Teeblättereffekte



W.A. Kreiner Faculty of Natural Sciences University of Ulm

1. Teeblätter und andere Teilchen

Bisweilen geraten Teeblätter in die Tasse. Ihr Verhalten beim und nach dem Umrühren regt zum Nachdenken an, so auch Einstein (1926). Während Teeblätter in der Mehrzahl beim Rühren aufgewirbelt werden, halten sich schwerere Teilchen in Bodennähe auf und bewegen sich schon während des Rührens zum Zentrum. Sobald man mit dem Rühren aufgehört hat, beginnen die Teeblätter, sich in der Mitte der Tasse zu sammeln. Da sie etwas schwerer sind als Wasser würde man erwarten, dass sie die Zentrifugalkraft nach außen wandern lässt. Der Teetasseneffekt besteht aber nun darin, dass sie sich zur Mitte hin bewegen.

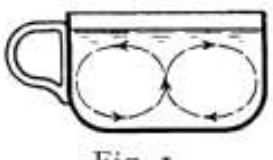
2. Experimentelle Voraussetzungen

Bewegt sich eine Flüssigkeit in einem zylindrischen Gefäß mit einheitlicher Winkelgeschwindigkeit, führt die Fliehkraft zu einer parabelförmigen Verformung des Oberflächenprofils. Dies kann durch Rühren oder durch Zentrifugieren erreicht werden, wobei sich die Strömungsmuster unterscheiden. Während beim Zentrifugieren die boden- und wandnahen Schichten als Erste beschleunigt werden, bremst beim Rühren die Reibung an der Wand und am Tassenboden die angrenzenden Fluidbereiche ab. Der Durchmesser des abgesenkten Bereichs beträgt etwas mehr als 70% des Gesamtdurchmessers, außerhalb steigt die Flüssigkeit über das Gleichgewichtsniveau an.

Beendet man das Rühren oder das Zentrifugieren und überlässt das System sich selbst, dann setzt sich die Verringerung der Rotationsgeschwindigkeit und damit auch der Fliehkraft über die innere Reibung von der Wand her nach innen und vom Boden aus nach oben fort. Dabei ebnet sich die Oberfläche langsam ein. Der Großteil des Flüssigkeitsvolumens bewegt sich mit stetig abnehmender, aber doch in etwa einheitlicher Winkelgeschwindigkeit weiter, so dass die tangentiale Geschwindigkeit gegenüber dem Tassenboden nach wie vor bei größerem Radius höher ist als weiter innen. Eine langsame Rotationsbewegung ist auch dann noch feststellbar und wirksam, wenn sich, zumindest mit freiem Auge, keine Krümmung der Oberfläche mehr ausmachen lässt.

3. Rührbewegung

Das Rühren und der damit verbundenen Energieeintrag wird mit dem Begriff „Sekundärströmung“ in Verbindung gebracht, einer zusätzlichen Strömung quer zur Hauptströmungsrichtung (ON 1). Den Einfluss der Reibung auf Strömungen diskutiert Boussinesq (1868). Thomson (1876-1877) und Isaachsen (1896, 1911) behandeln die Strömungen an der Oberfläche und am Boden im näheren Bereich von Flusskrümmungen sowie die Verlagerung von Geröll, wobei Thomson auch das Ansteigen des Wasserpegels zur Außenseite der Biegung hin erwähnt. Nach Einstein (1926; Prandtl, 1926)

Bild 1 Teetasse aus der Arbeit von Einstein (1926)	 Fig. 1.

dienen dann die Strömungsverhältnisse *während* des Umrührens in einer Teetasse (Bild 1)als Modell für die Querströmungen, die an Flüssen erst zur Mäanderbildung und dann zur Verstärkung und Verlagerung der Flusskrümmungen führen sowie zur Ausbildung eines V-förmigen Flussbetts. Anlass dafür ist eine asymmetrische Verteilung des Oberflächenwassers über den Flussquerschnitt, bei nord-südlicher Flussrichtung bedingt durch die Corioliskraft, in Krümmungen durch die Zentrifugalkraft. Die Überhöhung des Wasserpegels am äußeren Ufer der Flussbiegung, dessen hydrostatischer Druck und die reibungsbedingte Verringerung der Fließgeschwindigkeit in Ufer- und Bodennähe setzen eine sekundäre Zirkularströmung in Gang, die an der Außenwand des Flussbetts nach unten, am Boden weiter zur Innenseite der Krümmung, dort nach oben und weiter flussabwärts – fliehkraftbedingt – wieder an die Außenseite der Krümmung führt. Es handelt sich um ein stationäres Durchflusssystem: Wasser, das in der Biegung eines Mäanders an der Zirkularströmung teilnimmt, fließt am Eingang der Krümmung ständig zu und an einer anderen Stelle wieder ab.

Im Teetassenbeispiel, das Einstein bringt, wird die Zentrifugalkraft durch das Rühren hervorgerufen. Die sekundäre Zirkularströmung gleitet danach vom äußeren oberen Flüssigkeitsrand an der Wand der Tasse nach unten, über den Boden zur Mitte, weiter an die Oberfläche und von dort wieder zum Rand. Hier ist es allerdings ein abgeschlossenes System. Wie bei der Flussströmung das Gefälle, liefert hier das Rühren des Tees dem System laufend Energie. Das ist nach Beendigung der Rührbewegung nicht mehr der Fall. Es strebt nun dem energetischen Gleichgewicht zu. Und nur diese Phase wird hier eingehender betrachtet.

Ebenfalls mit dem Teetasseneffekt in Verbindung gebracht wird der Whirlpool bei der Bierherstellung (ON 2): Im Brauprozess wird die gekochte Würze mit dem Kochlöffel schnell im Kreis gedreht, so dass sich Eiweiß- und Gerbstoffe absetzen (siehe auch Abschnitt 4.1.1, Wirkung der Fliehkraft). Wasserwirbel im Hafenbereich führen über denselben Effekt zu unerwünschten Sandablagerungen (Brinkmann, 2005; ON 3). Im übertragenen Sinn spricht man auch in der Finanzbranche von einem Teetasseneffekt.

4. Bodenströmung in der Teetasse

4.1 Beschleunigungsphase

4.1.1 Zentrifugieren

Ein zylindrisches Gefäß mit einem Fluid wird auf einem Drehteller in Rotation versetzt. Durch die Haftung am Tassenmaterial machen die boden- und die wandnahen Flüssigkeitsschichten als Erste diese Rotation mit. Die Fliehkraft bringt zuerst den Tee in Bodennähe nach außen, zusammen mit den Blättern oder anderen suspendierten Teilchen, die schwerer als Wasser sind, und bewirkt die Überhöhung am Rand. Nach und nach überträgt sich die Rotationsbewegung auf alle Bereiche, bis sie dieselbe Winkelgeschwindigkeit aufweisen. An der Oberfläche hat sich das Parabelprofil eingestellt. (Ein zylindrisches Wasservolumen von 180mm Durchmesser und 35mm Höhe benötigte dazu auf dem Drehteller eines Plattenspielers 2 bis 3 Minuten.) Bei einheitlicher Winkelgeschwindigkeit tritt keine Abwärtsströmung im Wandbereich ein, es entwickelt sich keine Sekundärströmung.

Die Wirkung der Zentrifugalkraft kann ein Tropfen der Flüssigkeit illustrieren, der sich am Rand des Tassenbodens befindet: Bei Beginn der Rotation wird er an die Wand gedrückt und nimmt die Form einer Flüssigkeitsschicht an. Danach nimmt die Schichtdicke ständig ab, wobei sich der Tropfen über

eine immer größere Fläche ausdünnt und sich auch höher über die Wand ausbreitet, entgegen der Schwerkraft. Damit trägt er innerhalb der gesamten Flüssigkeit zum Anstieg des Randbereichs bei. Würde die Flüssigkeit nach Abstoppen des Gefäßes reibungsfrei weiter zirkulieren, bliebe die Überhöhung des Rands aufrecht. Wird die dem Tropfen entsprechende Flüssigkeit jedoch abgebremst, dann sinkt der Tropfen wieder nach unten und gibt auch einem Druck von oben nach.

4.1.2 Rühren

Beim Rühren wird der Tee, mit Ausnahme der Boden- und Randzonen, schneller über größere Höhen- und Radiusbereiche auf eine in etwa vergleichbare Winkelgeschwindigkeit gebracht, mit Ausnahme der an das Tassenmaterial angrenzenden Schichten. Allerdings sind auch die eingebrachten Turbulenzen stärker. Das Rühren verlagert über die Zentrifugalkraft Tee an die Außenseite und bewirkt so die Randüberhöhung. Dort sinkt der Tee ab, da Reibung an der Tassenwand die Strömungsgeschwindigkeit und damit auch die Fliehkraft herabsetzt. Analoges geschieht am Boden der Tasse, dort setzt sich die Strömung zur Mitte hin fort. Der dort aufsteigende Tee wird nun durch fortgesetztes Rühren wieder nach außen verfrachtet und ersetzt die abgesunkene Menge. Wie sich nun einzelne Partikel verhalten, hängt von ihrer Dichte ab: Schwere Teilchen sinken rasch zu Boden und werden von der Sekundärströmung als Erste zur Mitte transportiert. Teeblätter mit einer Dichte nur wenig über der des Fluids gehören zu den von der Primärströmung aufgewirbelten und in ihr mit bewegten, kreisenden Partikeln. Nur wenige kleinere und schwerere Teekrümel sammeln sich schon während des Rührens in der Mitte.

4.2 Rotationsphase

Wurde auf einem Drehteller beschleunigt, dann zirkuliert das Fluid nach einiger Zeit mit einheitlicher Winkelgeschwindigkeit, die Zentrifugalkraft hält der Schwerkraft das Gleichgewicht. Wurde gerührt, sind davon die Rand- und die Bodenschicht ausgenommen. Die Oberfläche ist gegenüber dem Ruheniveau über 70% des Durchmessers eingedellt und außerhalb überhöht, das Volumendefizit innerhalb der Gleichgewichtslinie entspricht dem Überschuss außen. Neben der kinetischen enthält das System auch zusätzliche potenzielle Energie. Im Zahlenbeispiel (Abschnitt 7) beträgt in einem zylinderförmigen Gefäß von 100mm Durchmesser die Eindellung der Oberfläche im Zentrum gegenüber dem Rand 20mm, die Gleichgewichtslinie liegt in der halben Höhe.

4.3 Rückkehr zum Ruhezustand

Eine eventuell vorhandene sekundäre Zirkularströmung klingt rasch ab, da kein Tee mehr durch eingebrachte Energie an die Außenseite verfrachtet wird. Das weitere Verhalten in dieser Phase ist unabhängig davon, ob gerührt oder zentrifugiert wurde: Das Gewicht der äußersten Flüssigkeitsschicht setzt dort eine Abwärtsströmung in Gang, die sich – wie ebenfalls schon erwähnt – am Boden in einer Strömung zur Mitte hin fortsetzt. In Bild 2a ist diese durch eine Farbspur sichtbar gemacht. Ohne Zentrifugieren oder Rühren wird die absinkende Flüssigkeit am Rand der Tasse nicht mehr ersetzt, so dass mit der Strömung am Tassenboden die periphere Überhöhung kontinuierlich abgebaut und der innere Bereich wieder auf das Ruheniveau aufgefüllt wird, vergleichbar mit dem Niveauausausgleich zwischen kommunizierenden Gefäßen (Bilder 3,4).



Bild 2a

Durch ein am Rand eingebarachtes Farbpartikel entwickelte sich über eine Zeit von etwa 20 Sekunden diese Farbspur. Rotationsbewegung im Uhrzeigersinn. Die Abstufung der Kreisradien beträgt außen 20, innen 10 Millimeter. Bei einem Gefäßdurchmesser von 180mm und einer Füllhöhe von 35mm betrug die Winkelgeschwindigkeit $\Delta\phi/\Delta t$ unmittelbar nach Anhalten des Drehtellers 3,7 s^{-1}.

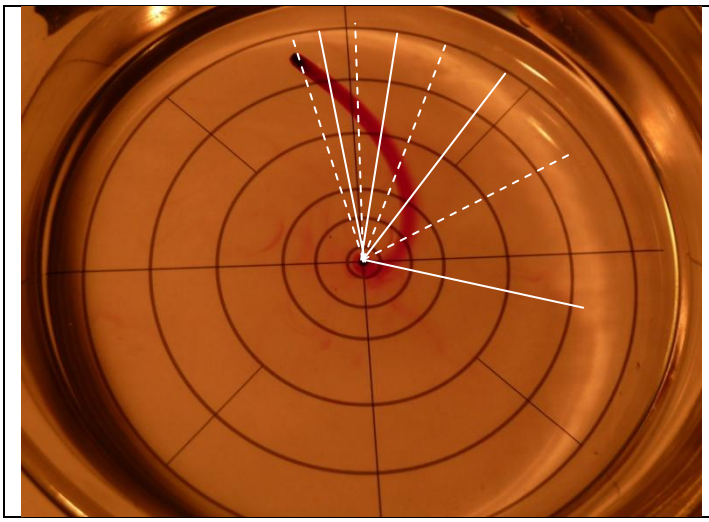


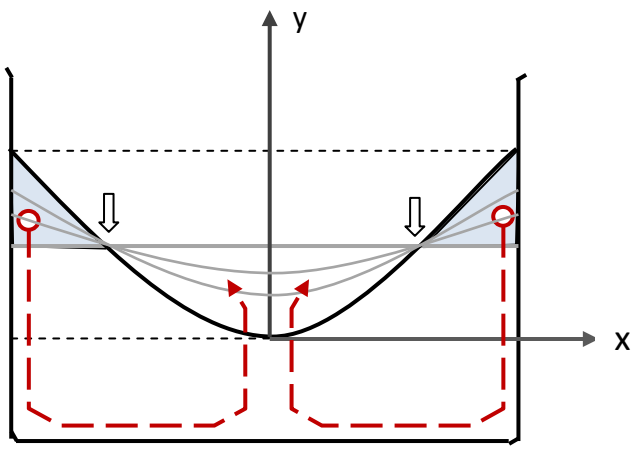
Bild 2b

Während die Bodenströmung eine bestimmte Strecke (z.B. den Abstand zweier Ringe) zurücklegt, dreht sich das Fluid weiter. Sein Drehwinkel nimmt nach innen hin zu. Der Grund kann sowohl in einer Änderung der Winkelgeschwindigkeit wie auch der der Bodenströmungsgeschwindigkeit mit dem Radius liegen.

Da sich die Delle an der Oberfläche über mehr als zwei Drittel des Durchmessers erstreckt, kommt es im Anschluss an die Aufwärtsströmung in der Mitte auch zu einer Strömung vom Zentrum weg, allerdings nur über einen Teilbereich des Durchmessers (Bild 3).

Bild 3

Nach Beendigung des Rührens und ohne Nachschub an kinetischer Energie verflacht die parabelförmige Eindellung (graue Profile). Den stärksten Druck übt der überhöhte Randbereich aus. Er setzt entlang der Wand und des Bodens eine Strömung in Gang (gestrichelte Pfeillinien), die mit der am Rand absinkenden Flüssigkeitsmenge die Delle innerhalb der kreisförmigen neutralen Niveaulinie (weiße Pfeile) auffüllt.



Diese Strömung an der Oberfläche sollte sich durch schwimmende Partikel nachweisen lassen. Aus diesem Grund wurde nach Beendigung des Rührens Zimt auf das Zentrum gestreut. Es zeigte sich,



Clip 1

Zur Sichtbarmachung einer Oberflächenströmung weg vom Zentrum wurde nach Beendigung des Rührens Zimt auf das Zentrum der Wasserfläche gestreut. Dieser bewegte sich anfangs vom Zentrum weg, erreichte aber nicht den Rand.

Zum Betrachten der Rotationsbewegung bitte „Filmclip 1“ anklicken.

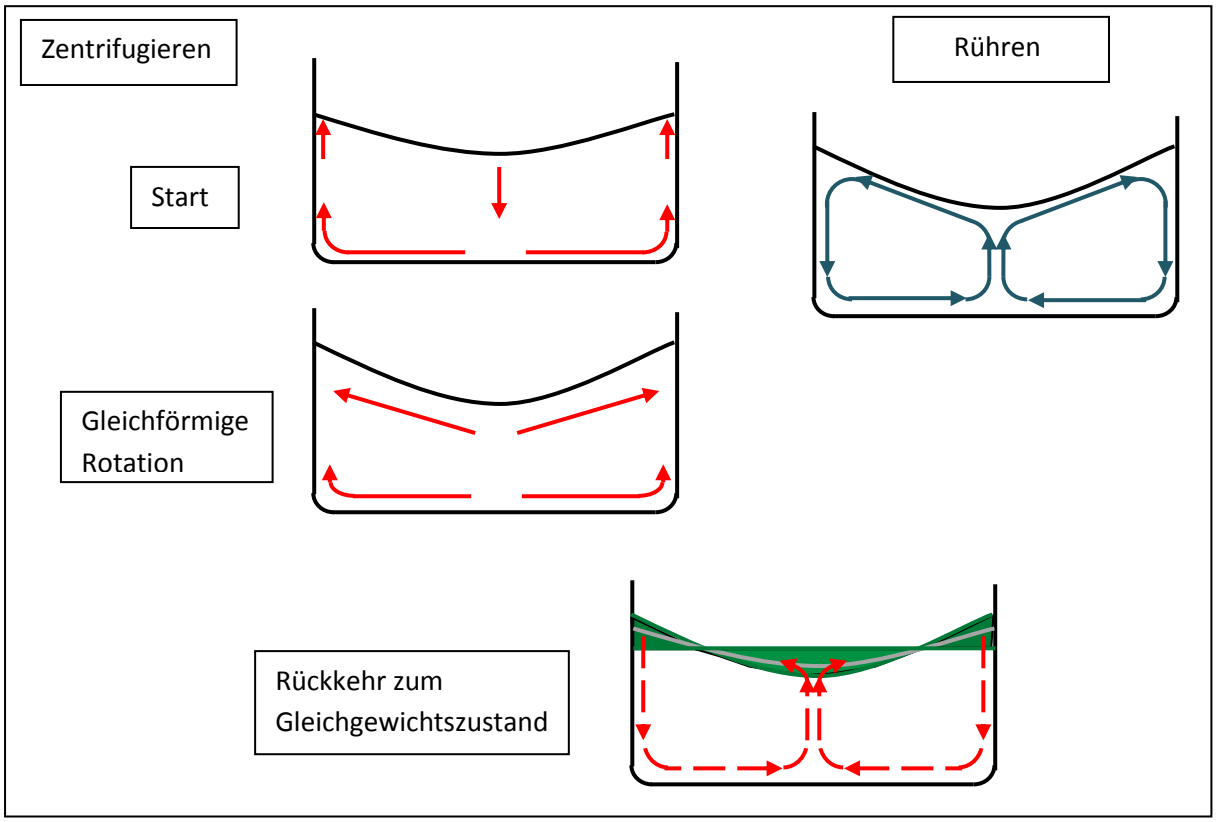


Bild 4 Links oben die Bewegungsmuster beim Zentrifugieren (nur Bewegungen nach außen). Erst die Startphase, in der nur die Boden- und die Randschicht bewegt werden, darunter nach längerer Rotation des Gefäßes, wenn die gesamte Masse bewegt wird. Rechts oben beim Rühren (sekundäre Zirkularströmung) sowie unten während der Rückkehr zum Gleichgewicht (Strömung wie zwischen kommunizierenden Gefäßen).

dass eine Radialströmung an der Oberfläche wesentlich schwächer ausgeprägt ist als die Bodenströmung und die schwimmenden Teilchen auch nach mehr als einer Minute nicht den Rand erreichten. Im Vergleich dazu benötigten zum Boden abgesunkene Teeblätter am Beginn der Ausgleichsphase etwa 10 Sekunden vom Rand bis zum Zentrum (Radius 90mm), nach Ende der Rührbewegung eingebrachte Couscouskörner oder Kirschkerne hingegen nur 3 Sekunden, bis sie von außen her sich innerhalb eines Bereichs von R=25mm angehäuft hatten. Dies kann so interpretiert werden, dass die Strömung dem Ausgleich des Flüssigkeitsspiegels zum Ruheniveau hin dient, vergleichbar mit der zwischen kommunizierenden Gefäßen, und eine schwache Strömung an der Oberfläche vom Zentrum weg die Delle auffüllt. Ähnlich würde sich ein Fluss verhalten, wenn man plötzlich ober- und unterhalb der Krümmung einen Staudamm errichtete. Vier der denkbaren Bewegungsmuster in den unterschiedlichen Phasen sind in Bild 4 gezeigt.

Zusammenfassung der Beobachtung: Nach Beendigung des Rührens werden die am schnellsten zu Boden sinkenden Partikel auch als Erste in Richtung Zentrum transportiert (z.B. Grieß- oder Couscouskörner, Kirschkerne). Größere Teeblätter, deren Dichte nur minimal über der der Flüssigkeit liegt und der Tangentialströmung Angriffsfläche bieten, werden durch die primäre Strömung erst einmal in der Schwebe und von der Bodenströmung fern gehalten. Sie bleiben dabei auf einer Kreisbahn und sinken erst später zu Boden, wenn die Geschwindigkeit der primären Strömung abgenommen hat.

5. Pirouettenbewegung der Teeblätter

Diese tritt zeitlich nach dem Maximum der Radialströmung auf, wenn der Niveauunterschied schon weitgehend abgebaut ist, aber der größte Teil der Flüssigkeit noch langsam rotiert. Auch ohne einheitliche Winkelgeschwindigkeit ist, mit Ausnahme des wandnahen Bereichs, die tangentiale Geschwindigkeit oberhalb der Bodenschicht für größere Bahnradien höher als für kleinere.

Die primäre Strömung führt die Blätter auf einer Kreisbahn. Je geringer die Geschwindigkeit eines Blatts, desto weiter sinkt es zu Boden. Zur Beobachtung eignen sich auch Papierstreifchen (Clip 2). Wenn z. B. der zum Zentrum hin orientierte Blattrand zuerst absinkt (geringere Geschwindigkeit über Grund) und beim Eintauchen in die bodennahe Schicht in seiner tangentialen Geschwindigkeit abgebremst wird, dann bewegt die rotierende Flüssigkeit den noch schwebenden Rand mit unverminderter Geschwindigkeit weiter. In Bild 5 ist ein graues Stäbchen gezeigt, das, in paralleler Orientierung zum Radiusvektor, von der Tangentialströmung mitgeführt wird (von Position 1 nach 2). Taucht es dabei mit dem zentrumsnahen Ende tiefer (blauer Streifen), dann wird es aufgrund der Bremskraft in eine neue Position gedreht, wobei sein Schwerpunkt näher zum Zentrum rückt. Zusammen mit der Bodenströmung (Bild 2a) führt das zu einer langgezogenen, pirouettenartigen Bewegung zur Mitte hin (Clips 2,3).

Ist die Dichte der Teilchen der der Flüssigkeit nahezu gleich, dann sind sie oft gleichmäßig über die Höhe verteilt und nehmen an der Zentripetalbewegung erst einmal nicht teil. In der Schlussphase der Zirkulation drehen sich nach und nach, vom Boden her fortschreitend, auch höhere Schichten immer langsamer, so dass sich schließlich auch die dort schwebenden Partikel zur Mitte bewegen.

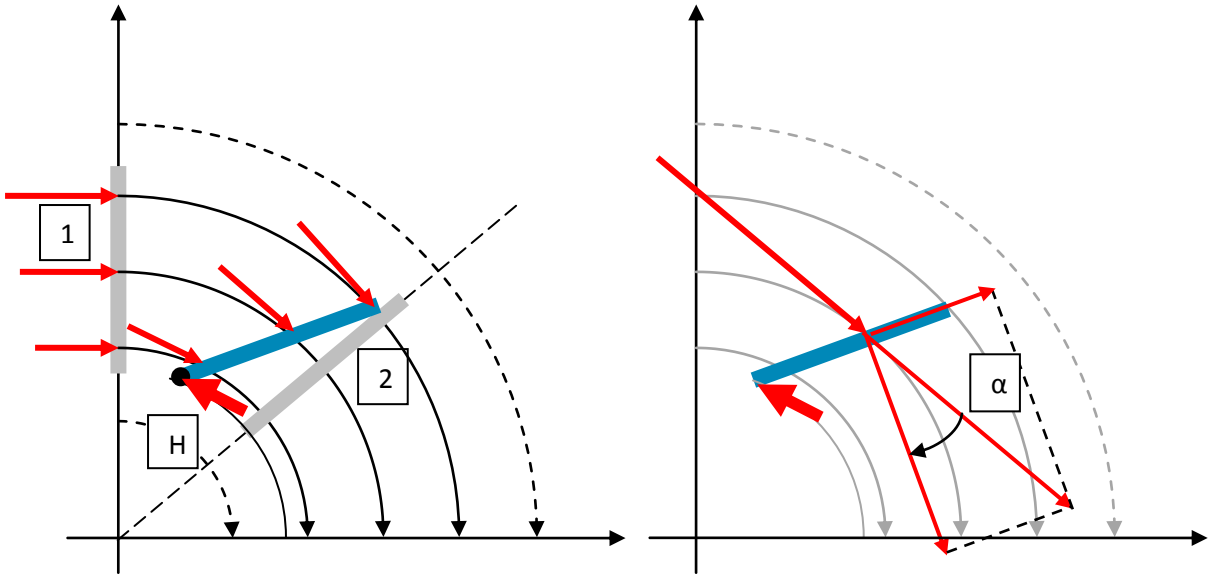


Bild 5 Links: Die Stromlinien sind durch Viertelkreise angedeutet. Ein Stäbchen (grau) liegt entlang der vertikalen Achse (1) und wird durch die Strömungskraft (drei horizontale rote Pfeile tangential zu den Stromlinien) bis zur Position 2 in kreisender Bewegung gehalten. Im zweiten Fall (blau) wird es am zentrumsnahen Ende durch Reibung in der Bodenschicht gebremst und erfährt eine Widerstandskraft (dicker roter Pfeil). Es bewegt sich mit diesem Ende tangential jetzt nur noch langsamer weiter. Die Kraftvektoren entlang der drei ausgewählten Stromlinien treffen nicht mehr senkrecht auf seine Oberfläche. Rechts sind die drei Vektoren, nach Länge und Auftreffwinkel (in diesem Beispiel 26, 41 und 48 Grad) gemittelt, zu einem einzigen zusammen gefasst. Die zum Stäbchen senkrechte Komponente übt ein Drehmoment aus.

Clip 2 Ein Papierstreifen gerät mit dem zentrumsnahen Ende in die Bodenschicht, die die Zirkularbewegung bremst und deren Strömung zum Zentrum hin führt. Zum Betrachten der Rotationsbewegung bitte „Filmclip 2“ anklicken.	

Clip 3

Teeblätter, die partiell in die Bodenströmung eintauchen und sich deshalb sammeln.

Zum Betrachten der Rotationsbewegung bitte „Filmclip 3“ anklicken

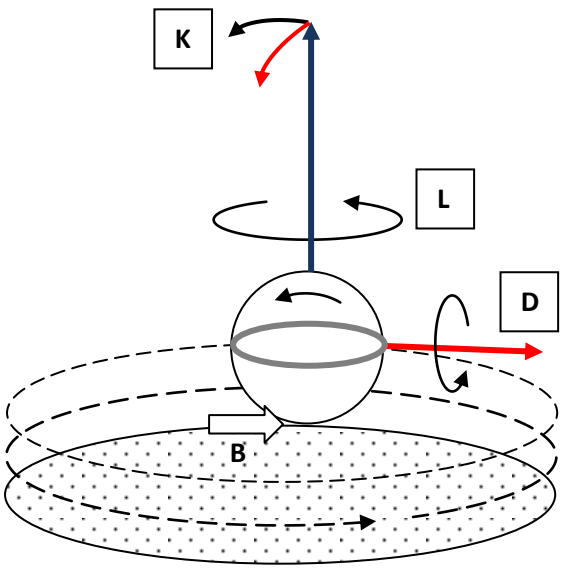


6. Kreiseleffekt

Mit der Flüssigkeit kreisende Teilchen besitzen einen Drehimpuls parallel zur Drehachse des Fluids. Nimmt man kugelförmige Teilchen an, die während der Kreisbewegung auch noch am Boden rollen (Bild 6), dann wird auf den Drehimpulsvektor ein Drehmoment ausgeübt, das die Kreiselachse zu kippen versucht. Die Folge ist ein weiteres Drehmoment, das die Kugel zur Mitte rollen lässt (ganz ähnlich entsteht die Präzessionsbewegung an einem Kreisel, auf den ein Drehmoment ausgeübt wird, z.B. durch die Schwerkraft).

Bild 6

Eine Kugel wird mit dem Fluid entgegen dem Uhrzeigersinn um das Zentrum bewegt. Der Drehimpulsvektor **L** zeigt nach oben. Durch die Bodenreibung wird auf die Kugel eine Bremskraft B ausgeübt (dicker Pfeil), so dass sie rollt, und der Drehimpulsvektor wird gekippt (**K**). Dies induziert ein Drehmoment, das die Kugel sich zur Mitte hin bewegen lässt (**D,** rote Pfeile).



7. Zahlenbeispiel

Der Durchmesser des Zylinders ist 100mm (-50 < x <50), die Oberfläche hat die Form eines Paraboloids. Die Eindellung in Bild 7 (grau) erstreckt sich bis zu einem Radius von $x_{max}\ /\sqrt{2}$ = $50/\sqrt{2}$ = 35,4mm und ist in der Mitte 10mm tief. Außerhalb wird das Fluid um ebenfalls 10mm angehoben (blau). Das Volumen dieses Anteils entspricht dem der Delle.

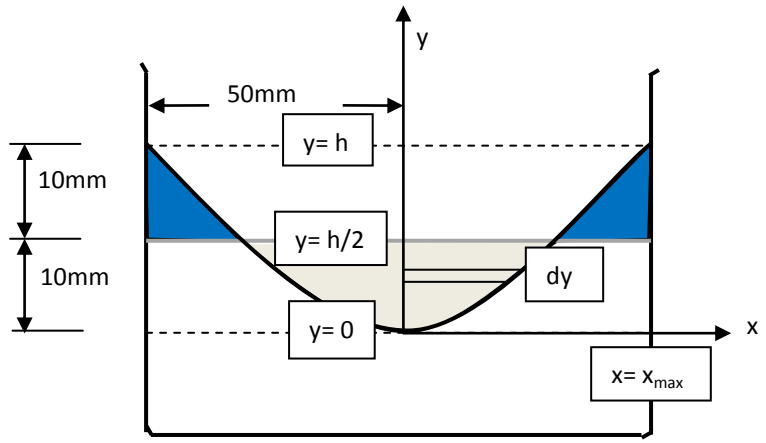


Bild 7

Rotierendes Fluid. Zur Bestimmung der Teilvolumina und der Arbeit beim Anheben der Flüssigkeit wird entlang der y-Achse integriert.

Zur Bestimmung der potenziellen Energie wird das Anheben des Tees gedanklich in zwei Abschnitte zerlegt: Erst wird Tee aus dem Bereich der Delle bis in die Höhe des Ruheniveaus geschöpft und anschließend von dort in einem zweiten Schritt in den überhöhten Randbereich gehoben (blau). Um diese beiden Teilbeträge erhöht sich die potenzielle Energie des Systems. Zur Berechnung wird jeder infinitesimal flache Abschnitt dy des Fluids mit der Strecke multipliziert, um die er in y-Richtung angehoben wird.

7.1 Volumina

Die Gleichung für die Parabel lautet $y = B \cdot x^2$. Aus der Randbedingung y=20mm bei x=50mm erhält man B = 0,008 und x^2= 125y. Das Volumen der Delle bis zur Neutrallinie beträgt, nach Einsetzen für x^2 und Integration

$$V_D = \int_0^{h/2} x^2 \pi\, dy = 125\pi \int_0^{h/2} y\, dy = \frac{125\pi}{2}[y^2]_0^{10} = 6250\pi \text{ mm}^3 = 19635 \text{ mm}^3$$

Das Volumen des Zylinders über dem Ruheniveau ist $V_{Zyl} = x_{max}^2 \cdot \pi \cdot h/2 = 50^2 \cdot \pi \cdot 10 = 25000\pi$; davon wird abgezogen das Volumen des Paraboloids oberhalb der Neutrallinie:

$$V_{Paraboloid} = \int_{h/2}^{h} x^2\, \pi\, dy = 125\pi \int_{h/2}^{h} y dy = \frac{125\pi}{2}[y^2]_{10}^{20} = = 18750\pi \text{ mm}^3$$

Das Volumen des Fluids über der Neutrallinie, $V_{Zyl} - V_{Paraboloid}$ beträgt 6250π mm^3 = 19635mm^3, ebenso wie das Volumen der Delle.

7.2 Potenzielle Energie

Ist das Rühren oder Zentrifugieren beendet, befindet sich das System in einem Zustand erhöhter potenzieller Energie und strebt nun wieder dem energetischen Gleichgewicht zu, wodurch der erwähnte Strömungsmechanismus in Gang gesetzt wird. Um diese potenzielle Energie zu bestimmen wird, wie schon beschrieben, das Wasser Schicht für Schicht (= dy) aus der Delle D auf die Höhe des Neutralniveaus (h/2 = 10mm) geschöpft. Das Volumen einer jeden Schicht dy wird mit dem Betrag in mm multipliziert, um die sie angehoben werden muss. Da es sich noch nicht um die potenzielle Energie handelt, wird das Integral mit H (und nicht mit E_{pot}) bezeichnet:

$$H_{Delle} = \int_0^{h/2} x^2\,\pi\left(\frac{h}{2}-y\right)dy = 125\pi\int_0^{h/2} y(10-y)dy = 125\pi\left[\frac{h}{4}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{10} =$$

$$= 65450\ \text{mm}^4.$$

Dabei bezieht sich der Dimensionsanteil mm^3 auf das Volumen und der verbleibende Anteil mm auf die Höhe, um die gehoben wird. Die potenzielle Energie erhält man dann, indem man das Volumen mit der Dichte, 10^{-6} kg/mm^3, multipliziert, die Höhe in mm durch 10^{-3}m ersetzt und noch mit der Gravitationsbeschleunigung 9,81 m/s^2 multipliziert. Das Ergebnis lautet $E(pot)_D = 642{,}06\cdot10^{-6}$ Nm.

Für die potenzielle Energie des Anteils über der Neutrallinie wird die Differenz zweier Volumina (Zylinder minus Paraboloid) mit dem Hebebetrag (y-h/2) multipliziert. Das Fluid wird nun vom Niveau y=h/2 = 10 auf die einzelnen Schichten zwischen h/2 und h verteilt. Dabei wird von jeder zylinderförmigen Schichte $x_{max}{}^2\,\pi$ dy der nicht ausgefüllte mittlere Teil $x^2\,\pi$ dy abgezogen und die Differenz mit der Hebestrecke (y-h/2) multipliziert. Als Integral:

$$H_{Zyl-Paraboloid} = \int_{h/2}^{h} (x_{max}{}^2\pi - x^2\,\pi)\cdot\left(y-\frac{h}{2}\right)dy =$$

$$= \pi\int_{h/2}^{h}\left(x_{max}^2 y - 125y^2 - x_{max}^2\frac{h}{2} + 125y\frac{h}{2}\right)dy =$$

$$= \pi\left[\left(x_{max}{}^2 + \frac{125h}{2}\right)\frac{y^2}{2} - \frac{125}{3}y^3 - x_{max}^2\frac{h}{2}y\right]_{10}^{20} = 65450\ \text{mm}^4$$

Dieser Wert führt auf die potenzielle Energie $E(pot)_{Zyl-Par} = 642{,}06\cdot10^{-6}$ Nm, also denselben Wert wie für $E(pot)_{Delle}$. Die Summe ergibt mit **$1284{,}12\cdot10^{-6}$** Nm die zusätzliche potenzielle Energie gegenüber dem Ruhezustand. Die Zentrifugalkraft schöpft also die Delle erst leer und transportiert dann diese Menge an Tee weiter in den überstehenden Rand. Da beide Energieanteile auf getrenntem Weg berechnet wurden, sind sie in der abschließenden Tabelle 1 auch getrennt aufgeführt.

7.3 Mittlere Hubhöhe

Dividiert man das Integral H durch V, so erhält man die mittlere Hubhöhe, also die Strecke, um die die einzelnen Schichten, nach ihrem Volumen gewichtet, im Mittel angehoben werden. Aus der Delle bis zum Neutralniveau sind es 3,333mm und für das überstehende Teevolumen (ab dem Neutralniveau) ebenfalls 3,333mm.

Tab. 1 Ergebnisse

	Delle	Überstehender Fluidanteil im Randbereich	Einheit
Volumen	19635	19635	mm^3
Masse	$19{,}635 \cdot 10^{-3}$	$19{,}635 \cdot 10^{-3}$	kg
Hubintegral	65450	65450	mm^4
Mittlere Hubhöhe	3,333	3,333	mm
Potenzielle Energie	$642{,}06 \cdot 10^{-6}$	$642{,}06 \cdot 10^{-6}$	Nm

8. Zusammenfassung

Das Zustandekommen der Strömung, die die Teeblätter zum Zentrum führt, wird in zwei zeitlich aufeinander folgende Schritte zerlegt: In den Aufbau der Randüberhöhung des Fluids durch Rühren oder Zentrifugieren und, danach, den Abbau dieser Überhöhung durch eine Ausgleichsströmung und die Rückkehr zum energetischen Gleichgewicht. Davon wird nur der zweite Teil ausführlicher behandelt, also die Phase, in der sich das parabolische Oberflächenprofil einebnet, ohne dass noch Energie zugeführt wird. In dieser Phase sammeln sich auch die großflächigen Teeblätter im Zentrum. Es wird die potenzielle Energie berechnet, die das Fluid mit parabolischem Profil gegenüber dem Ruhezustand enthält. Filmclips zeigen die Rotationsbewegung von suspendierten Teilchen zum Zentrum hin, deren Dichte nur geringfügig über der des Fluids liegt. Ein weiterer Clip bezieht sich auf die Bewegung von Teilchen an der Oberfläche.

Während in der Literatur zu Strömungen in Rohren, Maändern oder Wirbeln der stationäre Fall behandelt wird, bei dem ständig Energie zugeführt wird und bei der Rotation des Fluids eine sekundäre Zirkularströmung das Sammeln von Partikeln bewirkt, wird hier die Situation nach Ende des Energieeintrags behandelt, in der die Rückkehr zum Gleichgewichtszustand erfolgt. Zur Erklärung der Sammelbewegung wird hier eine Strömung herangezogen, die ebenfalls an der Wand nach unten und am Boden zur Mitte führt, dort aber den Flüssigkeitsspiegel anhebt und sich an der Oberfläche nur noch über den Bereich der Delle erstreckt, in der sie dann gleichsam versiegt. Sie ist dort auch nicht mehr so stark ausgeprägt wie am Boden zum Zentrum hin.

Es wird diskutiert, warum sich die Teeblätter oft in einer Art von Pirouettenbewegung dem Zentrum nähern. Außerdem wird die Möglichkeit betrachtet, dass suspendierte Teilchen, die am Boden in der Primärströmung in einiger Entfernung um das Zentrum rollen, infolge eines Kreiseleffekts auch noch zusätzlich ein Drehmoment zur Mitte hin erfahren.

Literatur

Boussinesq, MJ (1868). Mémoire sur l´influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides. *Journal de mathématiques pures et appliquées 2^{e}série,* 13, 377-424.

Brinkmann B (2005). *Seehäfen. Planung und Entwurf*. ISBN 3-540-20587-X Springer Berlin Heidelberg New York.

Einstein, A (1926). Die Ursache der Mäanderbildung der Flußläufe und des sogenannten Baerschen Gesetzes. *Die Naturwissenschaften,* 14, 223-224.

Isaachsen, J (1896). Über einige Wirkungen von Zentrifugalkräften in Flüssigkeiten und Gasen. *Zivilingenieur,* 42, 351.

Isaachsen, J (1911). Innere Vorgänge in strömenden Flüssigkeiten und Gasen. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 55, pp. 215, 263, 428, 605, 946.

ON 1 https://de.wikipedia.org/wiki/Sekund%C3%A4rstr%C3%B6mung. Gesehen am 20. 08. 2015.

ON 2 https://de.wikipedia.org/wiki/Whirlpool_%28Brauerei%29. Gesehen am 01. 11. 2015.

http://www.hobbybrauer-kompendium.de/w/whirlpool/whirlpool.html. Gesehen am 01. 11. 2015.

http://laupen-bier.ch/whirlpool. Gesehen am 04. 09. 2015.

ON 3 http://vzb.baw.de/die-kueste/0/k077103.pdf. Gesehen am 28. 10. 2015.

Prandtl, L (1926). Bemerkungen zu dem Aufsatz von A. Einstein: Die Ursache der Mäanderbildung und das sogenannte Baersche Gesetz. *Die Naturwissenschaften,* 14, 619-620:

Thomson, James (1876-1877). On the Origin of Windings of Rivers in Alluvial Plains, with Remarks on the Flow of Water round Bends in Pipes. *Proceedings of the Royal Sociecty of London, Ser.B,* 25, 5-8.