \delta$ und $g_i = g_1$.

Wir können also erneut durch Ableiten nach c bzw. d die Konstanten A und B bestimmen:

$$A = \frac{a}{r + \delta - \mu} \quad B = -\frac{b}{r + \delta - \mu}.$$

Nun zur Bestimmung des Schwellenwertes. Die Unternehmen wechseln die Regimes (d.h. sie beginnen zu investieren) genau dann, wenn $U_c(y) = p$ bzw. $V_d(y) = p$; also wenn

$$Ax = \frac{ax}{r + \delta - \mu} = p.$$

Auflösen nach x liefert x^* .

Die Funktion g müssen wir nun noch wie oben an die Voraussetzung $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$ anpassen.

Es sei also die zentrale quadratische Funktion ψ sowie deren Nullstellen $\beta_1 > 1$ und $\beta_2 < 0$ gegeben (vgl. Anhang A.2).

Im Regime 0 lautet die resultierende gewöhnliche Differentialgleichung für g

$$rg_0(x) = mx + \mu x g_0'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 g_0''(x),$$

welche die allgemeine Lösung

$$g_0(x) = H_1^{(0)} x^{\beta_1} + H_2^{(0)} x^{\beta_2} - \frac{mx}{\psi(1)}$$

hat. Im Regime 1 erhalten wir die DGL

$$rg_1(x) = \mu x g_1'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 g_1''(x) + \sum_{j=0}^2 k_j x^j$$

mit

$$k_2 = \frac{A(A+3B)}{9\rho}, \quad k_1 = m - \frac{p(2A+3B)}{9\rho} \quad \text{und} \quad k_0 = \frac{p^2}{9\rho}. \quad (4.4.26)$$

Diese hat die allgemeine Lösung (vgl. Anhang A.2)

$$g_1(x) = H_1^{(1)} x^{\beta_1} + H_2^{(1)} x^{\beta_2} - \sum_{j=0}^2 \frac{k_j x^j}{\psi(j)}.$$

Die freien Konstanten $H_i^{(j)}$ müssen so gewählt werden, dass

$$g_0(x^*) = g_1(x^*), \quad g_0'(x^*) = g_1'(x^*) \quad \text{und} \quad g_0''(x^*) = g_1''(x^*).$$

Da $H_2^{(0)} = 0$ (damit $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$), folgt nach einer kleinen Rechnung, dass

$$H_1^{(0)} = H_1, \quad H_1^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad H_2^{(1)} = H_2$$

mit

$$H_i = -x^{*1-\beta_i} \left(\frac{(m-k_1)(\beta_j-1)}{(\beta_1-\beta_2)\beta_i\psi(1)} + \frac{2k_2x^*(2-\beta_j)}{(\beta_1-\beta_2)\beta_i\psi(2)} \right) \quad (4.4.27)$$

Somit folgt, dass $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$ und daher auch $U, V \in C^{2,1,1}(\mathbb{R}_+^3)$. Die Voraussetzungen des Verifikationstheorems sind also erfüllt. \square

Nun ist es interessant zu wissen, wie sich die optimalen Strategien der Spieler bzgl. unterschiedlicher Modellparameter verhalten. Wir untersuchen im Folgenden zum einen den Schwellenwert, zu dem die Spieler mit positiven Investitionen starten, und zum anderen die optimalen Investitionsraten auf Sensitivität bzgl. der Abschreibungsrate und der Volatilität.

Proposition 4.4.5. Der Investitionsschwellenwert x^* ist linear monoton steigend in der Abschreibungsrate δ . Die optimale Investitionsraten η_t^* und θ_t^* hängen nur über x^* von δ ab.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Form (4.4.25).

Für die zweite Aussage fixieren wir mit $k > 1$ ein $x = kx^* > x^*$. Aus (4.4.24) folgt, dass die Spieler zur Zeit t mit Rate $\eta_t^* = \theta_t^* > 0$ investieren, falls $X_t = kx^*$. Setzen wir nun $X_t = kx^*$ in η_t^* ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\eta_t^* &= \frac{a}{3\rho(\delta + r - \mu)} \cdot X_t - \frac{p}{3\rho} \\ &= \frac{(k-1)p}{3\rho} > 0.\end{aligned}\tag{4.4.28}$$

Also ist - falls investiert wird - η_t^* unabhängig von δ . □

Proposition 4.4.6. Bezüglich des Parameters der variablen Kosten ρ gelten bei gegebenem $x > x^*$ folgende Aussagen:

1. η_t^* und θ_t^* sind monoton fallend in ρ ,
2. $\lim_{\rho \rightarrow 0} \eta_t^* = \infty$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \theta_t^* = \infty$
3. x^* ist unabhängig von ρ .

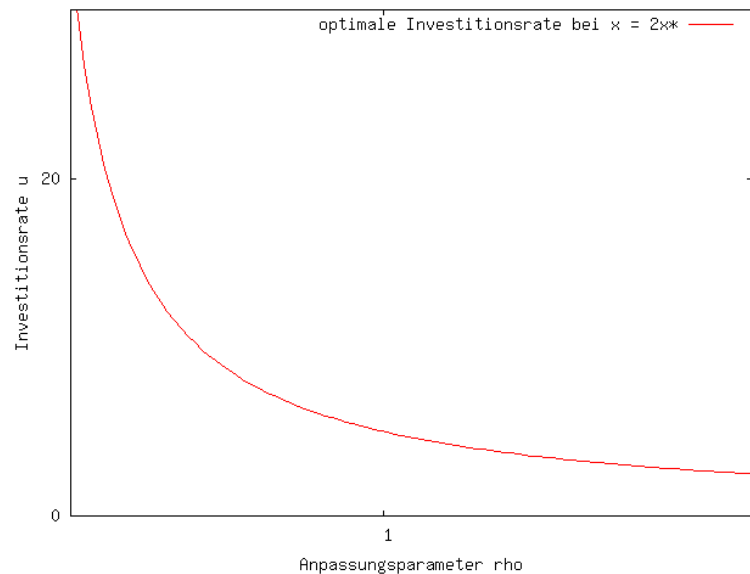


Abbildung 4.1: Sensitivität der optimalen Investitionsrate η_t^* bzgl. ρ bei festem $X_t > x^*$

Beweis. Aussagen (1) und (2) folgen direkt aus der Form (4.4.28) für η_t^* aus voriger Proposition. Aussage (3) kann aus (4.4.25) abgelesen werden. \square

Proposition 4.4.6 sagt also unter anderem aus, dass je geringer die variablen Kosten sind, desto höher die Investitionsrate. Deshalb ist es von Interesse zu analysieren, wie sich die optimale Strategie verhält, wenn überhaupt keine variablen Kosten vorliegen, d.h. $\rho = 0$. Diesen Fall werden wir im Abschnitt 4.4.2 untersuchen.

Zunächst möchten wir im folgenden Abschnitt jedoch untersuchen, wie sich die Wertfunktionen und die Strategien im Nash Gleichgewicht ändern, wenn wir nicht-identische Unternehmen zulassen.

Asymmetrisches Duopol

Im asymmetrischen Duopol betrachten wir den Fall, dass eine Firma (oBdA Spieler 1) einen kleineren Schwellenwert für Investitionen hat als die andere. Dies erreichen wir durch eine geeignete Wahl der Parameter. Ist nämlich der Einfluss der eigenen Technologie auf den eigenen Gewinn in einem Unternehmen höher als im anderen (oBdA $a_1 > a_2$) und zusätzlich der negative Einfluss der gegnerischen Technologie geringer (also $b_1 < b_2$), so werden wir diese sequentielle Einstiegsreihenfolge erhalten, d.h. wir müssen drei Regimes unterscheiden:

- keiner investiert,
- nur Firma 1 investiert,
- beide investieren.

Wir fordern zusätzlich $2a_2 > a_1 > a_2 > b_2 > b_1 > 0$ und $\delta_1 \leq \delta_2$ um angenehmere Rechnungen zu erhalten. Diese Voraussetzung ist auch ökonomisch nicht unsinnig, da $2a_2 > a_1$ bedeutet, dass das Duopol zwar asymmetrisch, jedoch nicht vollständig unfair ist. $a_i > b_i$ sorgt dafür, dass der positive Einfluss der eigenen Technologie auf jeden Fall größer ist als der negative der gegnerischen Technologie. Andernfalls würden die Unternehmen bei identischem Technologiestand in jedem Fall Verluste machen.

Es ist zu beachten, dass an dem Punkt, an dem die zweite Firma beginnt zu investieren die Wertfunktion von Spieler 1 einen Knick haben wird, weil hier die *smooth pasting* Eigenschaft nicht gilt, da Spieler 1 keinen Einfluss auf den Regimewechsel hat. Das gleiche Problem tritt in der Wertfunktion von Spieler 2 beim ersten Regimewechsel auf. Da wir jedoch wissen, dass Spieler 1 mit Sicherheit vorher beginnt zu investieren, können wir den Wertebereich des stochastischen Einflusses

bei der Bestimmung der Wertfunktionen so einschränken, dass weiterhin die Differenzierbarkeit gegeben ist. Dies wird genauer im Beweis des folgenden Theorems erklärt:

Theorem 4.4.7. Im asymmetrischen irreversiblen Investitionsspiel mit quadratischen Kosten- und linearen Profitfunktionen gilt unter obigen Voraussetzungen für die optimalen Wertfunktionen

$$\begin{aligned} U(y) &= \frac{a_1xc}{r + \delta_1 - \mu} - \frac{b_1xd}{r + \delta_2 - \mu} + g_1(x) \\ V(y) &= -\frac{b_2xc}{r + \delta_1 - \mu} + \frac{a_2xd}{r + \delta_2 - \mu} + g_2(x) \end{aligned}$$

mit $g_i \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Das Nash Gleichgewicht hat die Form $(\eta^*, \theta^*) = (\eta_t^*, \theta_t^*)$ mit

$$\eta_t^*(X_t) = \begin{cases} \frac{1}{3\rho} \cdot \left(\frac{2a_1X_t}{r + \delta_1 - \mu} - p - \frac{a_2X_t}{r + \delta_2 - \mu} \right) & X_t \geq x_2^* \\ \frac{1}{2\rho} \cdot \left(\frac{a_1X_t}{r + \delta_1 - \mu} - p \right) & x_1^* \leq X_t < x_2^* \\ 0 & X_t < x_1^* \end{cases}$$

und

$$\theta_t^*(X_t) = \begin{cases} \frac{1}{3\rho} \cdot \left(\frac{2a_2X_t}{r + \delta_2 - \mu} - p - \frac{a_1X_t}{r + \delta_1 - \mu} \right) & X_t \geq x_2^* \\ 0 & X_t < x_2^* \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{(r + \delta_1 - \mu)p}{a_1} \\ x_2^* &= \frac{(r + \delta_2 - \mu)p}{2a_2 - a_1}. \end{aligned}$$

Beweis. Wie bereits oben im Vortext beschrieben, müssen wir dieses Spiel in drei Regimes untersuchen. Wir nehmen an, dass Spieler 1 ab dem Schwellenwert x_1^* und Spieler 2 ab x_2^* investiert, wobei $0 < x_1^* < x_2^*$ und wählen als Ansatz für die Wertfunktionen

$$\begin{aligned} U(y) &= A_1xc + B_1xd + g_1(x) \\ V(y) &= A_2xd + B_2xc + g_2(x). \end{aligned}$$

1. Sei also $x < x_1^*$. Dann ist

$$\tilde{u}(y) = \tilde{v}(y) = 0 \quad \forall y = (x, c, d) \in (0, x_1^*) \times \mathbb{R}_+^2$$

und die HJI Gleichungen im Regime 0 lauten

$$\begin{aligned} rU(y) &= x \cdot (a_1c - b_1d) - \delta_1cU_c(y) + \mu xU_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2U_{xx}(y) - \delta_2dU_d(y) + mx \\ rV(y) &= x \cdot (a_2d - b_2c) - \delta_2dV_d(y) + \mu xV_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2V_{xx}(y) - \delta_1cV_c(y) + mx. \end{aligned}$$

2. Ist $x_1^* \leq x < x_2^*$, so investiert nur Spieler 1. Also ist

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \left(\frac{U_c(y) - p}{2\rho} \right)^+ \\ \tilde{v} &= 0 \end{aligned}$$

und die HJI Gleichungen sind

$$\begin{aligned} rU(y) &= x \cdot (a_1c - b_1d) - \delta_1cU_c(y) + \mu xU_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2U_{xx}(y) - \delta_2dU_d(y) \\ &\quad + \sum_{j=0}^2 k_{1j}^{(1)} x^j \\ rV(y) &= x \cdot (a_2d - b_2c) - \delta_2dV_d(y) + \mu xV_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2V_{xx}(y) - \delta_1cV_c(y) \\ &\quad + \sum_{j=0}^2 k_{2j}^{(1)} x^j \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} k_{10}^{(1)} &= \frac{p^2}{4\rho}, & k_{11}^{(1)} &= m - \frac{A_1p}{2\rho}, & k_{12}^{(1)} &= \frac{A_1^2}{4\rho}, \\ k_{20}^{(1)} &= 0, & k_{21}^{(1)} &= m - \frac{B_2p}{2\rho}, & k_{22}^{(1)} &= \frac{A_1B_2}{2\rho}. \end{aligned}$$

3. Für $x \geq x_2^*$ investieren beide Spieler, d.h.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y) &= \frac{2U_c(y) - p - V_d(y)}{3\rho} \\ \tilde{v}(y) &= \frac{2V_d(y) - p - U_c(y)}{3\rho} \end{aligned}$$

und es ergeben sich folgende HJI Gleichungen:

$$\begin{aligned}
rU(y) &= x \cdot (a_1c - b_1d) - \delta_1cU_c(y) + \mu xU_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2U_{xx}(y) - \delta_2dU_d(y) \\
&\quad + \sum_{j=0}^2 k_{1j}^{(2)}x^j \\
rV(y) &= x \cdot (a_2d - b_2c) - \delta_2dV_d(y) + \mu xV_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2V_{xx}(y) - \delta_1cV_c(y) \\
&\quad + \sum_{j=0}^2 k_{2j}^{(2)}x^j
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
k_{i0}^{(2)} &= \frac{p^2}{9\rho} \\
k_{i1}^{(2)} &= m + \frac{2A_jp - 4A_ip - 3B_ip}{9\rho} \\
k_{i2}^{(2)} &= \frac{4A_i^2 - 4A_iA_j + A_j^2 - 3A_iB_i + 6A_jB_i}{9\rho}
\end{aligned}$$

für $i = 1, 2$.

Nun folgt durch Anwenden des Ansatzes für die Wertfunktionen in den HJI Gleichungen in allen drei Regimes und mit den gleichen Rechenschritten wie im reversiblen Fall (Theorem 4.4.3), dass die Konstanten durch

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{a_1}{r + \delta_1 - \mu} & B_1 &= -\frac{b_1}{r + \delta_2 - \mu} \\
A_2 &= \frac{a_2}{r + \delta_2 - \mu} & B_2 &= -\frac{b_2}{r + \delta_1 - \mu}
\end{aligned}$$

gegeben sind.

Wir können nun also die Schwellenwerte ablesen, es gilt

$$x_1^* = \frac{p}{A_1} \quad x_2^* = \frac{p}{2A_2 - A_1}$$

und somit ist, da $2a_2 > a_1 > a_2$, auch die Annahme $0 < x_1^* < x_2^*$ erfüllt.

Zu zeigen bleibt, dass $U, V \in C^{2,1,1}(R_+^3)$. Da Spieler 1 keinen Einfluss auf die Entscheidung von Spieler 2 am Punkt x_2^* hat, genügt allerdings, dass

$$U \in C^{2,1,1}((0, x_2^*) \times \mathbb{R}_+^2) \quad \text{und} \quad V \in C^{2,1,1}((x_1^*, \infty) \times \mathbb{R}_+^2).$$

Dies kann - wie in den Modellen zuvor - dadurch garantiert werden, dass die Funktionen g_i zum einen die in den HJI Gleichungen übrig gebliebenen gewöhnlichen

Differentialgleichungen erfüllen. Also ist die allgemeine Lösung

$$g_i^{(l)}(x) = H_{i1}^{(l)} x^{\beta_1} + H_{i2}^{(l)} x^{\beta_2} + \sum_{j=0}^2 \frac{k_{ij}^{(l)} x^j}{\psi(j)}$$

für $i = 1, 2$ und $l = 0, 1$, wobei ψ wieder die zentrale quadratische Funktion ist und β_i ihre Nullstellen sind. Die Wahl der Konstanten $H_{ij}^{(l)}$ nach den *value matching*, *smooth pasting* und *high contact* Bedingungen liefert

$$H_{i2}^{(0)} = H_{i1}^{(1)} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

und

$$\begin{aligned} H_{11}^{(0)} &= -x^{*1-\beta_1} \left(\frac{(m - k_{11}^{(1)})(\beta_2 - 1)}{(\beta_1 - \beta_2)\beta_1\psi(1)} + \frac{2k_{12}^{(1)}x^*(2 - \beta_2)}{(\beta_1 - \beta_2)\beta_1\psi(2)} \right) \\ H_{12}^{(1)} &= -x^{*1-\beta_2} \left(\frac{(m - k_{11}^{(1)})(\beta_1 - 1)}{(\beta_1 - \beta_2)\beta_2\psi(1)} + \frac{2k_{12}^{(1)}x^*(2 - \beta_1)}{(\beta_1 - \beta_2)\beta_2\psi(2)} \right) \\ H_{21}^{(0)} &= x^{*1-\beta_1} \left(\frac{(1 - \beta_2)(k_{21}^{(1)} - k_{21}^{(2)})}{(\beta_1 - \beta_2)\beta_1\psi(1)} + \frac{2x(2 - \beta_2)(k_{22}^{(1)} - k_{22}^{(2)})}{(\beta_1 - \beta_2)\beta_1\psi(2)} \right) \\ H_{22}^{(1)} &= x^{*1-\beta_2} \left(\frac{(1 - \beta_1)(k_{21}^{(1)} - k_{21}^{(2)})}{(\beta_1 - \beta_2)\beta_2\psi(1)} + \frac{2x(2 - \beta_1)(k_{22}^{(1)} - k_{22}^{(2)})}{(\beta_1 - \beta_2)\beta_2\psi(2)} \right). \end{aligned}$$

Dies sichert in den kritischen Gebieten die Voraussetzungen an U und V . Somit folgen mit dem Verifikationstheorem die Behauptungen. \square

Anmerkung. Die Lösung im Fall $a_1 < a_2$ und $\delta_1 > \delta_2$ kann ohne Probleme durch Vertauschen der Spieler 1 und 2 gefunden werden. Ist $a_1 > a_2$ und $\delta_1 > \delta_2$, so wird der Spieler i zum Spieler 1 ernannt, für den

$$\frac{a_i}{r + \delta_i - \mu} > \frac{a_j}{r + \delta_j - \mu}.$$

Die Voraussetzung $a_1 < 2a_2$ sichert die Nichtnegativität.

Auf eine Sensitivitätsanalyse können wir hier im Falle des asymmetrischen Duopols verzichten, da die gleichen Aussagen gelten wie im Falle des symmetrischen Duopols. Diese sind in den Propositionen 4.4.5 und 4.4.6 zu finden.

Es sei hier nur daran erinnert, dass die Investitionsraten mit fallendem Parameter ρ (also dem Parameter des variablen Teils der Kosten) steigen. Im folgenden Abschnitt untersuchen wir den Fall, in dem die Investitionskosten keinerlei variablen Anteil haben, d.h. sich die Spieler einer rein linearen Kostenfunktion gegenüber sehen.

4.4.2 Lineare Kostenfunktionen

In diesem Teil möchten wir nun ein dynamisches irreversibles Investitionsspiel betrachten, bei dem die Kostenfunktionen linear in den Investitionsraten der beiden Spieler sind. Das bedeutet, dass wir im vorigen Abschnitt den variablen Parameter ρ gegen Null laufen lassen, d.h.

$$\begin{aligned}\varphi_1(u) &= pu \\ \varphi_2(v) &= pv.\end{aligned}$$

Dies bringt das Problem mit sich, dass die Wertfunktionen in den Hamilton Jacobi Isaacs Gleichungen mit linearen φ_i unendlich werden würden, was wiederum im Widerspruch zu den Annahmen des Verifikationstheorems stünde. Deshalb führen wir maximale Investitionsraten u_{max} und v_{max} ein.

Lineare Profitfunktionen

Wir betrachten zunächst ein Spiel mit linearen Profitfunktionen π_i , wobei die Profitfunktion eines Spielers linear und wachsend im eigenen Technologiestand C bzw. D sowie linear und fallend in dem des Konkurrenten (D bzw. C) sein soll. Auch der stochastische Einfluss X tritt nur linear auf, d.h.

$$\begin{aligned}\pi_1(y) = \pi_1(x, c, d) &= (m + a_1c - b_1d)x \\ \pi_2(y) = \pi_2(x, c, d) &= (m + a_2d - b_2c)x\end{aligned}$$

mit $m, a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$ und $a_i > b_i$.

Ökonomisch können diese Profitfunktionen wieder als deterministische Profite auf einem Auslandsmarkt interpretiert werden, die mit dem Wechselkurs multipliziert werden. Die Parameter a_i beschreiben hierbei die Höhe des positiven Einflusses des eignen Technologiestandes auf den Gewinn, während die b_i als Maß für die negative Wirkung gegnerischer Technologie steht.

Auf Grund der Festsetzung der maximalen Investitionsraten haben wir

$$\mathcal{U} = [0, u_{max}] \quad \text{und} \quad \mathcal{V} = [0, v_{max}]$$

mit $u_{max}, v_{max} < \infty$.

Der Zustandsprozess $(Y_t^{\eta, \theta}) = (X_t, C_t^\eta, D_t^\theta)$ sei der gleiche wie in den vorigen Modellen. Wie auch im Duopolspiel mit quadratischen Kostenfunktionen müssen wir unterscheiden, ob es sich um ein symmetrisches oder asymmetrisches Duopol handelt, da wir - je nachdem - die Menge der Regimes anpassen müssen.

Da sich jedoch hier - im Unterschied zum Fall mit quadratischen Kostenfunktionen - die Investitionsrate von Spieler 1 bei Investitionen von Spieler 2 nicht ändern wird, können wir das symmetrische Duopol als Spezialfall des asymmetrischen ansehen und geben nur die Lösung für den Fall $2a_2 > a_1 \geq a_2 > b_2 \geq b_1 > 0$ und $\delta_1 \leq \delta_2$ an.

Theorem 4.4.8. Unter den eben erläuterten Voraussetzungen gilt im irreversiblen Investitionsspiel mit linearen Kosten- und linearen Profitfunktionen für die optimalen Wertfunktionen

$$\begin{aligned} U(y) &= \frac{a_1 x c}{r + \delta_1 - \mu} - \frac{b_1 x d}{r + \delta_2 - \mu} + g_1(x) \\ V(y) &= -\frac{b_2 x c}{r + \delta_1 - \mu} + \frac{a_2 x d}{r + \delta_2 - \mu} + g_2(x) \end{aligned}$$

mit $g_i \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Das Nash Gleichgewicht hat die Form $(\eta^*, \theta^*) = (\eta_t^*, \theta_t^*)$ mit

$$\begin{aligned} \eta_t^* &= \begin{cases} u_{max} & X_t \geq x_1^* \\ 0 & X_t < x_1^* \end{cases} \\ \theta_t^* &= \begin{cases} v_{max} & X_t \geq x_2^* \\ 0 & X_t < x_2^* \end{cases} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} x_1^* &:= \frac{(r + \delta_1 - \mu)p}{a_1} \\ x_2^* &:= \frac{(r + \delta_2 - \mu)p}{2a_2 - a_1}. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis funktioniert im Wesentlichen analog zu dem von Theorem 4.4.7, mit dem Unterschied, dass die Kandidaten für das Nash Gleichgewicht in den Regimes jeweils durch $\max\{0, (U_c - p)u_{max}\}$ bzw. $\max\{0, (V_d - p)v_{max}\}$ gegeben sind und die Konstanten $k_{ij}^{(l)}$ in den HJI Gleichungen dementsprechend angepasst werden müssen. \square

Anmerkung. 1. Wie zu erwarten war, ist der Schwellenwert der gleiche wie im Spiel mit linearen Profit- und quadratischen Kostenfunktionen, da dieser schon dort unabhängig vom quadratischen Kostenparameter ρ war.

2. Im Falle eines symmetrischen Duopols ist $x_1^* = x_2^*$ und die Spieler beginnen beim gleichen Schwellenwert mit ihren Investitionen.

Eine Sensitivitätsanalyse der optimalen Schwellenwerte x_i^* ist in diesem Fall also nicht nötig, da diese dieselben Werte wie im Abschnitt 4.4.1 sind.

Wir möchten jedoch anhand eines kleinen numerischen Beispiels die beiden Modelle mit linearer Profitfunktion miteinander vergleichen. Hierzu simulieren wir einen Pfad einer Geometrischen Brownschen Bewegung (vgl. Abb. 4.2) und wenden in diesem Szenario einmal die optimale Strategie von Spieler 1 bei quadratischer Kostenfunktion und einmal die optimale Strategie von Spieler 1 bei linearer Kostenfunktion an. Die jeweils resultierenden Technologiestände sind in Abb. 4.3 abgetragen. Wir beschränken uns auf die Darstellung der Strategie und des Technologiestandes von Spieler 1, da diejenigen von Spieler 2 ein ähnliches Bild liefern würden.

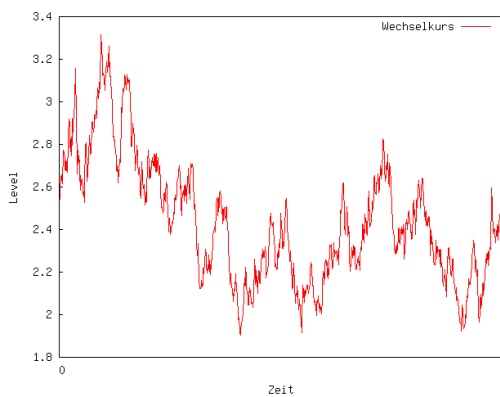


Abbildung 4.2: Realisierung eines Pfades des Wechselkurses mit den Parametern $\mu = 0.01$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.04$.

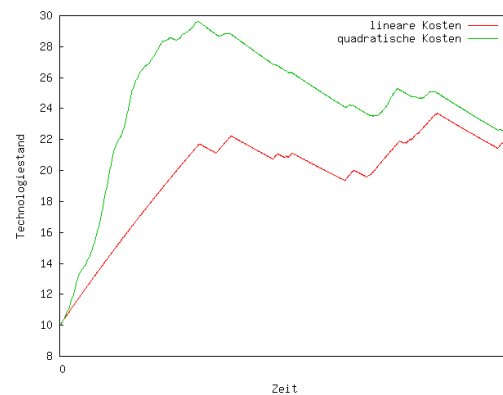


Abbildung 4.3: Optimale Technologiestände bei linearen bzw. quadratischen Kostenfunktionen.

Noch interessanter wird das dynamische irreversible Investitionsspiel jedoch, wenn wir einen zusätzlichen Parameter α einführen, der in gewisser Weise als Maß für die Unsicherheit bzw. Risikoaversion der Spieler angesehen werden kann. Im folgenden Abschnitt gehen wir deshalb von linearen Profitfunktionen über zu solchen des HARA (= hyperbolic absolute risk aversion) Typs.

HARA Profitfunktionen

Im Falle von Profitfunktionen des HARA Typs, d.h.

$$\begin{aligned}\pi_1(y) = \pi_1(x, c, d) &= k_1 x^\alpha c^\beta d^\gamma \\ \pi_2(y) = \pi_2(x, c, d) &= k_2 x^\alpha d^\beta c^\gamma\end{aligned}$$

mit $\alpha + \beta + \gamma = 1$ wird ein Vorgehen wie in den vorigen Abschnitten - insbesondere im asymmetrischen Duopol - unmöglich, da der Schwellenzustand auf Grund der

Nicht-Linearität der Profitfunktionen auch von den jeweiligen Technologieständen abhänge. Deshalb kann der Zustandsraum nicht mehr ohne Weiteres in drei Regimes aufgeteilt werden, da keine einfache Kleiner- bzw. Größer-Relation aufgestellt werden kann. Deshalb betrachten wir eine etwas abgeänderte Problemstellung, welche wir wieder zunächst im Falle eines Monopolspiels durchleuchten möchten.

Monopol

Wir untersuchen also zunächst ein Monopolspiel mit linearer Kosten- und HARA Nutzenfunktion, d.h. die Gewinnfunktion G ist

$$G(x, c, u) = \pi(x, c) - \varphi(u)$$

mit

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= pu \\ \pi(x, c) &= \frac{a}{1-\alpha} x^\alpha c^{1-\alpha},\end{aligned}$$

wobei $p \geq 0, a > 0$ und $\alpha \in (0, 1)$.

In diesem Fall führt die Lösungsmethode, die wir im Monopoltteil von Abschnitt 4.4.1 angewandt haben, zu Problemen, da sich kein geeigneter Ansatz für die Wertfunktion in der HJB Gleichung finden lässt, der für beide Regimes gilt, da in der HJB Gleichung sowohl x als auch vor allem c mit unterschiedlichen Exponenten auftreten, was den dort verwendeten Separationsansatz unmöglich macht.

Deshalb gehen wir in diesem Problem weg von der Investitionsrate (η_t) und hin zu einem kumulativen Investitionsplan $I = (I_t)$. Das bedeutet, dass die gesuchte Strategie des Spielers ein monoton steigender *càdlàg* Prozess (d.h. rechtsseitig stetig mit linksseitig existierenden Grenzwerten) ist, der beschreibt, wie viel das Unternehmen bis zum Zeitpunkt t investiert hat. Der Prozess (I_t) ist also genau dann konstant, wenn der Spieler nicht investiert und weist zu den Investitionszeitpunkten einen positiven Sprung in Höhe der getätigten Investition auf.

Unser auf diese Art modifiziertes Optimierungsproblem lautet dann

$$(LKP_N) \left\{ \begin{array}{l} V(x, c) = \max_{I \in \mathcal{I}} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} \left(\frac{a}{1-\alpha} (X_t^\alpha C_t^{1-\alpha}) dt - pdI_t \right) \right] \\ \quad \quad \quad X_0 = x, C_0 = c \end{array} \right. \rightarrow \max_{I \in \mathcal{I}}$$

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, & X_0 \in \mathbb{R}_+ \\ dC_t = dI_t - \delta C_t dt, & C_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \mathcal{I} = \{I = (I_t) \mid I_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+\}, \end{cases}$$

wobei neben denen im Vortext beschriebenen Bedingungen an (I_t) auch die Adaptivitäts- und Messbarkeitsbedingungen erfüllt sein müssen. Eine zusätzliche Voraussetzung an (I_t) ist hier, dass (I_t) als Funktion in t monoton steigen muss, was die Irreversibilität der Investitionen (in den vorigen Abschnitten $\eta_t \geq 0$) sichert.

Wir werden sehen, dass sich die optimale Strategie des Spielers in diesem Fall über einen Schattenprozess (ξ_t) (vgl. auch Abschnitt 3.4.1) beschreiben lässt. Es gilt nämlich, dass der Technologiestand C_t des Unternehmens zu jeder Zeit t genau so gehalten werden muss, dass er größer einem Vielfachen des stochastischen Einflusses X_t zu dieser Zeit ist, d.h.

$$C_t^* \stackrel{!}{\geq} \kappa \cdot X_t =: \xi_t. \quad \forall t.$$

Gilt also zum Zeitpunkt t , dass $C_t^* < \xi_t$, so wird genau so viel investiert, bis der Schattenprozess erreicht wird. Ist $C_t^* \geq \xi_t$, wird nichts investiert. Für die

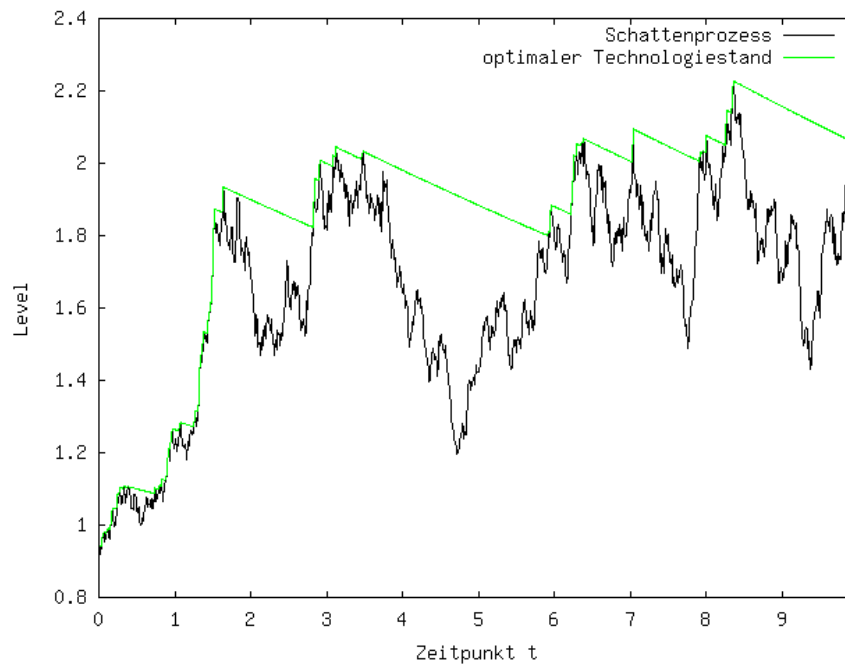


Abbildung 4.4: Schattenprozess und optimaler Technologiestand im Monopolspiel mit dynamischen Investitionen

Wertfunktion und die optimale Strategie des Spielers gilt folgendes Theorem:

Theorem 4.4.9. Im irreversiblen Investitionsproblem mit linearen Kosten- und HARA Profitfunktionen gilt für die optimale Wertfunktion

$$V(x, c) = Ax^\alpha c^{1-\alpha} + Bx^{\beta_1} c^{1-\beta_1} + g(x)$$

mit $A, B \in \mathbb{R}_+$ und $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Die optimale Strategie des Spielers ist der Investitionsplan

$$I_t^* = \begin{cases} \xi_t - C_t^* & \xi_t \geq C_t^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\xi_t = \left(\frac{\psi(\alpha)\beta_1 p}{(\beta_1 - \alpha)a} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} X_t$$

und

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 - (\mu + \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)z + r + \delta, \quad (4.4.29)$$

wobei β_1 die (einzige) positive Nullstelle von ψ ist (vgl. Anhang A.2).

Beweis. Im Problem (LKPN) ist die Bellman Gleichung für den Fall, dass der Spieler nicht investiert, die folgende:

$$rV = \frac{a}{1-\alpha} x^\alpha c^{1-\alpha} - \delta c V_c + \mu x V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx}. \quad (4.4.30)$$

Zusätzlich müssen, Korollar 4.3.2 folgend, die Kuhn Tucker Bedingungen erfüllt sein, die hier wie folgt lauten:

$$V_c(x, c) \leq p \quad (4.4.31)$$

$$dI_t \geq 0$$

$$(V_c - p)dI_t = 0. \quad (4.4.32)$$

Die Kuhn Tucker Bedingungen übernehmen in diesem Fall den Part der Maximierung, welcher sonst durch das Supremum in der HJB Gleichung erreicht wird.

Wird (4.4.31) verletzt, so investiert der Spieler so viel (also ist $dI_t > 0$), bis wieder $V_c = p$ und somit auch (4.4.32) gilt.

Die Gleichung (4.4.30) muss für alle $c \in \mathbb{R}_+$ erfüllt sein und somit muss auch Gleichheit der Ableitungen nach c der beiden Seiten sein, d.h.

$$rV_c = a \cdot \left(\frac{x}{c} \right)^\alpha - \delta c V_{cc} - \delta V_c + \mu x V_{xc} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xxc}.$$

Definieren wir nun auf $\{(x, c) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : V_c(x, c) < p\}$, also auf dem Gebiet, auf dem nicht investiert wird (d.h. $dI_t = 0$), den Prozess $(Z_t)_{t \geq 0}$ als den Quotienten aus (X_t) und (C_t) , d.h. $Z_t = \frac{X_t}{C_t}$, so ist (Z_t) eine Geometrische Brownsche Bewegung

mit Volatilität σ und Drift $\mu + \delta$, also

$$\begin{aligned} dZ_t &= (\mu + \delta)Z_t dt + \sigma dW_t \\ Z_0 &= z \in R_+. \end{aligned}$$

Da zusätzlich die Nutzenfunktion π homogen vom Grad 1 in x und c ist, d.h.

$$\pi(kx, kc) = k\pi(x, c) \quad \forall k,$$

ist auch die Wertfunktion V homogen vom Grad 1 in x und c . Deshalb ist die Ableitung der Wertfunktion nach c homogen vom Grad 0 in x und c , d.h.

$$V_c(kx, kc) = V_c(x, c) \quad \forall k$$

und wir können daher V_c als (eindimensionale) Funktion im Quotienten z ansehen. Definieren wir also die Funktion $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$q(z) := V_c(x, c),$$

so gilt für die partiellen Ableitungen von V , dass

$$\begin{aligned} V_{cc}(x, c) &= -\frac{z}{c}q'(z) \\ V_{xc}(x, c) &= \frac{1}{c}q'(z) \\ V_{xzc}(x, c) &= \frac{1}{c^2}q''(z) \end{aligned}$$

und die Gleichung (4.4.30) kann als eine gewöhnliche Differentialgleichung in z geschrieben werden:

$$(r + \delta)q(z) = az^\alpha + (\mu + \delta)zq'(z) + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 q''(z). \quad (4.4.33)$$

Des Weiteren können wir uns wegen der Homogenität von q ein z^* definieren, das das optimale Verhältnis vom Wechselkurs zum Technologiestand darstellt. Ist also Z_t kleiner als z^* , so wird genau so viel investiert, bis $Z_t = z^*$. z^* wird später noch berechnet.

Die DGL (4.4.33) hat die bekannte Lösung

$$q(z) = Az^\alpha + B_1 z^{\beta_1} + B_2 z^{\beta_2}$$

mit $A = \frac{a}{\psi(\alpha)}$, wobei ψ die Funktion aus (4.4.29) und β_1 bzw. β_2 die positive bzw. negative Nullstelle von ψ ist.

Für die Konstante B_2 muss gelten, dass $B_2 = 0$, da sonst

$$\lim_{z \rightarrow 0} q(y) \neq 0.$$

Für diese und weitere Eigenschaften der Funktion ψ und deren Nullstellen sei auf den Abschnitt A.2 verwiesen.

B_1 und z^* werden nun erneut mittels der *smooth pasting*- und *high contact* Bedingung bestimmt, d.h. in diesem Fall

$$\begin{aligned} q(z^*) &= p \\ q'(z^*) &= 0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{az^{*\alpha}}{\psi\alpha} + B_1 z^{*\beta_1} &= p \\ \frac{az^{*\alpha}\alpha}{\psi\alpha z^*} + \frac{B_1 z^{*\beta_1}\beta_1}{z^*} &= 0. \end{aligned}$$

Mit ein wenig Aufwand erhalten wir die Lösung dieses Gleichungssystems als

$$\begin{aligned} z^* &= \left(\frac{\psi(\alpha)\beta_1 p}{(\beta_1 - \alpha)a} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ B_1 &= -\frac{\alpha p}{(\beta_1 - \alpha)} \left(\frac{\psi(\alpha)\beta_1 p}{(\beta_1 - \alpha)a} \right)^{-\frac{\beta_1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Also ist

$$V_c(x, c) = \frac{a}{\psi(\alpha)} \left(\frac{x}{c} \right)^\alpha - \frac{\alpha p}{(\beta_1 - \alpha)} \left(\frac{\psi(\alpha)\beta_1 p}{(\beta_1 - \alpha)a} \right)^{-\frac{\beta_1}{\alpha}} \left(\frac{x}{c} \right)^{\beta_1}$$

und somit

$$\begin{aligned} V(x, c) &= \int_0^c V_c(x, z) dz + g(x) \\ &= \frac{\alpha p c}{(\beta_1 - \alpha)(\beta_1 - 1)} \left(\frac{\psi(\alpha)\beta_1 p}{(\beta_1 - \alpha)a} \right)^{-\frac{\beta_1}{\alpha}} \left(\frac{x}{c} \right)^{\beta_1} + \frac{ac}{\psi(\alpha)(1 - \alpha)} \left(\frac{x}{c} \right)^\alpha + g(x) \\ &= Bx^{\beta_1} c^{1-\beta_1} + Ax^\alpha c^{1-\alpha} + g(x) \end{aligned}$$

mit $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$. Die Funktion g wird nun wieder analog zu den vorigen Modellen mit Hilfe der *smooth pasting* und *high contact* Bedingungen aus der Gleichung

(4.4.30) bestimmt. Also folgen die Behauptungen. \square

Ein ähnliches Vorgehen möchten wir nun im folgenden Abschnitt auf ein Duopolspiel mit HARA Nutzenfunktionen anwenden.

Duopol

Wir wollen versuchen, einen Schattenprozess für den Quotienten der beiden Technologiestände zu finden. Unser Ziel ist also eine Aussage folgender Form:

Befindet sich zum Zeitpunkt t der Quotient der Technologiestände der beiden Spieler oberhalb eines gewissen Schattenprozesses, so muss derjenige Spieler, dessen Technologiestand im Nenner steht, so viel investieren, bis dieser Prozess erreicht wird. Andernfalls investiert der andere Spieler so viel, bis wieder der Quotient gleich dem Schattenprozess ist.

Der Schattenprozess wird mit Sicherheit sowohl vom stochastischen Einfluss als auch vom Quotienten der beiden Technologiestände abhängen, d.h. die Spieler lassen in ihre Entscheidung nicht nur den stochastischen Prozess und den eigenen Technologiestand einfließen, sondern auch den Technologiestand des Konkurrenten.

Um dies elegant durchführen zu können, müssen wir auch die Strategien der Spieler etwas abändern. Waren in den vorigen Abschnitten die Strategien η_t und θ_t jeweils die Investitionsraten zum Zeitpunkt t , so definieren wir η_t und θ_t hier als Prozentsätze, um die die bestehende Technologie erweitert wird, d.h.

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathbb{R}_+.$$

Die Technologiekomponenten des Zustandsprozesses besitzen dann die folgende Dynamik:

$$\begin{aligned} dC_t^\eta &= (\eta_t - \delta_1)C_t^\eta dt, & C_0 &\in \mathbb{R}_+ \\ dD_t^\theta &= (\theta_t - \delta_2)D_t^\theta dt, & D_0 &\in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Da wir jedoch als Technologiekomponente des Zustandsprozesses den Quotienten dieser beiden Prozesse betrachten möchten bestimmen wir (Z_t) durch

$$dZ_t^{\eta,\theta} = (\eta_t - \theta_t + \delta_2 - \delta_1)Z_t^{\eta,\theta} dt \quad Z_0 \in \mathbb{R}_+$$

und haben nun einen zweidimensionalen Zustandsprozess $(Y_t^{\eta,\theta}) = (X_t, Z_t^{\eta,\theta})$ mit Werten $y \in \mathbb{R}_+^2$.

Des Weiteren definieren wir dieses Spiel als Nullsummenspiel, d.h. wir stellen eine gemeinsame Zielfunktion \hat{J} auf, die Spieler 1 zu maximieren versucht, während das

Ziel von Spieler 2 die Minimierung dieser Funktion ist, wobei

$$\hat{J}(y; \eta, \theta) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-rt} \left(\pi(X_t, Z_t^{\eta, \theta}) - (\eta_t - \theta_t)p \right) dt \middle| X_0 = x, Z_0 = z \right]$$

mit der operativen Profitfunktion $\pi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\pi(y) = \pi(x, z) = \frac{1}{1 - \alpha} x^\alpha z^{1 - \alpha}.$$

Das Ziel von Spieler 1 ist die Maximierung dieser Funktion, Spieler 2 möchte sie minimieren, d.h. gesucht ist ein Nash Gleichgewicht der Form

$$\begin{aligned} J(y) &:= \hat{J}(y; \eta^*, \theta^*) \geq \hat{J}(y; \eta, \theta^*) & \forall \eta \in \mathcal{A}_1 \\ J(y) &:= \hat{J}(y; \eta^*, \theta^*) \leq \hat{J}(y; \eta^*, \theta) & \forall \theta \in \mathcal{A}_2 \end{aligned}$$

für beliebiges aber festes $y = (x, z) \in \mathbb{R}_+^2$.

Der einfacheren Notation halber beschränken wir uns außerdem oBdA auf den Fall $\delta_2 \geq \delta_1$ also $\delta := \delta_2 - \delta_1 \geq 0$. Andernfalls muss nur die Bezeichnung der Spieler vertauscht werden. Zusätzlich fordern wir zur besseren Berechenbarkeit, dass $\delta \leq r$, was ökonomisch als (faire) Begrenzung des Grades der Asymmetrie betrachtet werden kann.

Auskunft über die Form der Wertfunktion und des Nash Gleichgewichts dieses abgewandelten Spiels liefert dann das folgende Theorem:

Theorem 4.4.10. Unter obigen Voraussetzungen ist im irreversiblen Investitionsspiel mit linearen Kosten- und HARA Profitfunktionen die Wertfunktion gegeben durch

$$J(y) = Ax^\alpha z^{1 - \alpha} + Bx^{\beta_1} c^{1 - \beta_1} + g(x)$$

mit $A, B \in \mathbb{R}_+$ und $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Das Nash Gleichgewicht hat die Form $(\eta^*, \theta^*) = (\eta_t^*, \theta_t^*)$ mit

$$\begin{aligned} \eta_t^* &= \begin{cases} \frac{\xi_t - Z_t^*}{C_t^*} & \xi_t > Z_t^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \theta_t^* &= \begin{cases} \frac{Z_t^* - \xi_t}{D_t^*} & \xi_t < Z_t^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

mit

$$\xi_t = \left(\frac{\tilde{\psi}(\alpha)\beta_1 p}{\beta_1 - \alpha} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} X_t$$

und

$$\tilde{\psi}(\alpha) = -\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 - (\mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)\alpha + r - \delta,$$

wobei $\beta_1 \in \mathbb{R}_+$ die einzige positive Nullstelle von $\tilde{\psi}$ ist.

Interpretation. Im Nash Gleichgewicht wird von beiden Spielern immer genau so viel investiert, bis der Quotient der Technologiestände Z_t^* unter Verwendung der optimalen Strategien gleich dem Schattenprozess ξ_t ist.

Man beachte, dass Investitionen von Spieler 1 den Quotienten wachsen lassen, während Investitionen von Spieler 2 ihn senken.

Beweis. In diesem Beweis greifen wir auf den gleichen Trick wie im Beweis von Theorem 4.4.9 zurück, bzw. wir schreiben das Problem um, so dass die analoge Vorgehensweise angewendet werden kann. Definieren wir die kumulativen Investitionspläne der beiden Spieler (I_t^1) und (I_t^2) durch

$$dI_t^1 = \eta_t dt \quad \text{und} \quad dI_t^2 = \theta_t dt,$$

so lautet die Zielfunktion

$$\hat{J}(x, z, I^1, I^2) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} (\pi(X_t, Z_t^{u,v}) dt - p dI_t^1 + p dI_t^2) \right] \Bigg|_{X_0 = x, Z_0 = z \geq 0}.$$

Nun muss - falls kein Spieler investiert - die folgende Bellmann Gleichung gelten:

$$rJ(y) = \frac{1}{1-\alpha} x^\alpha z^{1-\alpha} + \delta z J_z(y) + \mu x J_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 J_{xx}(y).$$

Der Unterschied zum Monopolfall liegt zum einen im positiven Vorzeichen von

$\delta z J_z$, zum anderen lauten die Kuhn Tucker Bedingungen

$$J_z(y) = p \quad (4.4.34)$$

$$dI_t^1 \geq 0$$

$$dI_t^2 \geq 0$$

$$(J_z(y) - p)dI^i = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (4.4.35)$$

Die Kuhn Tucker Bedingungen übernehmen hier zum einen den Part der Maximierung (für Spieler 1) und zum anderen den der Minimierung (für Spieler 2).

Wird nun (4.4.34) verletzt, so investiert je nachdem, ob $J_z(y) < p$ oder $J_z(y) > p$ Spieler 1 (also $dI_t^1 > 0$) oder Spieler 2 (also $dI_t^2 > 0$) so viel, bis wieder $J_z(y) = p$ gilt. Damit wird (4.4.35) gesichert.

Die weitere Bestimmung des Schattenprozesses funktioniert nun völlig analog zu der von Theorem 4.4.9 und somit folgt - da nur Spieler 1 den Prozess (Z_t) steigern und nur Spieler 2 ihn senken kann - die Behauptung. \square

Wir möchten nun auch hier eine kurze Sensitivitätsanalyse anschließen. Insbesondere wollen wir untersuchen, ob bestimmte Parameter die Investitionsentscheidungen von Spieler 1 oder von Spieler 2 begünstigen.

Hierzu untersuchen wir den Schattenprozess auf Sensitivität bzgl. des Parameters α und bzgl. der Volatilität σ :

Proposition 4.4.11.

1. Falls die Parameter so gewählt werden, dass $-\beta_1\beta_2\sigma^2p > 2$, so ist der Schattenprozess (ξ_t) monoton steigend im Parameter α , wobei β_2 die negative Nullstelle der zentralen quadratischen Funktion (vgl. Anhang A.2, Proposition A.2.3) ist.
2. Andernfalls weist (ξ_t) ein lokales Minimum im Punkt α^* auf, wobei

$$\alpha^* = \left(W \left(\frac{\beta_1\beta_2\sigma^2p}{2e} \right)^{-1} + 1 \right) \beta_2$$

mit der *Lambert Funktion* W (vgl. Beispiel 2.3.2 und [fun]).

Anmerkung. Falls die Parameter so gewählt sind, dass $\alpha^* \geq 1$ so ist (ξ_t) also immer monoton fallend in α , da eine Voraussetzung an die Profitfunktion ist, dass $\alpha \in (0, 1)$.

Beweis. Betrachten wir (ξ_t) als eine Funktion in α , so ist

$$\begin{aligned}\xi_t(\alpha) &= \left(\frac{\psi(\alpha)\beta_1 p}{(\beta_1 - \alpha)} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} X_t \\ &= \left(\frac{-\frac{1}{2}\sigma^2(\alpha - \beta_1)(\alpha - \beta_2)\beta_1 p}{-(\alpha - \beta_1)} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} X_t\end{aligned}\quad (4.4.36)$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{\frac{\sigma^2 p}{2}\beta_1 \alpha - \frac{\sigma^2 p}{2}\beta_1 \beta_2}{2} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} X_t \\ &= (k_1 \alpha + k_2)^{-\frac{1}{\alpha}} X_t\end{aligned}\quad (4.4.37)$$

mit $k_i \in \mathbb{R}_+$, da $\beta_2 < 0$ (vgl. Proposition A.2.4).

Also ist die Ableitung

$$\xi_t'(\alpha) = X_t (k_1 \alpha + k_2)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\log(k_1 \alpha + k_2)}{\alpha^2} - \frac{k_1}{(k_1 \alpha + k_2)\alpha} \right).\quad (4.4.38)$$

Der linke Faktor in (4.4.38) ist in jedem Fall positiv. Der rechte Faktor ist genau dort nicht negativ, wo

$$(k_1 \alpha + k_2) \log(k_1 \alpha + k_2) > k_1 \alpha.$$

Für $k_2 > 1$ ist diese Ungleichung für alle $k_1 \alpha > 0$ erfüllt und somit ist in diesem Fall (ξ_t) streng monoton steigend in α . Damit folgt Behauptung (1).

Für $k_2 \leq 1$ gilt, dass die Ungleichung gilt, genau dann, wenn

$$k_1 \alpha > \exp \left(W \left(-\frac{k_2}{e} + 1 \right) - k_2 \right)\quad (4.4.39)$$

mit der Lambert Funktion W (vgl. Beispiel 2.3.2 und [fun]). Somit ist (ξ_t) monoton fallend in α so lange (4.4.39) nicht gilt und sonst steigend.

Die Eigenschaft $\exp(W(z)) = zW(z)^{-1}$ und Rücksubstitution der k_i liefert die Behauptung (2). \square

Proposition 4.4.12. Der Schattenprozess (ξ_t) ist monoton fallend in der Volatilität σ .

Beweis. Betrachten wir (ξ_t) mit der Darstellung aus (4.4.37) als Funktion in σ , d.h.

$$\xi_t(\sigma) = \left(\frac{\sigma^2 p}{2} \beta_1(\sigma) \alpha - \frac{\sigma^2 p}{2} \beta_1(\sigma) \beta_2(\sigma) \right)^{-\frac{1}{\alpha}} X_t,$$

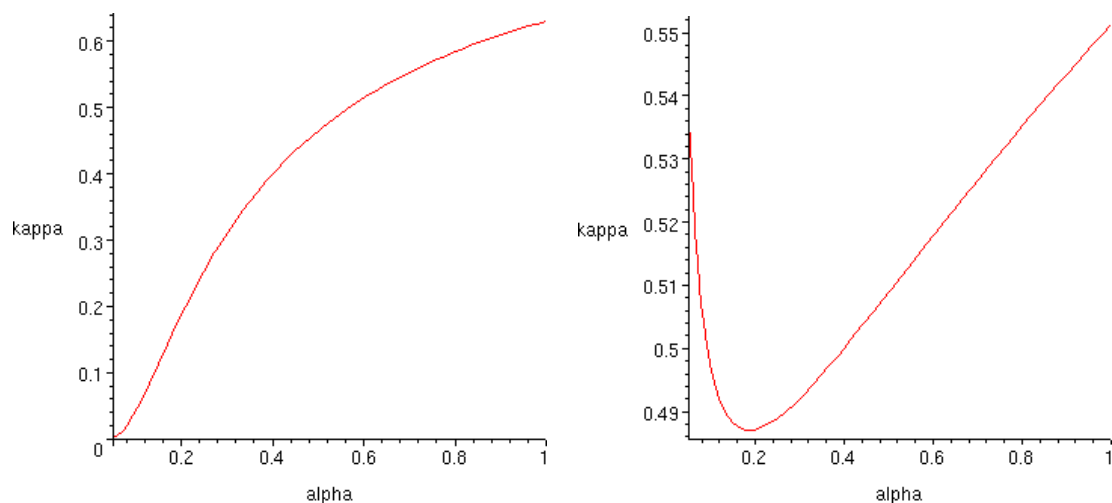


Abbildung 4.5: Sensitivität des Schattenprozesses $\xi_t = \kappa X_t$ bzgl. Parameter α für festes $X_t = x$.

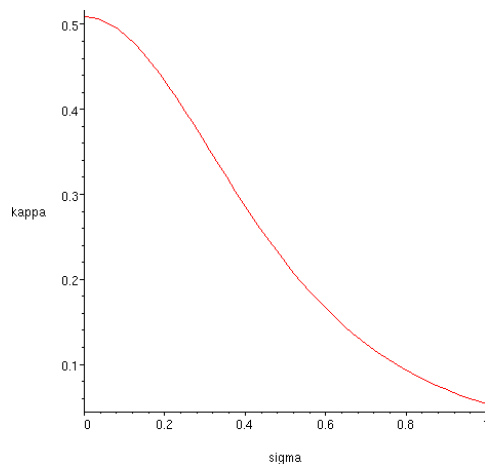


Abbildung 4.6: Sensitivität des Schattenprozesses $\xi_t = \kappa X_t$ bzgl. Volatilität σ für festes $X_t = x$.

so folgt sofort aus den Eigenschaften der Nullstellen $\beta_i(\sigma)$ der zentralen quadratischen Funktion (vgl. Anhang), dass der Term in der Klammer monoton steigt. Damit folgt die Behauptung. \square

Interpretation. Die Proposition besagt also, dass Spieler 2 im Falle von steigender Volatilität bereits zu einem niedrigeren Level des stochastischen Einflusses anfängt zu investieren. Höhere Volatilität wirkt sich also negativ auf die Investitionsstätigkeit von Spieler 1 aus.

Kapitel 5

Kooperative dynamische Spiele

Im letzten Kapitel dieser Arbeit möchten wir noch auf die Frage eingehen, inwiefern sich in den dynamischen Spielen aus dem vorigen Kapitel das Verhalten (und dadurch insbesondere der Profit) der Spieler verändert, wenn Kooperationen zwischen den Spielern zugelassen wird. Hierzu suchen wir die Strategien der Spieler, die den gesamten Gewinn beider Unternehmen maximieren. Dies funktioniert ähnlich wie die Suche nach der optimalen Strategie in einem Monopolspiel über die Hamilton Jacobi Bellman Gleichung.

Die wichtige Frage, die sich danach noch stellt, ist jedoch, in welchem Verhältnis bzw. nach welchem Algorithmus der Gewinn auf die beiden Spieler aufgeteilt werden soll.

Das Gleichgewicht, welches wir in diesem Abschnitt suchen, besteht also

- zum einen aus einem Abkommen über ein zu wählendes Strategiepaar und
- zum anderen aus einem Mechanismus, der den Gesamtgewinn fair auf beide Spieler aufteilt.

Wir setzen dabei voraus, dass die Auszahlungen beliebig teil- und transferierbar sind.

Diese allgemeine Methodik kooperativer Spiele ist kurz im Anhang A.1 beschrieben. Für genauere Informationen über kooperative Spiele und insbesondere kooperative stochastische Differentialspiele sei jedoch auf [Yeu06] verwiesen.

Wir wollen in den folgenden Abschnitten zunächst das mathematische Modell eines solchen Spiels aufstellen, um daraufhin das allgemeine Vorgehen zu erläutern und anhand der Spezialfälle aus Kapitel 4 zu verdeutlichen. Besonderes Interesse liegt dabei auf dem Vergleich der Strategien im kooperativen- und im nicht-kooperativen Spiel.

5.1 Problemstellung

Wir untersuchen in diesem Kapitel ein ähnliches Problem wie in Kapitel 4, d.h. wieder haben zwei Unternehmen (die Spieler 1 und 2) die Möglichkeit, zeitstetig ihren eigenen Technologiestand zu erhöhen, wobei bereits getätigte Investitionen erneut nicht rückgängig gemacht bzw. verkauft werden können.

Auch hier ist der Profit eines einzelnen Unternehmens abhängig von den Technologieständen beider Spieler. Bestehende Technologie wird mit konstanter Rate exponentiell abgeschrieben, zusätzliche Technologieinvestition verursacht variable Kosten.

Die Unsicherheit auf dem Markt wird abermals durch einen stochastischen Einfluss (z.B. den Wechselkurs) ausgedrückt, welcher von keinem Spieler beeinflusst werden kann.

Gesucht sind nun jedoch Investitionsratenpläne $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_t)$ und $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_t)$ - also zu jeder Zeit t ein Paar von Investitionsraten $(\tilde{\eta}_t, \tilde{\theta}_t)$ - die den Gesamtgewinn beider Spieler maximieren.

Im folgenden Abschnitt geben wir nun die mathematischen Rahmenbedingungen für Probleme solcher Art an.

5.2 Modellierung

Es sei in allen folgenden Abschnitten ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ gegeben, der die üblichen Voraussetzungen erfülle sowie eine auf diesem definierte eindimensionale Brownsche Bewegung (W_t) .

Bis auf die Auszahlungsfunktion bleibt das allgemeine Setting das gleiche wie bei nicht-kooperativen Spielen (vgl. Abschnitt 4.2), d.h. insbesondere sind die zulässigen Strategien und der Zustandsprozess die selben. Die kooperative Zielfunktion ist

$$\hat{J}(y; \eta, \theta) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-rt} \left(\sum_{i=1}^2 G_i(Y_t^{\eta, \theta}; \eta_t, \theta_t) \right) dt \middle| Y_0 = y \right]$$

mit $Y_0 = (X_0, C_0, D_0) \in \mathbb{R}_+^3$.

Sind die optimalen Strategien $(\tilde{\eta}, \tilde{\theta})$ der Spieler gefunden, stellt sich die Frage, wie der Gesamtgewinn $\hat{J}(y; \tilde{\eta}, \tilde{\theta})$ auf die Spieler aufgeteilt werden soll. Für eine faire Aufteilung muss gelten, dass beide Spieler mindestens den Gewinn erzielen, den sie im nicht-kooperativen Spiel erhalten würden.

Des Weiteren darf es keinem Spieler möglich sein, seinen Anteil durch eine andere Gewinnaufteilung zu erhöhen, während sich der Anteil des anderen Spielers nicht verschlechtert. Außerdem handelt es sich, nachdem beide Spieler ihren nicht-kooperativen Gewinn bekommen haben, um ein symmetrisches Verhandlungsspiel, so dass auch die Gewinnaufteilung symmetrisch geschehen sollte.

Wie die Aufteilung dann genau geschehen sollte, sagt uns eine so genannte Verhandlungslösung, deren Definition und wichtige Eigenschaften im Anhang A.1 erläutert sind. Um eine Analogie zu den nicht-kooperativen Spielen zu bewahren, möchten wir hier Verhandlungslösungen finden, die im Sinne von Nash optimal sind. Wir untersuchen deshalb so genannte Nash Verhandlungsstrategien (vgl. Anhang A.1).

5.3 Analyse

Unter der Voraussetzung, dass der Gesamtgewinn ohne weitere Kosten oder Beschränkungen auf die einzelnen Spieler transferiert werden können, erhalten wir die Lösung kooperativer stochastischer Differentialspiele mit Hilfe der stochastischen Kontrolltheorie. Der entscheidende Unterschied zu gewöhnlichen Kontrollproblemen liegt jedoch darin, dass der Gewinn am Ende fair auf die beiden Spieler verteilt werden muss.

Mit der Definition der Hamilton-Funktion

$$H(y, u, v, q_1, q_2, q_3, q_4) := G_1(y, u, v) + G_2(y, u, v) + (u - \delta_1 c)q_1 \\ + (v - \delta_2 d)q_2 + \mu x q_3 + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 q_4$$

gibt nun das folgende Verifikationstheorem Auskunft über die Form der Lösung:

Theorem 5.3.1. Existiert eine Funktion $J : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $J \in C^{2,1,1}$ und

$$|J(y)| \leq k \cdot (1 + |y|^n)$$

für gewisse Konstanten $k \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ sowie Funktionen $\tilde{u} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathcal{U}$, $\tilde{v} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathcal{V}$ mit

$$rJ(y) = \sup_{(u,v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}} H(y, u, v, J_c(y), J_d(y), J_x(y), J_{xx}(y)) \\ = H(y, \tilde{u}(y), \tilde{v}(y), J_c(y), J_d(y), J_x(y), J_{xx}(y)),$$

so sind $(\tilde{\eta}, \tilde{\theta}) = (\tilde{\eta}_t, \tilde{\theta}_t)$ mit

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_t &:= \tilde{u}(Y_t^*) \\ \tilde{\theta}_t &:= \tilde{v}(Y_t^*)\end{aligned}$$

die optimalen Strategien, wobei $Y_t^* = (X_t, C_t^*, D_t^*)$ der Zustandsprozess unter Verwendung der Strategien $\tilde{\eta}$ und $\tilde{\theta}$ ist. Es gilt

$$J(y) = \hat{J}(y; \tilde{\eta}, \tilde{\theta}) = \sup_{(\eta, \theta) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} \hat{J}(y; \eta, \theta).$$

Der Gesamtgewinn des Spiels soll nach der Verhandlungslösung

$$\hat{U}(y; \eta^*, \theta^*) = J_1(y; \eta^*, \theta^*) + \gamma(y; \eta^*, \theta^*) \quad (5.3.1)$$

$$\hat{V}(y; \eta^*, \theta^*) = J_2(y; \eta^*, \theta^*) + \gamma(y; \eta^*, \theta^*) \quad (5.3.2)$$

mit

$$\gamma(y; \eta^*, \theta^*) := \frac{1}{2}(J(y) - J_1(y; \eta^*, \theta^*) - J_2(y; \eta^*, \theta^*)) \geq 0 \quad (5.3.3)$$

aufgeteilt werden, wobei J_1 bzw. J_2 die Auszahlungsfunktionen von Spieler 1 bzw. 2 im nicht-kooperativen Spiel (vgl. Kapitel 4, Gleichungen (4.2.4)-(4.2.5)) sind und (η^*, θ^*) das Nash Gleichgewicht aus Theorem 4.3.3 ist.

Anmerkung. Da der Gewinnüberschuss des kooperativen Spiels nur in den nicht-kooperativen Zielfunktionen vom Nash Gleichgewicht abhängt, können wir unter Verwendung der nicht-kooperativen Wertfunktionen schreiben

$$\gamma(y) = \frac{1}{2}(J(y) - U(y) - V(y)).$$

Beweis. Die Optimalität der Strategien $(\tilde{\eta}, \tilde{\theta})$ folgt aus dem Verifikationstheorem im Ein-Personen-Fall (Theorem 4.3.1) mit zweidimensionalen Kontrollen.

Die Optimalität der Verhandlungslösung folgt aus Theorem A.1.6 im Anhang A.1 mit Die Positivität der Funktion γ folgt aus der kooperativen Optimalität der Strategien $\tilde{\eta}$ und $\tilde{\theta}$, da

$$J_1(y; \eta^*, \theta^*) + J_2(y; \eta^*, \theta^*) = \hat{J}(y; \eta^*, \theta^*) \leq \hat{J}(y; \tilde{\eta}, \tilde{\theta}).$$

□

In den folgenden Abschnitten sollen nun für die Spezialfälle aus dem vorigen Kapitel die konkreten optimalen Strategien und kooperativen Gewinnüberschüsse bestimmt werden.

5.4 Kooperative Gleichgewichte

Wir untersuchen nun zunächst Spiele mit quadratischen Kosten- und linearen Profitfunktionen, bevor wir zu linearen Kosten- und linearen Profitfunktionen übergehen. Eine kooperative Analyse des Spiels mit HARA Profitfunktionen macht keinen Sinn, da dieses im vorigen Kapitel als Nullsummenspiel modelliert wurde und daher der Gewinn des einen Spielers des anderen Verlust ist. Somit wäre einer der Spieler durch Kooperation in jedem Fall schlechter gestellt, was einer wichtigen Bedingung an eine Verhandlungslösung widerspricht (vgl. Definition A.1.3).

5.4.1 Quadratische Kostenfunktionen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die kooperative Version des Spiels aus Abschnitt 4.4.1, d.h. wir betrachten die Gewinnfunktionen

$$G_i(y, u, v) = \pi_i(y) - \varphi_i(u, v)$$

mit

$$\begin{aligned}\varphi_1(u, v) &= ((u + v)\rho + p)u \\ \varphi_2(u, v) &= ((u + v)\rho + p)v,\end{aligned}$$

was ökonomisch wie im nicht-kooperativen Fall interpretiert werden kann. Wie dort wählen wir die Profitfunktionen π_i zunächst linear.

Lineare Profitfunktionen

Es sei also

$$\begin{aligned}\pi_1(y) &= (n + a_1c - b_1d)x \\ \pi_2(y) &= (n + a_2d - b_2c)x\end{aligned}$$

mit den üblichen Voraussetzungen $n \in \mathbb{R}_+$ und $2a_2 > a_1 \geq a_2 > b_2 \geq b_1 > 0$.

Wie im nicht-kooperativen Spiel beschreiben hierbei die a_i den (positiven) Einfluss der eigenen Technologie auf den Profit, wohingegen die b_i die (negativen) Aspekte des Technologiestandes der Konkurrenz widerspiegeln. p ist der Fixanteil der Kosten für die Technologieerweiterung, ρ sorgt dafür, dass die Kosten einen variablen Anteil proportional zur Höhe der Gesamtinvestition enthalten.

Auch hier möchten wir bei der Analyse des Spiels zunächst zwischen reversiblen und irreversiblen Investitionen unterscheiden. Dabei gehen wir zunächst ausführlich auf den reversiblen Fall ein, um danach die dort gewonnenen Ergebnisse auf

den irreversiblen Fall zu übertragen.

Reversible Investitionen

Da es sich nun also um reversible Investitionen handelt, setzen wir

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathbb{R}.$$

In diesem Fall ist es von enormer Wichtigkeit, zwischen symmetrischem und asymmetrischem Duopol zu unterscheiden, da es beim symmetrischen Duopol egal ist, welche Firma investiert, solange die gemeinsame Investition hoch (bzw. niedrig) genug ist. Im asymmetrischen Duopol - also im Fall, dass eine Firma beispielsweise günstiger produzieren kann oder eine geringere Abschreibungsrate hat - werden wir jedoch ein anderes Bild sehen. Im folgenden Abschnitt sei jedoch zunächst ein Blick auf die Entscheidungen im symmetrischen Duopol geworfen.

Symmetrisches Duopol

Wir betrachten nun den Fall eines symmetrischen Duopols, d.h. die beiden Unternehmen haben die gleichen Parameter in den Kosten- bzw. Profitfunktionen. In diesem Setting gilt dann das folgende Theorem:

Theorem 5.4.1. Im kooperativen symmetrischen Duopolspiel mit reversiblen Investitionen ist die Wertfunktion gegeben durch

$$J(y) = Ax(c + d) + \tilde{g}(x) \quad (5.4.1)$$

mit

$$A = \frac{a - b}{r + \delta - \mu}$$

und $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$. Für die optimalen Strategien der Spieler gilt, dass

$$\tilde{\eta}_t + \tilde{\theta}_t = \frac{Ax - p}{2\rho}. \quad (5.4.2)$$

Der Gesamtgewinn wird nach der Verhandlungslösung (5.3.1) - (5.3.2) aufgeteilt, mit

$$\gamma(y; \eta^*, \theta^*) = \sum_{j=0}^2 \frac{(k_j - \frac{1}{2}\tilde{k}_j)x^j}{\psi(j)},$$

wobei ψ die zentrale quadratische Funktion aus A.2 ist, k_j die Koeffizienten der Funktion g im nicht-kooperativen Spiel (vgl. Korollar 4.4.2) sind und \tilde{k}_j nach

(5.4.4) gegeben sind.

Beweis. Theorem 5.3.1 folgend, muss für die gemeinsame Wertfunktion der Spieler die Hamilton Jacobi Bellman Gleichung gelten, d.h.

$$\begin{aligned}
rJ(y) &= \sup_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} \left\{ 2nx + (a-b)(c+d)x - (u+v)^2\rho - (u+v)p + \mu x J_x(y) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 J_{xx}(y) \right. \\
&\quad \left. + (u - \delta c)J_c(y) + (v - \delta d)J_d(y) \right\} \\
&= 2nx + (a-b)(c+d)x - \delta c J_c(y) - \delta d J_d(y) + \mu x J_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 J_{xx}(y) \\
&\quad + \sup_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} \left\{ -(u+v)^2\rho - (u+v)p + uJ_c(y) + vJ_d(y) \right\}. \quad (5.4.3)
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie - insbesondere $J_c \equiv J_d$ - und mit dem Ansatz

$$J(y) = Ax(c+d) + \tilde{g}(x)$$

erhalten wir für den Maximisator in (5.4.3) - und somit für den Kandidaten für das Gleichgewicht - die Bedingung

$$\tilde{u}(y) + \tilde{v}(y) = \frac{Ax - p}{2\rho}.$$

Wir erhalten also die HJB Gleichung

$$\begin{aligned}
r(Ax(c+d) + g(x)) &= 2nx + (a-b)(c+d)x - (c+d)\delta Ax + \mu x J_x(y) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 J_{xx}(y) + \frac{(Ax - p)^2}{4\rho}
\end{aligned}$$

Durch Ableiten nach c bzw. d der rechten und linken Seite dieser Gleichung erhalten wir die Konstante A als

$$A = \frac{a-b}{r + \delta - \mu}.$$

Übrig bleibt erneut eine gewöhnliche Differentialgleichung in g , nämlich

$$r\tilde{g}(x) = \mu x \tilde{g}_x(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \tilde{g}_{xx}(x) + mx + \frac{(Ax - p)^2}{4\rho},$$

mit $m := 2n$, welches dieselbe Gleichung wie (4.4.20) ist.

Also gilt mit der allgemeinen Lösung aus Anhang A.2 und den gleichen Begründun-

gen wie im Beweis von Theorem 4.4.1, dass

$$\tilde{g}(x) = - \sum_{j=0}^2 \frac{k_j x^j}{\psi(j)}$$

mit

$$k_0 = \frac{p^2}{4\rho}, \quad k_1 = m - \frac{Ap}{2\rho} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{A^2}{4\rho} \quad (5.4.4)$$

und daher $\tilde{g} \in C^2$. Somit folgen die Aussagen (5.4.1)-(5.4.2).

Die Verhandlungslösung folgt direkt aus Theorem 5.3.1, wobei wir die Form von γ durch Einsetzen der kooperativen Wertfunktion J aus (5.4.1) sowie U und V aus Korollar 4.4.2 in (5.3.3) erhalten:

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= \frac{1}{2}(J(y) - U(y) - V(y)) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{g}(x) - 2g(x)) \end{aligned}$$

mit g aus Korollar 4.4.2. □

Wir möchten nun noch einen Blick darauf werfen, was sich ändert, wenn wir anstelle identischer Unternehmen asymmetrische Spieler betrachten.

Asymmetrisches Duopol

Wir untersuchen ein asymmetrisches Duopol, in dem sich nur die Profitfunktionen der beiden Spieler in ihren Parametern unterscheiden, wohingegen die Kostenfunktionen weiterhin dieselben Parameter besitzen. Des Weiteren können sich auch die Abschreibungsraten δ_1 und δ_2 der Spieler unterscheiden.

Wie wir später sehen werden, ist es in diesem Modell vonnöten, eine obere und untere Schranke für die Investitionsraten einzuführen, da die Unternehmen sonst möglicherweise mit unendlicher Rate kaufen oder verkaufen, was wir umgehen wollen. Es gelte also

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = [-K, K]$$

mit $K \in \mathbb{R}$ und den üblichen Voraussetzungen. Unter diesen Annahmen gilt dann für die Wertfunktion und die optimalen Strategien im reversiblen Investitionsspiel mit linearen Kosten- und Profitfunktionen folgendes Theorem:

Theorem 5.4.2. Sei $2a_2 > a_1 > a_2 > b_2 > b_1 > 0$ und $\delta_1 \leq \delta_2$. Dann ist im kooperativen asymmetrischen Duopol mit reversiblen Investitionen die Wertfunktion

gegeben durch

$$J(y) = Axc + Bxd + \tilde{g}(x)$$

mit

$$A = \frac{a_1 - b_2}{r - \mu + \delta_1}$$

$$B = \frac{a_2 - b_1}{r - \mu + \delta_2}$$

und $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R}_+)$. Die im kooperativen Sinn optimalen Strategien sind durch

$$\tilde{\eta}_t = \begin{cases} K & x > x_1^u \\ \frac{2\rho K - p + Ax}{2\rho} & x_1^d \leq x \leq x_1^u \\ -K & x < x_1^d \end{cases} \quad (5.4.5)$$

$$\tilde{\theta}_t = \begin{cases} K & x > x_2^u \\ \frac{Bx - 2\rho K - p}{2\rho} & x_2^d \leq x \leq x_2^u \\ -K & x < x_2^d \end{cases} \quad (5.4.6)$$

gegeben, wobei

$$x_1^d = \frac{p - 4\rho K}{A}$$

$$x_1^u = \frac{p}{A}$$

$$x_2^d = \frac{p}{B}$$

$$x_2^u = \frac{4\rho K + p}{B}.$$

Der Gesamtgewinn wird nach der Verhandlungslösung (5.3.1) - (5.3.2) aufgeteilt, wobei

$$\gamma(y; \eta^*, \theta^*) = \frac{1}{2}\tilde{g}(x) - g_1(x) - g_2(x)$$

mit den Funktionen g_1 und g_2 aus Theorem 4.4.1.

Beweis. Folgen wir Theorem 5.3.1, so muss für die gemeinsame Wertfunktion der Spieler gelten, dass sie die Hamilton Jacobi Bellman Gleichung erfüllt:

$$rJ(y) = \sup_{(u,v) \in [-K,K]^2} \left\{ (2n + (a_1 - b_2)c + (a_2 - b_1)d)x - (u + v)^2\rho - (u + v)p \right. \\ \left. + \mu x J_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 J_{xx}(y) + (u - \delta_1 c)J_c(y) + (v - \delta_2 d)J_d(y) \right\}.$$

Wählen wir für J den Ansatz

$$J(y) = Acx + Bdx + g(x),$$

so lautet die HJB Gleichung

$$\begin{aligned} r(Acx + Bdx + g(x)) &= (2n + (a_1 - b_2)c + (a_2 - b_1)d)x \\ &\quad - \delta_1 cAx - \delta_1 dBx + \mu xAc + \mu xBd \\ &\quad + \mu xg'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 g''(x) \\ &\quad + \sup_{(u,v) \in [-K,K]^2} \{ -(u+v)^2 \rho - (u+v)p \\ &\quad + uAx + vBx \} \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

und wir erhalten die Konstanten A und B wie in den vorigen Modellen durch Separation, bzw. durch Ableiten beider Seiten nach c bzw. d :

$$A = \frac{a_1 - b_2}{r - \mu + \delta_1} \quad \text{und} \quad B = \frac{a_2 - b_1}{r - \mu + \delta_2}. \quad (5.4.8)$$

Beachte, dass auf Grund der Voraussetzungen an die Parameter gilt, dass $A > B$, was für den nächsten Teil des Beweises unabdinglich ist.

Betrachten wir nun die in (5.4.7) zu maximierende Funktion ψ :

$$\psi(u, v) := -(u+v)^2 \rho - (u+v)p + Axu + Bxv.$$

Deren Gradient ist gegeben durch

$$\nabla \psi(u, v) = \begin{pmatrix} -2u\rho - 2v\rho - p + Ax \\ -2u\rho - 2v\rho - p + Bx \end{pmatrix}.$$

Somit hat die Gleichung $\nabla \psi(u, v) = 0$ keine für allgemeine Parameterkonfiguration gültige Lösung. Wir müssen ψ also auf dem Rand des Definitionsbereichs untersuchen, d.h. wir unterscheiden die beiden Fälle

1. $u = K$, v optimal zu bestimmen und
2. $v = -K$, u optimal zu bestimmen.

Dies genügt, da $A > B$ und somit die Fälle $u = -K, v > -K$ und $v = K, u < K$ keine Maximumstellen sein können.

Sei also zunächst $u = K$. Dann können wir eine Funktion $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren, als

$$h_2(v) := f(K, v).$$

Diese Funktion nimmt ihr Maximum an der Stelle

$$\tilde{v} = \frac{-2\rho K - p + Bx}{2\rho}$$

an, jedoch nur dann, wenn $\tilde{v} \in [-K, K]$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{p}{B} \leq x \leq \frac{4\rho K + p}{B}.$$

Außerhalb dieses Intervalls wird das Maximum bei $-K$ bzw. K angenommen und somit folgt die Behauptung (5.4.6).

Sei nun $v = -K$. Dann können wir ebenso eine Funktion $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren als $h_1(v) := f(u, -K)$. Diese nimmt ihr Maximum an der Stelle

$$\tilde{u} = \frac{2\rho K + p - Ax}{2\rho}$$

an. Wie oben jedoch nur, falls $\tilde{u} \in [-K, K]$, d.h.

$$\frac{4\rho K + p}{A} \leq x \leq \frac{p}{A}.$$

Ansonsten wird das Maximum bei $-K$ bzw. K angenommen und somit folgt die Behauptung (5.4.5).

Was bleibt ist zu zeigen, dass die Lösung der HJB Gleichung (5.4.7) tatsächlich zweimal differenzierbar in x ist.

Setzen wir die Konstanten aus (5.4.8) und (5.4.8) in die Gleichung (5.4.7) ein, so bleibt nur eine gewöhnliche Differentialgleichung übrig, nämlich

$$r\tilde{g}(x) = 2nx + \mu x \tilde{g}'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \tilde{g}''(x) + \Psi(x) \quad (5.4.9)$$

wobei $\Psi(x) := \sup_{(u,v)} \psi(u, v)$ und somit

$$\Psi(x) = \begin{cases} (2p - 4\rho K - (A + B)x)K & x < \frac{p - 4\rho K}{A} \\ \frac{1}{4\rho} (p^2 + (4\rho AK - 4\rho BK - 2pA)x + A^2 x^2) & \frac{p - 4\rho K}{A} \leq x \leq \frac{p}{A} \\ (A - B)Kx & \frac{p}{A} < x < \frac{p}{B} \\ \frac{1}{4\rho} (p^2 + (4\rho AK - 4\rho BK - 2pB)x + B^2 x^2) & \frac{p}{B} \leq x \leq \frac{p + 4\rho K}{B} \\ (-2p - 4\rho K + (A + B)Kx)K & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine kleine Rechnung bestätigt $\Psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Daraus folgt die Behauptung, da in

der allgemeinen Lösung der DGL (5.4.9) nur die Stammfunktion von Ψ auftaucht.

Die Optimalität der Verhandlungslösung folgt analog zum reversiblen Fall. \square

Anmerkung. Im Gleichgewicht des kooperativen Spiels wird also für bestimmte Werte des stochastischen Multiplikators der Fall eintreten, dass ein Spieler jederzeit seine Technologie mit der Maximalrate erhöht, während der andere seine mit der Maximalrate verringert, da

$$\frac{p - 4\rho K}{A} < \frac{p}{A} < \frac{p}{B} < \frac{p + 4\rho K}{B}.$$

Wir möchten nun zum eigentlichen Thema dieser Arbeit zurückkehren, nämlich zu Spielen mit irreversiblen Investitionen.

Irreversible Investitionen

Im irreversiblen Fall ändern sich in diesem Abschnitt gegenüber Abschnitt 5.4.1 nur die Strategiemengen, da ein Senken des Technologiestandes nun nicht mehr erlaubt ist und somit die Steuerungen nicht negativ werden dürfen, d.h.

$$\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}_+.$$

Die Zielfunktion, der Zustandsprozess sowie die Profit- und Kostenfunktionen seien dieselben wie in 5.4.1. Auch hier müssen wir dann zwischen symmetrischem und asymmetrischem Duopol unterscheiden.

Symmetrisches Duopol

Im symmetrischen Duopol seien die gleichen Voraussetzungen, Funktionen und Parameter gegeben wie in Abschnitt 5.4.1 - mit Ausnahme der obigen Strategiemengen. Dann gilt das folgende Theorem:

Theorem 5.4.3. Im kooperativen symmetrischen Duopolspiel mit irreversiblen Investitionen ist die Wertfunktion gegeben durch

$$J(y) = Ax(c + d) + \tilde{g}(x) \quad (5.4.10)$$

mit

$$A = \frac{a - b}{r + \delta - \mu} \quad (5.4.11)$$

und $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$. Für die im kooperativen Sinn optimalen Strategien gilt, dass

$$\tilde{\eta}_t + \tilde{\theta}_t = \begin{cases} \frac{Ax - p}{2\rho} & x \geq \frac{p}{A} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Gesamtgewinn wird nach der Verhandlungslösung (5.3.1) - (5.3.2) aufgeteilt, mit

$$\gamma(y; \eta^*, \theta^*) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\tilde{H}_1 - H_1\right)x^{\beta_1} + \frac{mx}{2\psi(1)} & x < x^* \\ \frac{1}{2}\tilde{H}_1x^{\beta_1} - H_2x^{\beta_2} + \sum_{j=0}^2 \frac{k_jx^j}{\psi(j)} - \frac{mx}{2\psi(1)} & x^* \leq x < \tilde{x} \\ \left(\frac{1}{2}\tilde{H}_2 - H_2\right)x^{\beta_2} + \sum_{j=0}^2 \frac{(k_j - \frac{1}{2}\tilde{k}_j)x^j}{\psi(j)} & x \geq \tilde{x}, \end{cases}$$

wobei ψ die zentrale quadratische Gleichung mit den Nullstellen β_i ist und H_i bzw. k_j in (4.4.27) bzw. (4.4.26) sowie \tilde{H}_i bzw. \tilde{k}_j in (4.4.23) bzw. (4.4.21) gegeben sind.

Beweis. Wie im Theorem des symmetrischen Duopols bei reversiblen Investitionen erhalten wir die HJB Gleichung für die Wertfunktion als

$$\begin{aligned} rJ(y) &= 2nx + (a - b)(c + d)x - \delta cJ_c(y) - \delta dJ_d + \mu xJ_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2J_{xx}(y) + \\ &+ \sup_{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2} \{ -(u + v)^2\rho - (u + v)p + uJ_c(y) + vJ_d(y) \} \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

für alle $y = (x, c, d) \in \mathbb{R}_+^3$ und somit über den Ansatz

$$J(y) = Ax(c + d) + \tilde{g}(x)$$

die Bedingung an die Kandidaten für die optimalen Strategien

$$\tilde{u}(y) + \tilde{v}(y) = \frac{Ax - p}{2\rho}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung 5.4.12 ein und substituieren $z := c + d$, $m := 2n$ sowie $\tilde{a} := (a - b)$, so erhalten wir genau die Form der HJB Gleichung aus dem Beweis von Theorem 4.4.3. Somit folgen die Aussagen (5.4.10) und (5.4.11) mit der gleichen Argumentation wie dort.

Insbesondere gilt also hier, dass

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \tilde{H}_1 x^{\beta_1} - \frac{mx}{\psi(1)} & x < \frac{r + \delta - \mu}{a - b} =: \tilde{x} \\ \tilde{H}_2 x^{\beta_2} - \sum_{j=0}^2 \frac{\tilde{k}_j x^j}{\psi(j)} & x \geq \tilde{x} \end{cases}$$

mit \tilde{H}_i aus (4.4.23) und \tilde{k}_j aus (4.4.21). Damit folgt auch direkt die Form von γ aus

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= \frac{1}{2}(J(y) - U(y) - V(y)) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{g}(x) - 2g(x)) \end{aligned}$$

mit der Funktion g aus Theorem 4.4.4. \square

Auch im Falle irreversibler Investitionen möchten wir im folgenden Abschnitt den Unterschied zwischen symmetrischem und asymmetrischem Duopol verdeutlichen.

Asymmetrisches Duopol

Abschließend möchten wir nun das asymmetrische Duopol mit irreversiblen Investitionen betrachten, d.h. das Spiel mit quadratischen Kosten- und linearen Profitfunktionen π_i bzw. φ_i .

Mit den gleichen Voraussetzungen an die Parameter wie im asymmetrischen reversiblen Fall und der Beschränkung der Wertebereiche der Strategien auf

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = [0, K]$$

gilt dann das folgende Theorem:

Theorem 5.4.4. Sei $2a_1 > a_2 > b_2 > b_1 > 0$ und $\delta_1 \leq \delta_2$. Dann ist die Wertfunktion im kooperativen asymmetrischen Duopolspiel mit irreversiblen Investitionen gegeben durch

$$J(y) = Axc + Bxd + \tilde{g}(x)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_1 - b_2}{r - \mu + \delta_1} \\ B &= \frac{a_2 - b_1}{r - \mu + \delta_2} \end{aligned}$$

und $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R}_+)$. Die optimalen Strategien sind durch

$$\tilde{\eta}_t = \begin{cases} K & x > x_1^u \\ \frac{Ax - p}{2\rho} & x_1^d \leq x \leq x_1^u \\ 0 & x < x_1^d \end{cases} \quad (5.4.13)$$

gegeben, wobei

$$\tilde{\theta}_t = \begin{cases} K & x > x_2^u \\ \frac{Bx - 2\rho K - p}{2\rho} & x_2^d \leq x \leq x_2^u \\ 0 & x < x_2^d \end{cases} \quad (5.4.14)$$

mit

$$\begin{aligned} x_1^d &= \frac{p}{A} \\ x_1^u &= \frac{p + 2\rho K}{A} \\ x_2^d &= \frac{p + 2\rho K}{B} \\ x_2^u &= \frac{4\rho K + p}{B} \end{aligned}$$

Der Gesamtgewinn wird nach der Verhandlungslösung (5.3.1) - (5.3.2) aufgeteilt, mit

$$\gamma(y; \eta^*, \theta^*) = \frac{1}{2}\tilde{g}(x) - g_1(x) - g_2(x)$$

mit den Funktionen g_1 und g_2 aus Theorem 4.4.7.

Beweis. Der Beweis funktioniert analog zu dem von Theorem 5.4.2 mit dem Unterschied, dass $-K$ durch 0 ersetzt werden muss. \square

Interessieren wir uns für das Spiel ohne maximale Investitionsrate, so ist es hier problemlos möglich, in den optimalen Strategien (5.4.13) und (5.4.14) den Parameter K gegen unendlich laufen zu lassen. Also gilt das folgende Korollar:

Korollar 5.4.5. Im kooperativen asymmetrischen irreversiblen Investitionsspiel mit linearen Profit- und quadratischen Kostenfunktionen gilt unter den üblichen Voraussetzungen ohne Beschränkung der Investitionsrate, dass im optimalen Fall ausschließlich Spieler 1 investiert und zwar mit der Rate

$$\tilde{\eta}_t = \begin{cases} \frac{Ax - p}{2\rho} & x \geq \frac{p}{A} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit denselben Bezeichnungen wie in Theorem 5.4.4. Die Verhandlungslösung bleibt ebenfalls dieselbe.

Wir sind nun auch in der Lage, im kooperativen asymmetrischen Spiel das im kooperativen Sinn optimale Verhalten der Spieler zu vergleichen, je nachdem, ob es sich um reversible oder um irreversible Investitionen handelt.

- Proposition 5.4.6.**
1. Spieler 1 beginnt im reversiblen Spiel früher (im Sinne eines niedrigeren Levels des stochastischen Einflusses) mit nicht-negativen Investitionen und erreicht die Maximalrate auch früher.
 2. Spieler 2 beginnt in beiden Spielen zum gleichen Level mit positiven Investitionen und erreicht auch die Maximalrate zum gleichen Level.
 3. Die optimalen Investitionsraten beider Spieler sind im irreversiblen Spiel höher als im reversiblen Fall.

Des Weiteren können wir nun die Strategien und Technologiestände im kooperativen Spiel mit denen im nicht-kooperativen Spiel vergleichen. Dies möchten wir anhand der irreversiblen asymmetrischen Duopolspiele tun.

Den Zusammenhang zwischen kooperativem und nicht-kooperativem Spiel beschreibt die folgende Proposition:

- Proposition 5.4.7.**
1. Die Gewinne im kooperativen Spiel sind höher als die im nicht-kooperativen Spiel.
 2. Im nicht-kooperativen Spiel fangen die Spieler bei einem geringeren Level des stochastischen Multiplikators an mit positiver Rate zu investieren, d.h. Nicht-Kooperation führt zu Überinvestitionen.
 3. Die Technologiestände der Spieler sind im nicht-kooperativen Spiel höher als im kooperativen Fall.

Beweis. 1. Die erste Aussage folgt direkt aus der Verhandlungslösung aus Theorem 5.3.1.

2. Hierfür müssen x_i^* im nicht-kooperativen Spiel mit x_i^d im kooperativen verglichen werden. Damit folgt die Aussage, da

$$x_1^* = \frac{(r + \delta_1 - \mu)p}{a_1} < \frac{(r + \delta_1 - \mu)p}{a_1 - b_2} = x_1^d$$

sowie

$$x_2^* = \frac{(r + \delta_2 - \mu)p}{2a_2 - a_1} < \frac{(r + \delta_1 - \mu)(p + 2\rho K)}{a_2} < \frac{(r + \delta_1 - \mu)(p + 2\rho K)}{a_2 - b_1} = x_2^d$$

weil $2a_2 > a_1 > a_2 > b_2 > b_1$ und $\rho K > 0$.

3. Diese Aussage folgt direkt aus Aussage (2) mit Hinblick auf die Technologieprozesse (C_t) und (D_t) .

□

Die Aussagen von Proposition 5.4.7 sind anhand eines simulierten Pfades des stochastischen Einflusses (Abb. 5.1) in der Abbildung 5.2 veranschaulicht.

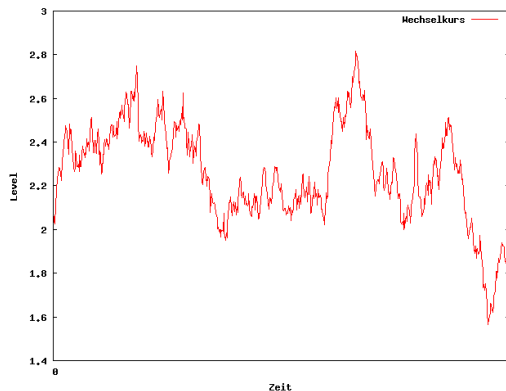


Abbildung 5.1: Realisierung eines Pfades des Wechselkurses mit den Parametern $\mu = 0.01$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.04$.

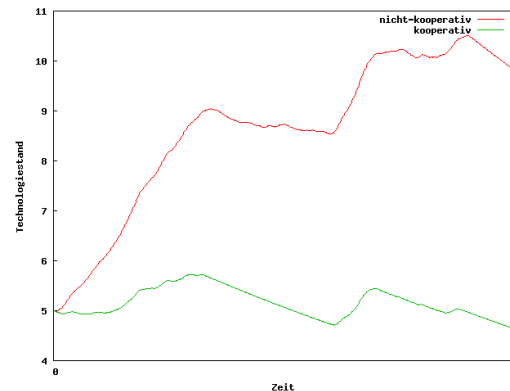


Abbildung 5.2: Optimale Technologiestände von Spieler 1 bei Kooperation und Nicht-Kooperation.

5.4.2 Lineare Kostenfunktionen

Der Vollständigkeit halber möchten wir in diesem letzten Abschnitt noch die Lösung des kooperativen Investitionsspiels mit linearen Kostenfunktionen angeben. Wie bereits erwähnt beschränken wir uns hierbei auf den Fall von linearen Profitfunktionen, da das nicht-kooperative Spiel mit HARA Profitfunktionen als Nullsummenspiel modelliert wurde und somit nicht in analoger Form als kooperatives Spiel formuliert werden kann.

Seien also

$$G_i(y, u, v) = \pi_i(y) - \varphi_i(u, v)$$

mit

$$\begin{aligned}\varphi_1(u, v) &= pu \\ \varphi_2(u, v) &= pv\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\pi_1(x, c, d) &= (n + a_1c - b_1d)X_t \\ \pi_2(x, c, d) &= (n + a_2d - b_2c)X_t.\end{aligned}$$

Dann gilt unter den gleichen Modellannahmen wie in Abschnitt 4.4.2 das folgende Theorem für die optimalen Strategien und die kooperative Wertfunktion:

Theorem 5.4.8. Die Wertfunktion im kooperativen Spiel mit linearen Kosten- und Profitfunktionen ist gegeben durch

$$J(y) = Axc + Bxd + \tilde{g}(x)$$

mit $A, B \in R$ und $\tilde{g} \in C^2$. Die im kooperativen Sinn optimalen Strategien sind $(\tilde{\eta}_t, \tilde{\theta}_t)$ mit

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_t &= \begin{cases} u_{max} & X_t \geq x_1^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \tilde{\theta}_t &= \begin{cases} v_{max} & X_t \geq x_2^* \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}x_1^* &= \frac{r - \mu + \delta_1}{(a_1 - b_2)p} \\ x_2^* &= \frac{r - \mu + \delta_2}{(a_2 - b_1)p}.\end{aligned}$$

Der Gesamtgewinn wird nach der Verhandlungslösung (5.3.1) - (5.3.2) aufgeteilt, mit

$$\gamma(y; \eta^*, \theta^*) = \frac{1}{2}\tilde{g}(x) - g_1(x) - g_2(x)$$

mit den Funktionen g_1 und g_2 aus Theorem 4.4.8.

Beweis. In diesem Fall lautet die HJB für die Wertfunktion

$$\begin{aligned}rJ(y) &= (2n + (a_1 - b_2)c + (a_2 - b_1)d)x \\ &\quad + \mu x J_x(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 J_{xx}(y) - \delta_1 c J_c(y) - \delta_2 d J_d(y) \\ &\quad + \sup_{(u,v) \in [0, u_{max}] \times [0, v_{max}]} \{u J_c(y) + v J_d(y) - (u + v)p\}.\end{aligned}$$

Die Kandidaten für die optimalen Strategien können also wie folgt berechnet wer-

den:

$$\tilde{u}(y) = \begin{cases} u_{max} & J_c(y) \geq p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\tilde{v}(y) = \begin{cases} v_{max} & J_d(y) \geq p \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit dem Ansatz

$$J(y) = Axc + Bxd + g(x)$$

für die Wertfunktion in der HJB Gleichung erhalten wir wie in den obigen Modellen die Konstanten durch Separation:

$$A = \frac{a_1 - b_2}{r - \mu + \delta_1}$$

$$B = \frac{a_2 - b_1}{r - \mu + \delta_2}$$

Nach Einsetzen dieser Konstanten in die HJB Gleichung wird diese wieder zu einer gewöhnlichen DGL und die Behauptungen folgen auf analoge Art und Weise wie in den Beweisen der Spiele mit quadratischen Kostenfunktionen. \square

Anhang A

Mathematische und ökonomische Grundlagen

A.1 Wichtiges aus der kooperativen Spieltheorie

Wir beschränken uns bei diesem kurzen Überblick auf kooperative Spiele. Für die Grundlagen der nicht-kooperativen Spieltheorie sei auf [Ber04] oder [Sch03] verwiesen. In diesem Teil orientieren wir uns am Kapitel über kooperative Spiele in [Jer06].

Definition A.1.1. Ein kooperatives Spiel (in Normalform repräsentiert) ist ein Tripel $\Gamma_C := (\mathcal{N}, (\mathcal{U}_i)_{i \in \mathcal{N}}, J)$, wobei

- $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ die Menge der Spieler,
- \mathcal{U}_i die Menge der reinen Strategien von Spieler i und
- $J : \bigotimes_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}$ die gemeinsame Auszahlung an die Gesamtmenge der Spieler ist.

Wir möchten uns im Folgenden auf Spiele mit genau zwei Spielern beschränken, d.h. $\Gamma_C = (\{1, 2\}, (\mathcal{U}, \mathcal{V}), J)$.

Dies führt zur folgenden Definition:

Definition A.1.2. Wir nennen ein Strategietupel $(u^*, v^*) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ optimal im kooperativen Sinn, falls

$$J(u^*, v^*) \geq J(u, v) \quad \forall (u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}.$$

Diese Definition ist einleuchtend, da die Spieler im kooperativen Spiel als Einheit agieren. Die wichtige Frage nach der Wahl der Strategien ist nun, wie die Spieler

den Gesamtgewinn fair aufteilen. Wir befinden uns also in einer Verhandlungssituation. Dieser Begriff ist wie folgt definiert:

Definition A.1.3. Eine Verhandlungssituation ist ein Tupel (B, d) mit:

- $B \subset \mathbb{R}_2$ ist die Menge der möglichen Auszahlungen (b_1, b_2) , d.h. ist z.B. der Gesamtgewinn gleich S , so muss gelten $b_1 + b_2 \leq S$.
- $d = (d_1, d_2)$ ist der Vektor der sicheren Auszahlungen, d.h. z.B. im nicht-kooperativen Spiel bekäme Spieler i die Auszahlung d_i .
- $b_i \geq d_i \forall b \in B$, sonst würden die Spieler nicht um (b_1, b_2) verhandeln.
- $\exists b = (b_1, b_2) \in B$ mit $b_i > d_i$. Denn wäre $d_i \geq b_i$ für alle b_i eines Spielers, so würde dieser die sichere Auszahlung d_i bevorzugen.

Die Menge aller möglichen Verhandlungssituationen bezeichnen wir mit \mathcal{B} .

Auskunft über die Gewinnverteilung in einer Verhandlungssituation (B, d) gibt dann die so genannte Verhandlungslösung:

Definition A.1.4. Eine Verhandlungslösung ist eine Funktion $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$, die jeder möglichen Verhandlungssituation eine Auszahlung zuordnet, d.h.

$$\phi(B, d) \in B \quad \forall (B, d) \in \mathcal{B}.$$

Nun ist die Frage, wie die Verhandlungslösung gewählt werden soll. Da wir im nicht-kooperativen Spiel Nash Gleichgewichte bestimmt haben, möchten wir weiterhin Gleichgewichte finden, die im Sinne von Nash optimal sind und untersuchen deshalb unser Spiel auf die so genannte Nash Verhandlungslösung.

Definition A.1.5. Die Nash Verhandlungslösung ist eine Verhandlungsstrategie $\phi^* : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ mit den folgenden Eigenschaften:

PO pareto-optimal, d.h. es existiert keine Auszahlung $(b_1, b_2) \in B$ mit

$$\phi_1^*(B, d) < b_1 \quad \text{und} \quad \phi_2^*(B, d) < b_2.$$

S symmetrisch, d.h. ist $d_1 = d_2$ und gilt mit $(b_1, b_2) \in B$ auch $(b_2, b_1) \in B$, so ist $\phi_1^*(B, d) = \phi_2^*(B, d)$.

NU nutzenunabhängig, d.h. für alle positiven affinen Transformationen T gilt $T(\phi^*(B, d)) = \phi^*(T(B), T(d))$

UI unabhängig von irrelevanten Alternativen, d.h. für alle (B, d) und (\tilde{B}, d) mit $\phi^*(\tilde{B}, d) \in B \subset \tilde{B}$ gilt $\phi^*(\tilde{B}, d) = \phi^*(B, d)$.

Wie nun solche Strategien konkret zu finden sind, zeigt Nash in seinem entscheidenden Beitrag zur kooperativen Spieltheorie ([Nas50]):

Theorem A.1.6. Es gibt in jeder Verhandlungssituation genau eine Nash Verhandlungslösung, und deren Auszahlungspaar ist die eindeutige Maximumstelle (b_1^*, b_2^*) der Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ mit $f(b_1, b_2) = (b_1 - d_1)(b_2 - d_2)$.

A.2 Eine zentrale Differentialgleichung

Eine wichtige gewöhnliche Differentialgleichung, die in beinahe jeder Lösungsmethode dieser Arbeit zur Anwendung kommt, ist die DGL

$$cf(x) = \sum_{i=1}^n h_i x^{\gamma_i} + bx f'(x) + ax^2 f''(x) \quad (\text{A.2.1})$$

mit $h_i \in \mathbb{R}$, $a, b, c, \gamma_i \in \mathbb{R}_+$ und $c > b$, die wir deshalb als die zentrale Differentialgleichung bezeichnen.

Proposition A.2.1. Die DGL (A.2.1) hat die allgemeine Lösung

$$f(x) = - \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{\psi(\gamma_i)} x^{\gamma_i} + B_1 x^{\tilde{z}_1} + B_2 x^{\tilde{z}_2} \quad (\text{A.2.2})$$

mit $B_i \in \mathbb{R}$, der Funktion

$$\psi(z) = az(z-1) + bz - c \quad (\text{A.2.3})$$

und deren Nullstellen $\tilde{z}_{1/2}$.

Beweis. Einsetzen von (A.2.2) in (A.2.1) liefert die Behauptung. \square

Da auch die Funktion ψ - und insbesondere deren Nullstellen - eine wichtige Rolle in Arbeit spielt bezeichnen wir ψ als die zentrale quadratische Funktion.

Proposition A.2.2. ψ ist strikt konvex und nimmt das (einzige) Minimum an der Stelle

$$\tilde{z} = \frac{a-b}{2a}$$

an.

Beweis. Es gilt

$$\psi'(z) = az + a(z-1) + b.$$

Nullsetzen liefert das Minimum, da

$$\psi''(z) = 2a > 0.$$

□

Proposition A.2.3. Die (unterschiedlichen) Nullstellen von ψ sind

$$\tilde{z}_1 = \frac{a - b + \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ac}}{2a} \quad (\text{A.2.4})$$

$$\tilde{z}_2 = \frac{a - b - \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ac}}{2a}. \quad (\text{A.2.5})$$

Beweis. $\psi(\tilde{z}_i)$ folgt direkt. Da zusätzlich $b < c$ gilt, ist

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4ac > (a - b)^2 > 0$$

und somit folgt $\tilde{z}_1 > \tilde{z}_2$. □

Die für diese Arbeit wohl wichtigste Aussage über die Nullstellen liefert folgende Proposition.

Proposition A.2.4. Es gilt $\tilde{z}_1 > 1$ und $\tilde{z}_2 < 0$.

Beweis. Da $c > b$, ist auch

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ac} > \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b.$$

Damit folgt

$$\tilde{z}_1 > \frac{a - b + a + b}{2a} = 1.$$

Analog folgt

$$\tilde{z}_2 < \frac{a - b - a - b}{2a} = -\frac{b}{a} \leq 0$$

□

Eine weitere Eigenschaft der Nullstellen, die wir in dieser Arbeit benötigen, ist die folgende:

Proposition A.2.5. Für die Nullstellen \tilde{z}_1 und \tilde{z}_2 von ψ gilt

$$\frac{(z - \tilde{z}_1)(z - \tilde{z}_2)}{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2} = -\frac{\psi(z)}{c} \quad (\text{A.2.6})$$

Beweis. Es gilt

$$\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 = -\frac{c}{a}$$

sowie

$$\psi(z) = a(z - \tilde{z}_1)(z - \tilde{z}_2)$$

und somit

$$(z - \tilde{z}_1)(z - \tilde{z}_2) = \frac{\psi(z)}{a} = -\frac{\psi(z)\tilde{z}_1\tilde{z}_2}{c}.$$

□

Da wir in dieser Arbeit des öfteren Sensitivitätsanalysen durchführen, benötigen wir die folgende Aussage für die positiven Nullstelle \tilde{z}_1 :

Proposition A.2.6. \tilde{z}_1 ist streng monoton fallend in a .

Beweis. Es gilt:

$$\tilde{z}'_1(a) \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}_+.$$

Da weiter

$$\tilde{z}_1(a) > 1$$

und

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{z}_1(a) = 1,$$

folgt die Behauptung.

□

Literaturverzeichnis

- [Abe95] ABEL, A.B. & EBERLY, J.C. *Optimal Investment with Costly Reversibility*. Review of Economic Studies 63(1996), 581-593.
- [Abe97] ABEL, A.B. & EBERLY, J.C. *An exact solution for the investment and value of a firm facing uncertainty, adjustment costs, and irreversibility*. Journal of Economic Dynamics and Control 21(1997) 831-852.
- [Ban00] BANK, P. *Singular Control of Optional Random Measures*. Dissertation, Humboldt-Universität Berlin, 2000.
- [Ban02] BANK, P. & FÖLLMER, H. *American Options, Multi-armed Bandits, and Optimal Consumption Plans: A Unifying View*. Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 1814(2002), 1-42.
- [Ban03] BANK, P. & EL KAROUI, N., *A Stochastic Representation Theorem with Applications to Optimization and Obstacle Problems*. Annals of Probability 32(2004), 1030-1067.
- [Bei97] BEIBEL, M. & LERCHE, H.R. *A New Look at Optimal Stopping Problems Related to Mathematical Finance*. Statistica Sinica 7 (1997), 93-108.
- [Ber96] BERTOIN, J. *Lévy Processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [Ber98] BERTOLA, G. *Irreversible investment*. Research in Economics 52(1998), 3-37.
- [Ber04] BERGEMANN, D. *Spieltheorie*. Vorlesungsskript, Ludwig Maximilians Universität München, 2004.
- [Boy04] BOYER, M. & GRAVEL, E. & LASSERRE, P. *Real options and strategic competition: a survey*. 8th Annual International Conference on Real Options, Montreal, June 2004.
- [Dan04] DANGL, T. & KOPEL, M. & KÜRSTEN, W. *Real options*. Gabler Verlag 2004.

- [Dec05] DECK, T. *Der Itô-Kalkül - Einführung und Anwendungen*. Springer Verlag, 2005.
- [Dix94] DIXIT, A.K. & PINDYCK, R.S. *Investment Under Uncertainty*. Princeton University Press, 1994.
- [Doc00] DOCKNER, E. & JØRGENSEN, S. & VAN LONG, N. & SORGER, G. *Differential games in economics and management science*. Cambridge University Press, 2000.
- [Dum91] DUMAS, B. *Super contact and related optimality conditions*. Journal of Economic Dynamics and Control 15(1991), 675-685.
- [Gei04] GEISLER, C. *Was sind Realloptionen?* Harvard Businessmanager, Heft 6/2004.
- [Gre00] GRENADIER, S. (ED.) *Game Choices - The Intersection of Real Options and Game Theory*. Risk Books, 2000.
- [Hui01] HUISMAN, K.J.M. *Technology Investment: A Game Theoretic Real Options Approach*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [Hui03] HUISMAN, K.J.M. & KORT, P.M. & PAWLINA, G. & THIJSEN, J. *Strategic investment under uncertainty: Merging real options with game theory*. CentER Discussion Paper No. 2003-06.
- [Jer06] JERGER, J. *Spieltheorie*. Vorlesungsskript, Universität Regensburg, 2006.
- [Joa00] JOAQUIN, D.C. & BUTLER, K.C. *Competitive Investment Decisions: A Synthesis*. In Brennan & Trigeorgis (Eds.): Project Flexibility, Agency, and Competition - New Developments in the Theory and Applications of Real Options, Oxford University Press (2000), 324-339.
- [Kon07] KONG, J.J. & KWOK, Y.U.E.K. *Real options in strategic investment games between two asymmetric firms*. European Journal of Operational Research 181(2007), 967-985.
- [Kor01] KORN, R. & KORN, E. *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung: Moderne Methoden der Finanzmathematik*. Vieweg Verlag, 2001.
- [Mur02] MURTO, P. & KEPPO, J. *A Game Model of Irreversible Investment Under Uncertainty*. International Game Theory Review 4(2002), 127-140.
- [Mur04] MURTO, P. & NÄSÄKKÄLÄ, E. & KEPPO, J. *Timing of investments in oligopoly under uncertainty: A framework for numerical analysis*. European Journal of Operational Research 157(2004), 486-500.

- [Nas50] NASH, J.F. *The Bargaining Problem*. *Econometrica* 18(1950), 155-162.
- [Pha05] PHAM, H. *On some recent aspects of stochastic control and their applications*. *Probability Surveys* 2(2005), 506-549.
- [Rie06] RIEDEL, F. & SU, X. *On Irreversible Investment* Working Paper (June 3, 2006). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=914575> (28. Juli 2008).
- [Sch03] SCHLEE, W. *Spieltheorie*. Vorlesungsskript, Technische Universität München, 2003.
- [Smi04] SMIT, H.T.J. & TRIGEORGIS, L. *Strategic Investment: Real Options and Games*. Princeton University Press, 2004.
- [Su06] SU, X. *A New Approach To The Irreversible Investment Problem*. Bonn Econ Discussion Paper 21/2006.
- [Sur07] SURYA, B.A. *Optimal Stopping Problems Driven by Lévy Processes and Pasting Principles*. PhD-Thesis, Utrecht University, 2007.
- [Thi02] THIJSEN, J.J.J. & HUISMAN, K.J.M. & KORT, P.M. *Symmetric Equilibrium Strategies in Game Theoretic Real Option Models*. CentER Discussion Paper No. 2002-81.
- [Yeu06] YEUNG, D.W.K. & PETROSYAN, L.A. *Cooperative Stochastic Differential Games*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer Verlag 2006.
- [fun] <http://functions.wolfram.com> (28. Juli 2008).
- [mat] <http://mathworld.wolfram.com> (28. Juli 2008).
- [wik] <http://de.wikipedia.org> (28. Juli 2008).

Summary

In this thesis we deal with irreversible investment games under uncertainty. This is a subject, that everybody has to consider frequently. Especially, in many economic situations, possible investments have an uncertain outcome, which makes a precise analysis necessary.

As a short glimpse at the table of contents shows, this work can be divided into three main parts: static games, stopping games and dynamic games. In static and stopping games, the actors decide only once, when they have to make a given investment with uncertain payoffs. From chapter 4 onwards, players decide dynamically how much they will invest in an uncertain project at any point of time. We now want to give a synopsis of the modus operandi and the main results of this work.

First of all, **Chapter 2** deals with static duopoly games. After having formulated the general problem, we will give the mathematical model and then compute the Nash Equilibrium.

In this chapter, the basic model and the solution methods are mainly based on the books of Dixit & Pindyck ([Dix94]) and Smit & Trigeorgis ([Smi01]), as well as on works by Murto & Keppo ([Mur02], [Mur04]) and Joaquin & Butler ([Joa00]). Our model can be seen as an extension of the last-named; whereas Joaquin & Butler analyze a game in which the inverse demand function is given as a linear function, we give a solution for a general one. Other interesting works in this context are the ones by Boyer, Gravel & Lasserre ([Boy04]), Grenadier ([Gre00]) and Huisman, Kort & Thijssen ([Hui01], [Hui03], [Thi02]).

We consider the question when to enter a foreign market at optimum condition, assumed that the firms (the players) are based in the same country and have the intention to enter the same foreign market. The uncertain effect - in this game it is the exchange rate - is modelled by a Geometric Brownian Motion and both firms have the objective to maximize their profits in domestic currency.

As these profits do not only depend on the exchange rate and the firm's own decision when to enter the market but also on the other firm's decision, we have to

analyze this problem in a game theoretical framework, i.e. we want to determine Nash Equilibria consisting of two entry thresholds, which means the values of the exchange rate at which the players enter the market.

To achieve these equilibria, we first compute the firms' payoff functions, including the value of the flexibility to wait - i.e. we use a real options approach. After having given the payoffs in the case that the firms invest simultaneously, we quote the payoff functions in theorems 2.3.4 und 2.3.6 on the assumption, that the game follows a sequential leader-follower structure.

In proposition 2.4.1 we show that a simultaneous market entry cannot be a Nash Equilibrium, since waiting and entering as the follower gives a higher profit in many cases because of the value of flexibility. Due to the fact that being the leader can almost anytime be preferred to being the follower, one finds oneself in a classical Prisoner's Dilemma.

In an asymmetric duopoly the situation is somehow clearer, because the asymmetry exclusively determines, which player will be the leader. As shown in theorem 2.4.3, this firm will enter the market either at its optimal entry threshold in the monopolistic sense, or a little earlier than the level, at which the other firm would prefer being the leader to being the follower, the so-called pre-emption level. The follower then waits until the exchange rate reaches his optimal entry threshold. Concrete forms of these levels will be given in proposition 2.4.2.

Chapter 3 then is devoted to optimal stopping games. Whereas the players decide only once, when to invest in an uncertain project (e.g. a foreign market), the payoff functions of both firms develop dynamically, i.e. they depend on the whole time interval after the investment. Additionally the investment costs could change gradually.

The monopolistic case of such a model has already been solved by Su ([Su06]). Like her, we will analyze the problem by using an idea given by Bank, El-Karoui & Föllmer ([Ban00],[Ban02],[Ban03]) which proposes to reformulate the problem by using a so-called shadow revenue process. The authors used this method to determine optimal exercise times in American options, to solve multiarmed-bandit problems and to quote optimal consumption rates.

In our framework, the shadow revenue process gives the optimal investment time: this will be the first time that this process exceeds the investment costs. The advantage of this method is that for different investment costs no new process needs to be calculated. In propositions 3.5.2 und 3.5.3 we also apply this fact to time-dependent investment costs.

As in the static game, we first give an important game theoretical result: theorem 3.4.1 states that again a simultaneous investment cannot be a Nash Equilibrium, unless the shadow revenue process lies above the investment costs at the beginning of the game (which makes it trivial). Therefore, this game will also have a sequential leader-follower structure.

In our game the shadow revenue method can only be used in parts. Since it will lead to enormous problems to determine such a process for the leader, we will only give the shadow revenue process for the follower in theorem 3.4.2 - and therefore his optimal investment time. For the leader's investment time, we refer to an approach presented by Beibel & Lerche ([Bei97]). It suggests that the optimal stopping problem can be reduced to a simple optimization problem of a deterministic function by a measure transformation. Indeed, an important assumption of this method is the modeling of the uncertainty as a Geometric Brownian Motion. After having written the leader's objective function in a slightly different form, all conditions of this Beibel-Lerche approach are fulfilled, and the optimal investment time of the leader can be given in theorem 3.4.5.

Using this approach we also can quote a solution to investment problems where the deterministic foreign market is replaced by a stochastic one. We only need to guarantee that the market uncertainty is also modelled by a diffusion.

Subsequently, in **Chapter 4** the players no longer decide when to make a given investment, but they decide how much should be invested in an uncertain project at any moment. Additional investments lead to higher profits but they necessitate investment costs at the same time. Therefore, what we are looking for in this chapter, are investment plans, what presupposes a differential game approach. Economically we interpret these investments as technology enlargement, whereas technology also depreciates with a constant rate.

Monopolistic versions of such problems have been investigated in some special cases by Abel & Eberly ([Abe95], [Abe97]) and Bertola ([Ber98]) who have used classical stochastic control methods. Riedel & Su ([Rie06]) give a solution for another dynamic investment problem of one firm by using an alternative approach: again they find the optimal investment via a shadow revenue process.

We analyze our duopoly problem by using differential game methods and by applying the theoretical results of Yeung & Petrosyan's book ([Yeu06]). Particularly we give and prove verification theorems (4.3.1 for an infinite time, one person problem and 4.3.3 for the duopoly case) which are the fundamentals for further calculations in this chapter.

After having introduced the mathematical model and having discussed necessary

conditions for optimality we start calculating concrete solutions in some important special cases. First - to give a precise overview of the method - we analyze a reversible investment game whose results can be assigned to an irreversible game with quadratic cost- and linear profit functions. In the symmetric duopoly case, the Nash Equilibrium of this game is stated in theorem 4.4.4, the asymmetric version is solved in theorem 4.4.7.

Afterwards we change to linear cost functions and quote the Nash Equilibrium of a game with linear profit functions in theorem 4.4.8. Finally, we analyze a game with profit functions of the HARA type and give its solution in theorem 4.4.10.

Whereas in the case of quadratic cost functions a quadratic term occurs in the Hamiltonian Function which leads to finite optimal strategies, in the linear cost case we have to face infiniteness. We present two approaches to avoid this problem: In the model with linear profit functions we introduce a maximal investment rate and in the HARA case we reformulate the problem by maximizing with respect to cumulative investment plans.

In the last case another problem occurs. Whereas we can find the solution via the Hamilton Jacobi Bellman Equation in the one-person game, the classical differential game analysis does not provide a Nash Equilibrium in the duopoly. Therefore we model the game as a zero-sum game, in which the objective function depends especially on the quotient between the players' technology levels. One player can influence this function positively and therefore tries to maximize it, the other's technology affects it in a negative way, which leads to minimization as the goal of this player.

In **Chapter 5** we stay in this dynamic setting and now permit the players to somehow communicate, i.e. we have a look at cooperative investment games. Thereby we assume the profits to be completely transferable and maximize the collective gains. The surplus to the non-cooperative game then will be divided via the Nash Bargaining solution.

As in chapter 4, we refer to the methods stated in the book of Yeung & Petrosyan ([Yeu06]).

Having formulated the mathematical and economic framework we give the fundamental solution method in theorem 5.3.1. By using this method, we give concrete forms of the optimal strategies and the cooperative surplus in the same special cases as in chapter 4.

Firstly we analyze a reversible game with quadratic cost- and linear profit functions. Then, in theorems 5.4.3 (symmetric case) and 5.4.4 (asymmetric case), we

transfer these results to the irreversible investment game. We also state the differences between reversible and irreversible investments in proposition 5.4.6.

Another main aspect of this chapter is to compare the optimal strategies in the cooperative game with the Nash Equilibrium. We will quote these disparities in proposition 5.4.7. At the end of the chapter, a cooperative game with linear cost functions is analyzed.

Appendix A then introduces the major uncommon mathematical and economic basics. We concentrate on some definitions and results of cooperative game theory and the techniques for the most important differential equation in this work.

Danksagung

Bei der Erstellung einer solch umfangreichen Arbeit wie einer Dissertation ist man selbstverständlich immer auch auf die Hilfe, den Rat und die Unterstützung anderer Personen angewiesen. Deshalb nutze ich diese Seite, um all jenen zu danken, die auf fachliche oder persönliche Art und Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Allen voran gilt mein Dank meinem Betreuer Prof. Dr. Ulrich Rieder, vor allem für die vielen hilfreichen Betreuungsgespräche, seine Geduld und den unkomplizierten Betreuungsstil. Des Weiteren möchte ich Herrn Prof. Dr. Werner Smolny dafür danken, dass er sich bereit erklärt hat das Zweitgutachten zu erstellen.

Natürlich bedanke ich mich auch bei meinen Mitstipendiaten im Graduiertenkolleg 1100 - nicht nur für viele fruchtbare mathematische Diskussionen, sondern auch für die unzähligen „social events“ und die angenehme Atmosphäre sowie bei meinen Kollegen am Institut für Optimierung und Operations Research.

Besonderer Dank gebührt meinen Freunden und vor allem meiner Familie, ohne deren mentale Unterstützung und permanente Ermutigung dieses Projekt unmöglich gewesen wäre. Dafür danke ich insbesondere Barbara, Franz Josef und Philipp Walch, Franz und Hannelore Schnattinger, Christian Ehrhardt, Uta Phillip, Ingo und Karin Melzer sowie Regina Thiel.

Widmen möchte ich diese Arbeit meinem großen Vorbild Franz Schnattinger, der die Fertigstellung leider nicht mehr miterleben durfte.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe. Es wurden keine außer den angegebenen Quellen verwendet und die aus diesen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Ferner erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit in keinem anderen Promotionsverfahren und an keiner anderen Stelle als Prüfungsleistung verwendet wurde.

Ulm, 28. Juli 2008

(Patrick G. Walch)

Curriculum Vitae

Persönliche Angaben

Geburtsdatum 14. Juni 1978

Geburtsort Mannheim, Deutschland

Staatsangehörigkeit deutsch

Familienstand ledig

Ausbildung

Seit 04/2005 Promotionsstudium im DFG-Graduiertenkolleg 1100 an der *Universität Ulm*.

Thema der Dissertation: *Irreversible Investitionsspiele unter Unsicherheit*.

Betreuer: Prof. Dr. U. Rieder.

Angestrebter akademischer Grad: Dr. rer. nat.

10/2002–03/2005 Studium der *Wirtschaftsmathematik* an der *Universität Ulm*.

Thema der Diplomarbeit: *Genetische Algorithmen zur Lösung von Stackelberg-Spielen*.

Betreuer: Prof. Dr. U. Rieder.

Akademischer Grad: Dipl.-Math. oec., Note: sehr gut.

10/2001–09/2002 Auslandsstudium *Mathématiques Appliquées & Sciences Sociales* an der *Université Paul Cézanne, Aix-en-Provence, Frankreich*.

10/1998–09/2001 Studium der *Wirtschaftsmathematik* an der *Universität Ulm*.

Vordiplom im April 2005, Note: sehr gut.

08/1997–09/1998 Zivildienst in der Jugendherberge *Mutschler's Mühle, Mosbach*.

09/1994–07/1997 Wirtschaftsgymnasium an der *Frankenlandschule Walldürn*.

Abschluss: Allgemeine Hochschulreife, Note: gut.

Lehrtätigkeiten an der Universität Ulm

- 10/2006–03/2007 Übungsgruppenleiter *Lineare Algebra*.
- 10/2005–03/2006 Übungsgruppenleiter *Lineare Algebra*.
- 04/2005–09/2005 Übungsgruppenleiter *Analysis IV (Funktionentheorie)*.
- 10/2004–03/2005 Übungsleiter *Höhere Mathematik I für Elektrotechniker*.
- 04/2004–09/2004 Tutor *Numerik Ia*.
- 10/2001–03/2004 Tutor *Höhere Mathematik I, II und III für Elektrotechniker*.
- 10/2000–09/2001 Tutor *Analysis I, II und Lineare Algebra*.

Berufserfahrung

- Ab 09/2008 Professional Consultant bei der *SHS VIVEON AG*, München.
- 02/2008 Fallstudie zum Thema *Analyse und Modelle für Futures Preise auf CO₂ Emissionszertifikate* für die *EnBW Trading GmbH*.
- 03/2007 Fallstudie zum Thema *Finanzierung von Studiengebühren / Studienfonds* für die *L-Bank*.
- 02/2007–04/2007 Praktikum bei *ite competence GmbH*, Ulm.
- 03/2006 Fallstudie zum Thema *Hedging von Lebensversicherungen* für das *Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften (ifa)*.
- 07/2002–09/2002 Praktikum bei *Dr. Finkenrath, Dr. Kieser & Partner*, Walldürn.

Ehrenamtliche Tätigkeiten

- 10/2002–03/2005 Mitglied der Fachschaft Mathe/WiMa.
- 10/1998–08/2001 Mitglied der Fachschaft Mathe/WiWi.
- 09/1994–06/1997 Aktiv in der SMV der Fankenlandschule Walldürn.
Abteilungsleiter Basketball im TV 1848 Walldürn.
- 09/1993–07/1994 Sportreferent am Burghardt-Gymnasium Buchen.

