ulm university universität ulm

# Grundlagen der Regelungstechnik

Regelungstechnik 1




**Prof. Dr. Eberhard P. Hofer**

Institutsdirektor i.R.

Institut für Mess–, Regel– und Mikrotechnik

Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik

Universität Ulm

2008

# Vorbemerkung

Der Autor dieses Vorlesungsmanuskriptes hat die Vorlesung *Grundlagen der Regelungstechnik* bis zum Wintersemester 2006/2007 angeboten und regelmäßig das Manuskript seinen Hörern zur Verfügung gestellt. Die vorliegende Fassung entspricht dem Stand der Vorlesung vom Wintersemester 2006/2007, sie wurde geringfügig redaktionell überarbeitet.

Im Wintersemester 2007/2008 wurde das Vorlesungsmanuskript vom Wintersemester 2006/2007 mit dem Deckblatt datiert vom „02. Oktober 2007“ unter dem Namen „Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer“ als Raubkopie über die Fachschaft Elektrotechnik der Universität Ulm in Umlauf gebracht. Das ursprüngliche Deckblatt mit Autor Prof. Dr. Eberhard P. Hofer wurde ohne Hinweis auf den tatsächlichen Autor entfernt.

Als Alleinautor des vorliegenden Vorlesungsmanuskriptes *Grundlagen der Regelungstechnik/Regelungstechnik 1* sehe ich mich zu dieser Richtigstellung veranlasst.

Eberhard P. Hofer

**Literatur zur Vorlesung** **1**

**1 Einführung** **2**

1.1 Aufgabe der Regelungstechnik ... 2
1.2 Beschreibung des Übertragungsverhaltens ... 4
1.3 Steuerung und Regelung ... 7
1.4 Grundstruktur und Bezeichnungen von Regelkreisen ... 9
1.5 Forderungen an Regelkreise ... 11
1.6 Problemstellungen in der Regelungstechnik ... 12
1.7 Klassifikation von Regelkreisen ... 13

**2 Mathematische Modelle** **14**

2.1 Beispiele für dynamische Modelle ... 14
2.2 Folgerungen aus den mathematischen Modellen ... 18

**3 Analyse linearer Regelkreisglieder im Zeitbereich** **19**

3.1 Beschreibung linearer Regelkreisglieder durch Differentialgleichungen ... 19
3.2 Lösung von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ... 20
3.3 Übertragungsverhalten und Faltung ... 23
3.4 Linearität und Zeitinvarianz ... 25
3.5 Impulsfunktion und Impulsantwort ... 30

**4 Analyse linearer Regelkreisglieder im Bildbereich** **32**

4.1 LAPLACE–Transformation ... 32
4.2 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der LAPLACE–Transformation ... 35
4.3 Übertragungsfunktion ... 36
4.4 Übertragungsfunktion bei Einbeziehung einer Totzeit ... 38
4.5 Übertragungsfunktionen von Grundschaltungen ... 39

**5 Stabilität linearer Systeme** **40**

5.1 Definitionen ... 40
5.2 Stabilitätsbedingungen ... 41
5.3 Stabilitätskriterien ... 44
5.4 HURWITZ-Kriterium ... 47
5.5 KHARITONOV-Kriterium für robuste Stabilität ... 49

**6 Frequenzgang und Bodediagramm 52**

6.1 Harmonische Anregung und Frequenzgang ... 52
6.2 Definition des Frequenzganges ... 54
6.3 Graphische Darstellung des Frequenzganges ... 54
6.4 Ortskurven der wichtigsten Regelkreisglieder ... 55
6.5 Anfang und Ende der Ortskurven rationaler Frequenzgänge ... 58
6.6 Addition und Multiplikation von Ortskurven des Frequenzganges ... 59
6.7 Frequenzkennlinien und BODE–Diagramm ... 60
6.8 BODE–Diagramme der wichtigsten Regelkreisglieder ... 61
6.9 Vorteile der logarithmischen Frequenzkennlinien ... 65

**7 Führungs– und Störverhalten des Regelkreises 68**

7.1 Führungsverhalten ... 68
7.2 Störverhalten ... 69
7.3 Statische Regelabweichung ... 71
7.4 Beispiel für das Störverhalten eines Regelkreises ... 72

**8 Stabilität des geschlossenen Regelkreises 73**

8.1 Bestimmung der Stabilitätsgrenze ... 74
8.2 NYQUIST–Kriterium ... 75

**9 Frequenzkennlinienverfahren für den Reglerentwurf 77**

9.1 Forderungen an den geschlossenen Kreis ... 78
9.2 Einfügen von Korrekturgliedern ... 81
9.3 Realisierbarkeit von Korrekturgliedern ... 84

**10 Einstellregeln nach ZIEGLER–NICHOLS 85**

**11 Wurzelortskurvenverfahren 86**

11.1 Einführendes Beispiel ... 86
11.2 Allgemeiner Fall und Definition der Wurzelortskurve (WOK) ... 88
11.3 Halbanalytisches Verfahren zur Konstruktion von Wurzelortskurven ... 89
11.4 Regeln für die Konstruktion von Wurzelortskurven ... 90

**Anhang VA 1**

A.1 Regeln für das Rechnen mit $\delta$-Funktionen ... VA 1
A.2 Übergangs- und Gewichtfunktionen der wichtigsten Regelkreisglieder ... VA 3
A.3 Regeln der LAPLACE–Transformation ... VA 9
A.4 Korrespondenztabelle zur LAPLACE–Transformation ... VA 12
A.5 Regeln zum Umformen von Blockschaltbildern ... VA 17
A.6 Blockschaltbildsymbole im Zeitbereich ... VA 18

# Literatur zur Vorlesung Grundlagen der Regelungstechnik

(es sind nur deutschsprachige Titel angegeben)


1. Föllinger, O.:
   Regelungstechnik, 8. Auflage.
   Dr. Alfred Hüthig Verlag GmbH, Heidelberg 2005
2. Becker, C., Litz, L., Siffling, G.:
   Regelungstechnik Übungsbuch, 4. Auflage; (zum Buch von Föllinger).
   Dr. Alfred Hüthig Verlag GmbH, Heidelberg 1993
3. Lunze J.:
   Regelungstechnik 1, 5. Auflage.
   Springer–Verlag, Berlin 2006
4. Unbehauen, H.:
   Regelungstechnik I, 13. Auflage.
   Vieweg, Braunschweig 2005
5. Unbehauen, H.:
   Regelungstechnik Aufgaben I
   Vieweg, Braunschweig 1992
6. Geering, H.P.:
   Regelungstechnik. Mathematische Grundlagen, Entwurfsmethoden, Beispiele, 6. Auflage.
   Springer–Verlag, Berlin, 2004
7. Dörrscheidt, F., Latzel, W.:
   Grundlagen der Regelungstechnik, 2. Auflage.
   B.G. Teubner, Stuttgart 1993
8. Schulz, G.:
   Regelungstechnik 1, 2. Auflage.
   Oldenbourg–Verlag, München 2004
9. Weinmann, A.:
   Regelungen - Analyse und technischer Entwurf, 3. Auflage.
   Band 1: Systemtechnik linearer und linearisierter Regelungen
   auf anwendungsnaher Grundlage.
   Springer–Verlag, Wien 1994
10. Weinmann, A.:
    Test- und Prüfungsaufgaben Regelungstechnik, 1. Auflage.
    Springer–Verlag, Wien 1997; Neuauflage Nov. 2006

Zusätzlich: Taschenbuch der Mathematik

11. Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.:
    Taschenbuch der Mathematik, 6. Auflage.
    Verlag H. Deutsch, Frankfurt/Main 2005
12. Råde, L., Westergren, B.:
    Springers Mathematische Formeln. Taschenbuch für Ingenieure, Naturwissenschaftler,
    Informatiker, Wirtschaftswissenschaftler (übersetzt von P. Vachenauer), 3. Auflage.
    Springer–Verlag, Berlin 2000

# 1 Einführung

**Regelungstechnik**

- Als Grundlage der Automatisierungstechnik
- Als Bestandteil der Kybernetik*

## 1.1 Aufgabe der Regelungstechnik

Es geht um das universelle Problem der zielgerichteten Beeinflussung eines dynamischen Systems. In der Regel unterliegen derartige Systeme Störungen von außen. Ziel ist die Beseitigung der Auswirkungen von störenden Einflüssen.

Hierzu einige Beispiele aus der *Technik*:

Kursregelung bei Wind.
Stromregelung bei veränderlicher Last.
Reaktorregelung bei Temperaturschwankungen.

Die Erfassung von Meßwerten ist Bestandteil eines Regelungsvorganges.

**Ziele beim Einsatz der Regelungstechnik:**

- Das Bedienungspersonal wird durch selbsttätige Regelung oder Steuerung ersetzt (z.B. Rudereingriffe, Ventilstellungen).
- Steuerung und Regelung (allgemein Automatisierung) ist unumgänglich, wenn die menschliche Hilfskraft nicht mehr ausreicht (z.B. sehr schnelle Vorgänge, komplexe Anlagen).
- Regelung unter Beachtung von Optimalitätskriterien (z.B. energieminimale Satellitenbahnen, maximale Ausbeute, zeitoptimale Anlagensteuerung).
- Anpassung an eine zeitlich veränderliche Struktur bzw. sich zeitlich verändernde Parameter (adaptive Regelung) einer Anlage (z.B. veränderliche Raketenmasse beim Aufstieg).

Beispiel aus der *Natur*:
Regelung der Pupillenöffnung der Augen in Abhängigkeit von der Helligkeit.

Beispiel aus der *Wirtschaft*:
Regelung von Angebot und Nachfrage über Preis und Lieferzeit.

* Wissenschaft der gesteuerten und geregelten Systeme (in Natur, Technik und Gesellschaft), deren Informationsübertragung und Informationsverarbeitung.
Aufgabe der Kybernetik: Zielgerichtete Beeinflussung dieser Systeme.

### Gesichtspunkte bei der Lösung von Regelungsproblemen

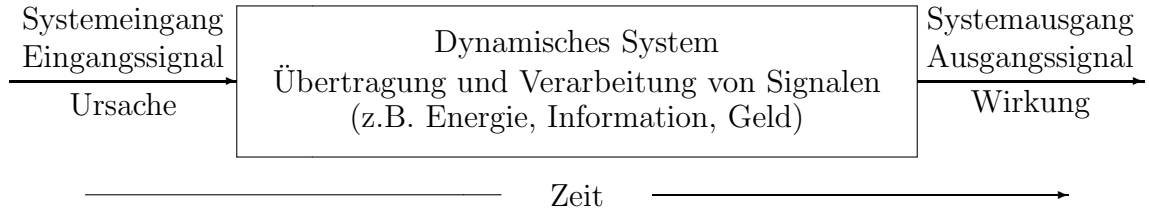
Steuer– und Regelgeräte dienen der Signalüberwachung in einer Anlage. Eine wesentliche Voraussetzung dafür ist die Kenntnis des Signalübertragungsverhaltens des betrachteten Systems.

- Ausgangspunkt ist die Erfassung der Systeme durch mathematische Modelle.
- Die zu regelnde physikalische Größe (z.B. Druck, Temperatur, Spannung) ist zweitrangig.
- Eine weitgehende Unabhängigkeit von konstruktiven Gesichtspunkten liefert allgemein verwertbare Aussagen.

### Regelungstechnik als eigenständiges Fachgebiet

- Die Regelungstechnik ist weniger eine Gerätewissenschaft, sondern vielmehr eine Systemwissenschaft.
- Verbindendes Element der technischen Wissenschaften. Stark methodisch orientiert.
- Einsatz bei technischen und nichttechnischen (biologischen, soziologischen, ökologischen) Systemen. Die Methoden finden allgemein bei dynamischen Systemen Anwendung.

### Dynamisches System




Das Ausgangssignal ist die *zeitliche* Auswirkung des dynamischen Sytems auf das Eingangssignal.

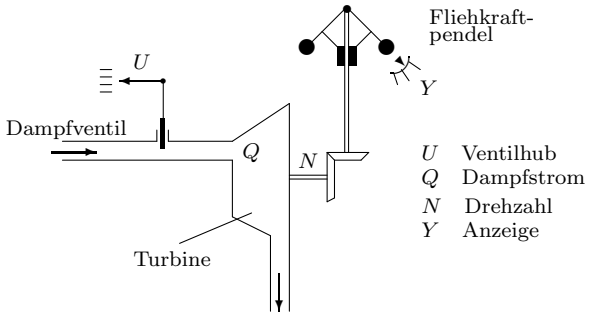
Kennzeichen: *Gerichtete Signalübertragung* (charakterisiert durch einen Pfeil)

Beispiele:

Ein einzelnes Gerät (Meßgerät mit *einem* Eingang und *einem* Ausgang).
Gesamte technische Anlage (mehrere Ein-/Ausgänge).
Wirtschaftssystem (mehrere Teilsysteme hierarchisch geordnet).

## 1.2 Beschreibung des Übertragungsverhaltens

**Beispiel 1**: Drehzahl einer Dampfturbine

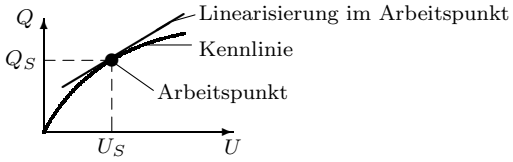



**Ausgangssituation**: Es liege ein stationärer Betrieb in einem Arbeitspunkt vor.
**Frage der Signalübertragung**: Wie wirkt sich eine Änderung des Ventilhubs $U$ auf die Anzeige $Y$ aus?

Die Beantwortung erfolgt in mehreren Einzelschritten.

**1. Ventil:** $U \to Q$

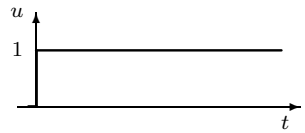
- Es liege die Messung $Q = Q(U)$ vor. Der *Arbeitspunkt* sei $Q_S = Q(U_S)$.



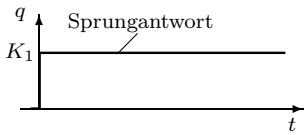

Näherung in der Umgebung des Arbeitspunktes:
$Q - Q_S = K_1 \cdot (U - U_S)$ mit dem gemessenen Verstärkungsfaktor $K_1 = \frac{dQ}{dU}\,|_{U=U_S}$.
Mit $q = Q - Q_S$ und $u = U - U_S$ seien die Abweichungen vom stationären Zustrom und dem stationären Ventilhub bezeichnet. Dann ergibt sich als Linearisierung im Arbeitspunkt:

$$q = K_1 \cdot u$$

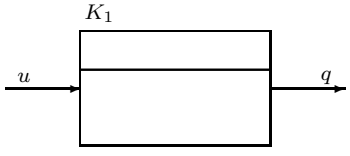
- *Testsignal* zur Charakterisierung des Übertragungsverhaltens des Ventils: Sprungfunktion (*Einheitssprung*)




Annahme: Bei sprunghafter Öffnung des Ventils soll ein verzögerungsfreier Volumenzustrom erfolgen. Damit erhalten wir als Antwort auf den Einheitssprung:




- Symbolische Darstellung des Übertragungsverhaltens:

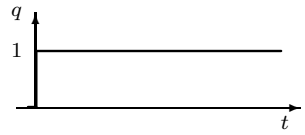



Ergebnis: Das Ventil zeigt proportionales Übertragungsverhalten, es handelt sich um ein sogenanntes *Proportionalglied* (charakterisiert durch die Verstärkung $K_1$).

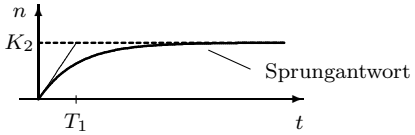
Man schreibt dafür abkürzend: **P-Glied**

**2. Drehzahl:** $Q \rightarrow N$

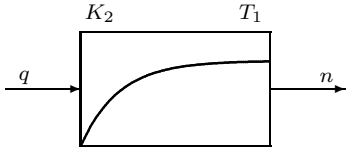
- Der *Arbeitspunkt* sei $N_S = N(Q_S)$. Wir definieren $n = N - N_S$ als Abweichung von der stationären Drehzahl.
- Als *Testfunktion* verwenden wir wieder den Einheitssprung.




Der neue stationäre Zustand stellt sich nach einer Verzögerung ein. Die Drehzahl wächst, bis der Volumenstrom im Abfluß gleich dem Volumenstrom im Zufluß ist.




- Symbolische Darstellung:

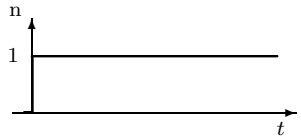



Ergebnis: Die Drehzahl zeigt das Übertragungsverhalten eines sogenannten *Verzögerungsgliedes 1. Ordnung* (charakterisiert durch die Verstärkung $K_2$ und die Zeitkonstante $T_1$).

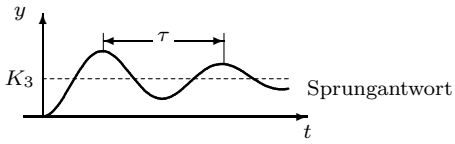
Man schreibt dafür abkürzend: **$PT_1$-Glied**

**3. Meßgerät:** $N \rightarrow Y$

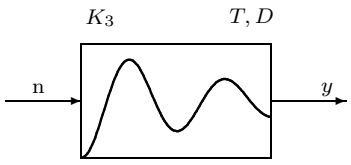
- Die *stationäre Anzeige* (Arbeitspunkt) sei $Y_S = Y(N_S)$. Als Abweichung von der stationären Drehzahlanzeige definieren wir $y = Y - Y_S$.
- Als *Testfunktion* wird ebenfalls wieder der Einheitssprung verwendet.




Die Anzeige führt gedämpfte Schwingungen aus bis zum Erreichen des neuen stationären Wertes.




- Symbolische Darstellung:



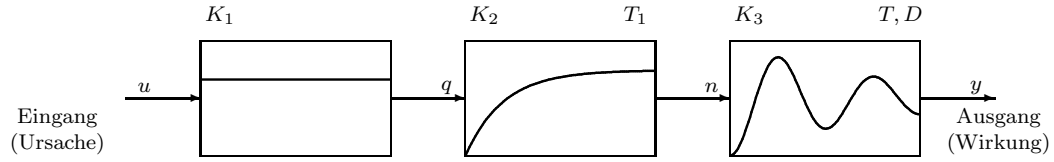

Ergebnis: Das Meßgerät zeigt das Übertragungsverhalten eines sogenannten *Verzögerungsgliedes 2. Ordnung* (charakterisiert durch die Verstärkung $K_3$, die Zeitkonstante $T$ und die Dämpfung $D$).

Man schreibt dafür abkürzend: **$PT_2$-Glied**

Hinweis: Die Zeitkonstante $T$ läßt sich aus der Schwingungsdauer $\tau$ berechnen.

**4. Gesamtsystem:** Das Übertragungsverhalten des gesamten Systems kann durch Hintereinanderschaltung der einzelnen Übertragungsglieder (Blöcke) dargestellt werden. Wir gelangen so zum folgenden Blockschaltbild.

**Blockschaltbild:**



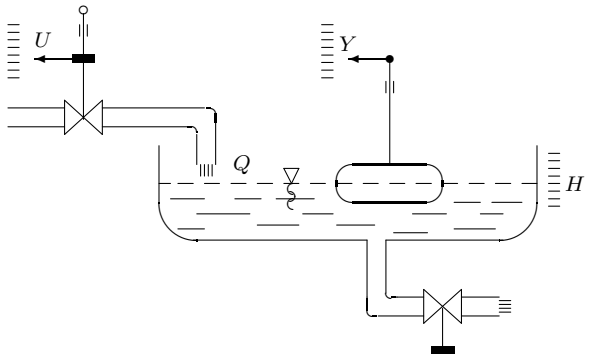

Ergebnis:

- Wir haben das System aufgetrennt. Dabei ist wichtig, daß die Auftrennung des Gesamtsystems in Teilsysteme so erfolgt, daß jeder Systemteil die Signalübertragung nur in einer Richtung erlaubt, d.h. rückwirkungsfrei arbeitet. Dies wird durch Pfeile dargestellt. (Hinzukommende Störungen dürfen sich nicht durch den betreffenden Block hindurch auf das Eingangssignal auswirken.)

- Die Art der physikalischen Größe ist in dieser Darstellung zweitrangig. Entscheidend für die Regelungstechnik ist das Übertragungsverhalten und nicht die Gerätetechnik der einzelnen Systemteile.

Weiteres Beispiel zur Darstellung des Übertragungsverhaltens:

**Beispiel 2:** Füllstand in einem Behälter



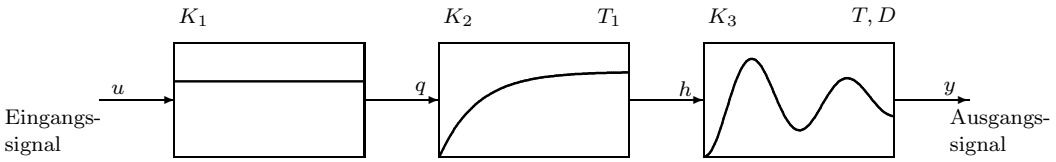




Arbeitspunkt: $U_S, Q_S, H_S, Y_S$
Abweichungen vom Arbeitspunkt:

| | |
|---|---|
| $u = U - U_S$ | Ventilstellung |
| $q = Q - Q_S$ | Zufluß zum Behälter |
| $h = H - H_S$ | Füllstand |
| $y = Y - Y_S$ | Schwimmeranzeige |

**Blockschaltbild:**



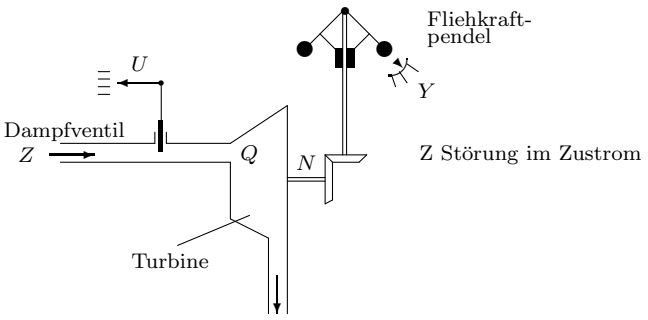

**Folgerungen aus beiden Beispielen:**

- Es ist ohne Bedeutung, ob das Blockschaltbild ein elektrisches, mechanisches, chemisches oder thermisches System darstellt.
- Diese einheitliche Darstellung verschiedenartiger Systeme ist von Vorteil für die Modellsimulation auf dem Analog- bzw. Digitalrechner.
- Der Übergang vom technischen System zum abstrakten mathematischen Modell erfolgt durch Kombination von Experiment und Theorie.
- Notwendige Voraussetzungen für die Modellbildung sind die Kenntnis der physikalischen Grundlagen und technisches Fingerspitzengefühl.

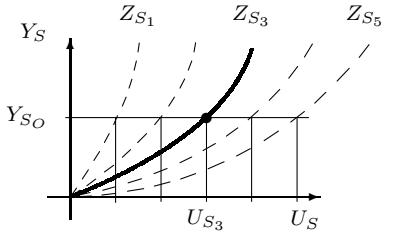
## 1.3 Steuerung und Regelung

Die Unterschiede sollen am Beispiel einer Dampfturbine erläutert werden. Dazu betrachten wir den Einfluß des Druckes $Z$ im Zustrom auf das Übertragungsverhalten.

**Steuerung:**

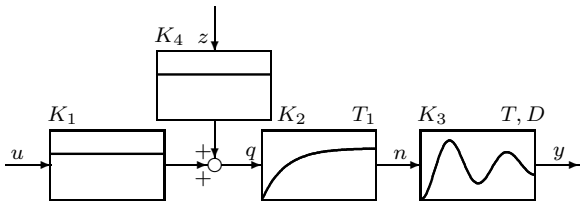



**Bisher**: Es wurde angenommen, daß der Druck $Z$ im Zustrom einen fest vorgegebenen stationären Wert $Z = Z_S$ besitzt und beibehält. Aus einem Kennlinienfeld $Z_S = Z_S(U_S, Y_S)$ kann dann für jeden Wert $Z_S = const.$ bei vorgegebener Anzeige $Y_S$ die Ventilstellung $U_S$ abgelesen werden.




Kennlinienfeld für verschiedene stationäre Werte $Z_{si}$

**Jetzt**:
- Wir lassen *Druckschwankungen* zu, d.h. $Z \neq Z_S$ .
  Stellt man bei vorgegebener Drehzahl bzw. Anzeige $Y_S$ den Ventilhub $U_S$ dennoch nach der Kennlinie für $Z_S$ ein, so liefert dies *kein befriedigendes Ergebnis.*
- Wir führen die *Störung* $z = Z - Z_S \neq 0$ ein und erhalten als **Blockschaltbild für die Steuerung:**




Ergebnis: Der Erfolg der Steuerung ist an die folgenden Voraussetzungen gebunden:

- Sorgfältige Kalibrierung der Anlage (Aufnahme der Kennlinie).
- Es sind keine unbekannten Störgrößen vorhanden.
- Verschleiß in der Anlage (z.B. Änderung der Ventilcharakteristik) ist nicht vorhanden bzw. ohne Einfluß.

Als *charakteristisch für eine Steuerung* halten wir fest:

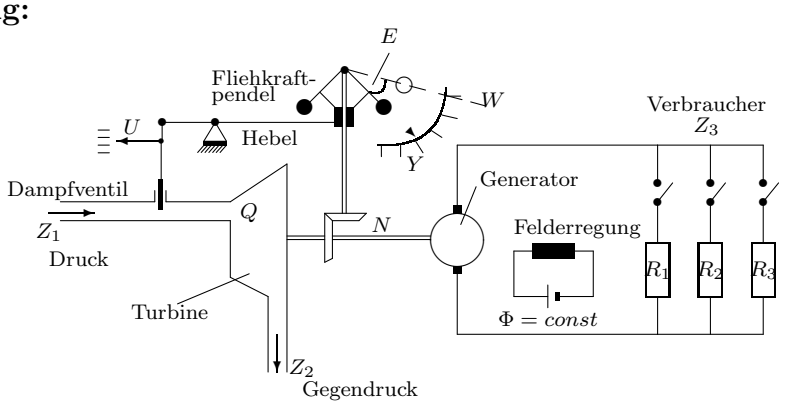
- Die Signalübertragung erfolgt in *einer* Richtung. Bei der Steuerung handelt es sich um einen *offenen Wirkungsablauf* (*Steuerkette*).

**Neue Aufgabe:**

Sind die zuvor genannten Voraussetzungen nicht erfüllt, so kann für Abhilfe gesorgt werden, indem die Steuerung durch eine geeignete Veränderung der Anzeige $Y$ überwacht wird. Dies ist insbesondere wichtig, wenn noch weitere unbekannte Störungen vorhanden sind (wie z.B. Gegendruck $Z_2$, Verbraucher $Z_3$). Wir gelangen so zur Regelung.

Ein Kriterium für die Abhilfe ist: Die Anzeige $Y$ muß eine Abweichung vom vorgegebenen Sollwert $W$ erkennen lassen.

**Regelung:**



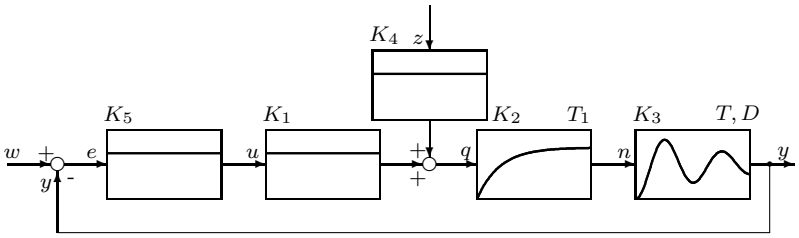

Vorgehen: Ein Vergleich von Sollwert $W$ und Anzeige $Y$ liefert das Fehlersignal $E$.

Fall 1: Ist $Y = W$ , so ergibt sich kein Fehlersignal und Abhilfe ist unnötig.

Fall 2: Ist $Y \neq W$ , z.B. bei Schwankungen von $Z$, so ergibt sich ein Fehlersignal $E = W - Y$.
Als normiertes Fehlersignal führen wir ein: $e = w - y$.
Über den Hebel wird proportional zum Fehler $e$ der Ventilhub $u$ verstellt. Es besteht ein Zusammenhang der Form

$$u = K_5 \cdot e$$

Die entscheidende Maßnahme war: Das Ausgangssignal $y$ wurde auf das Eingangssignal $u$ zurückgeführt (Rückkopplung). Wir gelangen damit zum
**Blockschaltbild der Regelung:**




Als *charakteristisch für eine Regelung* halten wir fest:

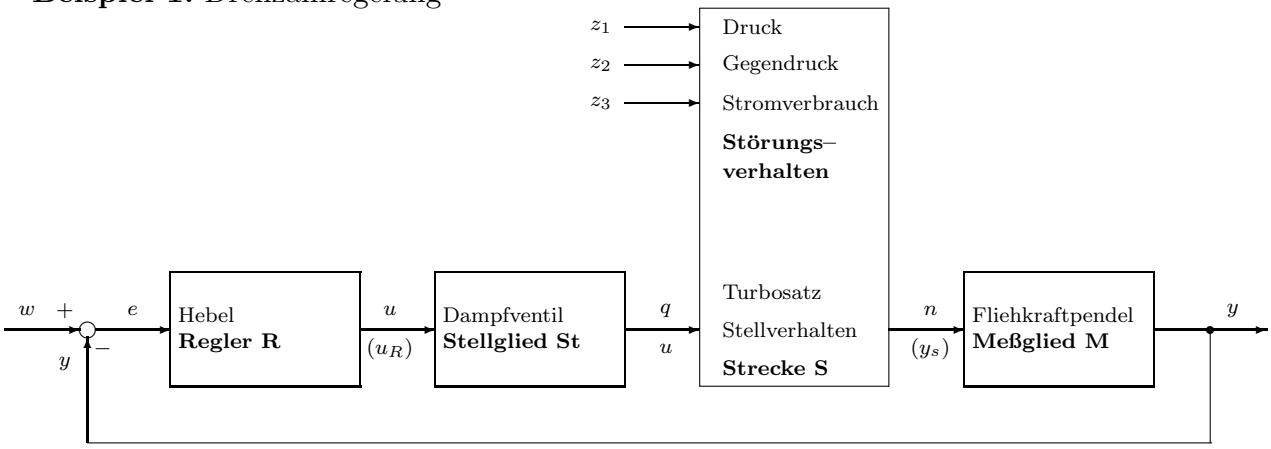
- Signale werden zurückgeführt. Bei der Regelung handelt es sich um einen *geschlossenen Wirkungsablauf* (*Regelkreis*).

**Vorteil der Regelung:** Beseitigung der Auswirkungen von Störungen durch Rückkopplung. (Gelegentlich spricht man auch von negativer Rückkopplung.)

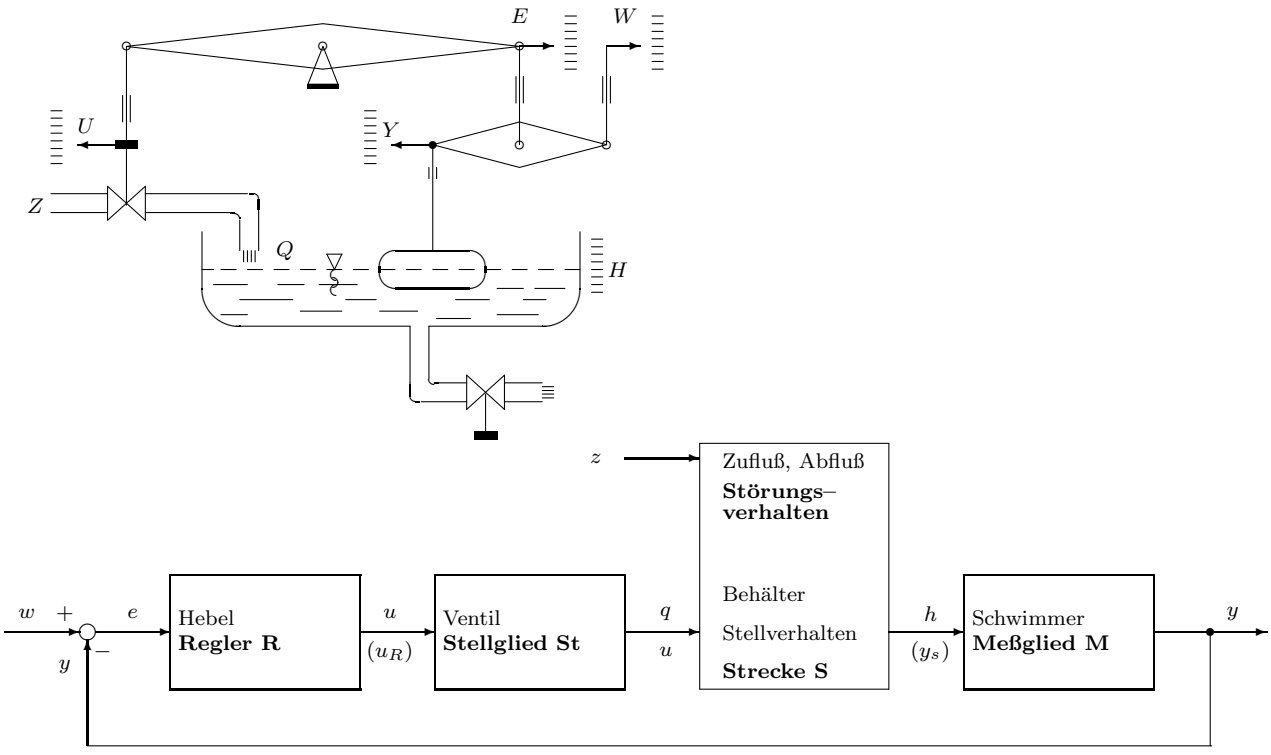
## 1.4 Grundstruktur und Bezeichnungen von Regelkreisen

*Hauptbestandteile eines Regelkreises* (Regelkreisglieder) aufgezeigt an den Beispielen Drehzahlregelung und Füllstandsregelung.

**Beispiel 1:** Drehzahlregelung

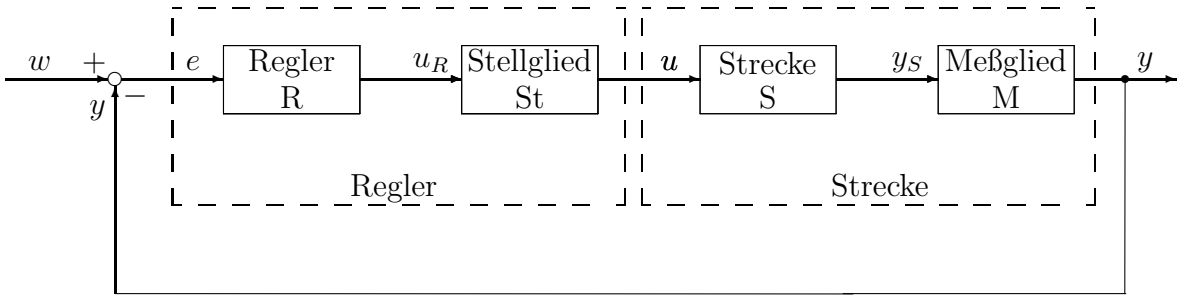



**Beispiel 2:** Füllstandsregelung



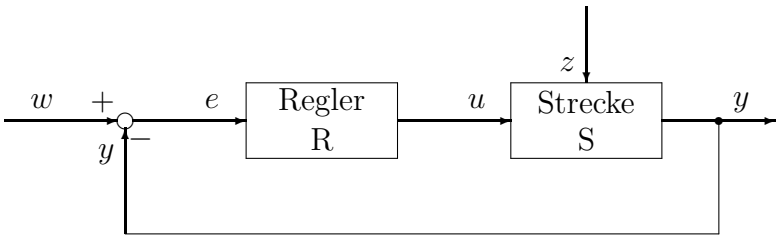

Regelkreisglieder: Regelstrecke (Strecke) S
Meßglied M
Regler R
Stellglied St

**Standardisierter Regelkreis und Bezeichnungen**




Nimmt man das Stellglied zum Regler mit hinzu und faßt man das Meßglied mit der Strecke zusammen, so erhält man den nachfolgend skizzierten *Standardregelkreis*.

**Bezeichnungen** (abweichend von DIN 19226)




| | |
|---|---|
| $w(t)$ | Sollwert (Führungsgröße) |
| $y(t)$ | Regelgröße |
| $e(t)$ | Regelabweichung ($e = w - y$) |
| $u(t)$ | Stellgröße |
| $z(t)$ | Störgröße |

Beispiele für Meß–, Regel– und Stelleinrichtungen seien nachfolgend genannt:

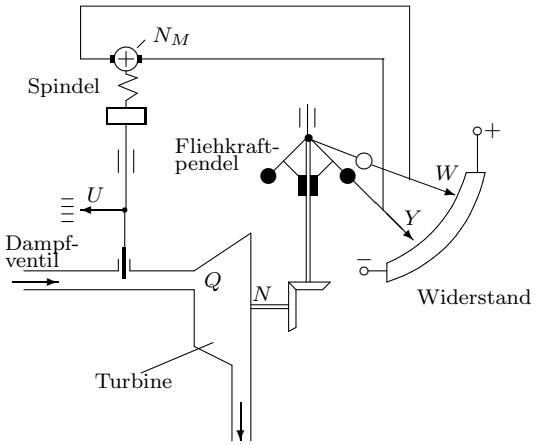
- Meßeinrichtung: Schwimmer, Fliehkraftpendel, Thermometer, Kreisel
- Regeleinrichtung: Sollwertgeber, Abgriff, Integrator, Rechner
- Stelleinrichtung: Stellventil, Drosselklappe, Verstärker, Stellmotor

## 1.5 Forderungen an Regelkreise

### 1. Stabilität

Die bereits bekannte Drehzahlregelung dient wieder als einführendes Beispiel. Die bisher vorgeschlagene Regleranordnung, nämlich mechanisch mit Hilfe eines Hebels, arbeitet kaum rückwirkungsfrei. Die gesamte Energie des Ventilhubs muß vom Meßglied aufgebracht werden. Es besteht die Gefahr der Instabilität durch aufklingende Schwingungen im Regelkreis. Eine wichtige Forderung ist daher die Stabilität eines Regelkreises.

Abhilfe in unserem Beispiel: Motor mit Hilfsenergiequelle.




Zunächst werden $Y$ und $W$ in proportionale Spannungswerte umgesetzt. Wir betrachten im folgenden wieder Abweichungen vom Arbeitspunkt.
Drehzahl $n_M$ des Motors:

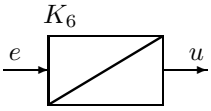
$n_M = w - y$

Zusammenhang zwischen Drehzahl $n_M$ und Ventilhub $u$:

$\frac{du}{dt} = \dot{u} = K_6 \cdot n_M$ bzw. $u = K_6 \cdot \int e dt$ mit $e = n_M$

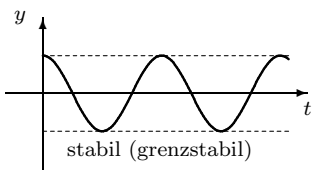
Der Regler besitzt hier integrales Verhalten.
Man schreibt abkürzend dafür: **I–Regler**

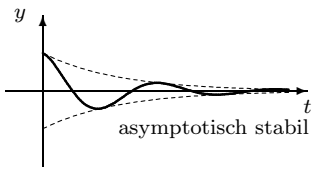
Symbolische Darstellung:

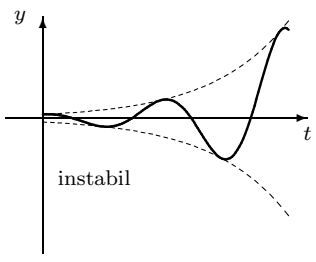



Ausgangspunkt für die Formulierung der *Stabilitätsforderung* ist ein stationärer Betriebszustand, z.B. $y_s = 0$. Mögliche Zeitverläufe von Ausgangs– bzw. Fehlersignal sind nachfolgend für die Regelgröße $y$ dargestellt.

Bei kleiner Anfangsauslenkung (Störung) $y(0)$ und nicht vorhandenem Eingangssignal, d.h. $u(t) \equiv 0$, soll das Ausgangssignal ab einem gewissen Zeitpunkt in der Nähe von $y_s = 0$ bleiben.

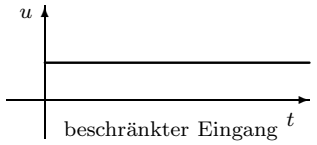


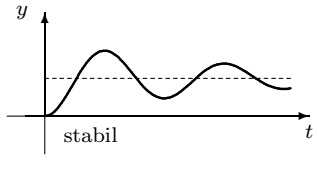



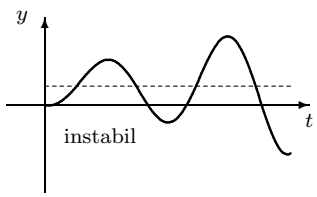




**oder:**

Bei *beschränktem* Eingangssignal $u(t)$ muß das Ausgangssignal $y(t)$ ebenfalls beschränkt bleiben.

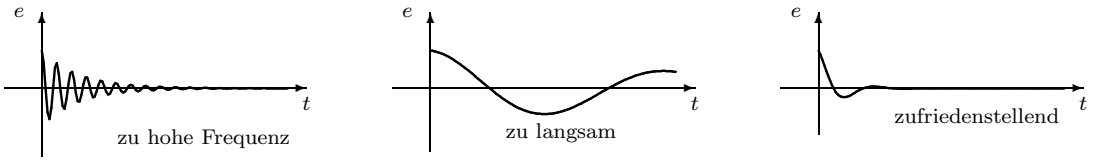


**2. Regelgüte**

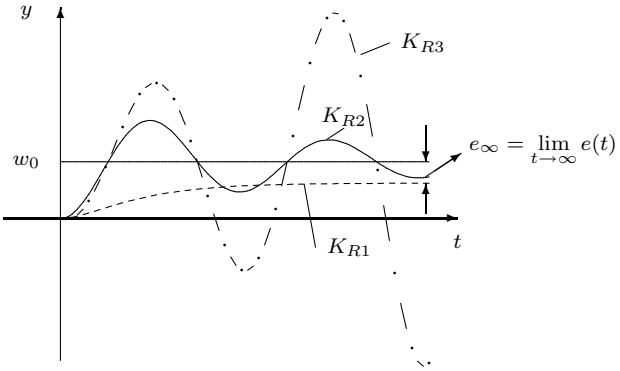
Die Regelabweichung $e(t) = w - y(t)$ muß mit wachsender Zeit gegen Null gehen.




Für die verschiedenen Reglerübertragungsfaktoren $K_{R_i}$ ergeben sich für $t \to \infty$ verschiedene Regelabweichungen.

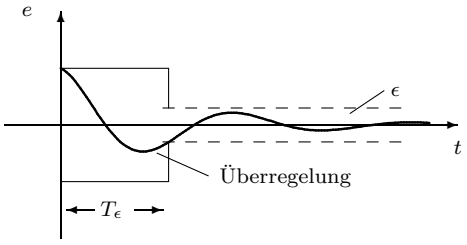
**Beispiel:** Drehzahlregelung mit Proportionalregler (P-Regler)

Für den P-Regler gilt die Beziehung $n_M = K_R \cdot e = K_R(w - y)$, wobei $K_R$ *Verstärkungsfaktor* bzw. *Reglerübertragungsfaktor* heißt. Nachfolgend sind für drei verschiedene Reglerübertragungsfaktoren $K_{R_1} < K_{R_2} < K_{R_3}$ einige typische Ausgänge für einen Sollwertsprung $w_0$ skizziert.




**Ergebnis:** Der Verstärkungsfaktor ist so zu wählen, daß *Stabilität* und *Regelgüte* gewährleistet sind.

Eine häufige *Vorschrift* für die Regelgüte ist eine quantitative Zielfunktion.
Beispiel:




Ziel: Minimierung der Beruhigungszeit $T_\epsilon$ bezüglich $K_R$ bei vorgegebenem $\epsilon$, d.h.:

$$T_\epsilon(K_R^*) = \min_{K_R} T_\epsilon(K_R)$$

$K_R^*$ heißt optimaler Verstärkungsfaktor.

## 1.6 Problemstellungen in der Regelungstechnik

Wichtig ist: Strecke und Regler müssen immer zusammen betrachtet werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) Analyse: | Strecke und Regler gegeben. | Frage: | Sind Stabilität und Regelgüte erfüllt? |
| (2) Synthese: | Strecke gegeben. | Ziel: | Regler gesucht derart, daß Stabilität und Regelgüte erfüllt sind. |
| (3) Optimale Synthese: | Strecke gegeben. | Ziel: | Regler gesucht derart, daß Stabilität und Regelgüte *optimal* erfüllt sind. |
| (4) Adaption: | Strecke unbekannt. | Ziel: | Regler gesucht derart, daß die Strekke identifiziert und geregelt wird. |

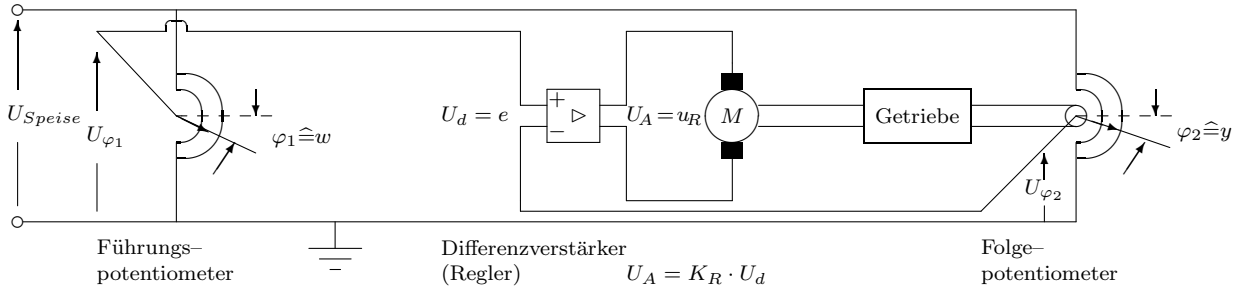
## 1.7 Klassifikation von Regelkreisen

### 1. Nach funktionellen Gesichtspunkten

a) Nach dem Sollwert mit den üblichen Fallunterscheidungen
Fall 1: Konstanter Sollwert w = const. (Beispiele 1 und 2):
*Festwertregelung* oder *Störgrößenregelung*

Fall 2: Variabler Sollwert (Führungsgröße) w = w(t) :
*Folgeregelung* oder *Nachlaufregelung*

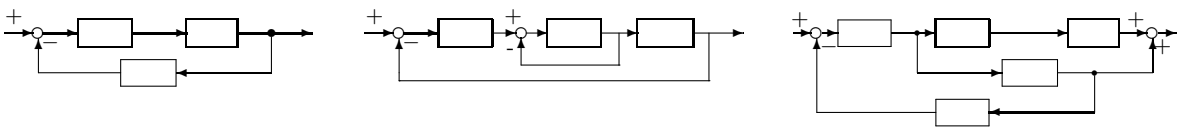
Beispiel für eine Folgeregelung: Winkelübertragungssystem




b) Nach Arbeitsweise und Struktur

| | | |
|---|---|---|
| Analoge Regelung | Abtastregelung | Stetige Regler |
| Digitale Regelung | Adaptive Regelung | Unstetige Regler |
| Hybride Regelung | Optimale Regelung | |
| | Strukturvariable Regelung | |

Einschleifige Regelkreise | Unterlagerte Regelkreise | Mehrschleifige Regelkreise



Hierarchische Regelkreise

### 2. Nach energetischen Gesichtspunkten (im wesentlichen für Regler und Stellglied)

a) Ohne Hilfsenergie:
mechanisch

b) Mit Hilfsenergie:
elektrisch, pneumatisch und hydraulisch

### 3. Nach mathematischen Gesichtspunkten (im wesentlichen für das Streckenmodell)

linear - nichtlinear (*eine* nichtlineare Gleichung im Regelkreis genügt)
konzentrierte Parameter - verteilte Parameter (partielle Dgln.)
zeitinvariant - zeitvariant (z.B.: Rakete mit veränderlicher Masse)
zeitkontinuierlich - zeitdiskret (Abtastregelung)
deterministisch - stochastisch (nicht reproduzierbare Signale bzw. Systemparameter)
eindimensional - mehrdimensional (mehr als *ein* Eingang bzw. Ausgang)
unbeschränkte Variablen - beschränkte Variablen
stetig - unstetig
stabil - instabil
dynamisch - statisch (Beharrungsverhalten)

# 2 Mathematische Modelle

## 2.1 Beispiele für dynamische Modelle

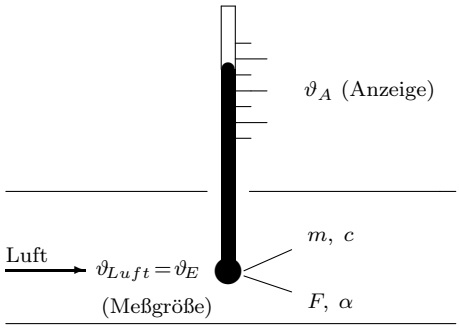
Nachfolgend sind einige einfache Beispiele für Regelkreisglieder aus verschiedenen Bereichen der Technik angegeben.

**Beispiel 1:** Thermometer (System mit Wärmetransport)

Ziel der Modellbildung: Entscheidungshilfe zur Beurteilung der Brauchbarkeit der Messung.

Aufgabe: Mathematische Beschreibung des Meßsystems, um Aufschluß darüber zu erhalten, wie die anfallende Meßgröße durch das Meßsystem auf die Anzeige übertragen wird.

Meßsystem:




| | |
|---|---|
| $m$ | Fühlermasse |
| $c$ | spez. Wärme der Fühlermasse |
| $F$ | Fühleroberfläche |
| $\alpha$ | Wärmeübergangszahl (Quecksilber/Glasrohr) |

**Mathematisches Modell**

Wärmebilanz für den Fühlerkopf (bei homogener Temperaturverteilung im Fühlerkopf):

$$\dot{Q}_{zugeführt} = \dot{Q}_{gespeichert} + \underbrace{\dot{Q}_{abgeführt}}_{=0}$$

$= 0$ d.h. keine Verluste durch Wärmeleitung und Abstrahlung

$$\alpha \cdot F \cdot (\vartheta_E - \vartheta_A) = m \cdot c \cdot \frac{d\vartheta_A}{dt} + 0$$

Abkürzung: $$T_1 = \frac{m \cdot c}{\alpha \cdot F}$$

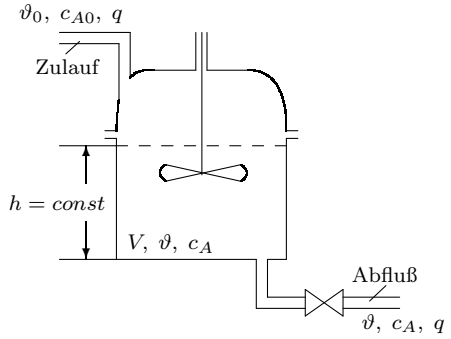
Damit: $T_1 \cdot \dot{\vartheta}_A(t) + \vartheta_A(t) = \vartheta_E(t)$ Verzögerungsglied 1. Ordnung

Anfangsbedingung: $\vartheta_A(0) = \vartheta_{A0}$ , Temperaturanzeige zu Beginn (t=0) der Messung

**Ergebnis:** Die Dynamik des Thermometers wird durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten dargestellt.

Bemerkung: Die anschauliche Interpretation der Differentialgleichung ist sehr begrenzt. Erst die Lösung der Dgl. für eine spezielle Eingangsfunktion $\vartheta_E(t)$ ermöglicht im allgemeinen den Vergleich von Ein- und Ausgangssignal. Bekannt ist, daß die Anzeige der Meßgröße verzögert eintritt. Die Verzögerung wird durch den Speichereffekt verursacht.

**Beispiel 2:** Rührkessel (System mit Stoff- und Wärmetransport)




| | |
|---|---|
| $V$ | Volumen des Reaktionsgemisches im Behälter |
| $\rho$ | Dichte des Reaktionsgemisches |
| $c_p$ | Spezifische Wärme |
| $q$ | Volumendurchfluß (Vol./Zeit) |
| $\vartheta_0(t)$ | Zulauftemperatur |
| $\vartheta(t)$ | Temperatur des Behälterinhalts |
| $c_{A0}(t)$ | Zulaufkonzentration des Stoffes A |
| $c_A(t)$ | Konzentration des Stoffes A im Behälter (mol/Liter) |

Voraussetzungen (Idealisierungen):

- Der Stoff A wird im Behälter ideal durchmischt, d.h. Temperatur $\vartheta$ und Konzentration $c_A$ sind orts*un*abhängig.
- Der Kessel speichert keine Wärme, d.h. wärmeisoliertes Durchlaufgefäß.

Aufgabenstellung:

Bekannt seien die Verläufe für Zulauftemperatur $u_1(t) = \vartheta_0(t)$ und Zulaufkonzentration $u_2(t) = c_{A0}(t)$.
Gesucht sind Temperaturverlauf $y_1(t) = \vartheta(t)$ und Konzentrationsverlauf $y_2(t) = c_A(t)$ im Rührkesselabfluß.

**Mathematisches Modell**

Wärmebilanz für den Kessel:

$$\dot{Q}_{gespeichert} = \dot{Q}_{Zulauf} - \dot{Q}_{Abfluß}$$

$$m \cdot c_p \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = q \cdot \rho \cdot c_p \cdot \vartheta_0 - q \cdot \rho \cdot c_p \cdot \vartheta \ , \ \ m = \rho \cdot V$$

$$\frac{V}{q} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \vartheta_0 - \vartheta$$

Mit der Abkürzung $T_1 = \dfrac{V}{q}$ sowie $u_1 = \vartheta_0$ und $y_1 = \vartheta$ folgt:

$$T_1 \cdot \dot{y}_1(t) + y_1(t) = u_1(t) \ , \quad \text{Anfangsbedingung } y_1(0) = y_{10}$$

(Temperatur zu Beginn des Rührvorgangs)

Materialbilanz (Massenbilanz) für den Kessel:

$$V \cdot \frac{dc_A}{dt} = q \cdot c_{A0} - q \cdot c_A$$

Mit der Abkürzung $T_1 = \dfrac{V}{q}$ sowie $u_2 = c_{A0}$ und $y_2 = c_A$ folgt:

$$T_1 \cdot \dot{y}_2(t) + y_2(t) = u_2(t) \ , \quad \text{Anfangsbedingung } y_2(0) = y_{20}$$

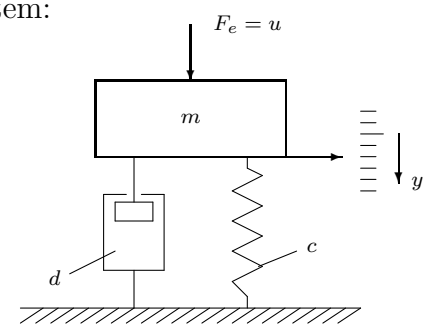
(Anfangskonzentration des Stoffes A)

**Ergebnis:** Temperaturverlauf und Konzentrationsverlauf im Kesselabfluß werden *beide* durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

**Beispiel 3:** Feder-Masse-Dämpfersystem (Mechanisches System)

Ziel: Erfassung der dynamischen Eigenschaften des Meßsystems.

Meßsystem:




| | |
|---|---|
| $F_e(t)$ | erregende Kraft (Eingang) |
| $m$ | Masse des Meßsystems |
| $d$ | Dämpfungskonstante des Meßsystems |
| $c$ | Federkonstante des Meßsystems |
| $y(t)$ | Anzeige (Ausgang) |

**Mathematisches Modell**

Kräftebilanz bei Auslenkung aus der Ruhelage (y = 0):

NEWTONsches Gesetz:

$$m \cdot \ddot{y} = F_e - F_{Dämpfer} - F_{Feder}$$

Nimmt man geschwindigkeitsproportionale Dämpfung und ein lineares Gesetz für die Federkraft an, erhält man mit $F_e = u$, $F_{Dämpfer} = d \cdot \dot{y}$, $F_{Feder} = c \cdot y$ folgende Differentialgleichung:

$$m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + c \cdot y = u$$

Setze: $$T_1 = \frac{d}{c}\ ,\ T_2^2 = \frac{m}{c}\ ,\ K_P = \frac{1}{c}$$

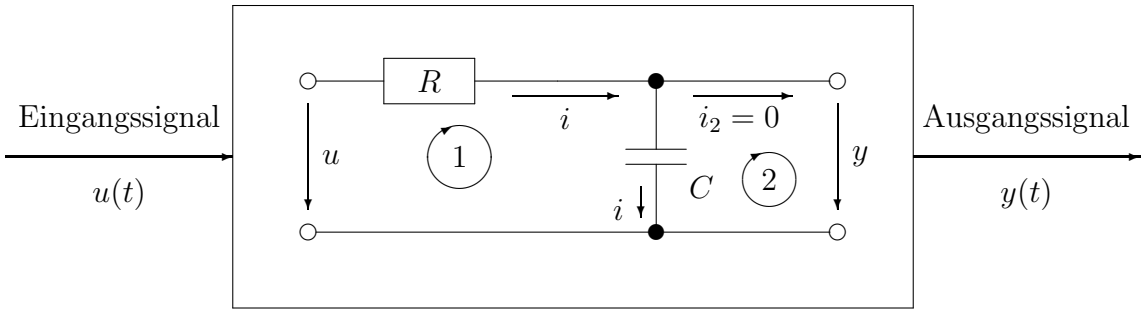
Damit: $T_2^2 \cdot \ddot{y}(t) + T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_P \cdot u(t)$ Verzögerungsglied 2. Ordnung

Anfangsbedingungen: $y(0) = y_{00} = 0$, $\dot{y}(0) = y_{01} = 0$ } Ruhelage zu Beginn (t=0) der Messung.

**Ergebnis:** Die Dynamik des Meßsystems wird durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten dargestellt.

Bemerkung: Bekannt ist, daß die Anzeige je nach Wahl der Dämpfung aperiodisches Verhalten aufweist bzw. gedämpfte Schwingungen ausführt.

**Beispiel 4:** RC-Tiefpaß (Elektrisches System)




Voraussetzung: An den Ausgang wird ein hochohmiger Verstärker ($R_I \to \infty$) angeschlossen, d.h. $i_2 \to 0$.

**Mathematisches Modell**

KIRCHHOFFsche Gesetze (Maschenregel und Knotenregel)

Masche 1: $$u = R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt \tag{1}$$

Masche 2: $$y = \frac{1}{C} \int i \cdot dt \tag{2}$$

Aus (2) folgt durch Differentiation: $C \cdot \dot{y} = i$ (3)

(2) und (3) in (1) eingesetzt liefert die Dgl. des Übertragungsgliedes:

$$RC \cdot \dot{y}(t) + y(t) = u(t) \tag{4}$$

Abkürzung: $T_1 = RC$

Damit: $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

Anfangsbedingung: $y(0) = y_{00}$ (5)

(Kondensatorspannung zu Beginn des Experiments)

**Ergebnis:** Der RC-Tiefpaß (RC-Glied) wird durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

Bemerkung: Die obige Differentialgleichung ist bereits aus den vorherigen Beispielen bekannt.

Die Ordnung der Dgl. stimmt mit der Anzahl der Energiespeicher (Kondensator) überein.

**Lösung des Anfangwertproblems für das RC-Glied**

- Durch die Differentialgleichung (4) und die Anfangsbedingung (5) ist das Anfangswertproblem festgelegt.
- Die Eingangsspannung $u(t)$ wird als gegeben angenommen.

Die Lösung lautet: $$y(t) = y_{00} \cdot e^{\frac{-t}{RC}} + \frac{1}{RC} \int_0^t e^{\frac{-1}{RC}(t-\tau)} \cdot u(\tau) d\tau \tag{6}$$

(vgl. Abschnitt 3.2)

## 2.2 Folgerungen aus den mathematischen Modellen

**Feststellung**

Sämtliche mathematischen Modelle der vorgestellten Regelkreisglieder sind durch Differentialgleichungen repräsentiert.
Dies ist kein Zufall sondern charakteristisch.

**Physikalische Grundlagen zum Aufstellen der Differentialgleichungen für die Regelkreisglieder**

Mechanische Systeme:

NEWTONsches Gesetz, Kräfte- und Momentengleichgewicht, Erhaltungssätze von Impuls, Drehimpuls und Energie.

Elektrische Systeme:

KIRCHHOFFsche Gesetze, OHMsches Gesetz, Induktionsgesetz (bei Netzwerken), MAXWELLsche Gleichungen (bei Feldern, d.h. örtlich verteilten Systemen).

Thermische Systeme:

Wärmeleitungs- und Wärmeübertragungsgesetze, Erhaltungssätze der inneren Energie oder Enthalpie.

Systeme mit Stofftransport:

Gesetze der Fluid- oder Gasdynamik, Diffusionsgesetz.

**Systemidentifikation**

Um ein gutes mathematisches Modell eines realen Systems zu erhalten, müssen sowohl die *Struktur* (Typ der Dgl.) als auch die *Parameter* (Systemkonstanten) ermittelt (identifiziert) werden.

Diese Aufgabe der Systemidentifikation kann theoretisch (anhand physikalischer Grundlagen), experimentell (Auswertung der Messung von Systemeingang und -ausgang) oder in Kombination gelöst werden.

**Analoge Modelle - Simulation**

Die vorgestellten Systeme mit Wärmetransport bzw. Wärme- und Stofftransport (Thermometer und Rührkessel) und das elektrische System (RC-Glied) werden durch denselben Differentialgleichungstyp beschrieben. Sie besitzen *dieselbe mathematische Struktur* und werden daher als *analoge Modelle* bezeichnet. Beispielsweise ist das RC-Glied die elektrische Analogie zum Thermometer.

Für die *Simulation* auf einem Rechner sind daher alle diese Systeme nicht voneinander zu unterscheiden, allenfalls durch die Größenordnungen der Systemkonstanten. Alle Systeme werden durch ein und dasselbe *virtuelle Modell* beschrieben.

**Weiteres Vorgehen**

Im folgenden untersuchen wir Regelkreisglieder, die durch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden, sogenannte *lineare Regelkreisglieder*.

Wir konzentrieren unsere Betrachtungen auf Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und Regelkreisglieder mit jeweils *einer* Eingangs- und Ausgangsgröße.

# 3 Analyse linearer Regelkreisglieder im Zeitbereich

Einführende Bemerkung:

Zur Beschreibung des Signalübertragungsprozesses* gibt es im wesentlichen drei Arten. Sie sind theoretisch gleichberechtigt, Unterschiede liegen in ihrer Anschaulichkeit einerseits und in ihrer rechnerischen Eleganz andererseits.

Die Beschreibung des Übertragungsverhaltens kann erfolgen durch

- Differentialgleichungen (mit Lösung)
- Antwortfunktionen (auf standardisierte Eingangssignale)
- Übertragungsfunktionen bzw. Frequenzgänge (als Folge der LAPLACE-Transformation)

## 3.1 Beschreibung linearer Regelkreisglieder durch Differentialgleichungen

Das mathematische Modell der im folgenden analysierten linearen Regelkreisglieder (Regler, Stellglied, Strecke, Meßglied) mit jeweils einer Eingangsgröße $u(t)$ und einer Ausgangsgröße $y(t)$ sei gegeben durch

$$a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) =$$
$$b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \dot{u}(t) + \ldots + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + b_m \cdot u^{(m)}(t), \quad a_n \neq 0$$

bzw.

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot y^{(\nu)}(t) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu \cdot u^{(\mu)}(t)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y^{(\nu)}(0) = y_{0\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Bei der angegebenen Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wie bereits früher erwähnt, ist die anschauliche Interpretation der Differentialgleichung sehr begrenzt. Erst die Lösung der Dgl. gibt Aufschluß darüber, wie sich bei bekanntem Eingangssignal $u(t)$ das Ausgangssignal $y(t)$ verhält.

Die homogene Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot y^{(\nu)}(t) = 0$$

beschreibt das Verhalten des Regelkreisgliedes zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ vollständig, wenn es sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in dem gegebenen Anfangszustand $y_{0\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ befunden hat und für $t \geq 0$ keine Eingangsfunktion vorhanden ist.

* Ein Signalübertragungsprozeß ist durch Signal *und* Übertragungsverhalten gekennzeichnet. Beispiel: Der Vorgang des Messens ist ein Signalübertragungsprozeß.

## 3.2 Lösung von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

**Lösungsschema:**

Schritt 1: Allgemeine Lösung $y_H(t)$ der homogenen Differentialgleichung.

Schritt 2: *Eine* partikuläre Lösung $y_P(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung.

Schritt 3: Allgemeine Lösung $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung.

Schritt 4: Berücksichtigung der Anfangsbedingung(en).

**Schritt 1:** Ausgangspunkt ist die homogene Dgl. des Regelkreisgliedes

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0, \qquad a_n \neq 0. \qquad (*)$$

Zur Lösung dient der bekannte Ansatz $y(t) = y_H(t) = C \cdot e^{st}$ $(C = const \neq 0)$
mit dem komplexen Parameter

$$s = \delta + j\omega \qquad (\delta,\ \ \omega\ \ reell, \quad j = \sqrt{-1}).$$

Nach Einsetzen in $(*)$ folgt

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0] \cdot C \cdot e^{st} = 0\ .$$

Diese Beziehung muß für alle $t$ gelten. Damit erhält man

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0, \qquad (a_n \neq 0)\ .$$

Dies ist die *charakteristische Gleichung* des Systems. Sie ist eine algebraische Gleichung $n$-ten Grades zur Bestimmung von $s$.

**Hauptsatz der Algebra** für die Lösung der charakteristischen Gleichung:

- Die charakteristische Gleichung besitzt *genau* $n$ (nicht notwendig verschiedene) *Lösungen* $s_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, die sog. *Wurzeln der charakteristischen Gleichung*.
- Für reelle Koeffizienten $a_\nu$ (dies ist aus physikalischen Gründen erfüllt) sind
  - entweder sämtliche Wurzeln $s_k$ reell
  - oder je zwei Wurzeln konjugiert komplex, also etwa

    $$s_1 = \delta_1 + j\omega_1 \quad \text{und} \quad s_2 = \delta_1 - j\omega_1.$$

**Darstellung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung**

Fall 1: Alle Wurzeln $s_k$ seien verschieden, d.h.

$$s_1 \neq s_2 \neq \ldots \neq s_{n-1} \neq s_n \ .$$

Dann lautet die allgemeine Lösung:

$$y_H(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t) \qquad \text{mit} \qquad y_k(t) = C_k \cdot e^{s_k t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Fall 2: *Eine* Wurzel trete $\rho$-fach ($\rho > 1$) auf. Im folgenden sei dies die Wurzel $s_1$.

$$\underbrace{s_1 = s_2 = \ldots = s_{\rho-1} = s_\rho}_{\rho \text{ gleiche Wurzeln}} \quad \neq \quad \underbrace{s_{\rho+1} \neq \ldots \neq s_n}_{n-\rho \text{ verschiedene Wurzeln}}$$

Dann lautet die allgemeine Lösung

$$y_H(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t) \qquad \text{mit} \qquad \begin{cases} y_k(t) = C_k \cdot t^{k-1} e^{s_1 t} & (k = 1, 2, \ldots, \rho), \\ y_k(t) = C_k \cdot e^{s_k t} & (k = \rho + 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Entsprechendes gilt, wenn mehrere Wurzeln mehrfach auftreten.

Bemerkung: Im Falle komplexer Wurzeln sind die Konstanten $C_k$ ebenfalls komplex.

**Zu Schritt 2:**

Eine Möglichkeit zur Bestimmung einer partikulären Lösung besteht in der Methode der Variation der Konstanten. Hierbei dient als Ansatz die Lösung der homogenen Differentialgleichung, wobei die $n$ Konstanten $C_k$ als Funktionen $C_k(t)$ aufgefaßt werden.

Bei spezieller Form des Eingangssignals $u(t)$ läßt sich häufig eine partikuläre Lösung durch einfache algebraische Kunstgriffe ermitteln.

**Zu Schritt 4:**

Die $n$ Konstanten $C_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) werden aus den vorgegebenen $n$ Anfangsbedingungen

$$y^{(\nu)}(0) = y_{0\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

bestimmt.

**Beispiel:** Lösung der Differentialgleichung für das $PT_1$-Glied

$$T_1 \cdot \dot{y} + y = K \cdot u(t), \qquad y(0) = y_{00}.$$

**Schritt 1:** Lösung der homogenen Differentialgleichung

Ansatz: $y_H(t) = C_1 \cdot e^{st}$

Charakteristische Gleichung: $T_1 s + 1 = 0$, Wurzel: $s = -\dfrac{1}{T_1}$

Lösung: $y_H(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$

**Schritt 2:** Partikuläre Lösung (mit Variation der Konstanten)

Ansatz: $y_P(t) = C_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$

Daraus: $\dot{y}_P(t) = -\dfrac{C_1(t)}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \dot{C}_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$

Nach Einsetzen in die inhomogene Dgl. folgt:

$$\dot{C}_1(t) = \frac{K}{T_1} e^{\frac{t}{T_1}} \cdot u(t)$$

Die Integration liefert:

$$C_1(t) = \int_0^t \frac{K}{T_1} e^{\frac{\tau}{T_1}} \cdot u(\tau)\, d\tau + \underbrace{C_1(0)}_{=0}$$

(Da *eine* partikuläre Lösung ausreicht, kann $C_1(0) = 0$ gesetzt werden.)

Damit lautet die partikuläre Lösung:

$$y_P(t) = \left[ \int_0^t \frac{K}{T_1} e^{\frac{\tau}{T_1}} \cdot u(\tau)\, d\tau \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} = \int_0^t \frac{K}{T_1} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot u(\tau)\, d\tau$$

**Schritt 3:** Allgemeine Lösung

$$y(t) = C_1 e^{\frac{-t}{T_1}} + \int_0^t \frac{K}{T_1} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot u(\tau) d\tau$$

**Schritt 4:** Anfangsbedingung

$y_{00} = C_1$

**Ergebnis:** Damit lautet die Lösung bei beliebigem Verlauf der Eingangsfunktion $u(t)$:

$$y(t) = \underbrace{y_{00} \cdot e^{\frac{-t}{T_1}}}_{\text{nur von der Anfangsbedingung } y(0) \text{ abhängige } \textit{freie Bewegung}} + \underbrace{\int_0^t \frac{K}{T_1} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot u(\tau) d\tau}_{\text{nur von der Eingangsfunktion } u(t) \text{ hervorgerufene } \textit{erzwungene Bewegung}}, \quad (\text{für } t \geq 0)$$

## 3.3 Übertragungsverhalten und Faltung

Am vorherigen Beispiel der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung wurde gezeigt, daß sich die Lösung der inhomogenen Dgl. aus zwei Anteilen zusammensetzt. Es sind dies:

1. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung, welche die nur von den Anfangsbedingungen $y_{0\nu}$ abhängige freie Bewegung des Regelkreisgliedes beschreibt.
2. Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, welche die von dem Eingangssignal $u(t)$ hervorgerufene erzwungene Bewegung des Regelkreisgliedes beschreibt.

Diese Darstellung gilt allgemein für lineare gewöhnliche Dgln. $n$-ter Ordnung. Mit der Lösung der homogenen Dgl. hatten wir uns bereits beschäftigt. Jetzt wollen wir uns dem zweiten Term in unserem Beispiel, der partikulären Lösung (Index p wird weggelassen)

$$y(t) = \int_0^t \frac{K}{T_1} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot u(\tau) d\tau \ , \qquad (+)$$

zuwenden. Dieser Term beschreibt das sog. *Übertragungsverhalten* des Regelkreisgliedes (Systems).

Es gilt allgemein:

Als *Übertragungsverhalten* eines Systems bezeichnet man die Bewegung des *Ausgangssignals* dieses Systems in Abhängigkeit von dessen Eingangssignal *bei verschwindenden Anfangsbedingungen* für beliebige Eingangssignale.

Führt man im Falle unseres Beispiels die Bezeichnung

$$g(t) = \frac{K}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

ein, so geht (+) über in

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau \ .$$

Wir schreiben für dieses Integral verkürzt symbolisch

$$y(t) = g(t) * u(t)$$

und führen dafür die Bezeichnung *Faltung* (*Faltungsintegral*) ein.

$$g(t) * u(t) := \int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$$

Man sagt: „$g(t)$ gefaltet mit $u(t)$“.

Eigenschaft der Faltung: Sie ist eine kommutative Verknüpfung, d.h. $g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$.

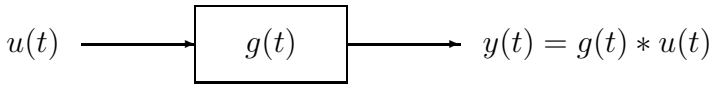
Wie zuvor ausgeführt, läßt sich das Übertragungsverhalten eines Regelkreisgliedes durch das Faltungsintegral

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$$

beschreiben. Neben dem Eingangssignal $u(t)$ enthält diese Darstellung nur noch die Funktion $g(t)$. Diese Funktion wird als die das System beschreibende Funktion oder *Gewichtsfunktion* $g(t)$ bezeichnet. Diese Gewichtsfunktion gibt an, mit welchem Gewicht der Wert der Eingangsfunktion $u$ zum Zeitpunkt $\tau$ $(0 \leq \tau \leq t)$ in den Wert der Ausgangsfunktion $y$ zum Zeitpunkt $t$ eingeht.

Das Übertragungsverhalten eines Regelkreisgliedes ist durch seine Gewichtsfunktion vollständig beschrieben.

Symbolische Darstellung des Übertragungsverhaltens mit Hilfe der Gewichtsfunktion $g(t)$:




Hinweis: Im Anhang sind die Gewichtsfunktionen der wichtigsten Regelkreisglieder zusammengestellt.

**Beispiel:** Auswertung des Faltungsintegrals für das $PT_1$-Glied (vgl. Abschnitt 3.2).

Wählt man als spezielles Eingangssignal die Sprungfunktion $\sigma(t)$ (Einheitssprung)

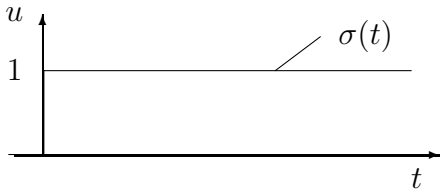
$$u(t) = \sigma(t) \ , \qquad \sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

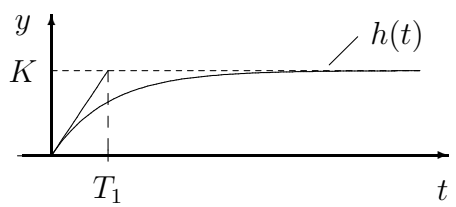
so ergibt sich mit der bereits bekannten Gewichtsfunktion

$$g(t) = \frac{K}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

das Übertragungsverhalten aus dem Faltungsintegral. Man erhält als *Sprungantwort* $h(t)$ (*Übergangsfunktion*)

$$y(t) = h(t) = \int_0^t \frac{K}{T_1} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot \sigma(\tau) d\tau = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \cdot \sigma(t)$$



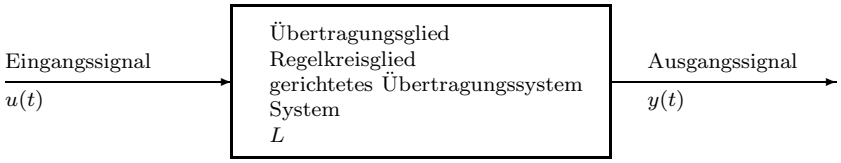



## 3.4 Linearität und Zeitinvarianz

Im Rahmen dieser Vorlesung werden Systeme behandelt, die durch *lineare* gewöhnliche Differentialgleichungen mit *konstanten Koeffizienten* beschrieben werden.

In diesem Abschnitt betrachten wir die charakteristischen Eigenschaften von solchen *linearen* und *zeitinvarianten* Systemen.

**Blockdiagramm:**




**Symbolische Schreibweise:** Operatorschreibweise

$$y(t) = L\{u(t)\}$$

Der Operator $L$ ist diejenige Operation, durch die aus dem gegebenen Eingangssignal $u(t)$ das Ausgangssignal $y(t)$ entsteht. Lineare Systeme werden durch sog. lineare Operatoren $L$ repräsentiert.

**Linearität** (Definitionen):

- Die in Abhängigkeit vom Eingangssignal bzw. den Anfangsbedingungen erfolgende *Bewegung des Ausgangssignals* eines Systems heißt genau dann linear, wenn dafür das *Überlagerungsprinzip* (Superpositionsprinzip)

  $$L\{u_1(t) + u_2(t)\} = L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\}$$

  und das *Verstärkungsprinzip*

  $$L\{\alpha \cdot u(t)\} = \alpha \cdot L\{u(t)\}$$

  gelten. Hierbei sind $u_1(t)$ und $u_2(t)$ beliebige Eingänge und $\alpha$ eine beliebige Konstante.
- Gehorchen die Bewegungsgleichungen für alle Ausgangssignale dem Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip, so heißt das durch sie beschriebene System ein *lineares System*; trifft dies nicht zu, so wird es *nichtlineares System* genannt.

**Linearitätsrelation:**

Ein System erfüllt beide Prinzipien genau dann, wenn für beliebige Eingänge $u_1(t)$ und $u_2(t)$ und beliebige Konstanten $\alpha_1$, $\alpha_2$ die Linearitätsrelation

$$L\{\alpha_1 \cdot u_1(t) + \alpha_2 \cdot u_2(t)\} = \alpha_1 \cdot L\{u_1(t)\} + \alpha_2 \cdot L\{u_2(t)\}$$

gilt.

**Wichtige Anwendung der Linearitätsrelation:**

Läßt sich ein Übertragungsglied durch die Differentialgleichung

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \ldots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = \\ b_0(t)u(t) + b_1(t)\dot{u}(t) + \ldots + b_m(t)u^{(m)}(t) \qquad (*)$$

beschreiben, so gilt hier bezüglich $y(t)$ und $u(t)$ die Linearitätsrelation.

**Zeitinvarianz** (Definition):

- Ein System der Form $(*)$ heißt *zeitvariant*, wenn mindestens einer der Koeffizienten $a_i(t)$, $b_j(t)$ tatsächlich zeitlichen Änderungen unterliegt. Ein *zeitinvariantes* System liegt vor, wenn sämtliche Koeffizienten $a_i$, $b_j$ Konstanten sind.

**Zeittranslation:**

Bei *linearen zeitinvarianten Systemen*

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = \\ b_0 u(t) + b_1\dot{u}(t) + \ldots + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + b_m u^{(m)}(t)$$

folgt für die Abhängigkeit des Ausgangssignals $y(t)$ vom Eingangssignal $u(t)$ aus

$$y(t) = L\{u(t)\}$$

für alle $\tau$ die Beziehung (*Zeittranslation*)

$$y(t-\tau) = L\{u(t-\tau)\}.$$

Es besteht also eine *Invarianz* gegenüber *Zeitverschiebungen*. Ein um das Zeitintervall $\tau$ später angelegtes Eingangssignal bewirkt ein um $\tau$ verspätetes Ausgangssignal.

**Wichtige Folgerungen:**

1. Bei linearen zeitinvarianten Systemen kann für den Anfangszeitpunkt $t_0$ stets $t_0 = 0$ gesetzt werden.

2. Totzeitglieder der Form

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = \\ b_0 u(t-T_t) + b_1\dot{u}(t-T_t) + \ldots + b_m u^{(m)}(t-T_t) \qquad (**)$$

($a_i$, $b_j$ sind Konstanten, $T_t$ ist eine konstante Totzeit)

sind linear und zeitinvariant. Man bezeichnet $(**)$ als *Differenzen-Differential-Gleichung*.

**Beispiel:** Zeittranslation und Linearitätsrelation gezeigt am Übertragungsverhalten des $PT_1$-Gliedes

$$T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$$

**1. Zeittranslation:**

Wählt man als Eingangssignal die Sprungfunktion

$$u(t) = u_0 \cdot \sigma(t) \ ,$$

so ergibt sich als Übertragungsverhalten (siehe Abschnitt 3.3)

$$y(t) = K \cdot u_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot \sigma(t) \ .$$

**Behauptung:** Wegen der Invarianz gegenüber Zeitverschiebungen bewirkt die um $\epsilon$ zeitverschobene Eingangsfunktion

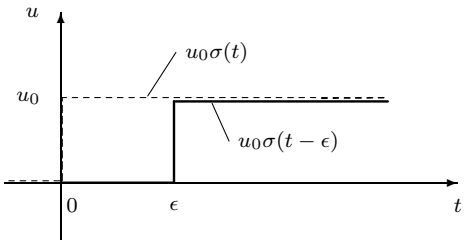
$$u(t) = u_0 \cdot \sigma(t - \epsilon)$$

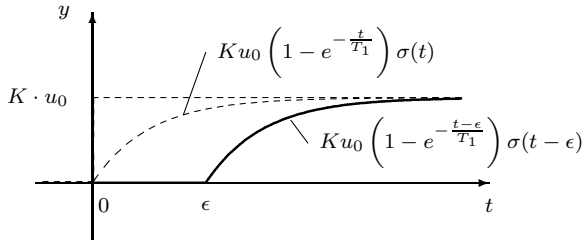
die folgende Antwort des $PT_1$-Gliedes:

$$y(t) = K \cdot u_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-\epsilon}{T_1}}\right) \cdot \sigma(t - \epsilon) \ .$$

**Nachweis** über das Faltungsintegral $y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{K}{T_1} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot u_0 \cdot \sigma(\tau - \epsilon) \cdot d\tau \\ &= \frac{K}{T_1} \cdot u_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \int_\epsilon^t e^{\frac{\tau}{T_1}} d\tau \cdot \sigma(t - \epsilon) \\ &= \frac{K}{T_1} \cdot u_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot T_1 \cdot \left(e^{\frac{t}{T_1}} - e^{\frac{\epsilon}{T_1}}\right) \cdot \sigma(t - \epsilon) \\ &= K \cdot u_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-\epsilon}{T_1}}\right) \cdot \sigma(t - \epsilon) \end{aligned}$$ q.e.d.



**2. Linearitätsrelation**

**Behauptung:** Setzt sich das Eingangssignal für das $PT_1$-Glied aus den beiden Eingangsfunktionen $u_1(t)$ und $u_2(t)$, die mit den Verstärkungsfaktoren $\alpha_1$ und $\alpha_2$ gewichtet sein sollen, zusammen, so ergibt sich wegen der Gültigkeit der Linearitätsrelation die Antwort des $PT_1$-Glieds als die mit $\alpha_1$ und $\alpha_2$ gewichtete Summe der Antworten auf die beiden einzelnen Eingangsfunktionen $u_1(t)$ und $u_2(t)$.

Als Eingangssignale wählen wir:

$$u_1(t) = u_0 \cdot \sigma(t) \ ,$$
$$u_2(t) = u_0 \cdot \sigma(t-\epsilon) \ .$$

Die Verstärkungsfaktoren seien

$$\alpha_1 = 1 \ ,$$
$$\alpha_2 = -1 \ .$$

Damit lautet die Behauptung:

Aus
$$u(t) = u_1(t) - u_2(t)$$
$$= u_0 \cdot [\sigma(t) - \sigma(t-\epsilon)] = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 & \text{für } 0 \le t < \epsilon \\ 0 & \text{für } t \ge \epsilon \end{cases}$$

folgt:
$$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$$
$$= K \cdot u_0 \cdot \left[ \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \cdot \sigma(t) - \left( 1 - e^{-\frac{t-\epsilon}{T_1}} \right) \cdot \sigma(t-\epsilon) \right]$$

Eine Aufspaltung für die beiden Zeitintervalle $0 \le t \le \epsilon$ und $t \ge \epsilon$ liefert

$$y(t) = \begin{cases} K \cdot u_0 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) & \text{für } 0 \le t < \epsilon \\ K \cdot u_0 \cdot \left( e^{\frac{\epsilon}{T_1}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} & \text{für } t \ge \epsilon \end{cases}$$

Im folgenden soll der Nachweis dieses Ergebnisses auch noch über die allgemeine Lösung des $PT_1$-Gliedes erfolgen.

Nachweis über die allgemeine Lösung des $PT_1$-Gliedes mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\frac{t-t_0}{T_1}} + \int_{t_0}^{t} \frac{K}{T_1} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

**1. Etappe:** $0 \leq t < \epsilon$ mit $u(t) = u_0$

Aus der obigen allgemeinen Lösung folgt mit $t_0 = 0$ und $y(t_0) = 0$ für das Ausgangssignal

$$y(t) = K \cdot u_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \qquad \text{für } 0 \leq t < \epsilon$$

Bis zum Zeitpunkt $t = \epsilon$ ist die Sprungantwort die gesuchte Lösung.

**2. Etappe:** $t \geq \epsilon$ mit $u(t) = 0$

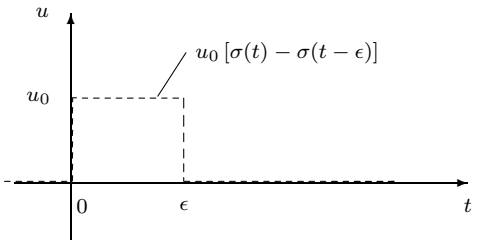
Aus der obigen allgemeinen Lösung folgt mit $t_0 = \epsilon$ und

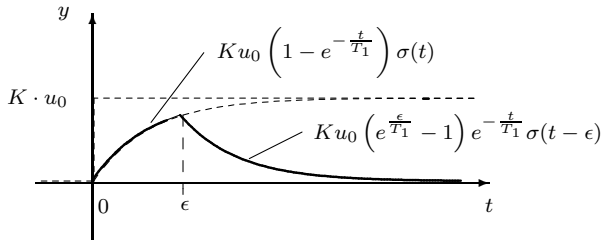
$$y(\epsilon) = K \cdot u_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{T_1}}\right)$$

(Infolge der Stetigkeit der Lösung $y(t)$ muß gelten: Wert am Ende der 1. Etappe = Wert zu Beginn der 2. Etappe)

für das Ausgangssignal

$$\begin{aligned} y(t) &= K \cdot u_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{T_1}}\right) \cdot e^{-\frac{t-\epsilon}{T_1}} + 0 \\ &= K \cdot u_0 \cdot \left(e^{\frac{\epsilon}{T_1}} - 1\right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \qquad \text{für } t \geq \epsilon \end{aligned}$$

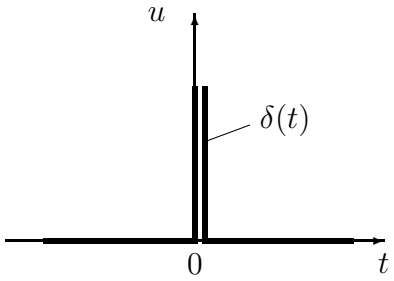


## 3.5 Impulsfunktion und Impulsantwort

Als Testsignal $u(t)$ wählen wir den sog. *Einheitsimpuls* $\delta(t)$:

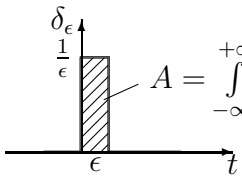
$$\delta(t) := \begin{cases} \delta(t) \equiv 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1 \end{cases}$$




Die $\delta$–Funktion stellt keine Funktion im Sinne der klassischen Analysis dar. Sie ist eine sogenannte verallgemeinerte Funktion (Distribution).

### Anschauliche Interpretation der $\delta$–Funktion

Entstehung der Impulsfunktion $\delta(t)$ aus der Pulsfunktion $\delta_\epsilon(t)$:




$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t)dt = 1$$

Die Impulsstärke (Fläche $A$) ist (unabhängig von $\epsilon$) auf den Wert $A = 1$ normiert.

Der formale Grenzübergang liefert

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t).$$

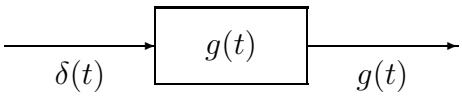
### Zusammenhang zwischen Impulsfunktion $\delta(t)$ und Gewichtsfunktion $g(t)$

Aus den für $\delta$-Funktionen geltenden Rechenregeln, die im Anhang A.1 zusammengefaßt sind, folgt die Beziehung

$$g(t) = g(t) * \delta(t).$$

Die Antwort des Systems auf einen $\delta$-Impuls (*Impulsantwort*) ist also die Gewichtsfunktion $g(t)$.

Symbolische Schreibweise:




Soll die *Gewichtsfunktion* experimentell bestimmt werden, so wird für den Eingangsimpuls wegen der in realen Systemen vorliegenden Begrenzung des Steuersignals $u(t) \leq u_{max}$ eine *genügend große Impulsbreite* benötigt, um eine ausreichende Energie zur Auslenkung des Systems zu erzielen. Dabei hängt es von der Trägheit des Übertragungsgliedes ab, bis zu welchem Wert die Impulsdauer ausgedehnt werden kann, *ohne daß* die gemessene *Ausgangsfunktion von der Gewichtsfunktion unzulässig abweicht*.

**Zusammenhang zwischen Sprungfunktion $\sigma(t)$ und Impulsfunktion $\delta(t)$**

Aus der Definition der $\delta$–Funktion folgt unmittelbar

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Damit ist

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \ . \qquad \text{(Regel 4b)}$$

Umgekehrt gilt

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\, \sigma(t) = \dot{\sigma}(t) \ . \qquad \text{(Regel 2b)}$$

**Zusammenhang zwischen Übergangsfunktion $h(t)$ und Impulsantwort $g(t)$**

Die Übergangsfunktion $h(t)$ ist die Antwort des Systems auf die Sprungfunktion (bei verschwindenden Anfangsbedingungen). Aus dem Faltungsintegral

$$\begin{aligned} h(t) &= g(t) * \sigma(t) \\ &= \sigma(t) * g(t) \\ &= \int_{0}^{t} \underbrace{\sigma(t-\tau)}_{=1} \cdot g(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

für $t - \tau \geq 0$, also für das ganze Integrationsintervall $0 \leq \tau \leq t$

folgt somit

$$h(t) = \int_{0}^{t} g(\tau) \cdot d\tau \ .$$

Als Umkehrung dieser Beziehung erhalten wir

$$g(t) = \frac{d}{dt}\, [h(t)] \ .$$

Bei der Auswertung dieser Beziehung ist Vorsicht geboten! Man beachte, daß die Übergangsfunktion $h(t)$ an der Stelle $t = 0$ nicht (in gewohnter Weise) differenzierbar ist, wenn sie dort einen Knick oder gar einen Sprung aufweist. Falls $h(t)$ an der Stelle $t = 0$ einen Sprung aufweist, ist $g(t)$ durch $g(t) + h(0) \cdot \delta(t)$ zu ersetzen.

# 4 Analyse linearer Regelkreisglieder im Bildbereich

Bisher: Die Behandlung von Regelkreisgliedern erfolgte im *Zeitbereich*. Die Aufgabe bestand in der Lösung zeitinvarianter linearer gewöhnlicher Dgln. und der Anpassung an gegebene Anfangsbedingungen.

Jetzt: Mit Hilfe der LAPLACE–Transformation wird das Regelkreisglied vom Zeitbereich in einen *Bildbereich* übergeführt. Die zeitinvariante lineare gewöhnliche Dgl. wird in eine algebraische Gleichung transformiert, wobei die Anfangsbedingungen bei der LAPLACE–Transformation gleich mit in die Rechnung eingearbeitet werden.

## 4.1 LAPLACE–Transformation

Vorbemerkung: Die LAPLACE–Transformation stellt eine spezielle Integraltransformation dar.

**Definition und Bezeichnungen:**

Definition: $$F(s) := \int_{-0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt, \qquad s = \delta + j \cdot \omega$$

Bezeichnung: $$F(s) = \mathcal{L}\,\{f(t)\}$$

Symbolisch durch das Korrespondenzzeichen: $F(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t)$

Die Zeitfunktion $f(t)$ ist die *Originalfunktion*. Die LAPLACE–Transformierte $F(s)$ heißt *Bildfunktion* ($F(s)$ ist eine Funktion der komplexen Variablen $s$).

Die untere Integralgrenze $-0$ soll deutlich machen, daß eventuell bei $t = 0$ auftretende $\delta$–Funktionen in die Transformation mit einzubeziehen sind.

Voraussetzungen:

- Es muß $f(t) = 0$ für $t < 0$ sein*).
- Das uneigentliche Integral muß konvergieren.

Die LAPLACE–Transformation ist eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von Originalfunktion und Bildfunktion.

**Rücktransformation:**

Definition: $$f(t) := \frac{1}{2\pi \cdot j} \int_{c-j\cdot\infty}^{c+j\cdot\infty} F(s) \cdot e^{ts}\, ds$$

Bezeichnung: $$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Bemerkung: Die zu $F(s)$ gehörende Zeitfunktion ist $\begin{cases} f(t) & \text{für } t \geq 0\ ^{*)} \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$

*) $f(t) = 0$ für $t < 0$ ist immer vorausgesetzt, auch wenn es hier (und in der Literatur) nicht jedesmal explizit gesagt wird. Dies läßt sich dadurch sicherstellen, daß man $f(t)$ in der Form $f(t) \cdot \sigma(t)$ schreibt.

**Anwendung der LAPLACE–Transformation am Beispiel des $PT_1$–Gliedes**

Die Differentialgleichung des $PT_1$–Gliedes lautet (für $K = 1$):

$$T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = u(t) \ , \qquad y(0) = y_{00}$$

Das Eingangssignal $u(t)$ sei die Sprungfunktion:

$$u(t) = u_0 \cdot \sigma(t) = \begin{cases} u_0 & für \ \ t \geq 0 \\ 0 & für \ \ t < 0 \end{cases}$$

**Schritt 1:** Aus der gegebenen Differentialgleichung ergibt sich durch LAPLACE–Transformation beider Seiten

$$\mathcal{L}\{T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\} \ .$$

**Schritt 2:** LAPLACE–Transformation (LT) der rechten Seite:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \int_{-0}^{\infty} u_0 \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{u_0}{s} \cdot e^{-st}\right]_{-0}^{\infty} = \frac{u_0}{s}$$

Damit:

$\mathcal{L}\{u_0 \cdot \sigma(t)\} = \dfrac{u_0}{s}$ (vgl. Anhang A.4, Korrespondenz Nr. 11)

**Schritt 3:** LAPLACE-Transformation der linken Seite. Wir verwenden den Linearitätssatz der LT (vgl. Anhang A.3):

$$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

Damit folgt für die linke Seite der Dgl.:

$$\mathcal{L}\{T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t)\} = T_1 \cdot \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\}$$

Auswertung:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_{-0}^{\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt$$

Da $y(t)$ unbekannt ist, kann das Integral nicht wie in Schritt 2 ausgewertet werden.

LT von $\dot{y}(t)$ ?

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \dot{y}(t) \cdot e^{-st} dt$$

Partielle Integration:
$\int u(t)\dot{v}(t)dt = u(t)v(t) - \int \dot{u}(t)v(t)dt$

$$= [y(t) \cdot e^{-st}]_{-0}^{\infty} - \int_{-0}^{\infty} y(t) \cdot (-s) \cdot e^{-st} dt$$

$$= [0 - y(-0)] + s \cdot \int_{-0}^{\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt$$

Damit: $\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = s \cdot Y(s) - y(-0)$ (vgl. Anhang A.3)

Bemerkung: $\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}$ ist ausgedrückt durch $Y(s)$ *und* enthält die Anfangsbedingung $y(0)$. (Hier ist $y(-0) = y(0) = y_{00}$ .)

**Schritt 4:** LAPLACE–Transformation der Differentialgleichung samt Anfangsbedingung:

Nach Einsetzen der Ergebnisse von Schritt 2 und Schritt 3 folgt aus Schritt 1:

$$T_1 \cdot [sY(s) - y_{00}] + Y(s) = \frac{u_0}{s}$$

$$Y(s) = \frac{T_1\, y_{00}}{T_1\, s + 1} + \frac{u_0}{s\,(T_1\, s + 1)}$$

Ergebnis:

Aus der Dgl. für $y(t)$ wird eine algebraische Gl. für $Y(s)$, die sich sehr einfach nach $Y(s)$ auflösen läßt.

**Schritt 5:** Rücktransformation des Ausgangs $Y(s)$:

Hierbei greifen wir meistens auf Korrespondenztabellen zur LAPLACE–Transformation zurück.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T_1\, y_{00}}{T_1\, s + 1} + \frac{u_0}{s\,(T_1\, s + 1)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T_1\, y_{00}}{T_1\, s + 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{u_0}{s\,(T_1\, s + 1)}\right\}$$

Partialbruchzerlegung des 2. Terms: $\quad \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{T_1\, s + 1} = \dfrac{u_0}{s\,(T_1\, s + 1)}$

Man erhält:

$$A\,(T_1\, s + 1) + B\, s = u_0\ ,$$

$$=: \qquad s\,[A\, T_1 + B] + A = u_0 \qquad\qquad =: \begin{cases} A = u_0 \\ B = -u_0\, T_1 \end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$y(t) = \underbrace{y_{00} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{T_1}}\right\}}_{|} + \underbrace{u_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}_{|} - \underbrace{u_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{T_1}}\right\}}_{|}$$

Abkürzungen: $y_I(t)$ $y_{II}(t)$ $y_{III}(t)$

Korrespondenz: Nr. 16 Nr. 11 Nr. 16

$$y(t) = \overbrace{y_{00} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \sigma(t)} + \overbrace{u_0 \cdot \sigma(t)} - \overbrace{u_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \sigma(t)}$$

Ergebnis:

$$y(t) = y_{00} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + u_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \qquad \text{für } t \geq 0$$

Dieses Ergebnis ist uns aber bereits bekannt.

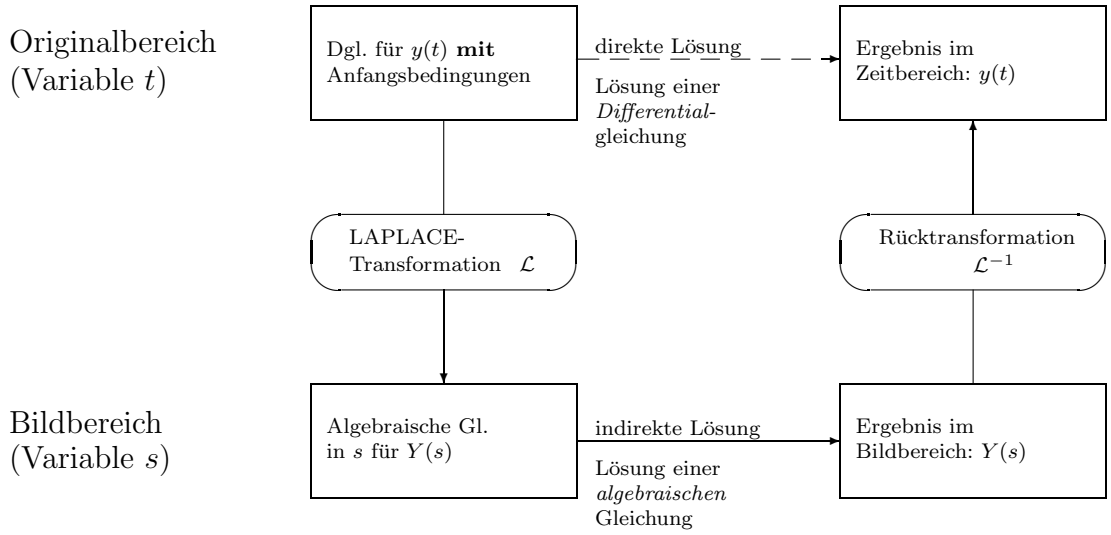
## 4.2 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der LAPLACE–Transformation

Anfangswertprobleme bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

Differentialgleichungen: $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot y^{(\nu)}(t) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu \cdot u^{(\mu)}(t)$

Anfangsbedingungen: $y^{(\nu)}(0) = y_{0\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

**Schematischer Lösungsablauf**




Bemerkungen:

- Der "Umweg" über die LAPLACE–Transformation wird durch das Vorliegen tabellierter Korrespondenzen $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)$ attraktiv (siehe Anhang).
- Der schwierigste und aufwendigste Schritt bei der indirekten Lösung ist im allgemeinen die Rücktransformation in den Zeitbereich, da die Bildfunktion vor der Rücktransformation mittels Tabelle meist zuerst in Teillösungen aufgespalten werden muß. Hierbei spielt die Partialbruchzerlegung eine wichtige Rolle.

## 4.3 Übertragungsfunktion

Vorbemerkung:
Lineare zeitinvariante Übertragungsglieder ohne Totzeit werden durch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

Ausgangspunkt der Herleitung ist daher die Differentialgleichung

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = \\ b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \ldots + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + b_m u^{(m)}(t)$$

mit den Anfangsbedingungen für $t = 0$

$$y(0)\ ,\ \dot{y}(0)\ ,\ \ldots\ ,\ y^{(n-2)}(0)\ ,\ y^{(n-1)}(0)$$

und dem gegebenen Eingangssignal $u(t)$.

Durch die Vorgabe von $u(t)$ liegen die Werte

$$u(0)\ ,\ \dot{u}(0)\ ,\ \ldots\ ,\ u^{(m-2)}(0)\ ,\ u^{(m-1)}(0)$$

fest.

Nach Anwendung der LAPLACE–Transformation erhält man:

$$\begin{array}{lcl}
\left[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right] \cdot Y(s) & = & \left[b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right] \cdot U(s) \\
- \left[a_n y(0)\right] s^{n-1} & & - \left[b_m u(0)\right] s^{m-1} \\
- \left[a_n \dot{y}(0) + a_{n-1} y(0)\right] s^{n-2} & & - \left[b_m \dot{u}(0) + b_{m-1} u(0)\right] s^{m-2} \\
\vdots & & \vdots \\
- \left[a_n y^{(n-2)}(0) + a_{n-1} y^{(n-3)}(0) + \ldots + a_2 y(0)\right] s & & - \left[b_m u^{(m-2)}(0) + b_{m-1} u^{(m-3)}(0) + \ldots + b_2 u(0)\right] s \\
- \left[a_n y^{(n-1)}(0) + a_{n-1} y^{(n-2)}(0) + \ldots + a_1 y(0)\right] & & - \left[b_m u^{(m-1)}(0) + b_{m-1} u^{(m-2)}(0) + \ldots + b_1 u(0)\right]
\end{array}$$

Für reale Systeme ist $y(t)$ stetig und deshalb gilt $y(-0) = y(0)$.

Für die LAPLACE–Transformierte des *Übertragungsverhaltens* (Ausgangsgröße bei verschwindenen Anfangsbedingungen) ergibt sich daraus:

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n} \cdot U(s)$$

**Definition:**

Als *Übertragungsfunktion* $G(s)$ bezeichnet man das Verhältnis von Ausgangsgröße zu Eingangsgröße im Bildbereich (bei verschwindenen Anfangsbedingungen):

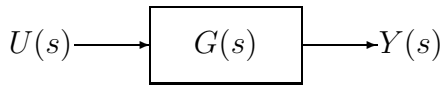
$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

### Darstellung des Übertragungsverhaltens im Bildbereich

Mit Hilfe der Übertragungsfunktion $G(s)$ ergibt sich das Übertragungsverhalten im Bildbereich aus

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \ .$$

Im Blockschaltbild wird dieser Zusammenhang dargestellt durch




Im Bildbereich ist das Übertragungsverhalten durch das Produkt $\mathcal{L}\{g(t)\}\cdot\mathcal{L}\{u(t)\}$ gegeben (vgl. Regel 16, Anhang A.3). Damit ist auch erklärt, warum für die Übertragungsfunktion die Bezeichnung $G(s)$ eingeführt wurde. Die Übertragungsfunktion ist die LAPLACE–Transformierte der Gewichtsfunktion:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Bemerkungen:

- Das Übertragungsverhalten eines Regelkreisgliedes ist durch seine Übertragungsfunktion vollständig beschrieben.
- Da die Übertragungsfunktion außer der komplexen Variablen $s$ nur die Koeffizienten der Differentialgleichung enthält, kann sie bei gegebener Differentialgleichung sofort angeschrieben werden.

### Pole und Nullstellen einer Übertragungsfunktion

Zählerpolynom und Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion werden oft abkürzend mit $Z(s)$ und $N(s)$ bezeichnet:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} Z(s) &= b_0 + b_1 \cdot s + \ldots + b_m \cdot s^m \ , \\ N(s) &= a_0 + a_1 \cdot s + \ldots + a_n \cdot s^n \ . \end{aligned}$$

Häufig wird auch die faktorisierte Darstellung

$$G(s) = K \cdot \frac{(s - s_{Z_1}) \cdot (s - s_{Z_2}) \ldots (s - s_{Z_m})}{(s - s_{N_1}) \cdot (s - s_{N_2}) \ldots (s - s_{N_n})} \ , \qquad K = \frac{b_m}{a_n}$$

verwendet.

Die Wurzeln $s_{N_i}$ des Nenners heißen *Pole* der Übertragungsfunktion, die Wurzeln $s_{Z_i}$ des Zählers heißen *Nullstellen* der Übertragungsfunktion. Da aus physikalischen Gründen nur reelle Koeffizienten $a_i$ und $b_i$ auftreten können, sind alle Pole und Nullstellen reell oder konjugiert komplex.

Ein lineares zeitinvariantes System *ohne Totzeit* ist durch die *Pole und Nullstellen* der Übertragungsfunktion und den Verstärkungsfaktor $K$ vollständig gegeben.

## 4.4 Übertragungsfunktion bei Einbeziehung einer Totzeit

Bei Berücksichtigung einer Totzeit $T_t$ wird das Übertragungsglied beschrieben durch

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{(\nu)}(t) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu u^{(\mu)}(t - T_t) \ .$$

Es sei darauf hingewiesen, daß alle Ableitungen des Eingangs $u(t)$ die *gleiche* Totzeit $T_t$ besitzen.

Nach Anwendung der LAPLACE–Transformation erhält man als Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \cdot e^{-s \cdot T_t} \quad \text{mit} \quad \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

Die *Übertragungsfunktion* $G(s)$ ist in diesem Fall eine *transzendente Funktion* in $s$.

**Beispiel:** Übertragungsverhalten eines $T_t T_1$–Gliedes.

$$T_1 \cdot \dot{y} + y = K \cdot u(t - T_t) \qquad \text{mit} \qquad u(t) = \delta(t).$$

Übertragungsfunktion nach obiger Formel:

Mit $\dfrac{Z(s)}{N(s)} = \dfrac{K}{1 + T_1 \, s}$ ergibt sich $G(s) = \dfrac{K}{1 + T_1 \, s} \cdot e^{-s \cdot T_t}$ .

Übertragungsverhalten im Bildbereich:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \text{ wegen } U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Übertragungsverhalten im Zeitbereich: (Hier: Gewichtsfunktion)

$$y(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{T_1} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \cdot e^{-sT_t}\right\}$$

Rücktransformation mit Hilfe der Tabelle:

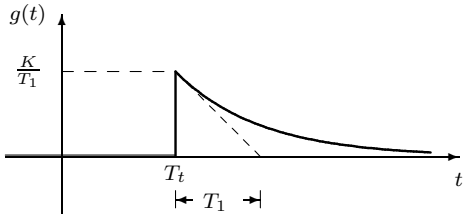
Anhang A.4, Nr. 9 $\qquad e^{-as} \cdot F(s) \ \bullet\!\!-\!\!\circ \ \sigma(t-a) f(t-a)$

Mit $a = T_t$ und $F(s) = \dfrac{1}{s + \frac{1}{T_1}}$ folgt

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as} F(s)\right\} = \sigma(t - T_t) \cdot e^{-\frac{1}{T_1}(t - T_t)}$$

Ergebnis (*Gewichtsfunktion*):

$$y(t) = g(t) = \frac{K}{T_1} \cdot \sigma(t - T_t) \cdot e^{-\frac{1}{T_1}(t - T_t)}$$



## 4.5 Übertragungsfunktionen von Grundschaltungen

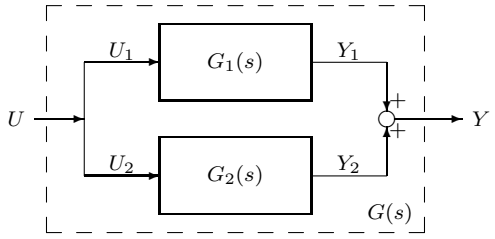
Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion komplizierter Schaltungen stehen im wesentlichen zwei Wege zur Verfügung:

1. Weg: Signalverfolgung
   Ausgehend vom Blockschaltbild wird das Signal vom Eingang $U(s)$ bis zum Ausgang $Y(s)$ verfolgt. Hierbei müssen im allgemeinen Hilfsgrößen eingeführt werden. Nach Elimination dieser Hilfsgrößen ergibt sich dann $G(s) = Y(s)/U(s)$ .

2. Weg: Umformungsregeln
   Mit Hilfe von Regeln zur Umformung von Blockschaltbildern (vgl. Anhang A.5) wird die Schaltung vereinfacht.

Für die drei wichtigsten Grundschaltungen soll der Weg über die Signalverfolgung gezeigt werden .

**1. Parallelschaltung**



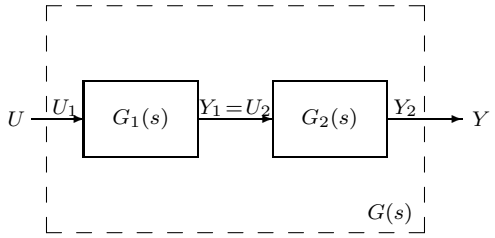

Es ist: $Y_1 = G_1(s) \cdot U_1$ , $Y_2 = G_2(s) \cdot U_2$

$U_1 = U_2 = U$ , $Y = Y_1 + Y_2$

Daraus: $Y = \{G_1(s) + G_2(s)\} \cdot U$

**Ergebnis:** $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

**2. Serienschaltung** (Reihenschaltung)



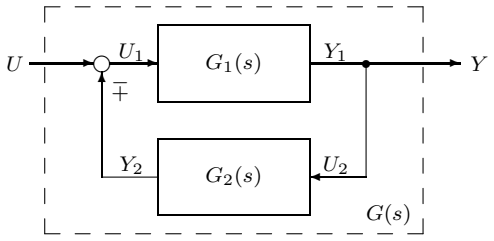

Es ist: $Y_1 = G_1(s) \cdot U_1$ , $Y_2 = G_2(s) \cdot U_2$

$U_1 = U$ , $Y_1 = U_2$ , $Y_2 = Y$

Daraus: $Y = G_2(s) \cdot U_2 = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot U$

**Ergebnis:** $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$

**3. Kreisschaltung**




Es ist: $Y_1 = G_1(s) \cdot U_1$ , $Y_2 = G_2(s) \cdot U_2$

$Y_1 = Y = U_2$ , $U_1 = U \mp Y_2$

Daraus: $Y = G_1(s) \cdot U_1$

$= G_1(s) \cdot \{U \mp G_2(s) \cdot Y\}$

$[1 \pm G_1(s) \cdot G_2(s)] \cdot Y = G_1(s) \cdot U$

**Ergebnis:** $G(s) = \dfrac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}$

"$-$" Zeichen in Kreisschaltungen bedeuten negative Rückkopplung oder *Gegenkopplung.*

"$+$" Zeichen in Kreisschaltungen bedeuten positive Rückkopplung oder *Mitkopplung.*

# 5 Stabilität linearer Systeme

Der Begriff der Stabilität soll als *Systemeigenschaft* unabhängig vom Eingangssignal $u(t)$ eingeführt werden. Ausgangspunkt für unsere Stabilitätsuntersuchungen ist daher die freie Bewegung des Systems nach einer Anfangsauslenkung. Mathematisch ist dies die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, y^{(\nu)}(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y^{(\nu)}(0) = y_{0\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Unser Ziel ist es, Kriterien anzugeben, mit deren Hilfe direkt von den Koeffizienten $a_\nu$ der homogenen Differentialgleichung (d.h. ohne Kenntnis der Lösung) auf die Stabilität des Systems geschlossen werden kann.
Stabilität ist die *wichtigste Systemeigenschaft*, zwar nicht bei jedem einzelnen Regelkreisglied, wohl aber *für den gesamten Regelkreis*.

## 5.1 Definitionen

(Stabilität im Sinne von LJAPUNOV):

a) Asymptotische Stabilität:
Das System heißt *asymptotisch stabil*, wenn $y(t)$ nach einer Anfangsauslenkung für wachsendes $t$ seinem Beharrungszustand $y = 0$ zustrebt:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

b) Instabilität:
Das System heißt *instabil*, wenn $|y(t)|$ bei einer *beliebig kleinen* Anfangsauslenkung für wachsendes $t$ über alle Grenzen wächst:

$$|y(t)| \to \infty \quad \text{für } t \to \infty$$

c) Grenzstabilität (Stabilität):
Das System heißt *grenzstabil* (*stabil*), wenn $|y(t)|$ nach einer *endlichen* Anfangsauslenkung mit wachsendem $t$ einen endlichen Wert nicht überschreitet oder einem endlichen Grenzwert zustrebt:

$$|y(t)| \leq y_{grenz} < \infty \quad \text{für alle } t > 0$$

**Ergänzung:**
Eine unserer früheren Forderungen – bei beschränktem Eingangssignal $u(t)$ muß das Ausgangssignal $y(t)$ ebenfalls beschränkt bleiben – geht in die *Stabilitätsdefinition für gestörte Systeme ein*.

**Definition:**
Ein gestörtes System heißt bezüglich einer gegebenen Menge $U = \{u(t)\}$ von Eingangssignalen genau dann *stabil*, wenn das Ausgangssignal $|y(t)|$ für alle Eingangssignale dieser Menge beschränkt bleibt:

$$|y(t)| \leq y_{max} < \infty \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } u(t) \in U$$

## 5.2 Stabilitätsbedingungen

Bei der Darstellung der Lösung der homogenen Dgl. (vgl. Abschnitt 3.2) war eine Fallunterscheidung in einfache Wurzeln $s_k$ (Fall 1) und mehrfache Wurzeln $s_k$ (Fall 2) notwendig.

Fall 1: Einfache Wurzeln $s_k$

$$y_k(t) \;=\; C_k\, e^{s_k t}$$

Fall 2: $\rho$–fache Wurzeln $s_k$

$$y_k(t) \;=\; C_k t^{k-1} e^{s_k t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho)$$

Das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$ wird wegen

$$e^{s_k t} \;=\; e^{\delta_k t} \cdot e^{j\omega_k t}$$

ausschließlich durch die Realteile

$$\delta_k \;=\; \mathrm{Re}\{s_k\}$$

der Wurzeln $s_k$ der charakteristischen Gleichung $\quad a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n = 0 \quad$ bestimmt. Dies folgt unmittelbar aus

$$e^{j\omega_k t} = \cos(\omega_k t) + j \sin(\omega_k t) \quad \text{und} \quad |e^{j\omega_k t}| = 1 \; .$$

**Folgerungen für $t \to \infty$ in beiden Fällen:**

Fall 1: Für $\delta_k < 0$ (alle $k = 1, 2, \ldots, n$) geht $y(t) \to 0 \quad$ für $t \to \infty$ .

Fall 2: Selbst für $\rho > 1$ und $\delta_k < 0$ (alle $k = 1, 2, \ldots, n$ ) geht $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$ .

Ist jedoch (z.B. in Fall 1) der Realteil $\delta_k$ auch nur einer einzigen Wurzel $s_k$ positiv oder ist (im Fall 2) der Realteil $\delta_k$ gleich Null, so wächst $|y(t)|$ mit wachsendem $t$ über alle Grenzen.

**Ergebnis:**
Anhand der Lage der Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der $s$–Ebene läßt sich die Stabilität eines linearen Systems unmittelbar beurteilen.
Damit ergeben sich die folgenden **Stabilitätsbedingungen**:

a) **Asymptotische Stabilität** liegt genau dann vor, wenn für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung gilt:

$$\mathrm{Re}\{s_k\} < 0 \quad \text{für } \textit{alle } s_k \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

b) **Instabilität** liegt genau dann vor, wenn gilt:

$$\mathrm{Re}\{s_k\} > 0 \quad \text{für } \textit{mindestens ein } s_k \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$
*oder*
$$\mathrm{Re}\{s_k\} = 0 \quad \text{für mindestens eine } \textit{mehrfache} \text{ Wurzel } s_k \text{ (Vielfachheit } \rho \geq 2)$$

c) **Grenzstabilität** (**Stabilität**) liegt genau dann vor, wenn gilt:

$$\mathrm{Re}\{s_k\} = 0 \quad \text{für mindestens ein } s_k \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$
*und*
1. $\mathrm{Re}\{s_k\} \leq 0 \quad$ für *alle* $k$,
2. diejenigen $s_k$ mit $\mathrm{Re}\{s_k\} = 0$ sind *einfache* Wurzeln.

**Beispiele zu den Stabilitätsbedingungen**

Einige häufig vorkommende Beispiele zum Sonderfall $\delta_k = 0$, d.h. Wurzeln auf der imaginären Achse der $s$–Ebene.

**Beispiel 1: Einfache Wurzel in s = 0**

| | |
|---|---|
| Charakteristische Gl.: | $s = 0$ |
| Wurzeln: | $s_1 = 0$ |
| Zugehörige Dgl.: | $\dot{y}(t) = 0$, Anfangsbed. $y(0) = y_{00}$ |
| Lösung der Dgl.: | $y(t) = y_{00} = const$ |
| Stabilität: | $\|y(t)\| = \|y_{00}\| < \infty$ für alle $t > 0$ |
| Ergebnis: | *Grenzstabilität* |

**Beispiel 2: Doppelwurzel in s = 0**

| | |
|---|---|
| Charakteristische Gl.: | $s^2 = 0$ |
| Wurzeln: | $s_1 = s_2 = 0$ |
| Zugehörige Dgl.: | $\ddot{y}(t) = 0$, Anfangsbed. $y(0) = y_{00}$, $\dot{y}(0) = y_{01}$ |
| Lösung der Dgl.: | $y(t) = y_{00} + y_{01} \cdot t$ |
| Stabilität: | $\|y(t)\| \to \infty$ für $t \to \infty$ |
| Ergebnis: | *Instabilität* |

**Beispiel 3: Einfaches konjugiert komplexes Wurzelpaar auf der imaginären Achse**

| | |
|---|---|
| Charakteristische Gl.: | $s^2 + 1 = 0$ |
| Wurzeln: | $s_1 = +j$, $s_2 = -j$ |
| Zugehörige Dgl.: | $\ddot{y}(t) + y(t) = 0$, Anfangsbed. $y(0) = y_{00}$, $\dot{y}(0) = y_{01}$ |
| Lösung der Dgl.: | $y(t) = y_{00} \cdot \cos t + y_{01} \cdot \sin t$ |
| Stabilität: | $\|y(t)\| \leq y_{grenz} < \infty$ für alle $t > 0$ |
| Ergebnis: | *Grenzstabilität* |

**Beispiel 4: Doppeltes konjugiert komplexes Wurzelpaar auf der imaginären Achse**

| | |
|---|---|
| Charakteristische Gl.: | $(s^2 + 1)^2 = 0$ |
| Wurzeln: | $s_1 = +j$, $s_2 = -j$, $s_3 = +j$, $s_4 = -j$ |
| Zugehörige Dgl.: | $y^{(4)}(t) + 2\ddot{y}(t) + y(t) = 0$, Anfangsbed. $y^{(\nu)}(0) = y_{0\nu}$, $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ |
| Allg. Lösung der Dgl.: | $y(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot \cos t + (C_3 + C_4 t) \cdot \sin t$, $C_i = const$ folgen aus den Anfangsbed. |
| Stabilität: | $\|y(t)\| \to \infty$ für $t \to \infty$ |
| Ergebnis: | *Instabilität* |

**Bemerkungen:**

- Für *keines* der Beispiele liegt asymptotische Stabilität vor.
- In *keinem* der 4 Beispiele sind *sämtliche* Koeffizienten der charakteristischen Gleichung vorhanden.

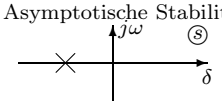
**Stabilitätsuntersuchung für Systeme 1. und 2. Ordnung**

**System 1. Ordnung:** $a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0, \quad a_1 \neq 0$

Charakteristische Gleichung: $a_1 s + a_0 = 0$

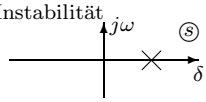
Lage der Wurzeln in der $s$–Ebene:

a) Asymptotische Stabilität



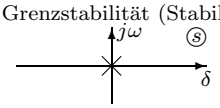

$a_1 > 0\ ,\ a_0 > 0$ (d.h. gleiche Vorzeichen)

b) Instabilität




$a_1 > 0\ ,\ a_0 < 0$ (d.h. verschiedene Vorzeichen)

c) Grenzstabilität (Stabilität)




$a_1 > 0\ ,\ a_0 = 0 \qquad (\dot{y} = 0)$

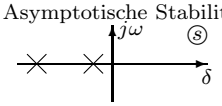
**System 2. Ordnung:** $a_2 \cdot \ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = 0, \quad a_2 \neq 0$

Charakteristische Gleichung: $a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0$

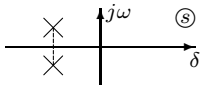
Wurzeln der charakteristischen Gleichung: $s_{1,2} = \frac{1}{2a_2}\{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}\}$

Lage der Wurzeln in der $s$–Ebene:

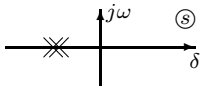
a) Asymptotische Stabilität




$a_2 > 0\ ,\ a_1 > 0\ ,\ a_0 > 0 \qquad (\sqrt{}$ reell)



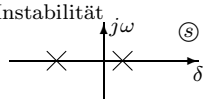

$a_2 > 0\ ,\ a_1 > 0\ ,\ a_0 > 0 \qquad (\sqrt{}$ imaginär)



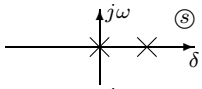

$a_2 > 0\ ,\ a_1 > 0\ ,\ a_0 > 0 \qquad (\sqrt{} = 0)$

Ergebnis: Sämtliche Koeffizienten müssen von Null verschieden sein und gleiche Vorzeichen besitzen.

b) Instabilität



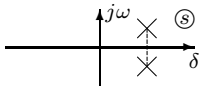

$a_2 > 0\ ,\ \begin{matrix} a_1 > 0 \\ a_1 < 0 \end{matrix}\ ,\ a_0 < 0$



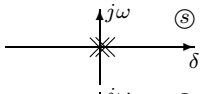

$a_2 > 0\ ,\ a_1 < 0\ ,\ a_0 = 0 \qquad$ (z.B. $\ddot{y} - \dot{y} = 0$)



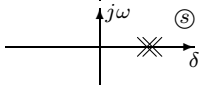

$a_2 > 0\ ,\ a_1 < 0\ ,\ a_0 > 0 \qquad (\sqrt{}$ reell)




$a_2 > 0\ ,\ a_1 < 0\ ,\ a_0 > 0 \qquad (\sqrt{}$ imaginär)



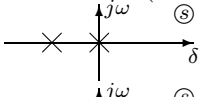

$a_2 > 0\ ,\ a_1 = 0\ ,\ a_0 = 0 \qquad (\ddot{y} = 0)$



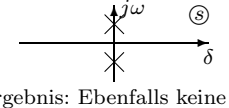

$a_2 > 0\ ,\ a_1 < 0\ ,\ a_0 > 0 \qquad (\sqrt{} = 0)$

Ergebnis: Keine einheitliche Aussage über die Koeffizienten möglich.

c) Grenzstabilität (Stabilität)




$a_2 > 0\ ,\ a_1 > 0\ ,\ a_0 = 0 \qquad$ (z.B. $\ddot{y} + \dot{y} = 0$)




$a_2 > 0\ ,\ a_1 = 0\ ,\ a_0 > 0 \qquad$ (z.B. $\ddot{y} + y = 0$)

Ergebnis: Ebenfalls keine einheitliche Aussage über die Koeffizienten möglich.

**Zusammenfassendes Ergebnis der Stabilitätsuntersuchung:**

Für Systeme 1. und 2. Ordnung ist notwendig und hinreichend für die asymptotische Stabilität, daß sämtliche Koeffizienten der charakteristischen Gleichung von Null verschieden sind und gleiches Vorzeichen besitzen.

## 5.3 Stabilitätskriterien

### Folgerung aus den Stabilitätsbedingungen

Für die Stabilitätsaussage sind nicht die genauen numerischen Werte der Wurzeln der charakteristischen Gleichung erforderlich. Wichtig ist die Beantwortung der folgenden Fragen:
- Liegen Wurzeln in der *linken* $s$–Halbebene?
- Liegen Wurzeln in der *rechten* $s$–Halbebene?
- Liegen auf der *imaginären* Achse der $s$–Ebene nur *einfache* Wurzeln?
- Liegen auf der *imaginären* Achse der $s$–Ebene *mehrfache* Wurzeln?

Die folgenden Stabilitätskriterien machen darüber eine Aussage.

**Notwendiges Stabilitätskriterium** (ohne Beweis)

Für die asymptotische Stabilität eines linearen Systems $n$-ter Ordnung ist es notwendig, daß sämtliche Koeffizienten $a_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ der charakteristischen Gleichung von Null verschieden sind und gleiches Vorzeichen besitzen (Vorzeichenbedingung).

Für $n = 1, 2$ ist die Vorzeichenbedingung auch hinreichend.

**Herleitung eines hinreichenden Stabilitätskriteriums**

Im folgenden sei stets vorausgesetzt, daß das notwendige Stabilitätskriterium erfüllt ist. Für die Herleitung eines hinreichenden Stabilitätskriteriums konzentrieren wir uns auf die Stabilitätsgrenze, d.h. auf Wurzelpaare der Gestalt

$$s_{k,k+1} = \pm j\omega_k \ , \qquad \omega_k \neq 0 \ .$$

Physikalisch interpretiert bedeutet dies das Aufsuchen von Dauerschwingungen

$$y_k(t) = C_k \cdot \cos\left(\omega_k t - \gamma_k\right)$$

des betrachteten Systems.

Bei Grenzstabilität muß für die Kreisfrequenz $\omega_k$ der Dauerschwingung gelten (dies folgt unmittelbar aus der charakteristischen Gleichung):

$$a_n(j\omega_k)^n + a_{n-1}(j\omega_k)^{n-1} + \ldots + a_2(j\omega_k)^2 + a_1(j\omega_k) + a_0 = 0 \ .$$

Nach Aufspaltung in Real– und Imaginärteil folgt daraus

$$\underbrace{(\ldots + a_4\omega_k^4 - a_2\omega_k^2 + a_0)}_{X(\omega_k)} + j \cdot \underbrace{(\ldots + a_5\omega_k^5 - a_3\omega_k^3 + a_1\omega_k)}_{Y(\omega_k)} = 0 \ .$$

Diese Beziehung ist genau dann erfüllt, wenn Realteil und Imaginärteil für sich verschwinden, also

$$X(\omega_k) = 0 \qquad \text{bzw. } \ldots - + a_4\omega_k^4 - a_2\omega_k^2 + a_0 = 0 \ ,$$
$$Y(\omega_k) = 0 \qquad \text{bzw. } \ldots - + a_5\omega_k^4 - a_3\omega_k^2 + a_1 = 0$$

gilt. Nach Elimination von $\omega_k^2$ aus beiden Gleichungen erhalten wir eine Beziehung, der die Koeffizienten $a_\nu$ im Falle von Dauerschwingungen (Grenzstabilität) genügen müssen.

Die eigentlichen *Kreisfrequenzen der Dauerschwingungen* (sog. kritische Kreisfrequenzen $\omega_{krit}$) folgen ebenfalls daraus. Nachfolgend sollen diese hinreichenden Stabilitätskriterien für Systeme der Ordnung $n = 1, 2, 3, 4, 5$ diskutiert werden.

**Hinreichende Stabilitätskriterien für Systeme der Ordnung** $n = 1, 2, 3, 4$

$n = 1$ : Keine der beiden Beziehungen $X(\omega_k) = 0$ und $Y(\omega_k) = 0$ ist erfüllbar. Dies muß aber so sein, denn ein System 1. Ordnung kann keine Dauerschwingungen besitzen.

$n = 2$ : Man erhält nur *eine* Bedingung: $-a_2\omega_k^2 + a_0 = 0$.
Daraus folgt $\omega_k^2 = \frac{a_0}{a_2}$ . Man bezeichnet die Frequenz $\omega_k$ als *kritische Kreisfrequenz* $\omega_{krit} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ .

Ergebnis:
Für ein System 2. Ordnung sind die *notwendigen Bedingungen* für die asymptotische Stabilität auch *hinreichend*.

$n = 3$ : Man erhält *zwei* Beziehungen:

$$-a_2\omega_k^2 + a_0 = 0 \text{ und } -a_3\omega_k^2 + a_1 = 0 \ .$$

Nach Elimination von $\omega_k^2$ folgt daraus für die Stabilitätsgrenze:

$$a_1a_2 - a_0a_3 = 0 \qquad (\omega_{krit} = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}})$$

Am Beispiel des instabilen Systems $s^3 + 2s^2 + 18s + 104 = 0$ mit $s_1 = -4$ , $s_{2,3} = 1 \pm 5j$ läßt sich zeigen, daß bei Instabilität $a_1a_2 - a_0a_3 = -68 < 0$ ist.

Ergebnis (ohne Beweis):
Für ein System 3. Ordnung ergibt sich als hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität

$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \qquad \text{(notwendig: alle } a_\nu > 0).$$

$n = 4$ : Man erhält die zwei Beziehungen:

$$a_4\omega_k^4 - a_2\omega_k^2 + a_0 = 0 \text{ und } -a_3\omega_k^2 + a_1 = 0 \ .$$

Daraus ergeben sich für $\omega_k^2 = \omega_{krit}^2$ die Lösungen

$$\omega_{krit}^2 = \frac{a_1}{a_3} \quad \text{und} \quad \omega_{krit}^2 = \frac{1}{2a_4}\left[a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_0a_4}\right].$$

Nach Elimination von $\omega_k^2$ folgt für die Stabilitätsgrenze:

$$a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 = 0$$

Am Beispiel des asymptotisch stabilen Systems $s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 = 0$ mit $s_{1,2,3,4} = -1$ läßt sich zeigen, daß hierfür $a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 = 64 > 0$ ist.

Ergebnis (ohne Beweis):
Für ein System 4. Ordnung ergibt sich als hinreichende Bedingung für die asymptotische Stabilität

$$a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 > 0 \qquad \text{(notwendig: alle } a_\nu > 0).$$

**Hinreichendes Stabilitätskriterium für ein System 5. Ordnung**

$n = 5$: Man erhält die zwei Beziehungen:

$$a_4\omega_k^4 - a_2\omega_k^2 + a_0 = 0 \text{ und}$$
$$a_5\omega_k^4 - a_3\omega_k^2 + a_1 = 0 \ .$$

Daraus ergeben sich für $\omega_k^2 = \omega_{krit}^2$ die Lösungen

$$\omega_{krit}^2 = \frac{1}{2a_4}\left[a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_0a_4}\right] \text{ und}$$
$$\omega_{krit}^2 = \frac{1}{2a_5}\left[a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right] \ .$$

Nach Elimination von $\omega_k^2$ ergibt sich mit $a_3a_4 - a_2a_5 \neq 0$ für die Stabilitätsgrenze

$$(a_1a_2 - a_0a_3)(a_3a_4 - a_2a_5) - (a_1a_4 - a_0a_5)^2 = 0 \ .$$

Am Beispiel des asymptotisch stabilen Systems

$$s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1 = 0 \qquad (s_{1,2,3,4,5} = -1)$$

läßt sich zeigen, daß hierfür $a_3a_4 - a_2a_5 = 40 > 0$ und

$$(a_1a_2 - a_0a_3)(a_3a_4 - a_2a_5) - (a_1a_4 - a_0a_5)^2 = 1024 > 0 \text{ ist.}$$

Ergebnis (ohne Beweis):

Für ein System 5. Ordnung ergibt sich als hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität

$$a_3a_4 - a_2a_5 > 0 \qquad \text{(notwendig: alle } a_\nu > 0 \text{ )}$$

und

$$(a_1a_2 - a_0a_3)(a_3a_4 - a_2a_5) - (a_1a_4 - a_0a_5)^2 > 0 \ .$$

**Schlußbemerkung:**

Bei Systemen bis zur 5. Ordnung ist die Auswertung der zuvor angegebenen notwendigen und hinreichenden Stabilitätskriterien das weitaus einfachste Mittel zur Stabilitätsanalyse.

## 5.4 HURWITZ-Kriterium

### Vorbemerkung

Das HURWITZ-Kriterium (Satz von HURWITZ) ist ein notwendiges und hinreichendes algebraisches Stabilitätskriterium. Bevor das Kriterium formuliert werden kann, müssen einige Begriffe und Bezeichnungen eingeführt werden.

### HURWITZ-Polynom

Ausgangspunkt ist die folgende Fragestellung: Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen müssen erfüllt sein, daß das zur charakteristischen Gleichung gehörige Polynom

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \ , \qquad a_n > 0$$

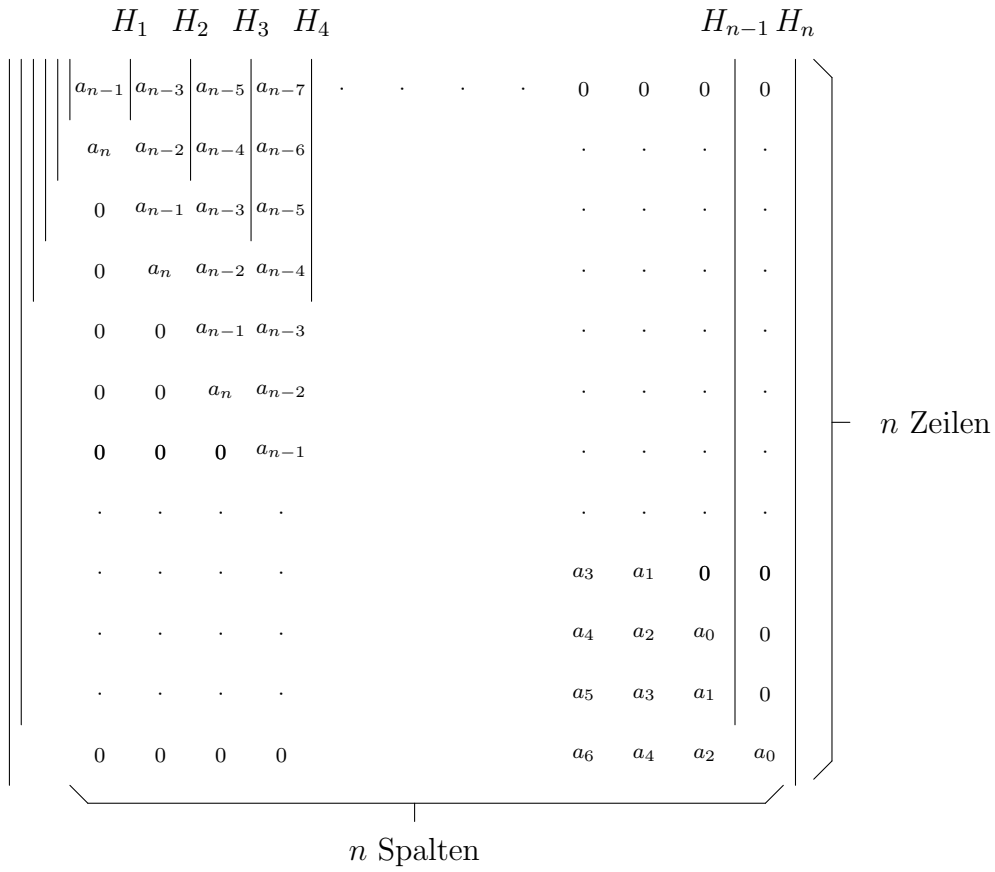
nur Wurzeln $s_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ mit negativen Realteilen besitzt?

A. HURWITZ hat 1895 diese Bedingungen angegeben. Das zugehörige Polynom $P(s)$, das diese Bedingungen erfüllt, heißt HURWITZ-Polynom.

Folgerung für die Stabilität: Ein lineares Übertragungssystem mit der charakteristischen Gleichung $P(s) = 0$ ist genau dann *asymptotisch stabil*, wenn $P(s)$ ein HURWITZ-Polynom ist.

### HURWITZ-Schema

Aus den Koeffizienten der charakteristischen Gleichung bilden wir das nachfolgend angegebene *quadratische Schema:*




### HURWITZ-Determinanten

Die sich aus dem HURWITZ-Schema ergebenden Determinanten $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}, H_n$ heißen HURWITZ-Determinanten.

**Satz von HURWITZ** (ohne Beweis):

Das Polynom

$$P(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0, \quad a_n > 0$$

ist genau dann ein HURWITZ-Polynom, wenn sämtliche HURWITZ-Determinanten $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}, H_n$ positiv sind.

**Beispiele:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n = 2$: | HURWITZ-Schema | $\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$ | HURWITZ-Determinanten<br>$H_1 = a_1 > 0$<br>$H_2 = a_0 a_1 > 0$ |
| $n = 3$: | HURWITZ-Schema | $\begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$ | $H_1 = a_2 > 0$<br>$H_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$<br>$H_3 = a_0 \cdot H_2 > 0$ |
| $n = 4$: | HURWITZ-Schema | $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$ | $H_1 = a_3 > 0$<br>$H_2 = a_2 a_3 - a_1 a_4 > 0$<br>$H_3 = a_1 \cdot H_2 - a_0 \cdot a_3^2 > 0$<br>$H_4 = a_0 \cdot H_3 > 0$ |

**Bemerkungen zum HURWITZ-Kriterium:**

- Eine notwendige Bedingung dafür, daß die charakteristische Gleichung $P(s) = 0$ nur Wurzeln mit negativem Realteil besitzt, ist, daß sämtliche Koeffizienten $a_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ von $P(s)$ vorhanden und positiv sind.
- Es gilt: $H_n = a_0 \cdot H_{n-1}$
- Die *schärfste Bedingung* ist: $H_{n-1} > 0$
- Der Beweis des Kriteriums wurde von HURWITZ mit funktionentheoretischen Methoden geführt.
- Zusatz zum HURWITZ-Kriterium von LIENARD und CHIPART (1944):

  Es sei vorausgesetzt, daß alle $a_\nu > 0$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sind. Dann ist notwendig und hinreichend für die asymptotische Stabilität, daß

  alle $H_1, \; H_3, \; H_5, \ldots$ positiv
  *oder*
  alle $H_2, \; H_4, \; H_6, \ldots$ positiv

  sind.
  (Dieser Zusatz ist eher von theoretischem Interesse.)

## 5.5 KHARITONOV-Kriterium für robuste Stabilität

**Motivation:**

Ausgangspunkt für die Betrachtungen ist das Nennerpolynom $N(s)$ der Übertragungsfunktion $G(s) = Z(s)/N(s)$ mit $a_n = 1$:

$$N(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Für den Fall exakt bekannter Koeffizienten $a_i$ kann mittels des HURWITZ–Kriteriums die Stabilität überprüft werden.

Problem: Wie geht man bei ungenau bekannten Koeffizienten $a_i$ vor?

**Einführendes Beispiel 1:** Standardregelkreis mit $PT_1$–Strecke und PID–Regler.

Streckenübertragungsfunktion: $G_S(s) = \dfrac{1}{1+T_1 s}$

Reglerübertragungsfunktion: $G_R(s) = K_P + \dfrac{K_I}{s} + K_D s$

Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{Y(s)}{W(s)} = \dfrac{K_I + K_P s + K_D s^2}{K_I + (K_P+1)s + (K_D + T_1)s^2}$

Für die Stabilität ist das Nennerpolynom $N(s)$ zu untersuchen:

$$N(s) \;=\; K_I + (K_P+1)s + (K_D+T_1)s^2$$

Nach Hurwitz ist asymptotische Stabilität für $K_I > 0, K_P + 1 > 0, K_D + T_1 > 0$ gegeben.

Frage: Welches $K_D$ ist zulässig, wenn die Zeitkonstante $T_1$ nur ungenau bekannt ist und im Intervall $T_{1u} \le T_1 \le T_{1o}$ schwankt?

Antwort unter Verwendung des HURWITZ-Kriteriums:

$K_D + T_1 > 0$ für *alle* $T_1 \in [T_{1u}, T_{1o}] > 0 \Leftrightarrow K_D + T_{1u} > 0 : K_D > -T_{1u}$

Für die Stabilitätsaussage ist hier nur die *untere Grenze* $T_{1u}$ von Bedeutung.

Für ein System der Ordnung n mit dem charakteristischen Polynom

$$N(s) = p(s) = a_0 + a_1\ s + \cdots + a_{n-1}\ s^{n-1} + s^n$$

und ungenau bekannten Koeffizienten $a_i,\ i = 0, \ldots, n-1$, die *unabhängig* voneinander jeweils im Intervall $[\,\underline{a}_i,\ \overline{a}_i\,]$ schwanken, d.h.

$$a_i \in [\,\underline{a}_i,\ \overline{a}_i\,],$$

läßt sich zur Stabilitätsuntersuchung ein von KHARITONOV angegebener Satz anwenden. Das Polynom $p(s)$ wird als *Intervallpolynom* bezeichnet.

**Satz von KHARITONOV (1978):**

Das Intervallpolynom und somit das zugehörige System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die folgenden vier Eckpolynome asymptotisch stabil sind:

$$\begin{aligned}
p_1(s) &= \overline{a}_0 + \underline{a}_1\ s + \underline{a}_2\ s^2 + \overline{a}_3\ s^3 + \overline{a}_4\ s^4 + \underline{a}_5\ s^5 + \ldots \\
p_2(s) &= \overline{a}_0 + \overline{a}_1\ s + \underline{a}_2\ s^2 + \underline{a}_3\ s^3 + \overline{a}_4\ s^4 + \overline{a}_5\ s^5 + \ldots \\
p_3(s) &= \underline{a}_0 + \overline{a}_1\ s + \overline{a}_2\ s^2 + \underline{a}_3\ s^3 + \underline{a}_4\ s^4 + \overline{a}_5\ s^5 + \ldots \\
p_4(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1\ s + \overline{a}_2\ s^2 + \overline{a}_3\ s^3 + \underline{a}_4\ s^4 + \underline{a}_5\ s^5 + \ldots
\end{aligned}$$

**Einfache Bedingungen für Systeme bis 5. Ordnung:**

Asymptotische Stabilität liegt dann vor, wenn

**1)** alle $\underline{a}_i > 0$

und

**2)**

$n = 2:$ keine weiteren Bedingungen

$n = 3:$ $p_1(s) = \overline{a}_0 + \underline{a}_1\ s + \underline{a}_2\ s^2 + \ s^3$ asymptotisch stabil

$n = 4:$ $p_1(s) = \overline{a}_0 + \underline{a}_1\ s + \underline{a}_2\ s^2 + \overline{a}_3\ s^3 + \ s^4$ und
$p_2(s) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1\ s + \underline{a}_2\ s^2 + \underline{a}_3\ s^3 + \ s^4$ asymptotisch stabil

$n = 5:$ $p_1(s) = \overline{a}_0 + \underline{a}_1\ s + \underline{a}_2\ s^2 + \overline{a}_3\ s^3 + \overline{a}_4\ s^4 + \ s^5$ und
$p_2(s) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1\ s + \underline{a}_2\ s^2 + \underline{a}_3\ s^3 + \overline{a}_4\ s^4 + \ s^5$ und
$p_3(s) = \underline{a}_0 + \overline{a}_1\ s + \overline{a}_2\ s^2 + \underline{a}_3\ s^3 + \underline{a}_4\ s^4 + \ s^5$ asymptotisch stabil

**Beispiel 2:** Ein System 4. Ordnung besitze als Intervallpolynom das charakteristische Polynom

$$p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + s^4.$$

Die Koeffizienten seien durch folgende unabhängige Intervalle vorgegeben:

$$\begin{aligned} a_0 &= [\underline{a}_0, \overline{a}_0] = [2,74; 5,14] \\ a_1 &= [\underline{a}_1, \overline{a}_1] = [10,11; 13,71] \\ a_2 &= [\underline{a}_2, \overline{a}_2] = [12,41; 13,61] \\ a_3 &= [\underline{a}_3, \overline{a}_3] = [6; 6] \end{aligned}$$

Mit den bekannten Intervallgrenzen lauten die Eckpolynome (KHARITONOV–Polynome):

$$\begin{aligned} p_1(s) &= 5,14 + 10,11s + 12,41s^2 + 6s^3 + s^4 \\ p_2(s) &= 5,14 + 13,71s + 12,41s^2 + 6s^3 + s^4 \\ p_3(s) &= 2,74 + 13,71s + 13,61s^2 + 6s^3 + s^4 \\ p_4(s) &= 2,74 + 10,11s + 13,61s^2 + 6s^3 + s^4 \end{aligned}$$

Eine Überprüfung der KHARITONOV–Polynome mittels des HURWITZ–Kriteriums ergibt die asymptotische Stabilität des Ausgangssystems. Für $n = 4$ genügt zum Nachweis der Stabilität die Untersuchung der KHARITONOV–Polynome $p_1(s)$ und $p_2(s)$.

**Hinweis:**

Wenn die Koeffizienten $a_i$ des charakteristischen Polynoms voneinander abhängig sind und somit eine *strukturierte Unsicherheit* vorliegt, erhält man mit dem KHARITONOV-Kriterium eine konservative Abschätzung der Stabilität, da auch Koeffizientenkombinationen, die physikalisch *nicht* auftreten können, in die Stabilitätsuntersuchung eingehen. Das KHARITONOV-Kriterium liefert in diesem Fall nur *hinreichende* Bedingungen für die robuste Stabilität.

**Beispiel 3 (Forts. Bsp. 2): Andockmanöver einer Raumfähre**

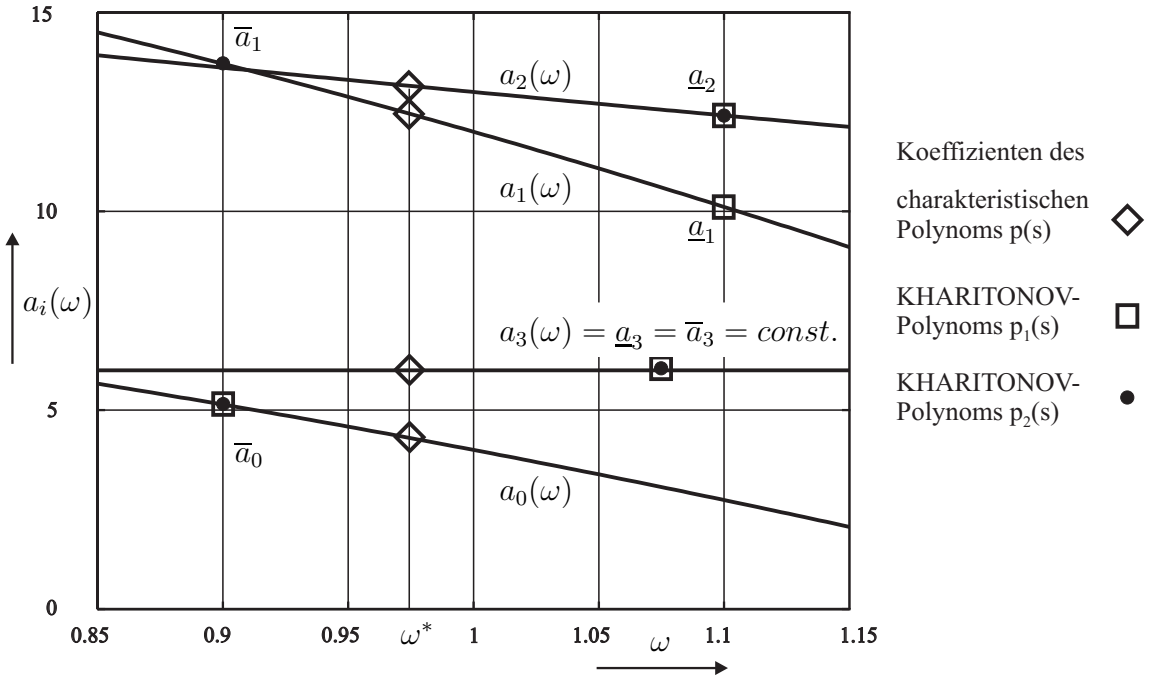
Die physikalische Modellbildung für das Andocken einer Raumfähre führt auf eine strukturelle Abhängigkeit der Koeffizienten $a_i$ vom Systemparameter $\omega$. Daraus resultiert das folgende charakteristische Polynom $p(s)$:

$$p(s) = 2(5 - 3\omega^2) + (21 - 9\omega^2)s + (20 - 8\omega + \omega^2)s^2 + 6s^3 + s^4$$

Hierbei ist bekannt, daß der Systemparameter $\omega$ im Intervall $\omega \in [0,9; 1,1]$ schwankt.

Zur Verdeutlichung der Konsequenzen voneinander abhängiger Koeffizienten sollen anhand des vorausgegangenen Beispiels die Aussagen des HURWITZ-Kriteriums sowie des KHARITONOV-Kriteriums gegenübergestellt werden.

Wenn, wie im vorliegenden Beispiel, die Abhängigkeit der Koeffizienten $a_i$ des charakteristischen Polynoms von dem veränderlichen Systemparameter $\omega$ in analytischer Form bekannt ist, kann vorteilhaft das HURWITZ-Kriterium angewendet werden. Eine Analyse der notwendigen und hinreichenden Bedingungen liefert asymptotische Stabilität im Parameterintervall $0 < \omega < \sqrt{5/3} = 1,291$. Da hierin das zu untersuchende Parameterintervall vollständig enthalten ist, ist die asymptotische Stabilität bei Kenntnis der funktionalen Abhängigkeit von $\omega$ einfach nachzuweisen. Wie aus dem untenstehenden Bild deutlich wird, ergeben sich für einen speziellen Wert $\omega^*$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $p(s)$ aus den Funktionswerten $a_i(\omega^*)$. Physikalisch realisierbare Koeffizientenkombinationen liegen demnach auf einer Parallelen zur Ordinate.



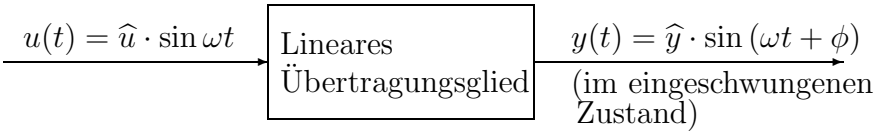

Sind jedoch, wie im vorherigen Beispiel, die funktionalen Abhängigkeiten unbekannt und liegen lediglich Intervalle für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms vor, führt das HURWITZ-Kriterium nicht zu der gewünschten Stabilitätsaussage, da unklar ist, welche Koeffizientenkombinationen dafür herangezogen werden müssen. In diesem Fall läßt sich aber eine Stabilitätsaussage mit Hilfe des KHARITONOV-Kriteriums gewinnen. Im obigen Bild sind die veränderlichen Koeffizienten der KHARITONOV-Polynome $p_1(s)$ und $p_2(s)$ gekennzeichnet. Es wird deutlich, daß im vorliegenden Fall die entsprechenden Koeffizienten der KHARITONOV-Polynome *unterschiedlichen* $\omega-$Werten zugeordnet sind.

# 6 Frequenzgang und BODE-Diagramm

Neben Sprungfunktion und Impulsfunktion werden auch periodische Eingangsfunktionen als Testsignale zur Bestimmung des Übertragungsverhaltens dynamischer Systeme verwendet. Darauf soll in diesem Kapitel näher eingegangen werden.

## 6.1 Harmonische Anregung und Frequenzgang

Ein asymptotisch stabiles lineares Übertragungsglied, das mit einer harmonischen Eingangsfunktion angeregt wird, antwortet im *eingeschwungenen Zustand* mit einer harmonischen Ausgangsfunktion, die sich jedoch in Amplitude und Phase vom Eingangssignal unterscheidet.




Für das jeweils betrachtete Übertragungsglied sind demnach in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz $\omega \quad (0 \leq \omega < \infty)$ der harmonischen Anregung das Amplitudenverhältnis $A(\omega) = \widehat{y}/\widehat{u}$ und die Phasenverschiebung $\phi(\omega)$ charakteristisch.

**Beispiel:** Übertragungsverhalten des $PT_1$-Gliedes $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$ mit der Anregung $u(t) = \widehat{u} \cdot \sin \omega t$

Aus $y(t) = g(t) * u(t)$ erhält man $\qquad y(t) = \int_0^t \frac{K}{T_1} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot \widehat{u} \sin \omega\tau \cdot d\tau$ .

Die Auswertung ergibt:

$$y(t) = \underbrace{\frac{KT_1 \cdot \omega \cdot \widehat{u}}{1 + \omega^2 T_1^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}}_{\substack{\text{nach } t = 5T_1 \text{ auf} \\ 1\% \text{ des Anfangswer-} \\ \text{tes abgeklungen}}} + \underbrace{\frac{K \cdot \widehat{u}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}}_{\widehat{y}(\omega)} \cdot \sin(\omega t \underbrace{- \arctan \omega T_1}_{\phi(\omega)}) \ .$$

Nach $t = 5T_1$ ist der eingeschwungene Zustand praktisch erreicht. Dann erhalten wir für das Amplitudenverhältnis $A(\omega)$ und die Phasenverschiebung $\phi(\omega)$ die Ausdrücke

$$A(\omega) = \frac{\widehat{y}(\omega)}{\widehat{u}} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \quad ,$$

$$\phi(\omega) = -\arctan \omega T_1 \ .$$

**Harmonische Anregung eines allgemeinen linearen Übertragungsgliedes**

Wir gehen aus von der Differentialgleichung

$$a_n \cdot y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \dot{u}(t) + \ldots + b_m \cdot u^{(m)}(t) \ .$$

Die Eingangsfunktion setzen wir an in komplexer Form

$$u(t) = \widehat{u} \cdot e^{j\omega t} = \widehat{u} \cdot (\cos \omega t + j \cdot \sin \omega t) \ .$$

Die Ausgangsfunktion im eingeschwungenen Zustand ist dann

$$y(t) = \widehat{y} \cdot e^{j(\omega t + \phi)} \ .$$

Mit den Ansätzen für $u(t)$ und $y(t)$ folgt aus der Differentialgleichung

$$\widehat{y}\,[a_n \cdot (j\omega)^n + \ldots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0]\, e^{j\omega t} \cdot e^{j\phi} = \widehat{u}\,[b_0 + b_1 \cdot (j\omega) + \ldots + b_m \cdot (j\omega)^m] \cdot e^{j\omega t} \ .$$

Diese Beziehung muß für alle $t$ gelten. Daraus ergibt sich

$$\frac{\widehat{y}}{\widehat{u}} \cdot e^{j\phi} = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j\omega) + \ldots + b_m \cdot (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \cdot (j\omega) + \ldots + a_n \cdot (j\omega)^n}. \qquad (*)$$

Für den auf der rechten Seite stehenden (komplexen) Ausdruck führen wir die Abkürzung $G(j\omega)$ und die Bezeichnung *Frequenzgang* ein. Unter dem Frequenzgang $G(j\omega)$ verstehen wir also

$$G(j\omega) := \frac{b_0 + b_1 \cdot (j\omega) + \ldots + b_m \cdot (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \cdot (j\omega) + \ldots + a_n \cdot (j\omega)^n} \ .$$

Beachtet man, daß sich die komplexe Funktion $G(j\omega)$ durch Betrag $|G(j\omega)|$ und Phase $\arg\ G(j\omega)$ in der Form

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j \cdot \arg\ G(j\omega)}$$

darstellen läßt, so folgen aus $(*)$ für das Amplitudenverhältnis $A(\omega) = \dfrac{\widehat{y}}{\widehat{u}}$ und die Phasenverschiebung $\phi(\omega)$ die Ausdrücke

$$A(\omega) = \frac{\widehat{y}}{\widehat{u}} = \mid G(j\omega) \mid \qquad \text{und} \qquad \phi(\omega) = \arg\ G(j\omega) \ .$$

Eine Aufspaltung von $G(j\omega)$ in Real- und Imaginärteil

$$G(j\omega) = \mathrm{R}(\omega) + j \cdot \mathrm{I}(\omega)$$

liefert für das (reelle) Amplitudenverhältnis $A(\omega)$ und die (reelle) Phasenver–schiebung $\phi(\omega)$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{R}^2(\omega) + \mathrm{I}^2(\omega)} \text{ und}$$
$$\phi(\omega) = \arg\ G(j\omega) = \arctan\{\mathrm{I}(\omega)/\mathrm{R}(\omega)\}.$$

Bei der Auswertung von $\arctan\{\mathrm{I}(\omega)/\mathrm{R}(\omega)\}$ ist darauf zu achten, daß $\phi(\omega)$ stetig ist.

Da $G(j\omega)$ nur die Koeffizienten der Differentialgleichung enthält, können für ein vorgegebenes $\omega$ sofort das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung angegeben werden, die sich bei harmonischer Anregung im eingeschwungenen Zustand einstellen.

## 6.2 Definition des Frequenzganges

Die vorherigen Ausführungen lassen den Zusammenhang zwischen Frequenzgang $G(j\omega)$ und Übertragungsfunktion $G(s)$ unmittelbar erkennen.

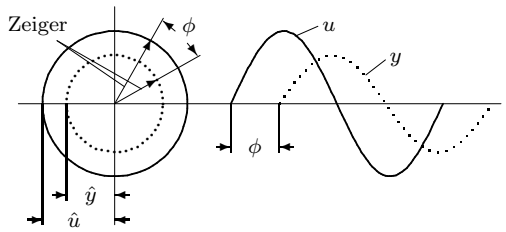
**Formale Definition:**

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Abhängigkeit von der rein imaginären Variablen $s = j\omega$ heißt Frequenzgang $G(j\omega)$ .

Der Frequenzgang stellt also nur einen Ausschnitt aus der Übertragungsfunktion dar, nämlich die Funktionswerte der Übertragungsfunktion auf der imaginären Achse. Warum dennoch ein besonderer Begriff dafür eingeführt wurde, liegt in der großen meßtechnischen Bedeutung des Frequenzganges. Amplitude und Phase der harmonischen Schwingung als Antwort auf ein harmonisches Eingangssignal können unmittelbar gemessen werden. Man zeichnet $G(j\omega)$ punktweise für vorgegebene Kreisfrequenzen $\omega = \omega_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$ auf.

Vielfach ist es unmöglich oder mit zu großen Schwierigkeiten verbunden, die Gleichung zwischen Eingangs– und Ausgangssignal eines Übertragungsgliedes zu ermitteln. Dann bietet die Messung des Frequenzganges eine Möglichkeit, das Übertragungsverhalten des Gliedes quantitativ zu erfassen.

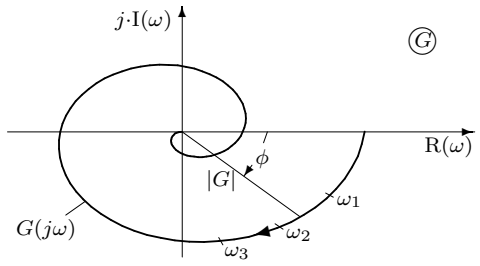
**Physikalische Definition:**




Der Frequenzgang ist das Verhältnis des Zeigers des sinusförmigen Ausgangssignals eines Übertragungsgliedes zum Zeiger des angelegten sinusförmigen Eingangssignals im eingeschwungenen Zustand, dargestellt als Funktion der Kreisfrequenz $\omega$ .

## 6.3 Graphische Darstellung des Frequenzganges

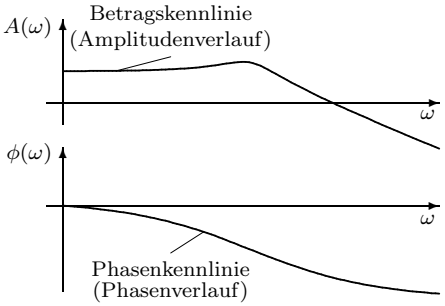
**Ortskurve des Frequenzganges:**




Der komplexe Ausdruck $G(j\omega)$ wird durch einen mit der Frequenz $\omega$ $(0 \leq \omega < \infty)$ markierten Kurvenzug in der komplexen $G$–Ebene dargestellt.

Dieser Kurvenzug heißt *Ortskurve* des Frequenzganges und wird meist nur als Ortskurve bezeichnet.

**Logarithmische Frequenzkennlinien:**




Getrennte Darstellungen von Amplitudenverhältnis $A(\omega)$ und Phasenwinkel $\phi(\omega)$ über der Frequenz $\omega$. Man spricht dann von

*Betragskennlinie* $A(\omega) = |G(j\omega)|$ und

*Phasenkennlinie* $\phi(\omega) = \arg\ G(j\omega)$ ,

die gemeinsam als *Frequenzkennlinien* bezeichnet werden.

*Logarithmische* Frequenzkennlinien werden als *BODE-Diagramm* bezeichnet.

## 6.4 Ortskurven der wichtigsten Regelkreisglieder

- **$PT_1$-Glied:** $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$

  Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{K}{1 + T_1 \cdot s}$

  Frequenzgang: $G(j\omega) = \dfrac{K}{1 + T_1 \cdot (j\omega)}$

  Stellt man Zähler und Nenner getrennt durch Betrag und Phase dar, so ergibt sich

$$G(j\omega) = \frac{K \cdot e^{j \cdot 0}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \cdot e^{j \cdot \arctan \omega T_1}} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctan \omega T_1} \ .$$

  Daraus liest man das frühere Ergebnis (vgl. Abschnitt 6.1) sofort ab. Damit ergeben sich:

  Amplitudenverhältnis: $A(\omega) = |G(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}$

  Phasenverschiebung: $\phi(\omega) = \arg\ G(j\omega) = -\arctan \omega T_1$

  Zur Bestimmung der Ortskurve wird der Frequenzgang in Real- und Imaginärteil aufgespalten. Aus

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j \cdot \omega T_1} = K \cdot \frac{1 - j \cdot \omega T_1}{1 + \omega^2 T_1^2}$$

  folgt

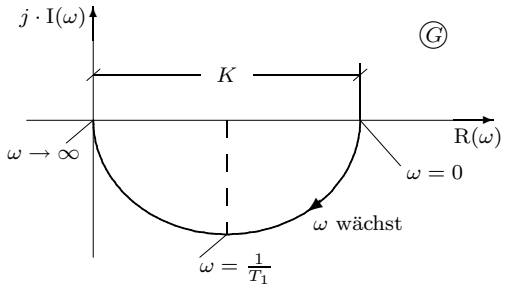
$$\mathrm{R} = \mathrm{R}(\omega) = \frac{K}{1 + \omega^2 T_1^2} \quad , \quad \mathrm{I} = \mathrm{I}(\omega) = \frac{-K \omega T_1}{1 + \omega^2 T_1^2} \ .$$

  Zur Elimination von $\omega$ bildet man zunächst $\mathrm{I}/\mathrm{R} = -\omega T_1$ und geht damit in den Ausdruck für R ein. Man erhält

$$\mathrm{R} = \frac{K}{1 + \left[\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}\right]^2} \quad \text{bzw.} \quad \left(\mathrm{R} - \frac{K}{2}\right)^2 + \mathrm{I}^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2 \ .$$

  Durch diesen Zusammenhang ist ein Kreis in der $G$–Ebene dargestellt. Beachtet man, daß wegen $0 \le \omega < \infty$ stets $\mathrm{I}(\omega) \le 0$ sein muß, so erhält man als Ortskurve den skizzierten Halbkreis.

**Ortskurve**
Beachte:
Die $\omega$–Markierung auf dem Halbkreis ist Bestandteil der Ortskurve.
Die Ortskurve charakterisiert das dynamische System vollständig.




- **P–Glied:** $y(t) = K \cdot u(t)$

  Die Ortskurve folgt unmittelbar aus dem $PT_1$–Glied mit $T_1 = 0$ . Sie degeneriert zu dem Punkt $(K, 0)$ der $G$–Ebene. Damit ist $A(\omega) = K$ und $\phi(\omega) = 0$ .

- **DT$_1$–Glied:** $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$

  Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{K_D \cdot s}{1 + T_1 \cdot s}$

  Frequenzgang: $G(j\omega) = \dfrac{K_D \cdot (j\omega)}{1 + T_1 \cdot (j\omega)} = K_D\omega \cdot \dfrac{\omega T_1 + j}{1 + \omega^2 T_1^2}$

  Umgeformt nach Betrag und Phase

  $$G(j\omega) = \frac{K_D \cdot \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \cdot e^{j \cdot \arctan \omega T_1}} \quad .$$

  Daraus folgen Amplitudenverhältnis und Phasenverschiebung

  $$A(\omega) = \frac{K_D \cdot \omega}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \quad , \quad \phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \omega T_1 \quad .$$

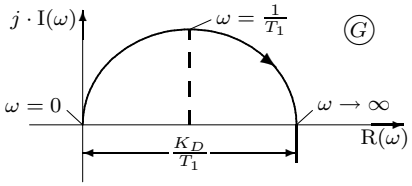
  Aufspaltung des Frequenzganges in Real– und Imaginärteil

  $$\mathrm{R} = \mathrm{R}(\omega) = \frac{K_D \omega^2 T_1}{1 + \omega^2 T_1^2} \quad , \quad \mathrm{I} = \mathrm{I}(\omega) = \frac{K_D \omega}{1 + \omega^2 T_1^2} \quad .$$

  Nach Elimination von $\omega$ ergibt sich in der $G$–Ebene die Kreisgleichung

  $$\left[\mathrm{R} - \frac{K_D}{2T_1}\right]^2 + \mathrm{I}^2 = \left[\frac{K_D}{2T_1}\right]^2$$

  Ortskurve: Halbkreis ($\mathrm{I}(\omega) \geq 0$)

- **D–Glied:** $y(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$

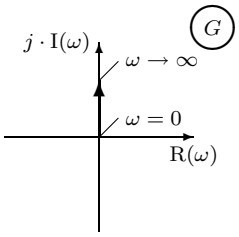
  $G(s) = K_D \cdot s$

  $G(j\omega) = K_D \cdot (j\omega) = K_D\omega e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$

  Damit:

  $A(\omega) = K_D\omega \quad , \quad \phi(\omega) = \dfrac{\pi}{2}$

  Ortskurve: Halbgerade (positive imaginäre Achse)

- **I–Glied:** $y(t) = K_I \displaystyle\int_0^t u(\tau) d\tau$

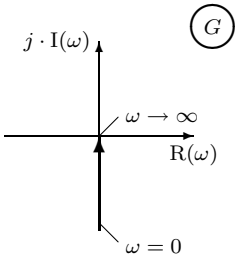
  $G(s) = \dfrac{K_I}{s}$

  $G(j\omega) = \dfrac{K_I}{j\omega} = \dfrac{K_I}{\omega} e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$

  Damit:

  $A(\omega) = \dfrac{K_I}{\omega} \quad , \quad \phi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2}$

  Ortskurve: Halbgerade (negative imaginäre Achse)

- **$T_t$–Glied:** $y(t) = K \cdot u(t - T_t)$

  Übertragungsfunktion: $G(s) = K \cdot e^{-s \cdot T_t}$

  Frequenzgang: $G(j\omega) = K \cdot e^{-j\omega T_t} = K[\cos \omega T_t - j \sin \omega T_t]$

  Daraus folgen unmittelbar Amplitudenverhältnis und Phasenverschiebung

  $$A(\omega) = K \quad , \quad \phi(\omega) = -\omega T_t \quad .$$

  Aufspaltung des Frequenzganges in Real– und Imaginärteil liefert

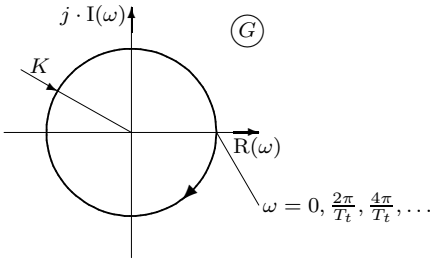
  $$\mathrm{R} = \mathrm{R}(\omega) = K \cdot \cos \omega T_t \quad , \quad \mathrm{I} = \mathrm{I}(\omega) = -K \cdot \sin \omega T_t \quad .$$

  Die Elimination von $\omega$ liefert in der $G$–Ebene den Kreis

  $$\mathrm{R}^2 + \mathrm{I}^2 = K^2$$

  Beachte: Der Vollkreis wird für $0 \leq \omega < \infty$ unendlich oft durchlaufen.

  Ortskurve: Vollkreis

- **$T_t T_1$–Glied:** $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t - T_t)$

  Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{K}{1 + T_1 \cdot s} \cdot e^{-s \cdot T_t}$

  Frequenzgang: $G(j\omega) = \dfrac{K}{1 + j\omega T_1} \cdot e^{-j\omega T_t}$

  Umformung nach Betrag und Phase

  $$G(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \cdot e^{-j \cdot (\omega T_t + \arctan \omega T_1)} \quad .$$

  Daraus folgen Amplitudenverhältnis und Phasenverschiebung

  $$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \quad , \quad \phi(\omega) = -\omega T_t - \arctan \omega T_1 \quad .$$

  Läßt man $\omega$ alle Werte $0 \leq \omega < \infty$ durchlaufen, so ergibt sich als Ortskurve die skizzierte Spirale.

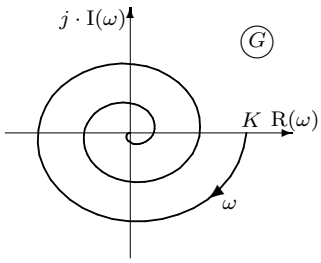
  Schnittpunkte mit der reellen Achse ($\mathrm{I}(\omega) = 0$):

  $$\omega T_1 = -\tan \omega T_t$$

  Schnittpunkte mit der imaginären Achse ($\mathrm{R}(\omega) = 0$):

  $$\omega T_1 = \cot \omega T_t$$

  Ortskurve: Spirale

## 6.5 Anfang und Ende der Ortskurven rationaler Frequenzgänge

**Anfang der Ortskurve:**

Wir betrachten den rationalen Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j\omega) + \ldots + b_m \cdot (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \cdot (j\omega) + \ldots + a_n \cdot (j\omega)^n} \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad , \quad b_0 \neq 0 \quad .$$

- Setzt man $K = b_0/a_0$ , so gilt für kleine $\omega$

  $$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \to 0} \left( K \cdot \frac{1 + \ldots}{1 + \ldots} \right) = K \quad .$$

  Die Ortskurve beginnt für $\omega = 0$ auf der reellen Achse beim Wert $K$ .

- Für den Fall $a_0 = a_1 = \ldots = a_{\rho-1} = 0 \;\; (1 \leq \rho \leq n)$ kann der Faktor $(j\omega)$ im Nenner $\rho$–mal ausgeklammert werden. Das Übertragungsglied ist „$\rho$–fach integrierend“. Mit $b_0 \neq 0$ und $K^* = b_0/a_\rho$ gilt dann für kleine $\omega$

  $$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \to 0} \left( \frac{K^*}{(j\omega)^\rho} \cdot \frac{1 + \ldots}{1 + \ldots} \right) = \frac{K^*}{(j\omega)^\rho} = \frac{K^*}{\omega^\rho} \cdot e^{-j \cdot \rho \cdot \frac{\pi}{2}} \; .$$

  Die Ortskurve beginnt für $\rho \geq 1$ mit dem Phasenwinkel $-\rho \cdot \dfrac{\pi}{2}$ im Unendlichen.

- Die vorherigen Aussagen gelten auch bei Totzeit, da diese sich für $\omega = 0$ nicht auf den Frequenzgang auswirkt.

**Ende der Ortskurve:**

Wir wollen uns hierbei auf reale Systeme beschränken. Da bei realen Systemen stets $n > m$ ist, enden die Ortskurven realer Systeme im Ursprung. Dies ist auch physikalisch einsichtig: Kein reales System kann einer Frequenz $\omega = \infty$ folgen; die Amplitudenverstärkung $A(j\omega) = \mid G(j\omega) \mid$ muß damit für große $\omega$ gegen Null gehen. Von Interesse ist nun die Frage, unter welchem Winkel die Ortskurve in den Ursprung läuft.

- Wir betrachten zunächst Frequenzgänge, bei denen im Zähler keine Potenzen von $j\omega$ auftauchen, also reine Verzögerungsglieder $n$–ter Ordnung ($\mathrm{PT}_n$–Glieder) oder $\rho$–fach integrierende Glieder mit Verzögerung $(n-\rho)$–ter Ordnung ($\mathrm{I}^\rho\mathrm{T}_{n-\rho}$–Glieder).

  Für $\omega \to \infty$ dominiert die höchste Potenz, so daß mit $K_\infty = b_0/a_n$ gilt

  $$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \left( K_\infty \cdot \frac{1}{\ldots + (j\omega)^n} \right) = \frac{K_\infty}{(j\omega)^n} = \frac{K_\infty}{\omega^n} \cdot e^{-j \cdot n \cdot \frac{\pi}{2}} \quad .$$

  Die Ortskurve läuft also unter dem Winkel $-n \cdot \dfrac{\pi}{2}$ in den Ursprung.

- Bei Systemen mit Totzeit läuft die Ortskurve spiralförmig in den Ursprung ein. Es kann kein Eintrittswinkel berechnet werden.

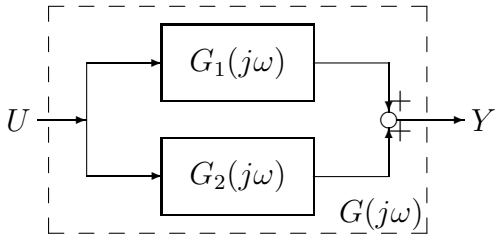
- Für reale Systeme $(n > m)$ gilt für $\omega \to \infty$ mit $K^*_\infty = b_m/a_n$:

  $$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \left( K^*_\infty \cdot \frac{\ldots + (j\omega)^m}{\ldots + (j\omega)^n} \right) = \frac{K^*_\infty}{(j\omega)^{(n-m)}} = \frac{K^*_\infty}{\omega^{(n-m)}} \cdot e^{-j \cdot (n-m) \cdot \frac{\pi}{2}}$$

  Die Ortskurve läuft dann unter dem Winkel $-(n-m) \cdot \frac{\pi}{2}$ in den Ursprung.

## 6.6 Addition und Multiplikation von Ortskurven des Frequenzganges

**Parallelschaltung** (Addition in der komplexen Ebene)




$$G(j\omega) = G_1(j\omega) + G_2(j\omega)$$

Daraus folgt:

$$G(j\omega) = [\mathrm{Re}\{G_1(j\omega)\} + \mathrm{Re}\{G_2(j\omega)\}] + j \cdot [\mathrm{Im}\{G_1(j\omega)\} + \mathrm{Im}\{G_2(j\omega)\}]$$

Ergebnis:

Die *Zeiger* $G_1(j\omega)$ und $G_2(j\omega)$ werden *vektoriell addiert*. (Für die Praxis ist diese Methode nur bei sehr einfachen Übertragungsgliedern empfehlenswert.)

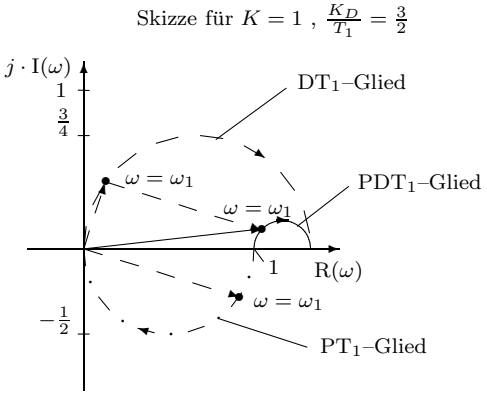
**Beispiel:**

$$G_1(j\omega) = \frac{K_D \cdot (j\omega)}{1 + T_1 \cdot (j\omega)} \qquad (\mathrm{DT_1}\text{–Glied})$$

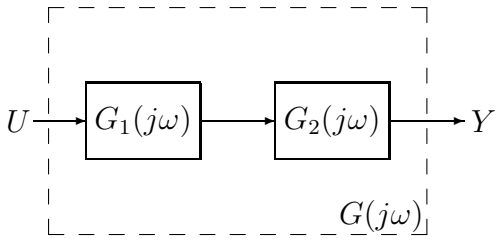
$$G_2(j\omega) = \frac{K}{1 + T_1 \cdot (j\omega)} \qquad (\mathrm{PT_1}\text{–Glied})$$

Parallelschaltung:

$$G(j\omega) = \frac{K + K_D \cdot (j\omega)}{1 + T_1 \cdot (j\omega)} \qquad (\mathrm{PDT_1}\text{–Glied})$$




**Serienschaltung** (Multiplikation in der komplexen Ebene)




$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

Daraus folgt

$$G(j\omega) = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot e^{j \cdot [\underbrace{\arg\, G_1(j\omega)}_{\phi_1(\omega)} + \underbrace{\arg\, G_2(j\omega)}_{\phi_2(\omega)}]}$$

Ergebnis:

Die *Zeiger* $G_1(j\omega)$ und $G_2(j\omega)$ werden *vektoriell multipliziert*. (In der Praxis verwendet man hier das BODE–Diagramm.)

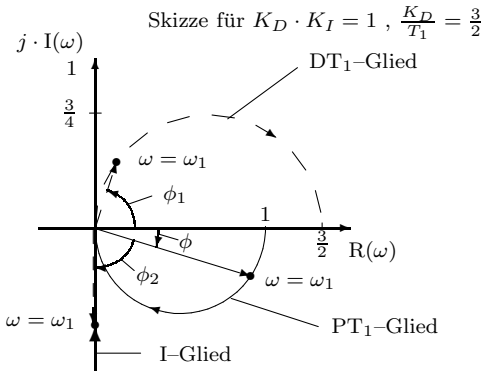
**Beispiel:**

$$G_1(j\omega) = \frac{K_D \cdot (j\omega)}{1 + T_1 \cdot (j\omega)} \qquad (\mathrm{DT_1}\text{–Glied})$$

$$G_2(j\omega) = \frac{K_I}{(j\omega)} \qquad (\mathrm{I}\text{–Glied})$$

Serienschaltung:

$$G(j\omega) = \frac{K_D \cdot K_I}{1 + T_1 \cdot (j\omega)} \qquad (\mathrm{PT_1}\text{–Glied})$$



## 6.7 Frequenzkennlinien und BODE–Diagramm

**Frequenzkennlinien**

Wie bereits erwähnt, handelt es sich hierbei um getrennte graphische Darstellungen von Amplitudenverhältnis $A(\omega) =\mid G(j\omega) \mid$ und Phasenwinkel $\phi(\omega) = \arg G(j\omega)$ über der Frequenz $\omega$.

**BODE–Diagramm**

Das BODE–Diagramm ist eine logarithmische Darstellung der Frequenzkennlinien. Aus

$$G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\cdot\phi(\omega)}$$

folgt

$$\log G(j\omega) = \log A(\omega) + j \cdot \phi(\omega) \cdot (\log e)$$

Es wird nun folgende Darstellung gewählt:

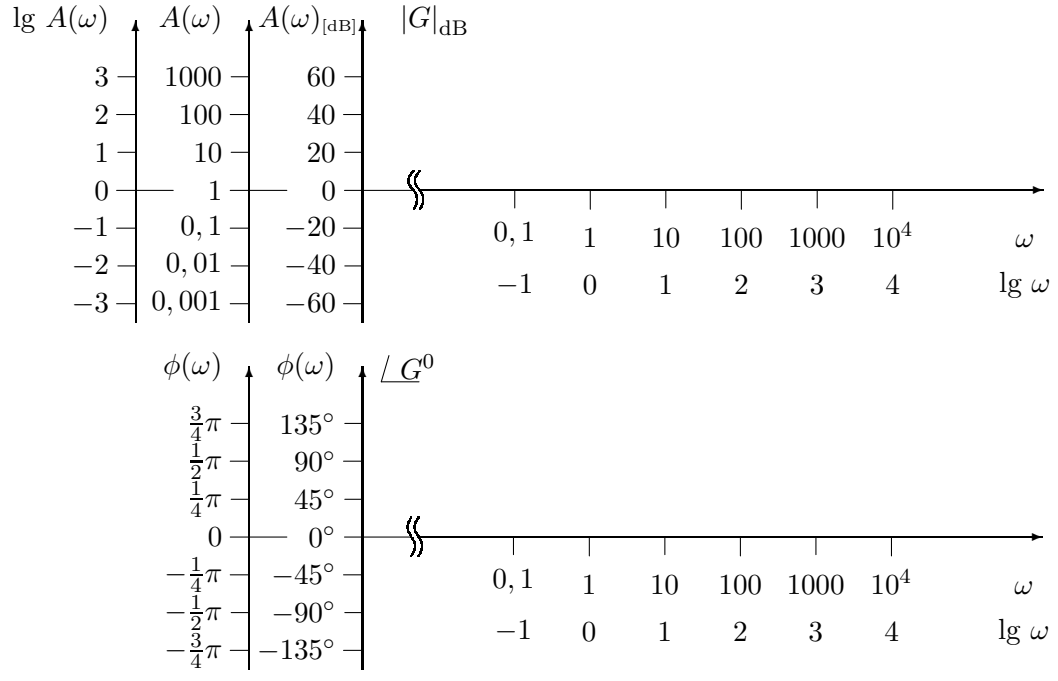
Für den *Amplitudenverlauf* (Amplitudengang, Amplitudenkennlinie, Betragskennlinie) wird $\log A(\omega)$ über $\log \omega$ aufgetragen (doppeltlogarithmische Darstellung).
Für den *Phasenverlauf* (Phasengang, Phasenkennlinie) wird $\phi(\omega)$ über $\log \omega$ aufgetragen (einfachlogarithmische Darstellung).

Die logarithmisch geteilten Achsen werden meist nicht mit $\log \omega$ bzw. $\log A$, sondern direkt mit $\omega$ bzw. $A$ beschriftet.

Die Ordinate des Amplitudenverlaufs wird meistens in Dezibel [dB] angegeben. Dabei gilt folgende Definition:

$$A(\omega)_{[\mathrm{dB}]} := 20 \cdot \lg A(\omega) \quad , (\ \lg \text{ ist der Zehnerlogarithmus})$$

Die möglichen Achsenbeschriftungen sind nachfolgend angegeben. Am häufigsten findet man $A$ in dB über $\omega$, sowie $\phi$ in Grad über $\omega$ aufgetragen. In der Nachrichtentechnik werden Amplituden– und Phasenverlauf über dem Logarithmus der Frequenz $f$ (in Hz) dargestellt; es ist $f = \omega/2\pi$ .



## 6.8 BODE–Diagramme der wichtigsten Regelkreisglieder

• **$PT_1$–Glied:** $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$

Mit der Abkürzung $\omega_0 = \dfrac{1}{T_1}$ lautet

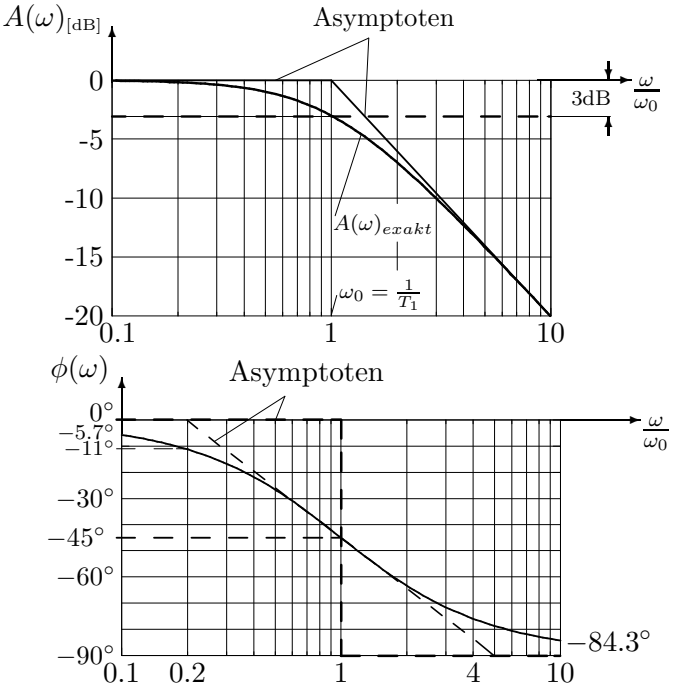
der Frequenzgang $G(j\omega) = \dfrac{K}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$ .

Amplitudengang $A(\omega)$ und Phasengang $\phi(\omega)$ sind bereits bekannt (vgl. Abschnitt 6.4). Nach Einführung von $\omega_0$ erhält man

Amplitudengang: $A(\omega) = \dfrac{K}{\sqrt{1 + [\frac{\omega}{\omega_0}]^2}}$

Phasengang: $\phi(\omega) = -\arctan \dfrac{\omega}{\omega_0}$

Für das nebenstehende BODE–Diagramm wurde $K = 1$ gewählt. Außerdem ist die Frequenz auf $\omega/\omega_0$ normiert.




**Approximation der Frequenzkennlinien:**

Asymptoten für $\omega \ll \omega_0$ :

$$A(\omega) \approx K \qquad \phi(\omega) \approx -\arctan 0 = 0$$

$$\lg A(\omega) \approx \lg K$$

Asymptoten für $\omega \gg \omega_0$ :

$$A(\omega) \approx K \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \qquad \phi(\omega) \approx -\arctan \infty = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lg A(\omega) \approx \lg K - \lg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad ,$$

Gerade mit Steigung $-1$, d.h. beim 10–fachen Wert von $\omega$ ist $A(\omega)$ auf den 10–ten Teil abgesunken, also um 20 dB gefallen. Man sagt: Die Amplitudenkennlinie *fällt mit* 20 dB *pro Dekade*.

Schnitt der beiden Asymptoten für $A(\omega)$:

Aus der Bedingung $\lg K = \lg K - \lg(\omega/\omega_0)$ folgt sofort $\omega = \omega_0$ . Man nennt daher $\omega_0$ die *Knickfrequenz* oder *Eckfrequenz*. Die exakten Werte für Betrag und Phase an der Stelle $\omega = \omega_0$ sind

$$A(\omega_0) = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad , \qquad \phi(\omega_0) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4} \quad ,$$

$$A(\omega_0)_{[dB]} = K_{[dB]} - 20 \cdot \lg\sqrt{2} \approx K_{[dB]} - 3 \text{ dB} \quad .$$

Die exakte Betragskennlinie liegt bei der Eckfrequenz $\omega_0$ um 3 dB unterhalb der Asymptoten.

- **$PT_2$–Glied:** $T_2^2 \cdot \ddot{y}(t) + T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$

  Bei besonderer Berücksichtigung *schwingungsfähiger* $PT_2$–Glieder schreibt man die Dgl. i.a. in der Form

  $$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K\omega_0^2 \cdot u(t) \quad .$$

  Für $0 \leq D < 1$ ist das Übertragungsglied schwingungsfähig.

  Frequenzgang: $$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \cdot 2D \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$$

  Amplitudengang: $$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

  Phasengang: $$\phi(\omega) = -\arctan \frac{2D\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

  **Approximation**

  1. Anfangsasymptote für $\omega \ll \omega_0$ :

     $A(\omega) \approx K$ $\qquad$ $\phi(\omega) \approx -\arctan 0 = 0$

  2. exakte Werte für $\omega = \omega_0$ :

     $A(\omega_0) = \frac{K}{2D}$ $\quad (> K \text{ für } D < 0,5)$ $\qquad$ $\phi(\omega_0) = -\arctan \infty = -\frac{\pi}{2}$

  3. Endasymptote für $\omega \gg \omega_0$ :

     $A(\omega) \approx K \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ $\qquad$ $\phi(\omega) \approx -\arctan 0 = -\pi$

     $\lg A(\omega) \approx \lg K - 2 \cdot \lg \frac{\omega}{\omega_0}$ $\qquad$ Gleichung einer Geraden mit Steigung -2 ; Endasymptote der Amplitudenkennlinie *fällt mit* 40 dB / *Dekade*.

  Die beiden Asymptoten schneiden sich bei $\omega = \omega_0$. Die Abweichung der exakten Betragskennlinie vom Verlauf der Asymptoten hängt vom Dämpfungsmaß $D$ ab.

  Für $\qquad D < \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0.707$

  hat die Amplitudenkennlinie ein Maximum; es liegt bei

  $$\omega_{max} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot D^2}$$

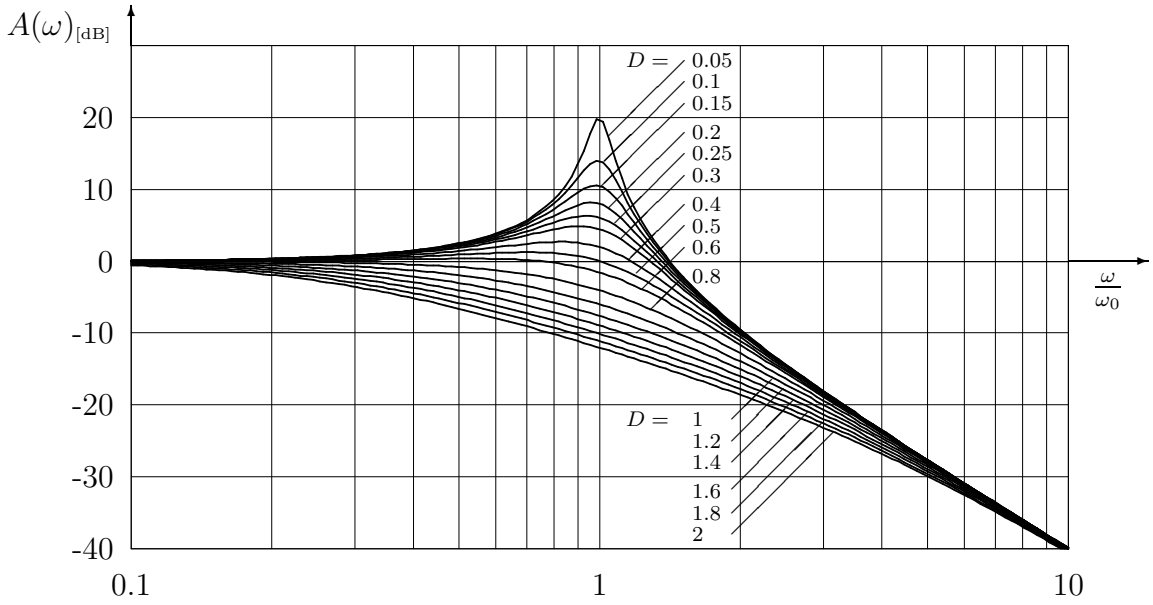
  und hat den Wert

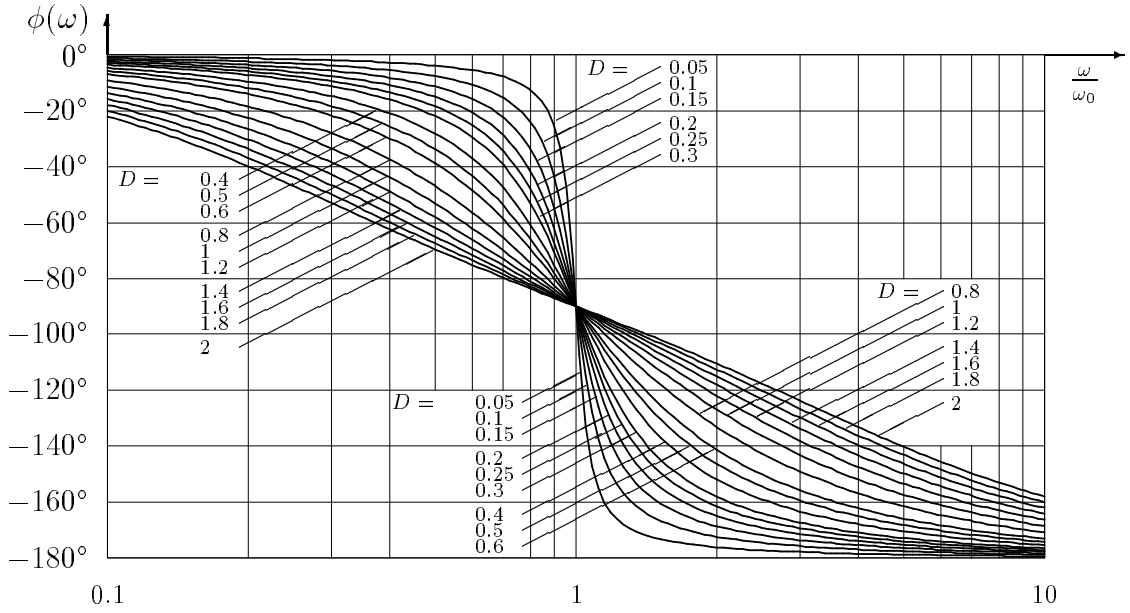
  $$A(\omega_{max}) = \frac{1}{2D \cdot \sqrt{1 - D^2}} \quad .$$

  Für $D = 0,5$ geht die Amplitudenkennlinie genau durch den Schnittpunkt der Asymptoten.

  Nachfolgend ist das BODE–Diagramm für $K = 1$ und verschiedene Dämpfungsmaße $D$ dargestellt.

Betragskennlinien und Phasenkennlinien des $PT_2$–Gliedes:



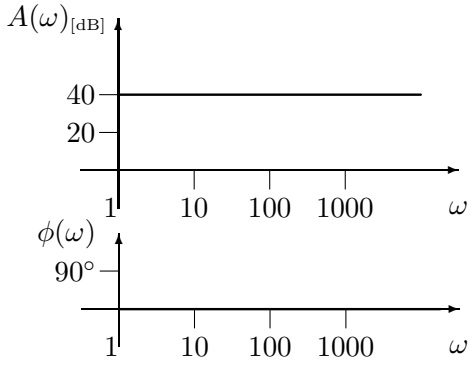

- **P–Glied:** $y(t) = K \cdot u(t)$

  Man entnimmt unmittelbar

  Amplitudengang: $A(\omega) = K$

  Phasengang: $\phi(\omega) = 0$

  Für das nebenstehende BODE–Diagramm wurde $G(j\omega) = 100$ gewählt.



- **D–Glied:** $y(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$

  Von Abschnitt 6.4 übernimmt man

  Amplitudengang: $A(\omega) = K_D \cdot \omega$

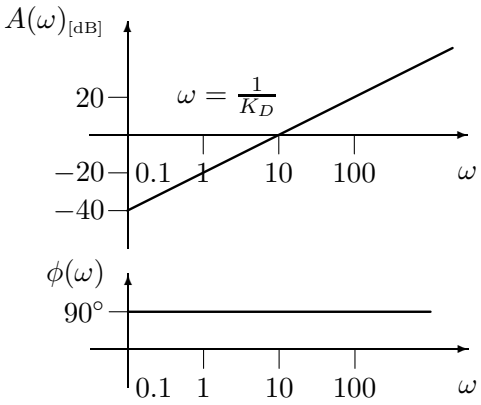
  Phasengang: $\phi(\omega) = +\frac{\pi}{2}$

  Daraus folgt die logarithmische Amplitudenkennlinie

  $$\lg A(\omega) = \lg K_D + \lg \omega \quad .$$

  Sie *steigt mit* 20dB*/Dekade*.

  Skizze für $G(j\omega) = 0.1 \cdot j\omega$ .




- **I–Glied:** $y(t) = K_I \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau$

  Von Abschnitt 6.4 übernimmt man

  Amplitudengang: $A(\omega) = \frac{K_I}{\omega}$

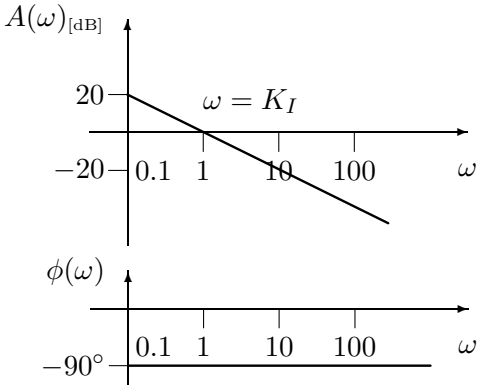
  Phasengang: $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

  Daraus folgt die logarithmische Amplitudenkennlinie

  $$\lg A(\omega) = \lg K_I - \lg \omega \quad .$$

  Sie *fällt mit* 20dB*/Dekade*.

  Skizze für $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ .




- **$\mathbf{T_t}$–Glied:** $y(t) = K \cdot u(t - T_t)$

  Von Abschnitt 6.4 übernimmt man

  Amplitudengang: $A(\omega) = K$

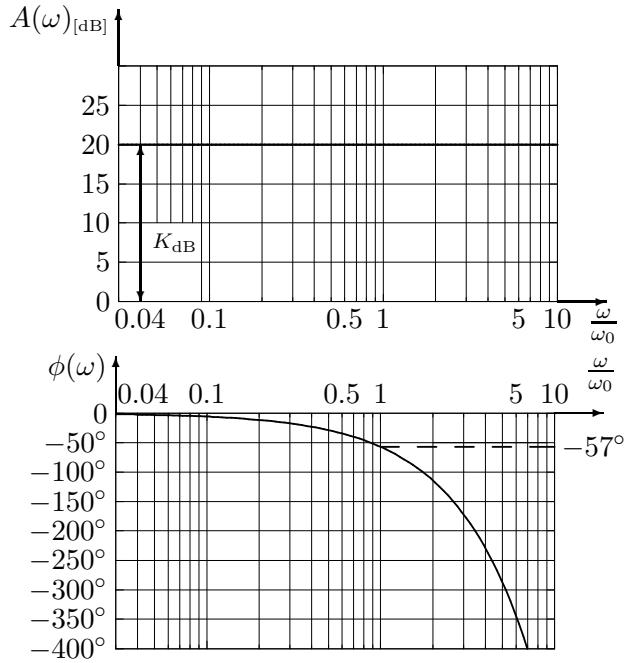
  Phasengang: $\phi(\omega) = -\omega T_t$

  In Grad: $\phi(\omega) = -\omega T_t \cdot \frac{180°}{\pi}$

  Beachte:
  Der Phasengang des Totzeitgliedes läßt sich nicht durch abgeknickte Geradenstücke approximieren.

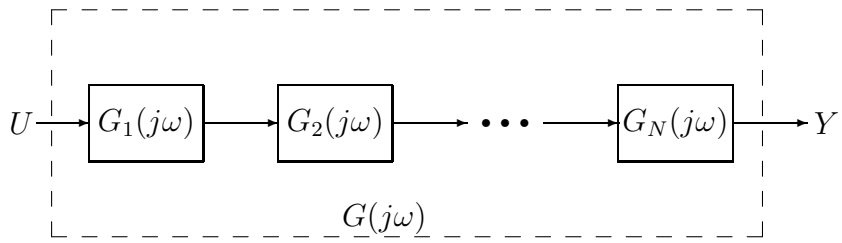
  Skizze für $G(j\omega) = 10 \cdot e^{-j\frac{\omega}{\omega_0}}$

  mit $\omega_0 = 1/T_t$ .



## 6.9 Vorteile der logarithmischen Frequenzkennlinien

### 1. Serienschaltung von Frequenzgängen




Aus $G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot \ldots \cdot G_N(j\omega)$ mit $G_k(j\omega) = A_k(\omega) \cdot e^{j\phi_k(\omega)}$ $(k = 1, \ldots, N)$ folgt

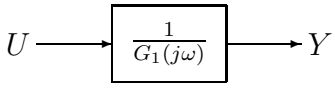
$$G(j\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdot \ldots \cdot A_N(\omega) \cdot e^{j[\phi_1(\omega)+\phi_2(\omega)+\ldots+\phi_N(\omega)]} \quad .$$

Damit ergeben sich Amplitudengang $A(\omega)$ und Phasengang $\phi(\omega)$ von $G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$ zu

$$A(\omega)_{[\mathrm{dB}]} = A_1(\omega)_{[\mathrm{dB}]} + A_2(\omega)_{[\mathrm{dB}]} + \ldots + A_N(\omega)_{[\mathrm{dB}]} \quad ,$$
$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \ldots + \phi_N(\omega) \quad .$$

**Ergebnis:**
Der Gesamtfrequenzgang einer Serienschaltung von Frequenzgängen ergibt sich durch Addition der Ordinaten der einzelnen logarithmischen Frequenzkennlinien.

### 2. Inversion eines Frequenzganges




Aus $G(j\omega) = \dfrac{1}{G_1(j\omega)}$ mit $G_1(j\omega) = A_1(\omega) \cdot e^{j \cdot \phi_1(\omega)}$

folgt $G(j\omega) = \dfrac{1}{A_1(\omega)} e^{-j \cdot \phi_1(\omega)}$ .

Damit ergeben sich

Amplitudengang: $A(\omega)_{[\mathrm{dB}]} = -A_1(\omega)_{[\mathrm{dB}]}$

Phasengang: $\phi(\omega) = -\phi_1(\omega)$

**Ergebnis:**
Die logarithmischen Frequenzkennlinien des inversen Frequenzganges ergeben sich durch Spiegelung an den Achsen $\lg A = 0$ (0–dB–Linie) und $\phi = 0$, d.h. an der $\omega$-Achse.

### 3. Approximation der logarithmischen Frequenzkennlinien

Infolge der gewählten Achseneinteilungen lassen sich die Frequenzkennlinien der meisten Systeme angenähert aus Geradenstücken zusammensetzen, wobei die Knickpunkte und Winkel in einfacher Weise mit den Beiwerten des Systems in Beziehung stehen.

## 4. BODE–Diagramme für zusammengesetzte Übertragungsfunktionen

Übertragungsfunktionen, die außer einer Totzeit nur rationale Terme enthalten, lassen sich darstellen in der Form

$$G(s)=\frac{V}{s^q}\cdot\frac{\left[1+\frac{s}{\omega_{Z1}}\right]\cdot\left[1+\frac{s}{\omega_{Z2}}\right]\cdot\ldots\cdot\left[1+\frac{2D_{Z1}}{\omega_{0Z1}}\,s+\frac{s^2}{\omega_{0Z1}^2}\right]\cdot\left[1+\frac{2D_{Z2}}{\omega_{0Z2}}\,s+\frac{s^2}{\omega_{0Z2}^2}\right]\cdot\ldots}{\left[1+\frac{s}{\omega_{N1}}\right]\cdot\left[1+\frac{s}{\omega_{N2}}\right]\cdot\ldots\cdot\left[1+\frac{2D_{N1}}{\omega_{0N1}}\,s+\frac{s^2}{\omega_{0N1}^2}\right]\cdot\left[1+\frac{2D_{N2}}{\omega_{0N2}}\,s+\frac{s^2}{\omega_{0N2}^2}\right]\cdot\ldots}\cdot e^{-sT_t}.$$

Alle Anteile sind multiplikativ verknüpft, was einer Serienschaltung entspricht. Man erhält das BODE–Diagramm für die gesamte Übertragungsfunktion also einfach durch Addition der Amplituden– und Phasengänge aller Anteile.

Bis auf die Klammerausdrücke 1. und 2. Ordnung im Zähler wurden die Frequenzkennlinien der anderen Terme im vorherigen Abschnitt angegeben. Die bisher noch nicht behandelten BODE–Diagramme für die Zählerausdrücke ergeben sich durch Spiegelung der Frequenzkennlinien des $PT_1$– bzw. $PT_2$–Gliedes.

Für das $PT_1$–Glied wird die Inversion an einem Beispiel gezeigt. Die Spiegelung liefert das PD–Glied.

**Beispiel:**

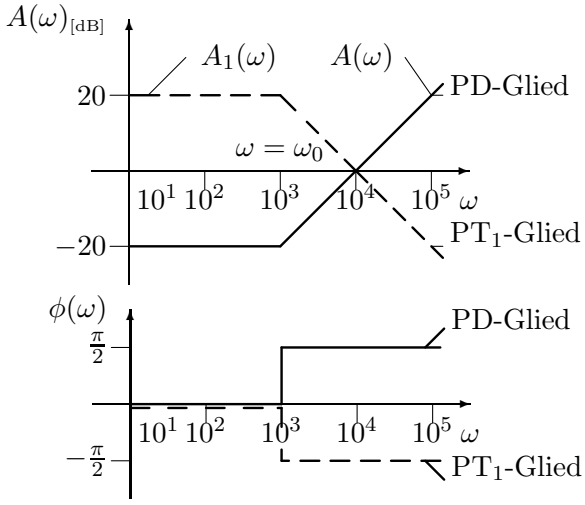
$PT_1$–Glied: ($K = 10$ , $\omega_0 = 10^3$)

$$G_1(j\omega) = \frac{10}{1 + j \cdot \frac{\omega}{10^3}}$$

Die Inversion liefert das PD–Glied:

$$G(j\omega) = \frac{1}{10} \cdot \left[1 + j \cdot \frac{\omega}{10^3}\right]$$

Nebenstehend ist die Approximation der Frequenzkennlinien skizziert.




## 5. Anmerkung

In einigen Fällen kann man mit dem Amplitudenverlauf allein auskommen. Dies ist bei Systemen der Fall, bei denen $\phi(\omega)$ aus $A(\omega)$ berechnet werden kann, z.B. beim $PT_1$–Glied:

$$\phi = -\arctan\sqrt{(K/A)^2 - 1}$$

Die sogenannten *Phasenminimumsysteme* (Minimalphasenglieder) gehören dazu.
Der Vorteil bei der meßtechnischen Erfassung des Frequenzganges besteht darin, daß man sich auf $A(\omega)$ beschränken kann.

**Beispiel für die Konstruktion des BODE–Diagramms eines Übertragungsgliedes mit gebrochen rationaler Übertragungsfunktion**

Es soll das BODE–Diagramm für ein Übertragungssystem, das nur reelle Pol– und Nullstellen besitzt, gezeichnet werden. Die Übertragungsfunktion sei vorgegeben durch

$$G(s) = K_1 \cdot \frac{(s+0.1)\cdot(s+2)}{s\cdot(s+5)\cdot(s+20)} \quad , \qquad K_1 = 890 \quad .$$

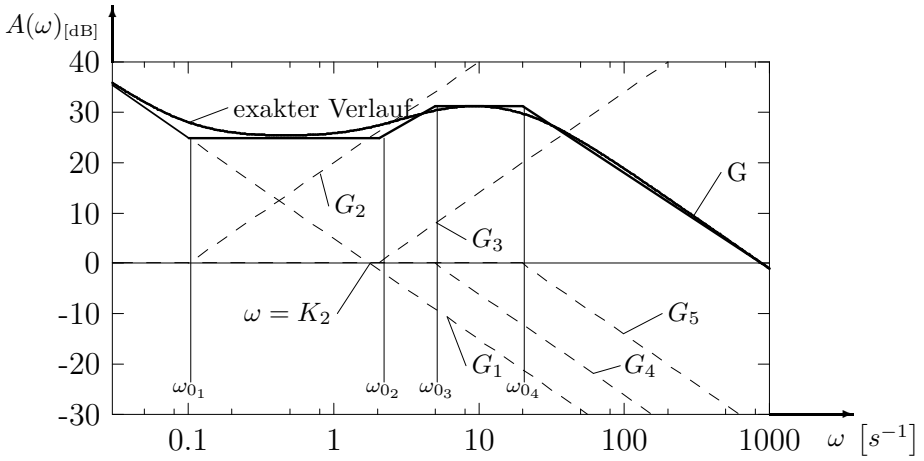
Zweckmäßigerweise wird $G(s)$ auf die Form

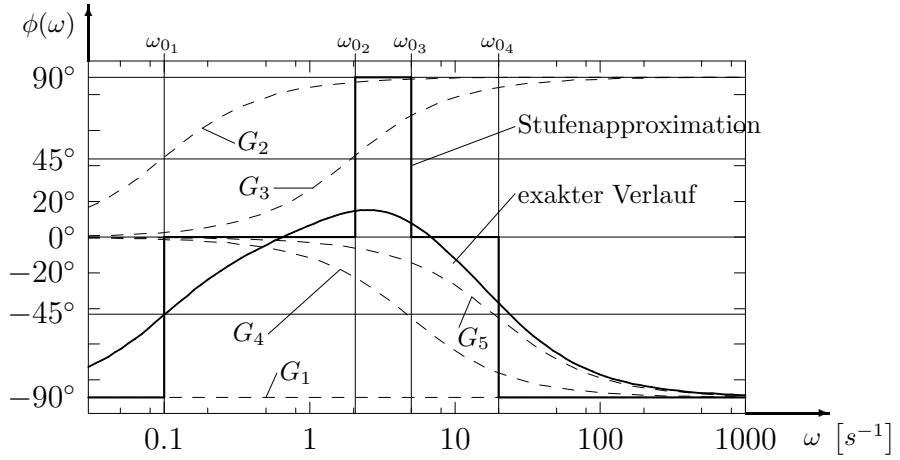
$$G(s) = K_2 \cdot \frac{(\frac{s}{0.1}+1)\cdot(\frac{s}{2}+1)}{s\cdot(\frac{s}{5}+1)\cdot(\frac{s}{20}+1)} \quad , \qquad K_2 = K_1/500 = 1.78$$

gebracht. Dieses System läßt sich nun in ein I–, zwei PD– und zwei $PT_1$–Glieder zerlegen:

$$G(s) = \underbrace{\frac{K_2}{s}}_{G_1(s)} \cdot \underbrace{(\frac{s}{0.1}+1)}_{G_2(s)} \cdot \underbrace{(\frac{s}{2}+1)}_{G_3(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{s}{5}+1}}_{G_4(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{s}{20}+1}}_{G_5(s)} \quad .$$

Das BODE–Diagramm kann jetzt durch Addition der BODE–Diagramme der Teilsysteme $G_1$ bis $G_5$ gewonnen werden.

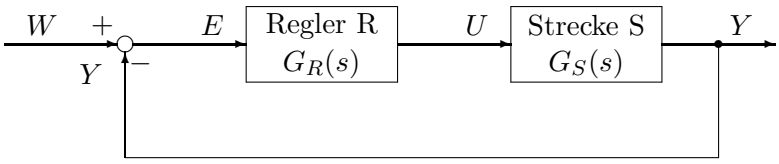


# 7 Führungs– und Störverhalten des Regelkreises

## 7.1 Führungsverhalten

**Fall A:** Standardregelkreis *ohne* Störungen




$W$ Sollwert, Führungsgröße
$Y$ Regelgröße
$E$ Regelabweichung
$U$ Stellgröße

Es sei $G_R(s)$ die Übertragungsfunktion des Reglers R,

$G_S(s)$ die Übertragungsfunktion der Strecke S

Gleichung des geschlossenen Regelkreises im Bildbereich (vgl. Kreisschaltung):

$$Y(s) = G_W(s) \cdot W(s), \qquad \text{wobei} \quad G_W(s) := \frac{G_R(s)\, G_S(s)}{1 + G_R(s)\, G_S(s)}$$

Man bezeichnet $G_W(s)$ als *Führungsübertragungsfunktion*.

**Ziel der Regelung:**

Die Regelgröße $y(t)$ soll möglichst gut mit dem Sollwert $w(t)$ übereinstimmen.
Das bedeutet

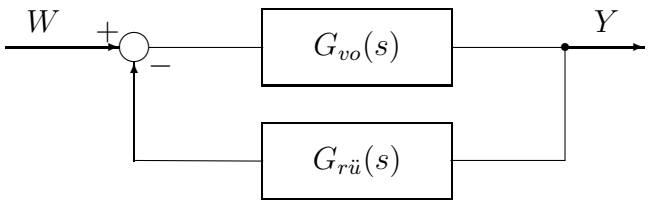
$$Y(s) \stackrel{!}{=} W(s) \qquad \text{und daraus folgt} \qquad G_W(s) \stackrel{!}{=} 1 \quad .$$

Aus der Definition für $G_W(s)$ folgt damit für den Regler

$$G_R(s) = \frac{G_W(s)}{G_S(s) \cdot [1 - G_W(s)]} \quad .$$

Die theoretische Forderung ist also ein Regler mit unendlich großer Verstärkung. Beim praktischen Vorgehen ist ein technisch sinnvoller Kompromiß notwendig.

**Fall B:** Allgemeiner Regelkreis *ohne* Störungen



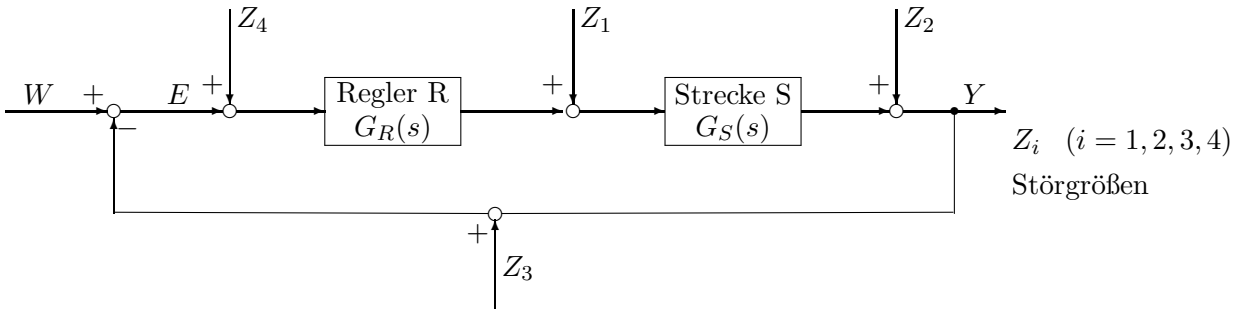

Die (Führungs–) Übertragungsfunktion lautet

$$G_W(s) = \frac{G_{vo}(s)}{1 + G_{vo}(s) \cdot G_{rü}(s)} = \frac{G_{vo}(s)}{1 + G_0(s)} \qquad \text{mit} \quad G_0(s) = G_{vo}(s) \cdot G_{rü}(s) \quad .$$

Bezeichnungen: $G_{vo}(s)$ Übertragungsfunktion des *Vorwärtszweiges*,
$G_{rü}(s)$ Übertragungsfunktion des *Rückwärtszweiges*.

## 7.2 Störverhalten

**Fall C:** Standardregelkreis *mit* Störungen




Gleichung des geschlossenen Regelkreises:
Da es sich bei Strecke und Regler um lineare Übertragungsglieder handelt, gilt das Superpositionsprinzip. Man erhält dann (bei $G_R(s)$ und $G_S(s)$ sind die Argumente weggelassen)

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_R \cdot G_S}{1 + G_R \cdot G_S}}_{\substack{G_W(s) \\ \text{Führungsüber-} \\ \text{tragungsfunktion}}} \cdot W(s) + \underbrace{\frac{G_S}{1 + G_R \cdot G_S}}_{G_{Z_1}(s)} \cdot Z_1(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + G_R \cdot G_S}}_{G_{Z_2}(s)} \cdot Z_2(s)$$

$$+ \underbrace{\frac{-G_R \cdot G_S}{1 + G_R \cdot G_S}}_{G_{Z_3}(s)} \cdot Z_3(s) + \underbrace{\frac{G_R \cdot G_S}{1 + G_R \cdot G_S}}_{G_{Z_4}(s)} \cdot Z_4(s) \quad .$$

Bezeichnung: $G_{Z_i}(s)(i = 1, 2, 3, 4)$ heißen *Störungsübertragungsfunktionen*.

**Ziel der Regelung:**

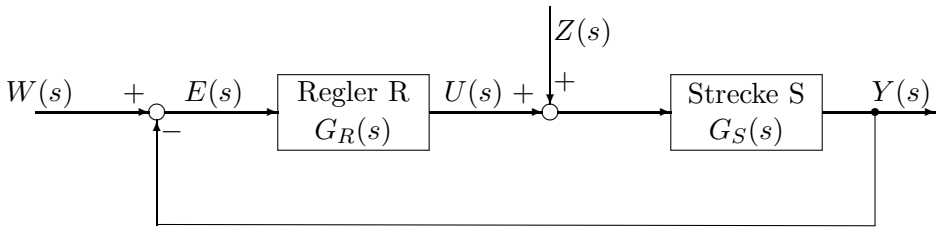
Die Störeinflüsse sollen ausgeschaltet werden, d.h. $G_{Z_i}(s) \stackrel{!}{=} 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$. Die Störungen $i = 1, 2$ führen auf die Forderung, daß ein Regler mit unendlich großer Verstärkung nötig wäre. Dies ist im Einklang mit Fall A. Die Störungen $i = 3, 4$ führen auf die Forderung, daß ein Regler mit Verstärkung Null nötig wäre. Dies ist nicht erfüllbar und auch wenig sinnvoll.

Ergebnis:
- Regelungen sind möglichst so zu konzipieren, daß keine Störungen $z_3(t)$ und $z_4(t)$ auftreten, da diese grundsätzlich nicht ausgeregelt werden können.
- Störungen $z_1(t)$ und $z_2(t)$ sind durch die Forderung an die Führungsübertragungsfunktion mit erfaßt.

**Fall D:** Standardregelkreis mit *einer* Störgröße

Bei dieser häufig getroffenen Annahme wirken Stellgröße und Störgröße gemeinsam auf die Strecke ein.

Blockschaltbild:




Gleichung des geschlossenen Regelkreises (im Bildbereich) :

$$Y(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \cdot W(s) + \frac{G_S(s)}{1+G_0(s)} \cdot Z(s) \qquad \text{wobei} \qquad G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

Für $Z(s) = 0$ ergibt sich das *Führungsverhalten*

$$Y(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \cdot W(s) \quad ,$$

für $W(s) = 0$ ergibt sich das *Störverhalten*

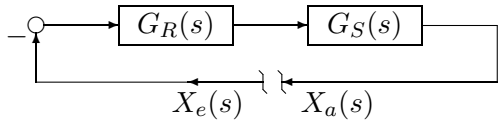
$$Y(s) = \frac{G_S(s)}{1+G_0(s)} \cdot Z(s) \quad .$$

Der gemeinsame Faktor von Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ und Störübertragungsfunktion $G_Z(s)$ heißt *dynamischer Regelfaktor* $R(s)$

$$R(s) := \frac{1}{1+G_0(s)} \ .$$

**Aufgeschnittener (offener) Regelkreis:**

Für $W(s) = 0$ und $Z(s) = 0$ wird der Regelkreis an einer beliebigen Stelle aufgeschnitten.




Für das Übertragungsverhalten erhält man

$$X_a(s) = -G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot X_e(s) \ .$$

Als "Übertragungsfunktion des offenen Kreises" erhält man demnach

$$G_{\text{offen}}(s) = -G_0(s) \ .$$

Dennoch wird meist $+G_0(s)$ als Übertragungsfunktion des offenen Kreises bezeichnet.

## 7.3 Statische Regelabweichung

Für die Regelabweichung gilt im Bildbereich

$$E(s) = W(s) - Y(s) = W(s) - \left[\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \cdot W(s) + \frac{G_S(s)}{1+G_0(s)} \cdot Z(s)\right] ,$$

also

$$E(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot W(s) - \frac{G_S(s)}{1+G_0(s)} \cdot Z(s) \ .$$

Als *statische Regelabweichung* bezeichnet man

$$e_\infty := \lim_{t\to\infty} e(t) \ .$$

Als *bleibende Regelabweichung* bezeichnet man einen Wert

$$e_\infty = const. \neq 0 \ .$$

Falls der Grenzwert $e_\infty$ tatsächlich existiert, kann er mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation berechnet werden:

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s)$$

Wir betrachten nun

| | | | |
|---|---|---|---|
| Regler ohne I-Anteil: | $G_R(s) = K_R \cdot \frac{1+\ldots}{1+\ldots}$ | $\rightarrow$ | $G_R(0) = K_R$ |
| Regler mit I-Anteil: | $G_R(s) = \frac{K_R}{s} \cdot \frac{1+\ldots}{1+\ldots}$ | $\rightarrow$ | $G_R(0) = \infty$ |
| Strecken ohne I-Anteil: | $G_S(s) = K_S \cdot \frac{1+\ldots}{1+\ldots} e^{-sT_t}$ | $\rightarrow$ | $G_S(0) = K_S$ |
| Strecken mit I-Anteil: | $G_S(s) = \frac{K_S}{s} \cdot \frac{1+\ldots}{1+\ldots} e^{-sT_t}$ | $\rightarrow$ | $G_S(0) = \infty$ |

Wir erhalten bei

**Führungssprung** $w(t) = w_0 \cdot \sigma(t)$:

$W(s) = \frac{w_0}{s}$ ; $Z(s) \equiv 0$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{w_0}{1+G_0(s)} = \frac{w_0}{1+G_R(0)\cdot G_S(0)}$$

**Sprungförmige Störung** $z(t) = z_0 \cdot \sigma(t)$:

$Z(s) = \frac{z_0}{s}$ ; $W(s) \equiv 0$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{-G_S(s)\cdot z_0}{1+G_R(s)\cdot G_S(s)} = \frac{-z_0}{\frac{1}{G_S(0)} + G_R(0)}$$

**Ergebnisse:** ($K_0 := K_R \cdot K_S$)

$e_\infty = 0$ falls I-Anteil im offenen Kreis,

$e_\infty = \frac{w_0}{1+K_0}$ falls kein I-Anteil im offenen Kreis.

$e_\infty = 0$ für Regler mit I-Anteil,

$e_\infty = \frac{-K_S \cdot z_0}{1+K_0}$ für Regler ohne I-Anteil und Strecke ohne I-Anteil,

$e_\infty = \frac{-z_0}{K_R}$ für Regler ohne I-Anteil und Strecke mit I-Anteil.

## 7.4 Beispiel für das Störverhalten eines Regelkreises

Für die Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{K_S}{(1 + T \cdot s)^4}$$

sollen verschiedene Reglertypen untersucht werden. Der Regler wird als PID–Regler mit der Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = K_R \left[1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right]$$

angesetzt. Sämtliche betrachteten Sonderfälle ergeben sich daraus.

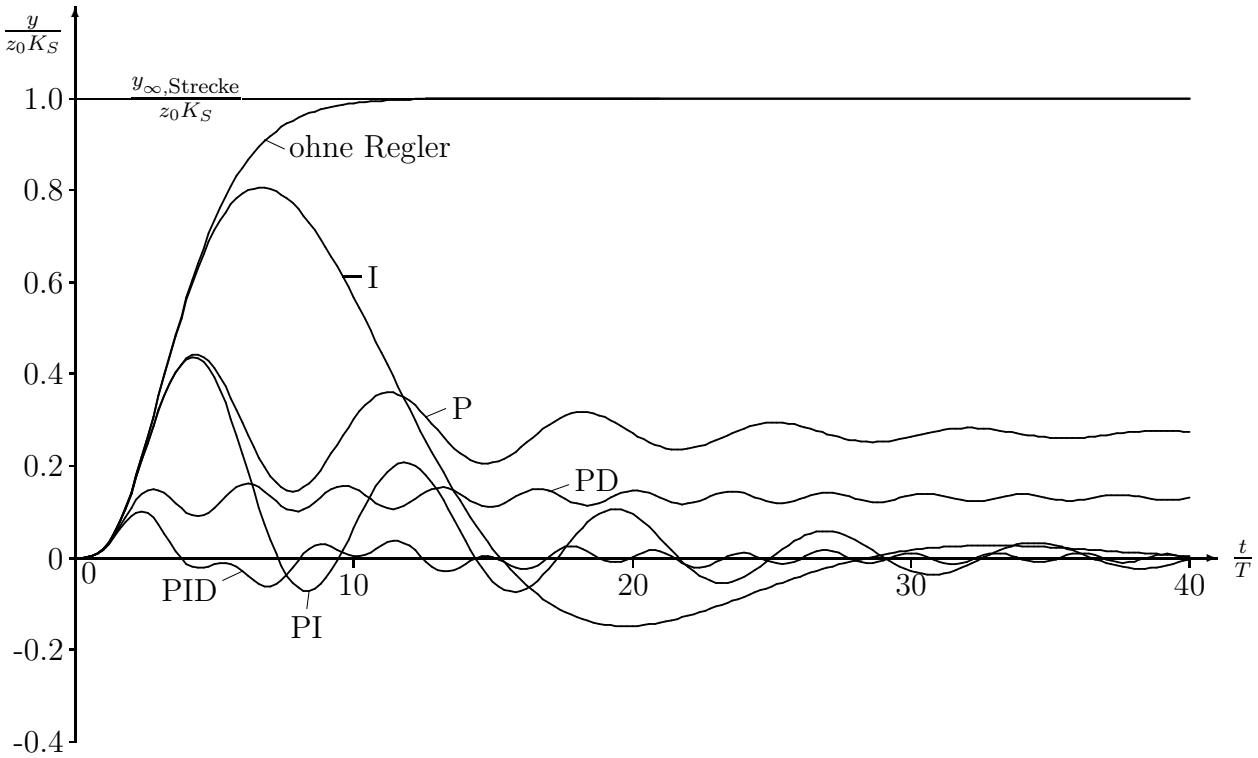
Mit den Ausdrücken für $G_S(s)$ und $G_R(s)$ erhält man für das Störverhalten bei *sprungförmiger Störung* $z(t) = z_0 \cdot \sigma(t)$:

$$Y(s) = \frac{K_S \cdot z_0}{s(1 + T \cdot s)^4 + K_R K_S(\frac{1}{T_I} + s + T_D \cdot s^2)}$$

Nachfolgend ist für diesen Standardregelkreis mit einer Störgröße das Störverhalten der normierten Regelgröße für die verschiedenen Regler dargestellt.

**Ergebnisse:**

| Regler | $K_{R\,opt}$ | $\frac{T_{I\,opt}}{4T}$ | $\frac{T_{D\,opt}}{4T}$ | $\frac{y_{max}}{z_0 K_S}$ | $\frac{t_{3\%}}{T}$ | $\frac{e_\infty}{z_0 K_S}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| PID | 5,57 | 0,15 | 0,67 | 0,11 | 14 | 0 |
| PI | 2,45 | 1,38 | - | 0,44 | 36 | 0 |
| PD | 6,60 | - | 0,34 | 0,15 | 8 | -0,13 |
| P | 2,68 | - | - | 0,45 | 26 | -0,27 |
| I | - | 0,88 $K_S$ | - | 0,79 | 42 | 0 |



# 8 Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Wir haben bereits gesehen, daß die Stabilität eines Regelkreises durch den Nenner $N(s)$ seiner Übertragungsfunktion bestimmt wird. Aus der charakteristischen Gleichung $N(s) = 0$ folgen die über die Stabilität entscheidenden Wurzeln.

Für den hier betrachteten geschlossenen Regelkreis lautet die charakteristische Gleichung

$$1 + G_0(s) = 0 \quad ,$$

wobei $1 + G_0(s)$ im allgemeinen selbst wieder ein Bruch ist. Daraus folgt für den Standardregelkreis

$$1 + G_R(s) \cdot G_S(s) = 0$$

und für den allgemeinen Regelkreis (Abschnitt 7.1, Fall B)

$$1 + G_{vo}(s) \cdot G_{r\ddot{u}}(s) = 0 \quad .$$

Die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $G_0(s)$ ist von der Form

$$G_0(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} \cdot e^{-s \cdot T_t} \quad .$$

Nach Einsetzen in die charakteristische Gleichung erhält man

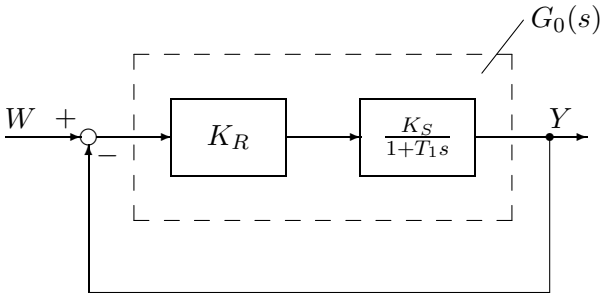
$$1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} \cdot e^{-s \cdot T_t} = 0 \quad .$$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Kreises erhält man also aus der Gleichung

$$N_0(s) + Z_0(s) \cdot e^{-s \cdot T_t} = 0 \quad .$$

Diese transzendente Gleichung ist im allgemeinen nur numerisch zu lösen. Enthält der Regelkreis keine Totzeit, so kann der geschlossene Kreis z.B. mit Hilfe des HURWITZ–Kriteriums untersucht werden, das dann auf das Polynom $N_g(s) = N_0(s) + Z_0(s)$ anzuwenden ist.

**Beispiel:**




$$G_0(s) = \frac{K_0}{1 + T_1 \cdot s} \qquad \text{mit} \quad K_0 := K_R \cdot K_S$$

Charakteristische Gleichung zur Stabilitätsuntersuchung:

$$N_0(s) + Z_0(s) = 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{T_1}_{a_1} \cdot s + \underbrace{1 + K_0}_{a_0} = 0$$

Wir betrachten im folgenden den *Standardregelkreis* Fall D mit dem Sollwert $w(t) = 0$ und der Störgröße $z(t) = 0$.

**Ziel:** Aus dem Verlauf der Ortskurve des *offenen* Regelkreises soll eine Stabilitätsaussage für den *geschlossenen* Regelkreis gewonnen werden.

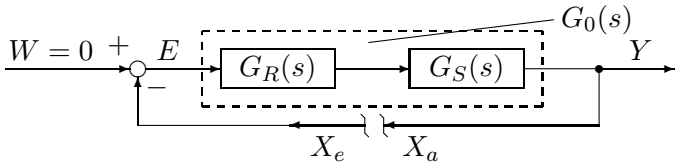
## 8.1 Bestimmung der Stabilitätsgrenze

Annahme: Der geschlossene Regelkreis befinde sich gerade an der Stabilitätsgrenze. (Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises besitzt Pole auf der imaginären Achse der $s$–Ebene.)

Folgerung: Der geschlossene Kreis führt dann ungedämpfte Schwingungen aus. Für diesen Fall ist aber der Frequenzgang erklärt.

Vorgehen:

(1) Aufschneiden des Standardregelkreises




(2) Nach dem Aufschneiden wird die rechts ankommende Dauerschwingung $x_a(t)$ links wieder künstlich eingespeist, so daß $x_e(t) = x_a(t)$ gilt. Das Aufschneiden hat also keinen Einfluß auf die im Kreis ablaufende Dauerschwingung; deren Frequenz sei $\omega = \omega_k$ .

(3) Für die Bildfunktionen $X_e(s)$ und $X_a(s)$ gilt mit $s = j\omega$ und $\omega = \omega_k$ :

$$X_e(j\omega_k) = X_a(j\omega_k)$$

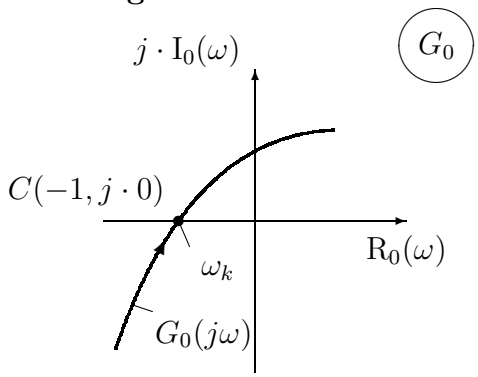
(4) Für das Übertragungsverhalten erhält man $X_a(s) = -G_0(s) \cdot X_e(s)$ . Mit $s = j\omega_k$ ergibt sich: $X_a(j\omega_k) = -G_0(j\omega_k) \cdot X_e(j\omega_k)$ .

(5) Aus (3) und (4) folgt die für die Stabilitätsgrenze geltende wichtige Beziehung:

$$G_0(j\omega) = -1 \ .$$

Bemerkung: Diese Beziehung folgt auch unmittelbar aus der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises $1 + G_0(s) = 0$ für $s = j\omega_k$ .

**Zwischenergebnis:**




Geht die *Ortskurve* des Frequenzganges des *offenen Regelkreises* durch den Punkt $C(-1, j \cdot 0)$ der $G_0$–Ebene, so führt der *geschlossene Kreis* an dieser Stelle Dauerschwingungen mit der Frequenz $\omega = \omega_k$ aus.

Der Punkt $C$ heißt *kritischer Punkt*.

## 8.2 NYQUIST–Kriterium

**Stabilitätsuntersuchung mit Hilfe von Ortskurven**

Aus dem vorherigen Zwischenergebnis läßt sich ein sehr handliches Stabilitätskriterium ableiten, das *auch für Systeme mit Totzeit* gilt. Es ist dies das Stabilitätskriterium von NYQUIST (1932). Ohne Beweis sei die für praktische Fälle meist ausreichende spezielle Form dieses Kriteriums von NYQUIST mitgeteilt.

**Stabilitätskriterium von NYQUIST** (spezielle Form)

Voraussetzungen:

- Die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $G_0(s)$ sei von der Form

$$G_0(s) = \frac{V}{s^q} \cdot \frac{1 + \ldots}{1 + \ldots} \cdot e^{-s \cdot T_t} = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} \cdot e^{-s \cdot T_t}$$

  mit $V > 0 \quad , \quad T_t \geq 0 \quad , \quad q = 0, 1, 2$ und Grad $Z_0(s) <$ Grad $N_0(s) \quad .$

- $G_0(s)$ besitze außer einem einfachen ($q = 1$) oder zweifachen ($q = 2$) Pol im Ursprung nur Pole links der imaginären Achse der $s$–Ebene.

- $Z_0(s)$ und $N_0(s)$ besitzen keine gemeinsame Wurzel.

  Anmerkung:

$$\text{Für} \left\{ \begin{array}{c} q = 0 \\ q = 1 \\ q = 2 \end{array} \right\} \text{ besitzt der offene Kreis } \left\{ \begin{array}{c} \text{P–Verhalten} \\ \text{I–Verhalten} \\ \text{Doppel–I–Verhalten} \end{array} \right\}$$

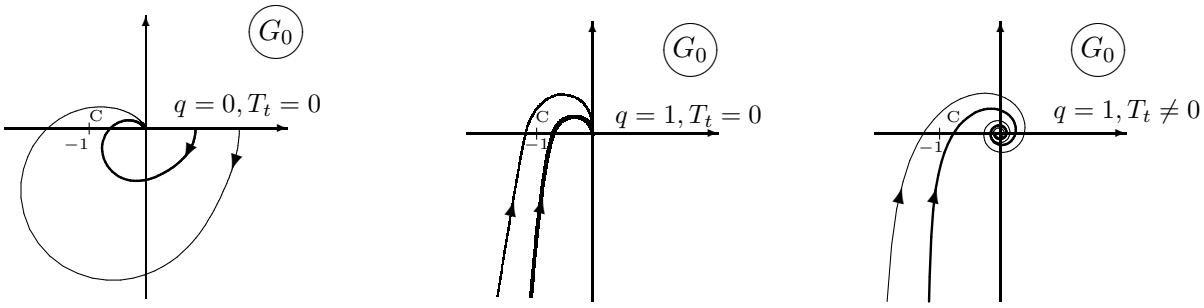
**Kriterium:**

- Der geschlossene Regelkreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Ortskurve $G_0(j\omega) \quad (0 \leq \omega < \infty)$ des offenen Kreises den Punkt $C(-1, j \cdot 0)$ der $G_0$–Ebene in Richtung wachsender Frequenzen gesehen links liegen läßt.

- Diese spezielle Form des NYQUIST–Kriteriums heißt auch *Linke–Hand–Regel*.

- Läßt die Ortskurve den kritischen Punkt $C$ rechts liegen, so ist der geschlossene Regelkreis instabil.

**Beispiel 1:** $PT_3$–Glied **Beispiel 2:** $IT_2$–Glied **Beispiel 3:** $IT_t$–Glied



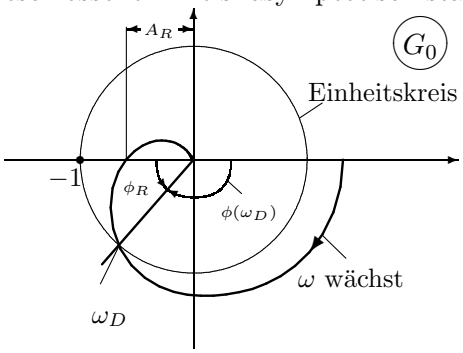

asymptotisch stabil

instabil

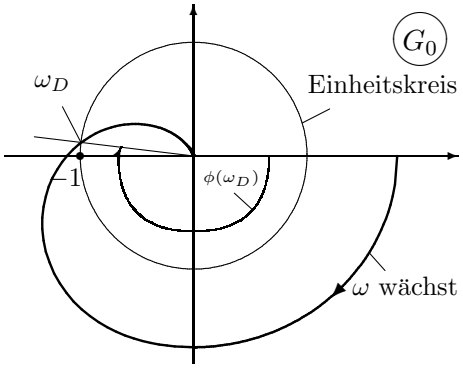
## NYQUIST–Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung

Ausgangspunkt ist das NYQUIST–Kriterium in der Ortskurvendarstellung gemäß Beispiel 1 von Abschnitt 8.2.

Geschlossener Kreis: asymptotisch stabil

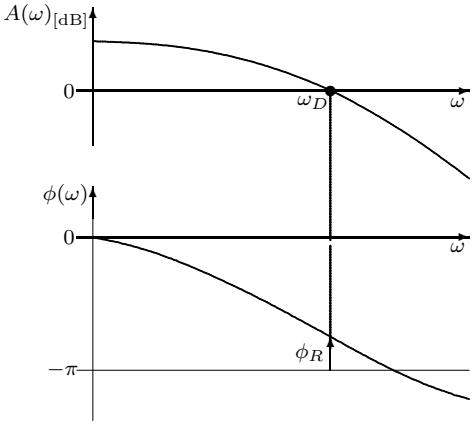


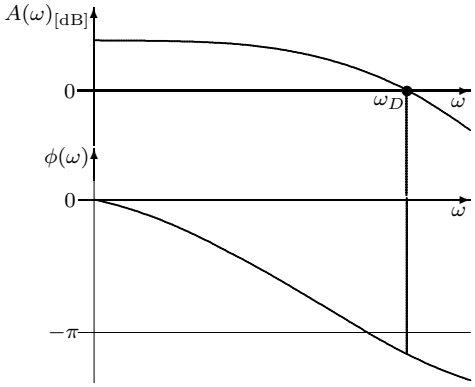

Geschlossener Kreis: instabil




Es wird angenommen, daß die Ortskurve des offenen Kreises den Einheitskreis nur einmal schneidet (dies ist in der Praxis der weitaus häufigste Fall), und zwar bei der sog. *Durchtrittsfrequenz* $\omega_D$.

Frequenzkennlinien zu den beiden obigen Ortskurven:




**Kriterium:**

- Im asymptotisch stabilen Fall ist bei $\omega = \omega_D$ die Phase $\phi(\omega_D)$ noch nicht auf $\phi = -\pi$ abgesunken. (*Oder*: Im asymptotisch stabilen Fall ist bei $\omega$–Werten, bei denen $\phi(\omega) \leq -\pi$ ist, die Amplitude $A(\omega) < 1$ .)
- Im instabilen Fall ist bei $\omega = \omega_D$ die Phase $\phi(\omega_D)$ bereits unter $\phi = -\pi$ abgesunken. (*Oder*: Im instabilen Fall ist bei $\omega$–Werten, bei denen $\phi(\omega) \leq -\pi$ ist, die Amplitude $A(\omega) > 1$ .)

**Phasenreserve, Amplitudenreserve und Durchtrittsfrequenz**

*Phasenreserve* $\phi_R$ und *Amplitudenreserve* $a_R = 1/A_R$ sind Maße für die Stabilitätsgüte eines Regelkreises. Übliche Werte sind

$$40^\circ \leq \phi_R \leq 70^\circ \quad , \quad 2,5 \leq a_R \leq 10 \quad .$$

Die *Durchtrittsfrequenz* $\omega_D$ ist ein Maß für die Schnelligkeit der Regelung. Je größer $\omega_D$ ist, um so schneller ist der Zeitvorgang.
Der Amplitudenrand $A_R$ ist die Amplitudenverstärkung bei der Phase $\phi = -\pi$ . Den oben angegebenen üblichen Werten für $a_R$ entspricht

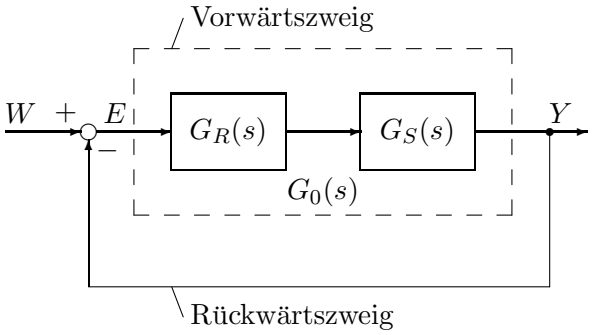
$$\begin{aligned} & 0,1 \leq \quad A_R \quad \leq 0,4 \\ \text{bzw.} \quad & -20\mathrm{dB} \leq A_{R[\mathrm{dB}]} \leq -8\mathrm{dB} \quad . \end{aligned}$$

# 9 Frequenzkennlinienverfahren für den Reglerentwurf

In der Literatur wird dieses Verfahren auch als *dynamische Korrektur von Regelkreisen* bezeichnet.

Die folgenden Betrachtungen gelten sowohl für das Führungsverhalten wie für das Störverhalten des Regelkreises. Hier soll das *Führungsverhalten* für den Standardregelkreis näher untersucht werden.

Standardregelkreis ohne Störgröße:




Die Ausdrücke für die Regelgröße $y(t)$ und die Regelabweichung $e(t)$ lauten im Bildbereich:

$$Y(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \cdot W(s) \quad , \qquad E(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot W(s)$$

Setzt sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $G_0(s)$ nur aus in Serie geschalteten rationalen Gliedern von höchstens 2. Ordnung und einem Totzeitglied zusammen, so daß gilt

$$G_0(s) = \frac{V}{s^q} \cdot \frac{\left[1+\frac{s}{\omega_{Z1}}\right]\cdot\left[1+\frac{s}{\omega_{Z2}}\right]\cdot \ldots \cdot\left[1+\frac{2D_{Z1}}{\omega_{0Z1}}\,s+\frac{s^2}{\omega_{0Z1}^2}\right]\cdot\left[1+\frac{2D_{Z2}}{\omega_{0Z2}}\,s+\frac{s^2}{\omega_{0Z2}^2}\right]\cdot \ldots}{\left[1+\frac{s}{\omega_{N1}}\right]\cdot\left[1+\frac{s}{\omega_{N2}}\right]\cdot \ldots \cdot\left[1+\frac{2D_{N1}}{\omega_{0N1}}\,s+\frac{s^2}{\omega_{0N1}^2}\right]\cdot\left[1+\frac{2D_{N2}}{\omega_{0N2}}\,s+\frac{s^2}{\omega_{0N2}^2}\right]\cdot \ldots} \cdot e^{-sT_t}$$

$$= \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} \cdot e^{-s\cdot T_t} \quad , \quad V>0 \quad , \quad q=0,1,2 \quad , \quad T_t \geq 0 \quad , \text{Grad } Z_0(s) < \text{Grad } N_0(s) \quad ,$$

so lassen sich die logarithmischen Frequenzkennlinien des *offenen* Kreises leicht konstruieren. Meist genügt die Approximation der Frequenzkennlinien.

Außerdem kann dieses Modell auf dem Analog–/Digitalrechner gut nachgebildet und der Frequenzgang aufgezeichnet werden.

Die am Anfang der Vorlesung genannten Forderungen an eine Regelung sollen jetzt weiter präzisiert und als *Entwurfskriterium im Frequenzbereich* herangezogen werden. Dabei zielt das Entwurfsprinzip auf eine praktische Realisierbarkeit ab, wodurch sich gewisse Abweichungen von der scheinbar besten Lösung ergeben.

## 9.1 Forderungen an den geschlossenen Kreis

**Forderung 1:** *Der Regelkreis muß stabil sein.*

Diese Forderung ist selbstverständlich und bereits hinreichend diskutiert.

**Forderung 2:** *Der Regelkreis muß eine bestimmte stationäre Genauigkeit aufweisen.*

Mit der angegebenen Übertragungsfunktion des offenen Kreises $G_0(s)$ folgt für die statische Regelabweichung $e_\infty$ bei einem Führungssprung $w(t) = \sigma(t)$ wegen $\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = 1/s$ :

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot \frac{1}{1+G_0(s)}\cdot\frac{1}{s} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+V} & \text{für } q=0 \\ & \text{(P–Verhalten)} \\ 0 & \text{für } q=1,2 \\ & \text{(I-bzw. Doppel-} \\ & \text{I-Verhalten)} \end{cases}$$

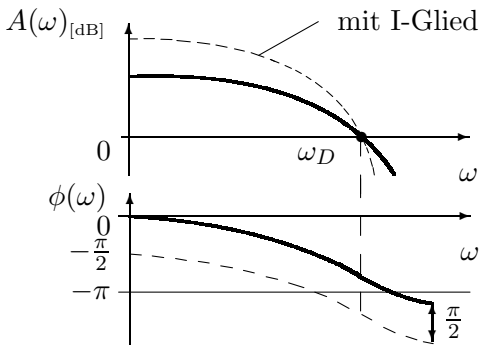
**Ergebnis:**

Hinreichende stationäre Genauigkeit des Führungsverhaltens ist nur dann gewährleistet, wenn der offene Kreis ein I–Glied enthält oder seine Kreisverstärkung $V$ genügend groß ist.

Folgerungen aus der 2. Forderung:
Für typische Frequenzkennlinien des nicht korrigierten offenen Kreises (durchgezogene Kurven) ist das Verhalten des geschlossenen Kreises bei Einfügen eines I–Gliedes bzw. bei Erhöhung der Kreisverstärkung $V$ im folgenden skizziert.

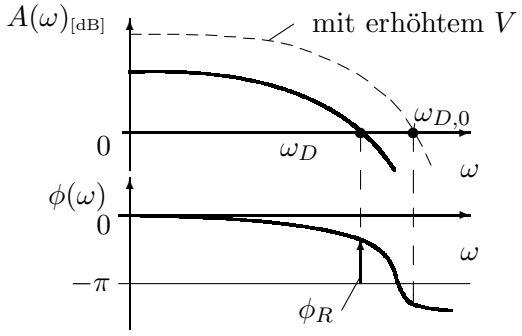
**(1) Einfügen eines I–Gliedes:**

- Die Phase wird um $-\pi/2$ gesenkt.
- Das Absenken der Phase bringt eine Tendenz zur Instabilität mit sich.
  (Im Beispiel sinkt die Phase unter $\phi = -\pi$ ab, wenn gleiches $\omega_D$ verlangt ist.)




**(2) Erhöhung der Kreisverstärkung $V$:**

- Die Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ wird vergrößert.
- Die Vergrößerung der Durchtrittsfrequenz bringt ebenfalls eine Tendenz zur Instabilität mit sich.
  (Im Beispiel ist die Phase bei $\omega_{D,0}$ unter $\phi = -\pi$ abgesunken.)



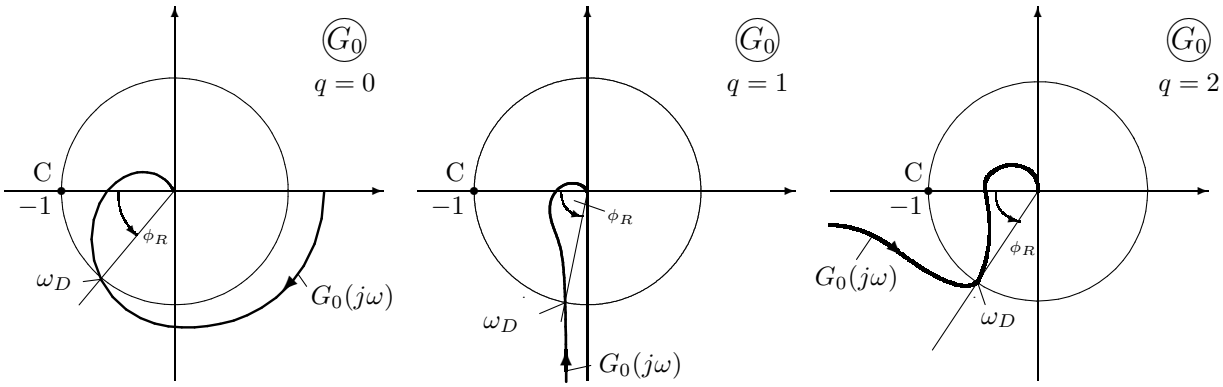

Sowohl das Einfügen eines I–Gliedes als auch die Erhöhung der Kreisverstärkung $V$ im offenen Kreis bringen eine Tendenz zur Instabilität des geschlossenen Kreises mit sich. Die Forderungen 1 und 2 sind gegensätzlich. Ein Kompromiß ist notwendig.

Der zuvor erwähnte Kompromiß aus den ersten beiden Forderungen muß die Stabilität des geschlossenen Regelkreises sicherstellen. Darüber hinaus verlangen wir aber noch eine gewisse *Stabilitätsgüte*. Sie kommt in zwei weiteren Forderungen, die anschließend genannt sind, zum Ausdruck. Beim Reglerentwurf sollen diese weiteren Forderungen gleich mit eingearbeitet werden.

**Forderung 3:** *Der Regelkreis muß genügend gedämpft sein.*

Frage: Wie kann man aus den Frequenzkennlinien des offenen Kreises auf die Dämpfung des geschlossenen Kreises schließen?

Die Antwort wurde bei der Diskussion des NYQUIST–Kriteriums in der Frequenzkennliniendarstellung gegeben: Der Einschwingvorgang des geschlossenen Kreises wird hinreichend gedämpft verlaufen, wenn die Ortskurve des offenen Kreises $G_0(j\omega)$ nur weit genug vom kritischen Punkt $C(-1\ ,\ j\cdot 0)$ entfernt ist. Dafür ist aber die Phasenreserve $\phi_R$ ein geeignetes Maß.




Damit die Ortskurve aber außerhalb und innerhalb des Einheitskreises nicht zu nahe an den kritischen Punkt $C$ heranrückt, wird verlangt, daß der Betrag $|G_0(j\omega)|$ bis zur Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ und noch darüber hinaus möglichst rasch abnimmt. Man gelangt so zu der folgenden Regel.

**Regel:**

(1) Es sollen die Voraussetzungen des NYQUIST–Kriteriums gelten.

(2) Die Amplitudenkennlinie von $G_0(j\omega)$ soll in einer nicht zu kleinen Umgebung der Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ ein Gefälle von 20 dB/Dekade besitzen.

(3) Die Phasenreserve $\phi_R$ sollte nicht unter 40° sinken.
Für $50° \leq \phi_R \leq 70°$ darf ein brauchbarer Einschwingvorgang für das Führungsverhalten erwartet werden. Für $80° \leq \phi_R \leq 90°$ verläuft der Einschwingvorgang aperiodisch.

(4) Ist das Führungsverhalten genügend gedämpft, so darf auch das Störverhalten als genügend gedämpft angesehen werden.

(5) Für das Störverhalten allein reicht im allgemeinen eine Phasenreserve von $\phi_R = 30°$ aus.

Erfüllung der Forderungen 1, 2 und 3:

Man legt in den Vorwärtszweig des Regelkreises ein I–Glied mit genügend kleiner Verstärkung $K_R$.

Dieses Korrekturverfahren ist im folgenden für typische Verläufe skizziert. Es sei $G_S(j\omega)$ der Frequenzgang der Strecke vor der Korrektur und $G_R(j\omega)$ der Frequenzgang des Korrekturgliedes (Regler), also $G_R(j\omega) = K_R/(j\omega)$ .

**Vor der Korrektur $G_S(j\omega)$:**

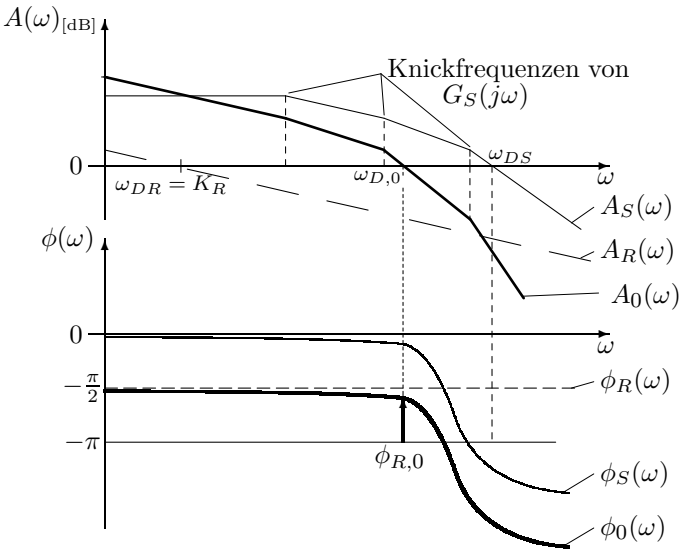
- Frequenzkennlinien $A_S(\omega)$ und $\phi_S(\omega)$
- Durchtrittsfrequenz $\omega_{DS}$

**Korrektur $G_R(j\omega)$:**

- Für die Durchtrittsfrequenz $\omega_{DR}$ gilt $\omega_{DR} = K_R$ .
- $\omega_{DR}$ muß weit genug links von den Knickfrequenzen von $G_S(j\omega)$ liegen.
  Dadurch wird die Amplitudenkennlinie von $G_S(j\omega)$ erheblich gesenkt.

**Nach der Korrektur $G_0(j\omega)$ :**

- Frequenzkennlinien $A_0(\omega)$ und $\phi_0(\omega)$
- Durchtrittsfrequenz $\omega_{D,0}$




**Ergebnis:**

(1) Die Phasenreserve $\phi_{R,0}$ nach der Korrektur ist genügend groß geworden (Forderungen 1 und 3).

(2) Das I–Glied garantiert die stationäre Genauigkeit (Forderung 2).

Nachteil als Folge des Korrekturgliedes:

Die Durchtrittsfrequenz des korrigierten Regelkreises $\omega_{D,0}$ ist durch das Einfügen des I–Gliedes wesentlich verkleinert worden. Die Folge davon ist, daß der Regelkreis sehr langsam geworden ist. Dies ist aber unerwünscht. Wir gelangen so zur zweiten Forderung an die Stabilitätsgüte.

**Forderung 4:** *Der Regelkreis muß hinreichend schnell sein.*

Folgerung aus der 4. Forderung:

Macht man den Regelkreis schnell, verlegt also die Durchtrittsfrequenz nach rechts, so gelangt man in den Bereich stark fallender Phase. Damit schrumpft die Phasenreserve. Die Forderungen 3 und 4 sind also gegensätzlich; ein Kompromiß ist notwendig.

Im folgenden werden einige Möglichkeiten angegeben, um allen Forderungen 1 bis 4 gerecht zu werden.

## 9.2 Einfügen von Korrekturgliedern

Die zuvor angegebenen Forderungen charakterisieren das *Syntheseproblem beim Reglerentwurf*. Die Aufgabe lautet:

Der Regelkreis soll bei einer bestimmten stationären Genauigkeit (Forderung 2) und hinreichender Schnelligkeit (Forderung 4) stabil (Forderung 1) und genügend gedämpft (Forderung 3) ausgelegt werden.

Die Lösung dieses Problems erfolgt durch Einfügen von Korrekturgliedern (Reglern). Im folgenden sind einige Möglichkeiten aufgezeigt.

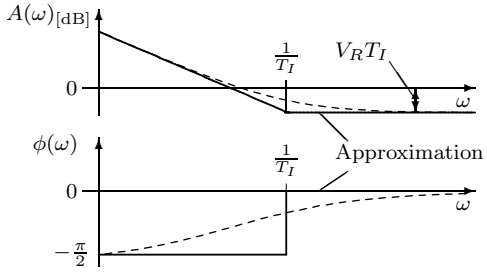
**1. Möglichkeit:** *Senken der Betragskennlinie*

Hierdurch wird die Durchtrittsfrequenz nach links verlegt. Es wird Stabilität und Phasenreserve erzeugt. Darauf zu achten ist, daß der Regelkreis nicht zu langsam wird.

**Realisierung:** PI–Regler

$$G_R(s) = K_R \cdot \left[1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right]$$

$$G_R(j\omega) = V_R \cdot \frac{1 + T_I \cdot j\omega}{j\omega} \quad , \quad V_R = \frac{K_R}{T_I}$$



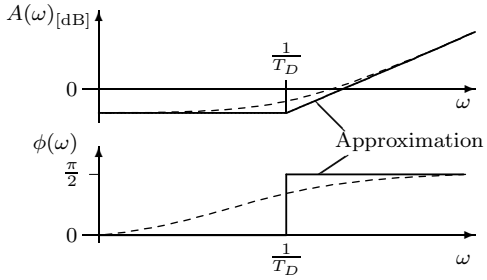

**2. Möglichkeit:** *Anheben der Phasenkennlinie*

Bei annähernd fester Durchtrittsfrequenz wird die Phase angehoben. Dadurch erhält man Stabilität und Phasenreserve.

**Realisierung:** PD–Regler

$$G_R(s) = K_R(1 + T_D \cdot s)$$

$$G_R(j\omega) = K_R(1 + T_D \cdot j\omega)$$



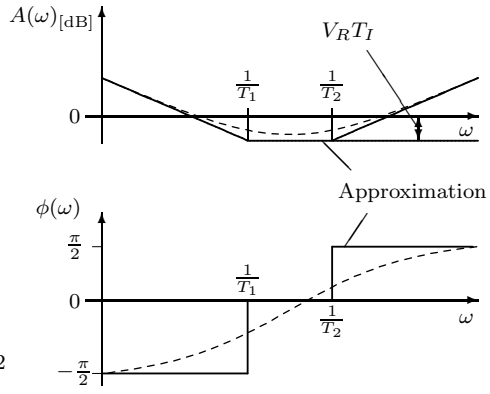

**3. Möglichkeit:** *Kombination der 1. und 2. Möglichkeit*

Senken der Betragskennlinie und Anheben der Phasenkennlinie in zwei verschiedenen $\omega$–Bereichen.

**Realisierung:** PID–Regler

$$G_R(s) = K_R \cdot \left[1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right]$$

$$G_R(j\omega) = \frac{K_R}{T_I} \cdot \frac{[1 + T_I \cdot j\omega + T_I \cdot T_D(j\omega)^2]}{j\omega}$$




Bei Verwendung der Darstellung

$$G_R(j\omega) = V_R \cdot \frac{(1 + T_1 \cdot j\omega) \cdot (1 + T_2 \cdot j\omega)}{j\omega} \quad , \quad T_1 > T_2$$

lauten die Zusammenhänge

$$V_R = \frac{K_R}{T_I} \quad , \quad T_1 \cdot T_2 = T_I \cdot T_D \quad , \quad T_1 + T_2 = T_I \quad .$$

**Vorgehen beim Reglerentwurf**

Bei der Diskussion der Forderungen an eine Regelung zeigte sich: Versucht man, den Regelkreis durch Erhöhen der Kreisverstärkung (Verschieben der Durchtrittsfrequenz nach rechts) schneller zu machen, so gerät man in den Bereich stark fallender Phase, die Phasenreserve sinkt, die Dämpfung wird schlechter, die Regelung kann instabil werden.

Damit jedoch die Regelung schneller gemacht werden kann, muß zunächst der Frequenzbereich, in dem die Phasenkennlinie sich der Linie $-180°$ nähert, möglichst weit nach rechts (zu den hohen Frequenzen hin) verschoben werden.

Ist zur Vermeidung einer bleibenden Regelabweichung ein I–Anteil vorhanden, beginnt die Phasenkennlinie bereits mit $-90°$ . Damit nähert sich im Bereich der *kleinsten Nenner–Eckfrequenz der Strecke* – ihr entspricht die *größte Streckenzeitkonstante* – die Phasenkennlinie aber schon der Linie $-180°$ .
(Als Folge einer großen Totzeit kann dies auch bei noch kleineren Frequenzen passieren.)

Das bekannteste *Regler–Entwurfsverfahren* basiert nun darauf, mit Hilfe der eingeführten Korrekturglieder die größte(n) Streckenzeitkonstante(n) zu kompensieren. Dabei geht man schrittweise folgendermaßen vor:

**Schritt 1:** I–Anteil in den offenen Kreis einfügen, falls dieser nicht schon in der Strecke vorhanden ist. (Dies gilt für den Fall, daß zwischen Regler und Strecke keine Störgröße angreift.)

**Schritt 2:** Die größte(n) Streckenzeitkonstante(n) durch entsprechende Wahl der Regler–Eckfrequenz(en) kompensieren.

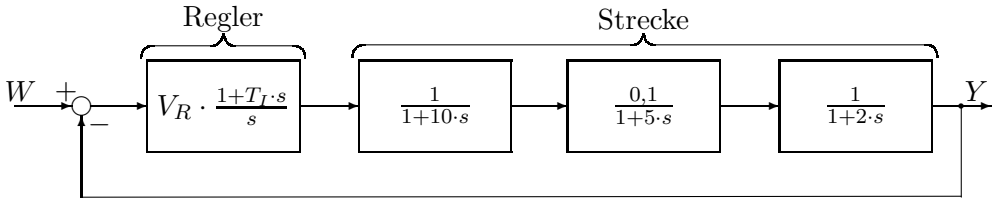
**Schritt 3:** Bode–Diagramm des offenen Kreises für Kreisverstärkung $V = 1$ zeichnen.

**Schritt 4:** Die durch die gewünschte Phasenreserve bestimmte Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ ablesen.

**Schritt 5:** Die 0–dB–Linie aus Schritt 3 anheben oder absenken, bis sie bei $\omega_D$ nach Schritt 4 die bisherige Amplitudenkennlinie schneidet. Dies ist die **neue** 0–dB–Linie. Damit ist die Kreisverstärkung (und damit die Reglerverstärkung) bestimmt.

**Beispiel für den Reglerentwurf:**

Für den nachfolgend skizzierten Standardregelkreis soll ein PI–Regler so ausgelegt werden, daß sich eine Phasenreserve von $\phi_R = 30°$ ergibt.




Die Nenner–Eckfrequenzen bzw. Streckenzeitkonstanten ergeben sich zu:

$T_1 = 10 \;\rightarrow\; \omega_{01} = 0.1 \;\;;\;\; T_2 = 5 \;\rightarrow\; \omega_{02} = 0.2 \;\;;\;\; T_3 = 2 \;\rightarrow\; \omega_{03} = 0.5$

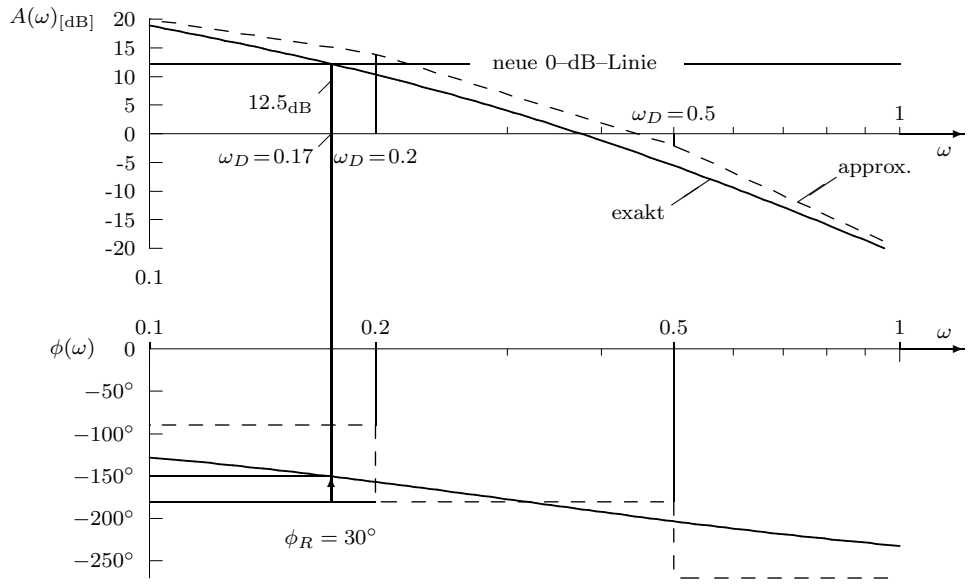
Es wird nun nach dem zuvor angegebenen Schema vorgegangen.

**Schritt 1:** Entfällt, da bereits ein I–Anteil im Regler enthalten ist.

**Schritt 2:** Die Kompensation der größten Streckenzeitkonstanten führt auf $T_I = T_1 = 10$. Setzt man noch $V = 0.1 \cdot V_R$, so lautet die Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$G_0(s) = \frac{V}{s} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{s}{0.2}) \cdot (1 + \frac{s}{0.5})} \quad .$$

**Schritt 3:** Nachfolgend ist das Bode–Diagramm für die Verstärkung $V = 1$ dargestellt.




**Schritt 4:** Die gewünschte Phasenreserve $\phi_R = 30°$ führt auf die Durchtrittsfrequenz $\omega_D = 0.17$ .

**Schritt 5:** Dem Bode–Diagramm für die Amplitude entnimmt man, daß die Amplitudenkennlinie um ca. 12.5 dB abgesenkt werden muß bzw. die alte 0–dB–Linie um 12.5 dB angehoben werden muß.

Aus $V_{[\mathrm{dB}]} = -12.5\,\mathrm{dB}$ folgt $V = 0.24$ und damit $V_R = 2.4$ .

Als Reglerübertragungsfunktion erhält man somit

$$G_R(s) = 2.4 \cdot \frac{1 + 10 \cdot s}{s} \quad .$$

## 9.3 Realisierbarkeit von Korrekturgliedern

Theoretisch könnte man durch ein entsprechendes Korrekturglied beliebig viele Streckenzeitkonstanten kompensieren und dadurch die Durchtrittsfrequenz beliebig weit nach rechts schieben, wodurch der Regelkreis beliebig schnell gemacht werden könnte.

Ein solches Korrekturglied ist aber nicht realisierbar, weil sein Zählergrad größer als der Nennergrad wäre. (Dies ist auch schon beim idealen PD– und PID–Regler der Fall.)

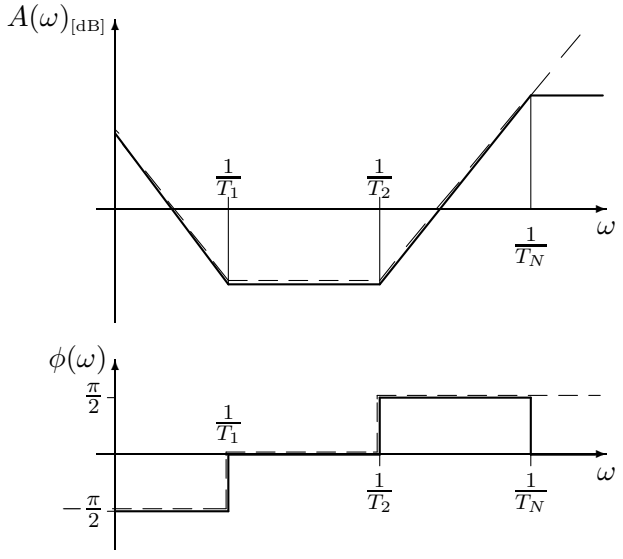
Es ist aber auch nicht wünschenswert, die Durchtrittsfrequenz zu weit nach rechts zu schieben, da dann hochfrequente Störanteile nicht mehr genügend gedämpft werden.

Bei realen Korrekturgliedern ist der Nennergrad nie kleiner als der Zählergrad. Dies wird erreicht durch Einfügen von zusätzlichen Nenner–Zeitkonstanten. Sie werden so gewählt, daß die entsprechenden Eckfrequenzen rechts der Durchtrittsfrequenz liegen. Die dadurch verursachte zusätzliche Phasenabsenkung hat damit praktisch keinen Einfluß auf die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.

In der Praxis am weitesten verbreitet sind der PI–Regler und der PIDT$_1$–Regler, auch „realer PID–Regler“ genannt. Sein Frequenzgang lautet:

$$G_R(j\omega) = \frac{K_R}{j\omega} \cdot \frac{(1 + T_1 \cdot j\omega) \cdot (1 + T_2 \cdot j\omega)}{1 + T_N \cdot j\omega} \qquad \text{mit} \quad T_N \ll T_1 \ , \ T_2$$

Nachfolgend sind die Frequenzkennlinien des realen PID–Reglers und des idealen PID–Reglers ($T_N = 0$) skizziert. Für die Skizze wurde $T_1 > T_2$ gewählt.




– – – Idealer PID–Regler ($T_N = 0$)

——— Realer PID–Regler ($T_N \neq 0$)

In der Skizze sind jeweils nur die Approximationen dargestellt.

# 10 Einstellregeln nach ZIEGLER–NICHOLS

Zahlreiche Regelstrecken lassen sich als Reihenschaltung von Verzögerungsgliedern oder eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung und einer Totzeit beschreiben. (Bei verfahrenstechnischen Strecken ist dies häufig der Fall.). Für diesen Streckentyp wurden von ZIEGLER und NICHOLS auf empirische Weise Einstellregeln für P–, PI– und PID–Regler entwickelt, die einen mäßig gedämpften, nicht allzu langsamen Einschwingvorgang des Regelkreises erwarten lassen.

Diese Einstellregeln sind für die Praxis von großer Bedeutung. Mit ihnen läßt sich auf sehr einfache Weise eine erste Reglereinstellung berechnen, um zunächst einmal die Größenordnung der einzustellenden Reglerparameter zu ermitteln. In vielen Fällen liefert diese erste Einstellung schon befriedigende Ergebnisse.

**Vorgehen zur Bestimmung der Einstellwerte:**

Schritt 1: Man betreibe den Regelkreis zunächst mit einem idealen P–Regler und bestimme (experimentell oder rechnerisch)

(a) die Reglereinstellung $K_R = K_{Rk}$ an der Stabilitätsgrenze,

(b) die Schwingungsdauer $T_k$ der an der Stabilitätsgrenze einsetzenden Dauerschwingung.

Schritt 2: Man stelle ein

(a) für den idealen P-Regler $G_R(s) = K_R$

$K_R = 0,5 \cdot K_{Rk}$ ,

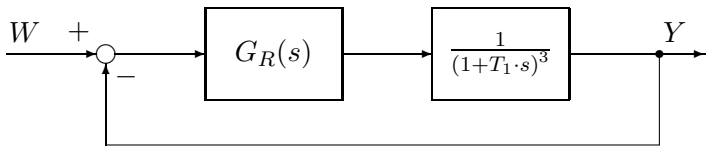
(b) für den idealen PI–Regler $G_R(s) = K_R \cdot \left[1 + \dfrac{1}{T_I \cdot s}\right]$

$K_R = 0,45 \cdot K_{Rk}$ ; $T_I = 0,85 \cdot T_k$ ,

(c) für den idealen PID–Regler $G_R(s) = K_R \cdot \left[1 + \dfrac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right]$

$K_R = 0,6 \cdot K_{Rk}$ ; $T_I = 0,5 \cdot T_k$ ; $T_D = 0,12 \cdot T_k$ .

**Beispiel:**




Schritt 1: Rechnerisch aus der charakteristischen Gleichung $T_1^3 \cdot s^3 + 3T_1^2 \cdot s^2 + 3T_1 \cdot s + 1 + K_R = 0$

(a) $3T_1 \cdot 3T_1^2 - (1 + K_{Rk}) \cdot T_1^3 = 0 \;\rightarrow\; K_{Rk} = 8$

(b) $\omega_k^2 = \dfrac{3T_1}{T_1^3} \;\rightarrow\; \omega_k = \dfrac{\sqrt{3}}{T_1}$ bzw. $T_k = \dfrac{2\pi}{\omega_k} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot T_1 = 3,6 \cdot T_1$

Schritt 2: (a) P–Regler: $K_R = 4$ .

(b) PI–Regler: $K_R = 3,6$ , $T_I = 3,1T_1$ .

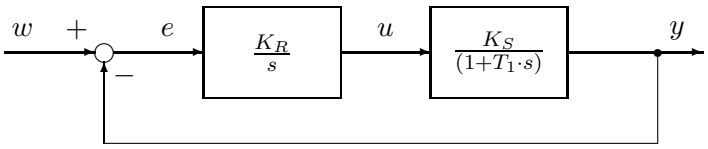
(c) PID–Regler: $K_R = 4,8$ , $T_I = 1,8T_1$ , $T_D = 0,4T_1$ .

# 11 Wurzelortskurvenverfahren

- Ebenfalls ein Analyse– und Syntheseverfahren für den Entwurf linearer Regelkreise.
- Gedanke (ähnlich wie beim NYQUIST–Verfahren):
  Man möchte von den bekannten Eigenschaften des *offenen* Kreises auf das noch unbekannte Verhalten des *geschlossenen* Kreises schließen.
- Im Gegensatz zum NYQUIST–Verfahren bleiben wir in der $s$–Ebene.

## 11.1 Einführendes Beispiel

- Wir betrachten den folgenden Regelkreis:




$K_S, T_1$ fest vorgegeben

$K_R$ frei wählbar

- Übertragungsfunktion des offenen Kreises in faktorisierter Form:

$$G_0(s) = K_R K_S \frac{1}{s(1+T_1 s)} = \frac{K_R K_S}{T_1} \cdot \frac{1}{s(s+\frac{1}{T_1})} = K_0 \frac{1}{s(s+\frac{1}{T_1})}$$

$K_0 = \dfrac{K_R K_S}{T_1} > 0$ heißt *modifizierter Verstärkungsfaktor*

- Wir halten fest: $G_0(s)$ enthält den *freien* (*reellen*) *Parameter* $K_0$ .

- Frage: Wie hängen die Pole des geschlossenen Kreises $G(s) = \dfrac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$ und damit sein Stabilitätsverhalten von $K_0$ ab?

- Antwort: Man untersuche die charakteristische Gleichung des geschlossenen Kreises $1 + G_0(s) = 0$ und zwar deren Wurzeln in Abhängigkeit von $K_0$.

  Mit $T_1 = 0,5$ wird $G_0(s) = \dfrac{K_0}{s(s+2)}$ und aus $1 + G_0(s) = 0$ folgt die charakteristische Gleichung $s^2 + 2s + K_0 = 0$ und man erhält für die Pole des geschlossenen Kreises

  $$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K_0} \quad .$$

Fallunterscheidungen: $(K_0 \geq 0)$

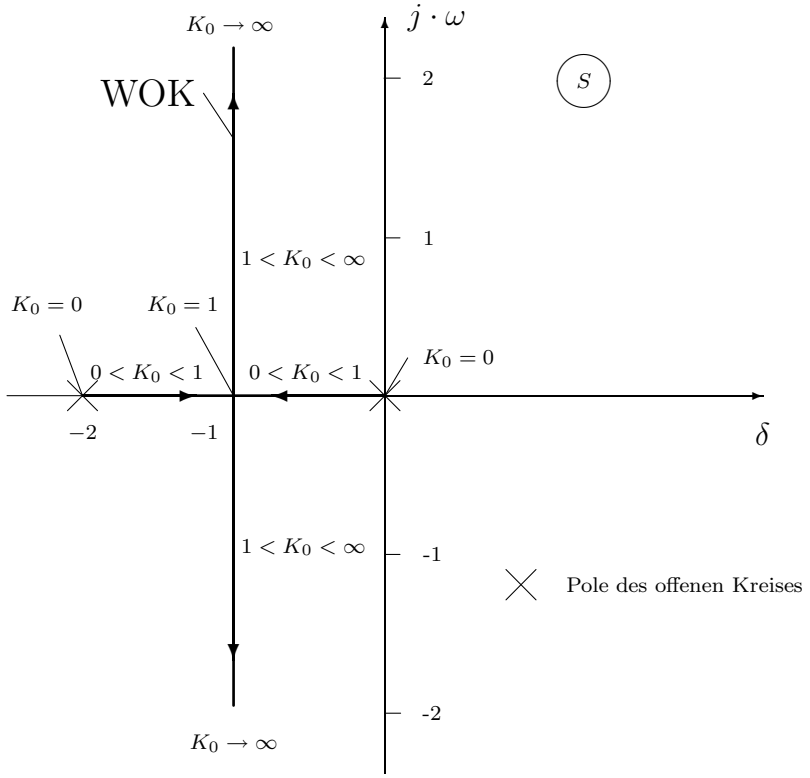
$K_0 = 0 \;\rightarrow\; s_1 = 0\,,\; s_2 = -2$ **Beachte:** Dies sind genau die *Pole* des offenen Kreises.

$0 < K_0 < 1 \;\rightarrow\; s_1\,,\; s_2$ reell und verschieden

$K_0 = 1 \;\rightarrow\; s_1 = s_2 = -1$ Doppelwurzel

$K_0 > 1 \;\rightarrow\; s_1\,,\; s_2$ konjugiert komplexes Paar

- Jetzt: Wir zeichnen uns den geometrischen Ort der Wurzeln der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Kreises in der $s$–Ebene auf, wenn der freie Parameter $K_0$ von $K_0 = 0$ bis $K_0 \to \infty$ variiert wird. Dieser geometrische Ort heißt *Wurzelortskurve* (WOK).




Ergebnis:

- Die WOK gibt *auf einen Blick* Auskunft über das Stabilitätsverhalten des geschlossenen Kreises.
- Für $K_0 > 0$ ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil, da die WOK vollständig in der linken $s$–Halbebene verläuft.
- Für $K_0 = 0$ erhält man die beiden Pole des offenen Kreises. Von den 2 Polen gehen 2 Äste der WOK aus.
- Für $K_0 \to \infty$ ergeben sich 2 Asymptoten.
- Die WOK ist symmetrisch zur reellen Achse.

## 11.2 Allgemeiner Fall und Definition der Wurzelortskurve (WOK)

Ausgangspunkt ist die Übertragungsfunktion des offenen Kreises (ohne Totzeit) in faktorisierter Form

$$G_0(s) = K_0 \cdot \frac{(s-n_1)(s-n_2)\dots(s-n_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = K_0 \cdot \frac{Z_0(s)}{N_0(s)}$$

mit

$K_0 > 0$ modifizierter Verstärkungsfaktor , $m < n$ (reale Systeme),

$n_\mu \neq p_\nu$ $(\mu = 1, \dots, m\ ;\ \nu = 1, \dots, n)$.

Symbolik in der $s$–Ebene:

x Pole des offenen Kreises

o Nullstellen des offenen Kreises

**Definition der Wurzelortskurve:** (vgl. Beispiel)

- Die Wurzelortskurve (WOK) ist der geometrische Ort aller Wurzeln der charakteristischen Gleichung

  $$N_0(s) + K_0 \cdot Z_0(s) = 0 \quad ,$$

  wenn der Parameter $K_0$ von $K_0 = 0$ bis $K_0 \to \infty$ variiert wird.

oder

- Die WOK ist der geometrische Ort der Pole des geschlossenen Kreises.
  (Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\widehat{=}$ Pole des geschlossenen Kreises)

**Bemerkungen:**

1. Wird anstelle von $K_0$ ein anderer Parameter variiert (etwa eine Zeitkonstante von $G_0(s)$), so entsteht ebenfalls eine WOK. Man spricht dann vom verallgemeinerten WOK–Verfahren (wird im folgenden *nicht* betrachtet).
2. Die analytische Berechnung der WOK ist nur bis zu $n \leq 3$ praktikabel.
   Alternativen:
   - Wiederholte numerische Berechnung der Wurzeln mittels Rechnerprogramm.
   - Halbanalytisches Verfahren zur Konstruktion der WOK (siehe Abschnitt 11.3).
3. Das WOK–Verfahren gilt prinzipiell auch für Systeme mit Totzeit. Die Anwendbarkeit des Verfahrens wird jedoch recht umständlich.

## 11.3 Halbanalytisches Verfahren zur Konstruktion von Wurzelortskurven

**Gleichung und Eigenschaften der Wurzelortskurve:**

Aus der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Kreises $1 + G_0(s) = 0$ bzw.

$$G_0(s) = -1$$

folgt:

Betragsgleichung: $\mid G_0(s) \mid = 1$

Phasengleichung: $\arg[G_0(s)] = \pm(2k+1)\pi \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$

(ungerade Vielfache von $\pm\pi$)

Umschreiben der Darstellung in faktorisierter Form:

$$G_0(s) = K_0 \cdot \frac{\mid s - n_1 \mid \cdot e^{j\phi_{n1}} \cdot \mid s - n_2 \mid \cdot e^{j\phi_{n2}} \ldots \mid s - n_m \mid \cdot e^{j\phi_{nm}}}{\mid s - p_1 \mid \cdot e^{j\phi_{p1}} \cdot \mid s - p_2 \mid \cdot e^{j\phi_{p2}} \ldots \mid s - p_n \mid \cdot e^{j\phi_{pn}}}$$

Daraus folgen

Betragsgleichung: $K_0 = \dfrac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \mid s - p_\nu \mid}{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \mid s - n_\mu \mid}$ (für $m = 0$ wird der Nenner = 1 gesetzt)

und

Phasengleichung: $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \phi_{n_\mu} - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \phi_{p_\nu} = \pm(2k+1)\pi \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$

**Ergebnis:**

- Die Phasengleichung ist unabhängig von dem Parameter $K_0$. Damit gilt: Durch die Phasengleichung ist die WOK vollständig definiert.
- Aus der Betragsgleichung folgt für jedes $s$ *auf* der WOK der zugehörige Verstärkungsfaktor $K_0$.
- Für $K_0 = 0$ erhält man die Pole des offenen Kreises.
- Für $K_0 \to \infty$ erhält man die Nullstellen des offenen Kreises. (Die WOK beginnt in den Polen und endet in den Nullstellen des offenen Kreises.)
- Die WOK hat für $K_0 \to \infty$ genau $n - m$ Asymptoten.

**Auswertung der Betrags– und Phasengleichung für das Beispiel:**

Pole des offenen Kreises: $p_1 = 0 \ , \ p_2 = -2$

Nullstellen des offenen Kreises: keine

Betrag: $K_0 = \mid s - p_1 \mid \cdot \mid s - p_2 \mid$

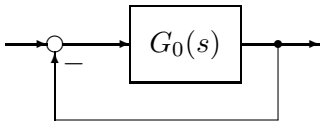
Phase: $-\phi_{p1} - \phi_{p2} = \pm\pi \ , \ \pm 3\pi \ , \ \ldots$

Wählt man beispielsweise $s = -1 + 2j$, so ergibt sich der Verstärkungsfaktor $K_0 = \mid -1 + 2j \mid \cdot \mid (-1 + 2j) + 2 \mid = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$. Man bestätigt für diesen Punkt der WOK die Phasenbeziehung $-\phi_{p1} - \phi_{p2} = -\pi$ .

## 11.4 Regeln für die Konstruktion von Wurzelortskurven

(nach EVANS 1950)

**Bezeichnungen:**




Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$G_0(s) = K_0 \cdot \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} \ , \quad K_0 > 0$$

in faktorisierter Form:

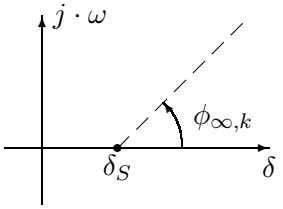
$$G_0(s) = K_0 \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (s - n_\mu)}{\prod_{\nu=1}^{n} (s - p_\nu)}$$

Darstellung mit Hilfe von *Betrag* und *Phase*:

$$G_0(s) = K_0 \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{m} | \, s - n_\mu \, |}{\prod_{\nu=1}^{n} | \, s - p_\nu \, |} \cdot \exp \left\{ j \cdot \left[ \sum_{\mu=1}^{m} \phi_{n_\mu} - \sum_{\nu=1}^{n} \phi_{p_\nu} \right] \right\}$$

**Regeln:**

| Nr. | Eigenschaft | Verlauf der WOK |
|---|---|---|
| 1 | Symmetrie | Die WOK ist symmetrisch zur reellen Achse |
| 2 | Anfangs– und Endpunkte | Alle Äste beginnen für $K_0 = 0$ in den Polen von $G_0(s)$ , $m$ Äste enden für $K_0 \to \infty$ in den Nullstellen von $G_0(s)$ . |
| | Zahl der Äste | Die WOK besteht aus $n$ Ästen, $(n-m)$ Äste enden im Unendlichen. |
| 3 | Lage auf der reellen Achse | Ein Punkt der reellen Achse gehört genau dann zur WOK, wenn die Summe der rechts von ihm gelegenen Pole und Nullstellen von $G_0(s)$ ungerade ist. |

| Nr. | Eigenschaft | Verlauf der WOK |
|---|---|---|
| 4 | Asymptoten<br><br> | Für große $s$ strebt die WOK den $(n-m)$ Asymptoten zu.<br>Zur reellen Achse bilden sie den Winkel<br>$\phi_{\infty,k} = (2k-1) \cdot \frac{\pi}{n-m}$ , $k = 1, 2, \ldots, n-m$<br>. |
| | Wurzelschwerpunkt $(\delta_S, j \cdot 0)$ | Die Asymptoten schneiden sich auf der reellen Achse im sog. Wurzelschwerpunkt<br>$\delta_S = \frac{1}{n-m} \left[ \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Re}\,\{p_\nu\} - \sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{Re}\,\{n_\mu\} \right]$ . |
| 5 | Eintrittswinkel $\phi_{E,\mu}$<br><br>und | Die WOK mündet in eine Nullstelle $n_\mu$ (Vielfachheit $\rho$) unter dem Winkel<br>$\rho \cdot \phi_{E,\mu} = (2k+1)\pi + \sum_{\nu=1}^{n} \phi_{p\nu} - \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{m} \phi_{n\lambda}$ ,<br>$\mu = 1, \ldots, m$ ; $k = 0, \ldots, \rho - 1$ |
| | Austrittswinkel $\phi_{A,\nu}$ | Die WOK verläßt einen Pol $p_\nu$ (Vielfachheit $\rho$) unter dem Winkel<br>$\rho \cdot \phi_{A,\nu} = -(2k+1)\pi + \sum_{\mu=1}^{m} \phi_{n\mu} - \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \nu}}^{n} \phi_{p\lambda}$ ,<br>$\nu = 1, \ldots, n$ ; $k = 0, \ldots, \rho - 1$ |
| 6 | Verzweigungspunkt $(\delta_V, j \cdot 0)$ auf der reellen Achse | Die WOK besitzt mindestens einen Verzweigungspunkt (Vereinigungspunkt), wenn ein Ast der WOK auf der reellen Achse zwischen zwei Polen (Nullstellen) verläuft.<br>Dieser reelle Punkt $(\delta_V, j \cdot 0)$ genügt der Bedingung:<br>$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{\delta_V - n_\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\delta_V - p_\nu}$<br>Besitzt die WOK im Verzweigungspunkt nur zwei Äste, so bilden diese Äste mit der reellen Achse die Winkel $\pm\frac{\pi}{2}$.<br>(Für $m = 0$ ist der entsprechende Summenterm gleich Null zu setzen.) |

| Nr. | Eigenschaft | Verlauf der WOK |
|---|---|---|
| 7 | Schnitt mit der imaginären Achse (liefert $\omega_{krit}$ und $K_{0,krit}$) | Die Stabilitätsgrenze (Schnittpunkt der WOK mit der imaginären Achse) erhält man aus<br>$N_0(j\omega) + K_0 \cdot Z_0(j\omega) = 0$<br>Daraus folgen zwei reelle Gleichungen für<br>$\omega = \omega_{krit}$ und $K_0 = K_{0,krit}$<br>(vgl. HURWITZ–Kriterium) |
| 8 | Belegung mit $K_0$–Werten | Zum Punkt $s$ der WOK gehört der $K_0$–Wert<br>$K_0 = \dfrac{\prod_{\nu=1}^{n} \mid s - p_\nu \mid}{\prod_{\mu=1}^{m} \mid s - n_\mu \mid}$<br>(für $m = 0$ besitzt der Nenner den Wert 1) |
| 9 | Summe der Realteile | Für $n - m \geq 2$ ist die Summe der Realteile aller Wurzelorte konstant (also unabhängig von $K_0$), d.h.<br>$\sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Re}\{s_\nu\} = const$ , wobei $G_0(s_\nu) + 1 = 0$ |
| 10 | Potentialanalogie | Die Pole seien negative Ladungsträger, die Nullstellen seien positive Ladungsträger, sämtliche Ladungen seien gleich groß.<br>Die WOK kann dann als Bahnkurve eines masselosen negativ geladenen Teilchens interpretiert werden. |

**Hinweis:**

Eine ausführliche Zusammenstellung der wichtigsten Wurzelortskurven findet man in: W. Oppelt, Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge, Verlag Chemie, Weinheim, 1972, Kap. V, Abschnitt 34.

Um Übereinstimmung mit den Bezeichnungen der Vorlesung zu erhalten, ist zu setzen:

$p = s$ , $-F_0(p) = G_0(s)$ , $-h_0(t) = h(t)$

# A.1 Regeln für das Rechnen mit $\delta$-Funktionen

### 1. Addition

a) $$a\,\delta(t) \;+\; b\,\delta(t) \;=\; (a \;+\; b)\,\delta(t) \qquad (1a)$$

($a, b$ Konstanten)

b) $$a\,\delta^{(i)}(t) \;+\; b\,\delta^{(i)}(t) \;=\; (a+b)\,\delta^{(i)}(t) \qquad (1b)$$

### 2. Differentiation

a) $\delta^{(i)}(t) \;=\; \dfrac{d^i}{dt^i}\,\delta(t)\,, \qquad i \;= 0,\; 1,\; 2,\; \ldots$

b) $\dfrac{d}{dt}\sigma(t) = \;\delta(t)$

c) Die Beziehung

$K_1\,\sigma(t) \;+\; K_2\,\delta(t) \;+\; K_3\,\dot{\delta}(t) \;+\; \ldots \;+\; K_m\,\delta^{(m-2)}(t) \;=\; 0$

ist genau dann erfüllt, wenn $K_i \;=\; 0$ für alle $i \;=\; 1,\; \ldots,\; m$ gilt.

### 3. Multiplikation

a) $f(t)\,\delta(t) \;=\; f(0)\,\delta(t)\,,$ $f(t)$ stetig in $t \;=\; 0$ $^{+)}$

b) $f(t)\,\delta(t-t_0) \;=\; f(t_0)\,\delta(t-t_0)\,,$ $f(t)$ stetig in $t \;=\; t_0$ $^{+)}$

c) $\dfrac{d}{dt}[\,f(t)\,\delta(t)\,] \;=\; f(0)\,\dot{\delta}(t)$ (nach 3a))

$\qquad\qquad\qquad\quad =\; \dot{f}(t)\,\delta(t) \;+\; f(t)\,\dot{\delta}(t)$ (Kettenregel)

Daraus folgt :

d) $f(t)\,\dot{\delta}(t) \;=\; f(0)\,\dot{\delta}(t) \;-\; \dot{f}(0)\,\delta(t)\,,$ $\dot{f}(t)$ stetig in $t \;=\; 0$

$^{+)}$ Hierfür wird meist die Bezeichnung “Ausblendeigenschaft der $\delta$–Funktion” verwendet.

## 4. Integral

$$\text{a)} \quad \int_{t1}^{t2} \delta(t - t_0)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{für } t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4a}$$

$$\text{b)} \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \sigma(t) \tag{4b}$$

## 5. Faltung

$$\text{a)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \delta(t - \tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)\, \delta(\tau)\, d\tau$$
$$= f(t) * \delta(t)$$
$$= \delta(t) * f(t)$$
$$= f(t)$$

$$\text{b)} \quad f^{(i)}(t) * \delta(t) = \delta(t) * f^{(i)}(t)$$
$$= f^{(i)}(t) \ , \qquad f^{(i)}(t) \text{ stetig in } t = \tau$$

$$\text{c)} \quad f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \qquad ^{+)}$$

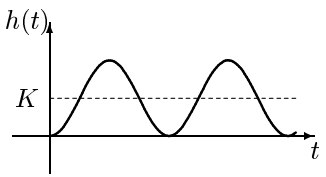
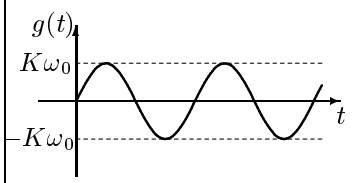
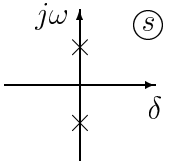
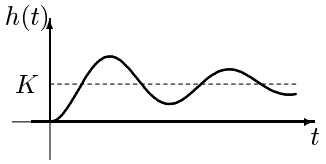
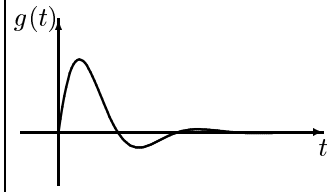
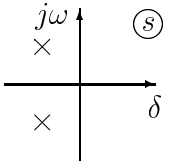
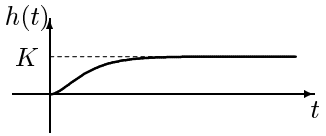
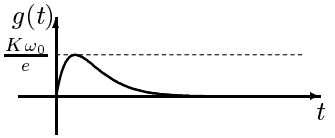
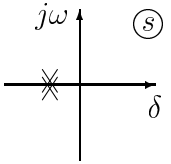
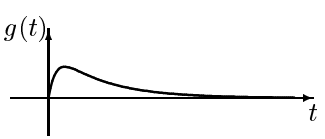
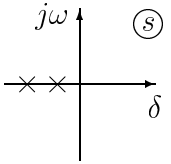
$$\text{d)} \quad f(t) * \sigma(t) = \sigma(t) * f(t)$$
$$= \int_{-0}^{t} f(\tau)\, d\tau$$

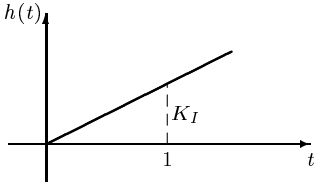
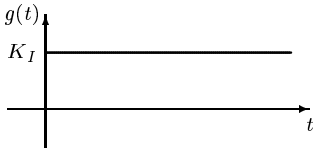
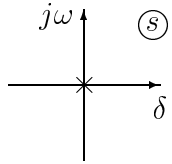
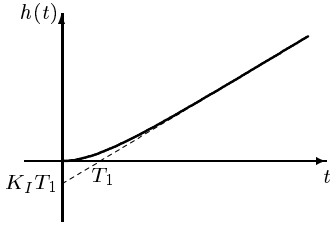
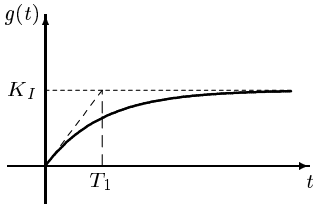
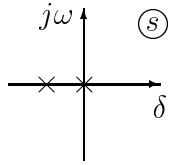
$$\text{e)} \quad \int_{t_1}^{t_2} f(t - \tau)\, \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} f(t) & \text{für } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

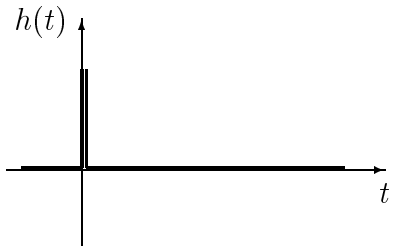
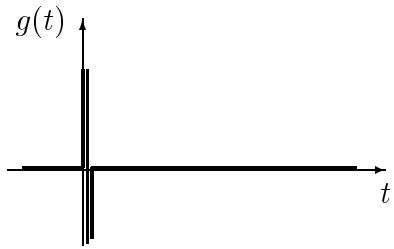
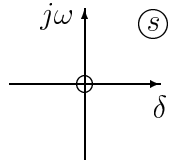
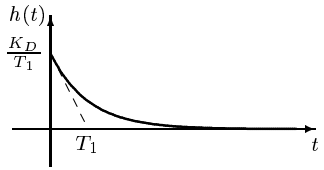
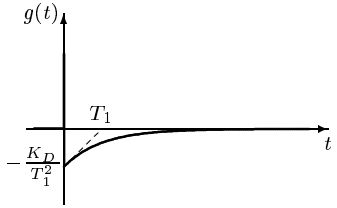
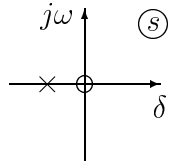
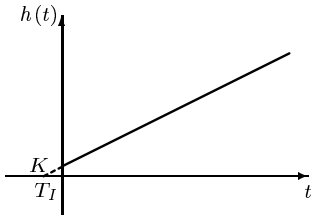
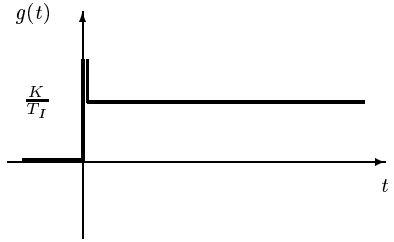
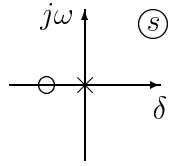
$^{+)}$ Hierfür wird meist die Bezeichnung “Ausblendeigenschaft der $\delta$–Funktion” verwendet.

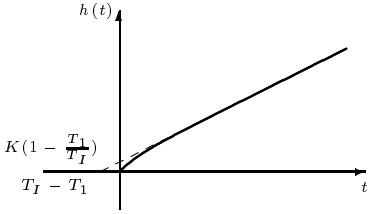
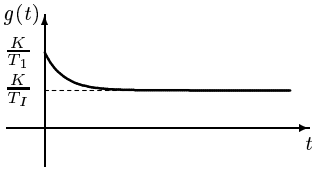
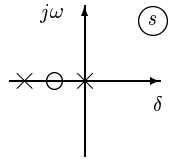
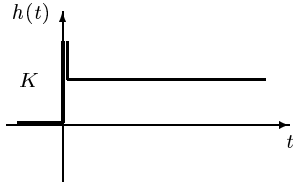
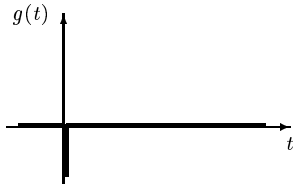
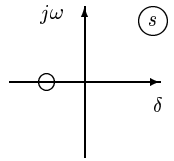
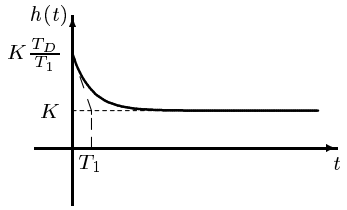
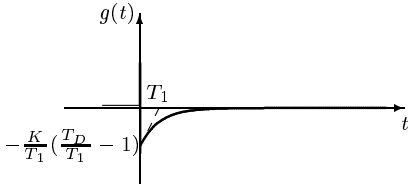
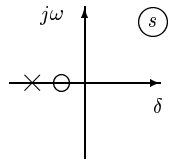
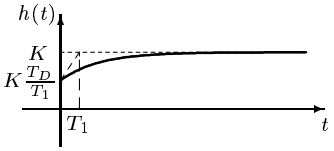
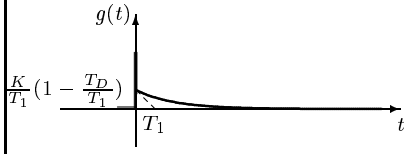
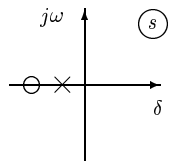
## A.2 Übergangs- und Gewichtsfunktionen der wichtigsten Regelkreisglieder

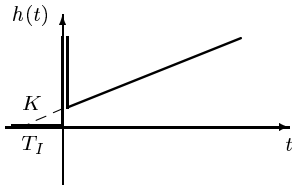
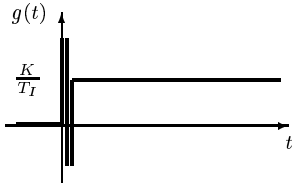
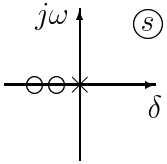
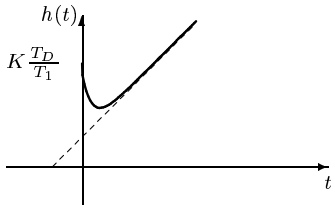
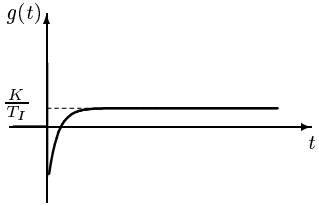
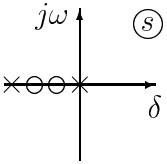
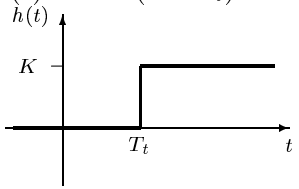
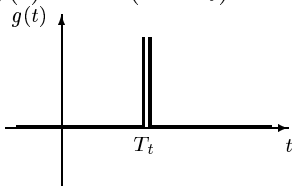
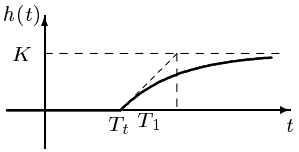
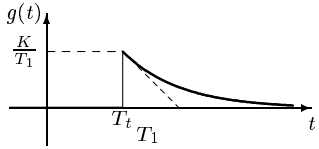
| System | Differentialgleichung | Übergangsfunktion (Sprungantwort) | Gewichtsfunktion (Impulsantwort) | Pole (x) und Nullstellen (o) | Bemer–kungen |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $y(t) = K \cdot u(t)$ | $h(t) = K \cdot \sigma(t)$   | $g(t) = K \cdot \delta(t)$   | | nicht ganz ideal reali-sierbar |
| $PT_1$ | $T_1 \cdot \dot{y} + y = K \cdot u(t)$ | $h(t) = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \cdot \sigma(t)$   | $g(t) = \frac{K}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \sigma(t)$   | $s_1 = -\frac{1}{T_1}$   | |
| $PT_n$ | $T_n^n \cdot y^{(n)} + \ldots + T_2^2 \cdot \ddot{y} + + T_1 \cdot \dot{y} + y = K \cdot u(t)$ | keine allgemeine Aussage möglich | | | |
| | spezielle Abschätzungen für sehr kleine und sehr große t für asymptotisch stabile Systeme ( für $u(t) = \sigma(t)$ ) | | | | |
| | $t \to 0: \; T_n^n \cdot y^{(n)}(t) \approx K \cdot \sigma(t) \to h_0(t) = \frac{K}{T_n^n} \cdot \frac{t^n}{n!}$ | | $g_0(t) = \frac{K}{T_n^n} \cdot \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}$ | | $t \to 0$ |
| | $t \to \infty: \quad y(t) \approx K \cdot \sigma(t) \to h_\infty(t) = K$ | | $g_\infty(t) = 0$ | | $t \to \infty$ |

| System | Differential-gleichung | Übergangsfunktion (Sprungantwort) | Gewichtsfunktion (Impulsantwort) | Pole (x) und Nullstellen (o) | Bemer–kungen |
|---|---|---|---|---|---|
| $PT_2$ | $T^2 \cdot \ddot{y} + 2 \cdot D \cdot T \cdot \dot{y} + y = K \cdot u(t)$<br>mit $\omega_0 = \frac{1}{T}$,<br>$\delta = -D\omega_0$,<br>$\omega = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$ | $h(t) = K \cdot (1 - cos\,\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$<br> | $g(t) = K \cdot \omega_0 \cdot sin\,\omega_0 t \cdot \sigma(t)$<br> | $s_{1,2} = \pm j\omega_0$<br> | $D = 0$ |
| | $h(t) = K[1 - e^{\delta t}(cos\,\omega t - \frac{\delta}{\omega} sin\,\omega t)]\sigma(t)$<br> | $g(t) = K\frac{\delta^2+\omega^2}{\omega} e^{\delta t} sin\,\omega t \cdot \sigma(t)$<br> | $s_{1,2} = \delta \pm j\omega$<br> | $0 < D < 1$ |
| | $h(t) = K[1 - e^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t)] \cdot \sigma(t)$<br> | $g(t) = K\,{\omega_0}^2 \cdot t \cdot e^{-\omega_0 t} \cdot \sigma(t)$<br> | $s_{1,2} = -\omega_0$<br> | $D = 1$ |
| | ${T_2}^2 \cdot \ddot{y} + T_1 \cdot \dot{y} + y = K \cdot u(t)$<br>mit $\omega_0 = \frac{1}{T_2}$,<br>$D = \frac{T_1}{2T_2}$,<br>$\bar{\omega} = \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$ | $h(t) = K[1 - e^{\delta t}(cosh\,\bar{\omega} t - \frac{\delta}{\bar{\omega}} sinh\,\bar{\omega} t)]\sigma(t)$<br> | $g(t) = K\frac{\delta^2-\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}} e^{\delta t} sinh\,\bar{\omega} t \cdot \sigma(t)$<br> | $s_{1,2} = \delta \pm \bar{\omega}$<br> | $D > 1$ |

| System | Differentialgleichung | Übergangsfunktion (Sprungantwort) | Gewichtsfunktion (Impulsantwort) | Pole (x) und Nullstellen (o) | Bemer–kungen |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $y(t) = K_I \cdot \int_0^t u(\tau)\cdot d\tau$ | $h(t) = K_I \cdot t \cdot \sigma(t)$   | $g(t) = K_I \cdot \sigma(t)$   |   | Für die Übergangs-funktionen von I-Gliedern gilt: |
| $IT_1$ | $T_1\cdot\dot{y}+y = K_I \int_0^t u(\tau)d\tau$ | $h(t) = K_I T_1[(\frac{t}{T_1} - 1) + e^{-\frac{t}{T_1}}]\sigma(t)$   | $g(t) = K_I(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})\sigma(t)$   |   | $\lvert h(t)\rvert \to \infty$ für $t \to \infty$ |
| | spezielle Näherung für sehr kleine und sehr große t (für $u(t) = \sigma(t)$ ) | | | | |
| | $t \to 0 : T_1 \cdot \dot{y}(t) = K_I \cdot \int_0^t \sigma(\tau)d\tau = K_I \cdot t \to h_0(t) = \frac{K_I}{2T_1} \cdot t^2$ | | $g_0(t) = \frac{K_I}{T_1} \cdot t$ | | $t \to 0$ |
| | $t \to \infty :$ $h(t) \to h_\infty(t) = K_I \cdot (t - T_1)$ | | $g_\infty(t) = K_I$ | | $t \to \infty$ |

| System | Differentialgleichung | Übergangsfunktion (Sprungantwort) | Gewichtsfunktion (Impulsantwort) | Pole (x) und Nullstellen (o) | Bemer–kungen |
|---|---|---|---|---|---|
| D | $y(t) = T_D \dot{u}(t)$ | $h(t) = T_D \delta(t)$   | $g(t) = T_D \dot{\delta}(t)$   |   | Ideale D-Glieder können tech-nisch nicht realisiert werden |
| $DT_1$ | $T_1 \dot{y} + y = T_D \dot{u}(t)$ | $h(t) = \frac{T_D}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \sigma(t)$   | $g(t) = -\frac{T_D}{T_1^2} e^{-\frac{t}{T_1}} \sigma(t) + \frac{T_D}{T_1} \delta(t)$   |   | nicht ganz ideal reali-sierbar |
| PI | $y(t) = K(u(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) d\tau)$ <br> $T_I$ = „Nachstellzeit“ | $h(t) = K(1 + \frac{t}{T_I}) \sigma(t)$   | $g(t) = \frac{K}{T_I} \sigma(t) + K \delta(t)$   |   | nicht ganz ideal reali-sierbar |

| System | Differentialgleichung | Übergangsfunktion (Sprungantwort) | Gewichtsfunktion (Impulsantwort) | Pole (x) und Nullstellen (o) | Bemer–kungen |
|---|---|---|---|---|---|
| $PIT_1$ | $T_1\dot{y} + y =$ $K(u(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t u(\tau)d\tau)$ | $h(t) = K\left[1 + \frac{t-T_1}{T_I} + (\frac{T_1}{T_I} - 1)e^{-\frac{t}{T_1}}\right]\sigma(t)$   | $g(t) = \frac{K}{T_I}\left[1 + (\frac{T_I}{T_1} - 1)e^{-\frac{t}{T_1}}\right]\sigma(t)$   |   | Zeich-nungen für $T_I > T_1$ |
| $PD$ | $y(t) = K(u(t) + T_D\dot{u}(t))$ $T_D =$ „ Vorhaltzeit “ | $h(t) = K(\sigma(t) + T_D\delta(t))$   | $g(t) = K \cdot (\delta(t) + T_D \cdot \dot{\delta}(t)$   |   | reiner D-Anteil nicht ideal realisier–bar |
| $PDT_1$ | $T_1\dot{y} + y =$ $K(u(t) + T_D\dot{u}(t))$ | $h(t) = K[1 + (\frac{T_D}{T_1} - 1)e^{-\frac{t}{T_1}}]\sigma(t)$   | $g(t) = -\frac{K}{T_1}(\frac{T_D}{T_1} - 1)e^{-\frac{t}{T_1}}\sigma(t) + K\frac{T_D}{T_1}\delta(t)$   |   | nicht ganz ideal realisier-bar $T_D > T_1$ |
| | |   |   |   | $T_D < T_1$ wird auch als PP-Glied bezeich-net |

| System | Differentialgleichung | Übergangsfunktion (Sprungantwort) | Gewichtsfunktion (Impulsantwort) | Pole (x) und Nullstellen (o) | Bemer–kungen |
|---|---|---|---|---|---|
| PID | $y(t) = K(u(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t u(\tau)d\tau + T_D\dot{u}(t))$ | $h(t) = K[(1+\frac{t}{T_I})\sigma(t) + T_D\delta(t)$   | $g(t) = \frac{K}{T_I}\sigma(t) + K\delta(t) + KT_D\dot{\delta}(t)$   |   | reiner D–Anteil nicht ideal reali-sierbar |
| $PIDT_1$ | $T_1\dot{y} + y = K(u(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t u(\tau)d\tau + T_D\dot{u}(t))$ | $h(t) = K[1 + \frac{t-T_1}{T_I} + (\frac{T_D}{T_1} + \frac{T_1}{T_I} - 1)e^{-\frac{t}{T_1}}]\sigma(t)$   | $g(t) = K\left[\frac{1}{T_I} - \frac{1}{T_1}(\frac{T_D}{T_1} + \frac{T_1}{T_I} - 1)e^{-\frac{t}{T_1}}\right]\sigma(t) + K\frac{T_D}{T_1}\delta(t)$   |   | nicht ganz ideal reali–sierbar |
| $T_t$ | $y(t) = Ku(t - T_t)$ | $h(t) = K\sigma(t - T_t)$   | $g(t) = K\delta(t - T_t)$   | | nicht ganz ideal reali–sierbar |
| $T_tT_1$ | $T_1\dot{y} + y = Ku(t - T_t)$ | $h(t) = K(1 - e^{-\frac{t-T_t}{T_1}})\sigma(t - T_t)$   | $g(t) = \frac{K}{T_1}e^{-\frac{t-T_t}{T_1}}\sigma(t - T_t)$   | | |

## A.3 Regeln der LAPLACE–Transformation

Definition: $\mathrm{F(s)} = \mathcal{L}\{ f(t) \} = \int_{-0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \ , \qquad s = \delta + j\omega$

| Nr. | Regel<br>Bezeichnung | Originalfunktion<br>f(t) für t $\geq$ 0 | Bildfunktion<br>F(s) |
|---|---|---|---|
| 1 | Linearitätssatz<br>(Superposition) | $a \cdot f_1(t) \pm b \cdot f_2(t)$ | $a \cdot F_1(s) \pm b \cdot F_2(s)$ |
| 2 | allgemein | $\sum_{i=1}^{N} c_i\, f_i(t)$ | $\sum_{i=1}^{N} c_i\, F_i(s)$ |
| | | a, b, $c_i$ konstante (reelle oder komplexe) Koeffizienten | |
| 3 | Ähnlichkeitssatz | f(at) , $a > 0$ | $\frac{1}{a} \cdot F(\frac{s}{a})$ |
| 4 | 1. Verschiebungssatz | $f(t - a)\, \sigma(t - a)$ ,<br>$a > 0$ | $e^{-as} \cdot F(s)$ |
| 5 | 2. Verschiebungssatz | $f(t + a)$ , $a > 0$ | $e^{as}\, [F(s) - \int_{-0}^{a} f(t)\, e^{-st}\, dt]$ |
| 6 | speziell | $f(t + a)$ mit $f(t) \equiv 0$<br>für $t < a$ | $e^{as} \cdot F(s)$ (vgl. Regel 4) |
| 7 | Dämpfungssatz | $e^{-at} \cdot f(t)$ | $F(s + a)$ |
| | | a beliebig komplex | |

| Nr. | Regel<br>Bezeichnung | Originalfunktion<br>f(t) für t $\geq$ 0 | Bildfunktion<br>F(s) |
|---|---|---|---|
| | **Differentiations–sätze:** | | |
| 8 | Differentiation der *Original*funktion | 1. Ableitung:<br>$\frac{d\,f(t)}{dt} = \dot{f}(t)$ | $s\,F(s) - f(0)$ *) |
| 9 | | 2. Ableitung:<br>$\ddot{f}(t)$ | $s^2\,F(s) - s \cdot f(0) - \dot{f}(0)$ *) |
| 10 | | k–te Ableitung:<br>$\frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t)$ | $s^k\,F(s) - s^{k-1}\,f(0) - s^{k-2}\,\dot{f}(0) - \ldots$<br>$\ldots - s\,f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$<br>$= s^k\,F(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j}\,f^{(j-1)}(0)$ *) |
| 11 | Differentiation nach einem Parameter | $\frac{\partial f(t,a)}{\partial a}$ | $\frac{\partial F(s,a)}{\partial a}$ |
| 12 | Multiplikation mit $t^k$ (Differentiation der *Bild*funktion) | $t^k \cdot f(t)$ , $k > 0$ ganz oder<br>$(-1)^k \cdot t^k \cdot f(t)$ | $(-1)^k \frac{d^k F(s)}{ds^k}$<br>$\frac{d^k F(s)}{ds^k}$ |

*) Vorsicht bei der Rücktransformation von $\{\, s^k F(s) \,\}$:
z.B. folgt für k = 1 aus Regel 8: $\mathcal{L}^{-1}\{s \cdot F(s)\} = \dot{f}(t) + f(0) \cdot \delta(t)$

| Nr. | Regel<br>Bezeichnung | Originalfunktion<br>f(t) für t $\geq$ 0 | Bildfunktion<br>F(s) |
|---|---|---|---|
| | **Integrationssätze:** | | |
| 13 | Integr. der *Original*funktion | $\int_{-0}^{t} f(\tau)\, d\tau$ | $\frac{1}{s} \cdot F(s)$ |
| 14 | Integr. der *Bild*funktion | $\frac{f(t)}{t}$ | $\int_{s}^{\infty} F(w)\, dw$ |
| 15 | Integr. bezügl. eines Parameters | $\int_{a_1}^{a_2} f(t,a)\, da$ | $\int_{a_1}^{a_2} F(s,a)\, da$ |
| | **Faltungssätze:** | | |
| 16 | Faltung im *Original*bereich | $f_1(t) * f_2(t) := \int_{-0}^{t} f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau$ | $F_1(s) \cdot F_2(s)$ |
| 17 | Faltung im *Bild*–bereich (Produkt zweier Original–funktionen) | $f_1(t) \cdot f_2(t)$ | $\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s-w) \cdot F_2(w)\, dw$ |
| | **Grenzwertsätze:** | In der Regelungstechnik immer anwendbar bei asymptotischer Stabilität des Systems | |
| 18 | Anfangswert | $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$ | |
| 19 | Endwert | $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$ | |
| 20 | PARSEVALsche Gleichung | $\int_{0}^{\infty} f^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mid F(j\omega) \mid^2 d\omega$ | |

## A.4 Korrespondenztabelle zur LAPLACE-Transformation

| Nr. | $f(t)$ für $t \geq 0$ | ○—● | $F(s)$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $e^{at} f(t)$ | | $F(s-a)$ $a$ beliebig komplex | (Regel 7) |
| 2 | $f(at)$ | | $\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$ $(a > 0)$ | (Regel 3) |
| 3 | $f'(t)$ | | $s F(s) - f(-0)$ | (Regel 8) |
| 4 | $f^{(n)}(t)$ | | $s^n F(s) - s^{n-1} f(-0) - s^{n-2} f'(-0) - \ldots - f^{(n-1)}(-0)$ | (Regel 10) |
| 5 | $f * g \equiv \int_{-0}^{t} f(t-u)\, g(u)\, du$ | | $F(s)G(s)$ | (Regel 16) |
| 6 | $\int_{-0}^{t} f(u)\, du$ | | $\frac{1}{s} F(s)$ | (Regel 13) |
| 7 | $t^n f(t)$, $n$ positiv, ganzzahlig | | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$ | (Regel 12) |
| 8 | [1] $\frac{f(t)}{t}$ | | $\int_{s}^{\infty} F(u)\, du$ | (Regel 14) |
| 9 | [2] $\sigma(t-a) f(t-a)$ | | $e^{-as} F(s)$ $(a > 0)$ | (Regel 4) |
| 10 | $f(t+T) = f(t)$ | | $\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_{0}^{T} e^{-st} f(t)\, dt$ | |
| 11 | 1 bzw. $\sigma(t)$ Einheitssprung (Einheitsimpuls siehe Nr.50) | | $\frac{1}{s}$ | |
| 12 | $t$ Rampe | | $\frac{1}{s^2}$ | |
| 13 | $t^a$ | | [3] $\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ $(a > -1)$ | |
| 14 | $t^{-\frac{1}{2}}$ | | $(\frac{\pi}{s})^{\frac{1}{2}}$ | |
| 15 | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ | | $\frac{1}{s^n}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ | |

[1] Voraussetzung ist: $\lim_{t \to +0} \frac{f(t)}{t}$ existiert

[2] Definition: $\sigma(t-a) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq a \\ 0 & \text{für } t < a \end{cases}$

[3] EULER'sche Gammafunktion: $\Gamma(a+1) := \int_{0}^{\infty} x^a e^{-x}\, dx$

$\Gamma(n+1) = n!$ $n$ ganz, nicht negativ

| Nr. | $f(t)$ für $t \geq 0$ | $\circ\!\!-\!\!\bullet$ | $F(s)$ |
|---|---|---|---|
| 16 | [1)] $e^{at}$ | | $\frac{1}{s-a}$ |
| 17 | $\sin\ at$ | | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| 18 | $\cos\ at$ | | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| 19 | [2)] $e^{bt}\sin\ at$ | | $\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$ |
| 20 | $e^{bt}\cos\ at$ | | $\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$ |
| 21 | $e^{at}\,t^n$ | | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| 22 | $\sinh\ at$ | | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| 23 | $\cosh\ at$ | | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |
| 24 | $at - \sin\ at$ | | $\frac{a^3}{s^2\,(s^2+a^2)}$ |
| 25 | $1 - \cos\ at$ | | $\frac{a^2}{s\,(s^2+a^2)}$ |
| 26 | $\sin\ at - at\cos\ at$ | | $\frac{2\,a^3}{(s^2+a^2)^2}$ |
| 27 | $\sin\ at + at\ \cos\ at$ | | $\frac{2\,a\,s^2}{(s^2+a^2)^2}$ |
| 28 | $t\sin\ at$ | | $\frac{2\,a\,s}{(s^2+a^2)^2}$ |
| 29 | $t\cos\ at$ | | $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ |
| 30 | $\sinh\ at + \sin\ at$ | | $\frac{2\,a\,s^2}{s^4-a^4}$ |
| 31 | $\sinh\ at - \sin\ at$ | | $\frac{2\,a^3}{s^4-a^4}$ |
| 32 | $\cosh\ at + \cos\ at$ | | $\frac{2\,s^3}{s^4-a^4}$ |
| 33 | $\cosh\ at - \cos\ at$ | | $\frac{2\,a^2\,s}{s^4-a^4}$ |

[1)] [2)] Die Größen a, b sind reell

| Nr. | $f(t)$ für $t \geq 0$ | | $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $F(s)$ |
|---|---|---|---|
| | *) | | |
| 34 | $1 - e^{-at}$ | | $\frac{a}{s(s+a)}$ |
| 35 | $t\,e^{-at}$ | | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| 36 | $\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$ | $(b \neq a)$ | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ |
| 37a) | $\frac{1}{\omega_e}\,e^{-D\omega_0 t}\,\sin\,\omega_e t$ mit $\omega_e = \omega_0\sqrt{1-D^2}$ | | $\frac{1}{s^2+2D\omega_0 s+\omega_0^2}$ |
| 37b) | $e^{-D\omega_0 t}\,(\cos\,\omega_e t - \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\,\sin\,\omega_e t)$ mit $\omega_e = \omega_0\sqrt{1-D^2}$ | | $\frac{s}{s^2+2D\omega_0 s+\omega_0^2}$ |
| 38 | $e^{-at}\,\sin\,bt$ | | $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$ |
| 39 | $e^{-at}\,\cos\,bt$ | | $\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$ |
| 40 | $\frac{(\alpha-a)e^{-at}-(\alpha-b)e^{-bt}}{b-a}$ | $(b \neq a)$ | $\frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$ |
| 41 | $\frac{1}{a^2}(at + e^{-at} - 1)$ | | $\frac{1}{s^2(s+a)}$ |
| 42 | $\frac{1}{a^2}[1 - (at+1)e^{-at}]$ | | $\frac{1}{s(s+a)^2}$ |
| 43 | $\frac{e^{-at}}{(n-1)!}\,t^{n-1}$ | $(n \geq 2)$ ganzzahlig | $\frac{1}{(s+a)^n}$ |
| 44 | $\frac{1}{ab} + \frac{be^{-at}-ae^{-bt}}{ab(a-b)}$ | $(b \neq a)$ | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ |
| 45 | $\frac{1}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0\omega_e}\,e^{-D\omega_0 t}\,\sin(\omega_e t + \varphi)$ mit $\omega_e = \omega_0\sqrt{1-D^2}$ und $\varphi = \arccos D$ | | $\frac{1}{s(s^2+2D\omega_0 s+\omega_0^2)}$ |
| 46 | $\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$ | | $\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$ |

*) Die Größen $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $D$, $\omega_0$ sind reelle Zahlen

| Nr. | $f(t)$ für $t \geq 0$ | | $F(s)$ |
|---|---|---|---|
| 47 | [1] $J_0(at)$ | | $\frac{1}{\sqrt{(s^2 + a^2)}}$ |
| 48 | $\sigma(t - t_0)$ | | $\frac{e^{-st_0}}{s}$ |
| 49 | $\delta(t - t_0)$ | | $e^{-st_0}$ |
| 50 | $\delta(t)$ | Einheitsimpuls | $1$ |
| 51 | [2] $\mathrm{si}(t)$ | | $\frac{1}{s}\operatorname{arccot} s$ |
| 52 | $\frac{1 - e^{-t}}{t}$ | | $\ln(1 + \frac{1}{s})$ |
| 53 | [3] $\operatorname{erf}\sqrt{t}$ | | $\frac{1}{s\sqrt{(s + 1)}}$ |
| 54 | [4] $\operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$ | | $\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$ |
| 55 | $\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{\frac{-a^2}{4t}}$ | | $e^{-a\sqrt{s}}$ |
| 56 | $\frac{e^{\frac{-a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$ | | $\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$ |

[1] BESSELfunktion 0.Ordnung:

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

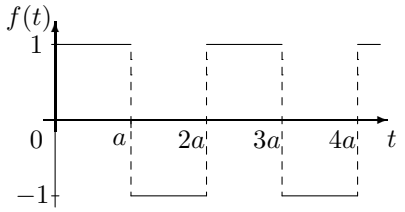
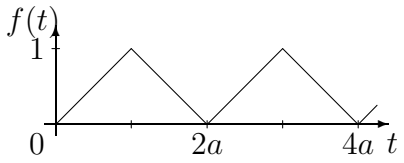
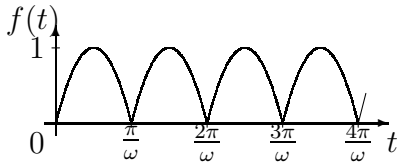
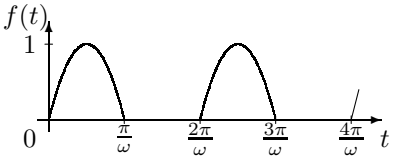
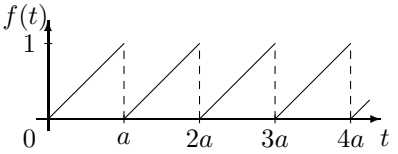
[2] Integralsinus: $\mathrm{si}(t) := \int_0^t \frac{\sin x}{x}\, dx$

[3] Fehlerfunktion (error function):

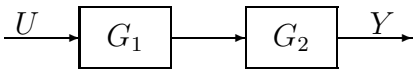
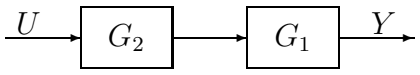
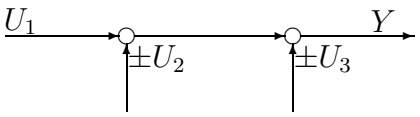
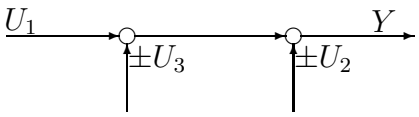
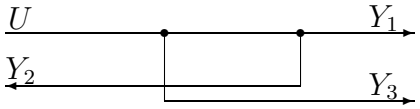
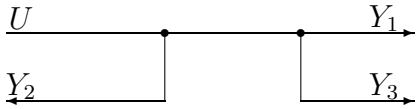
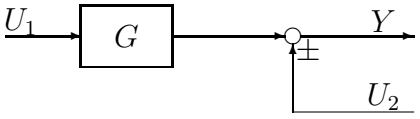
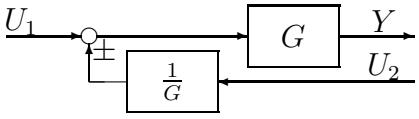
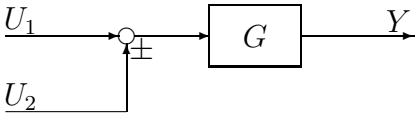
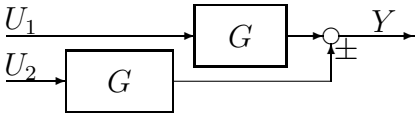
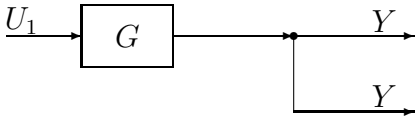
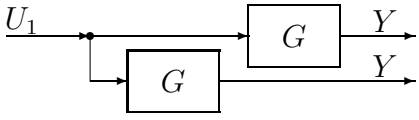
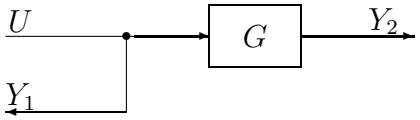
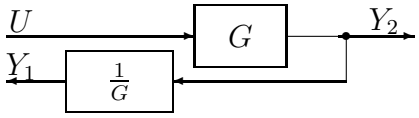
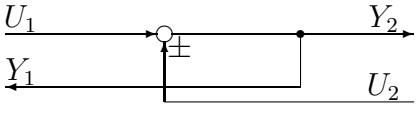
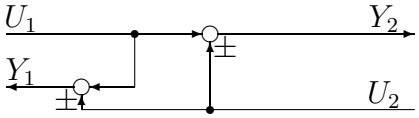
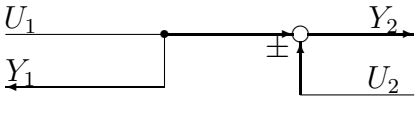
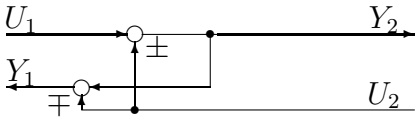
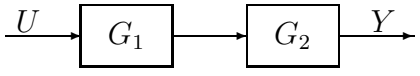
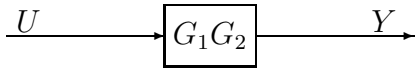
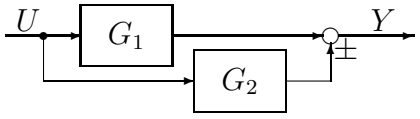
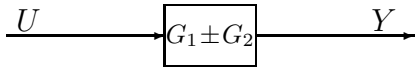
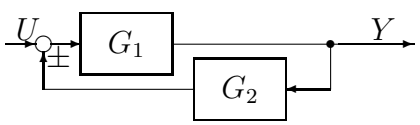
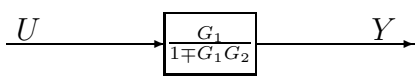
$$\operatorname{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2}\, dx$$

[4] Komplementäre Fehlerfunktion:

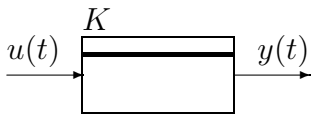
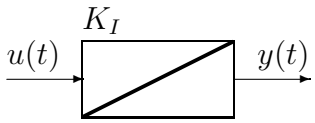
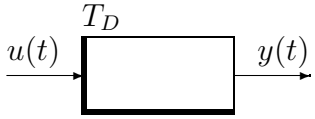
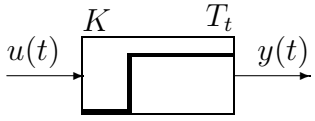
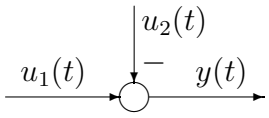
$$\operatorname{erfc} := 1 - \operatorname{erf}(t)$$

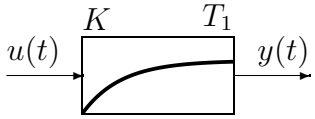
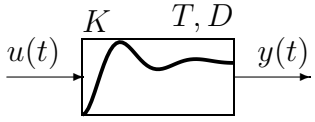
| Nr. | $f(t)$ für $t \geq 0$ | $\circ\!\!-\!\!\bullet$ | $F(s)$ |
|---|---|---|---|
| 57 | Rechtecksignal   | | $\frac{1}{s}\,\tanh(\frac{a\,s}{2})$ |
| 58 | Dreiecksignal   | | $\frac{1}{a\,s^2}\,\tanh(\frac{a\,s}{2})$ |
| 59 | Recktifizierte Sinuskurve $f(t) = \lvert\sin\omega t\rvert$   | | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\,\coth(\frac{\pi\,s}{2\,\omega})$ |
| 60 | Abgeschnittene Sinuskurve   | | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\,(\,\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}\,)$ |
| 61 | Sägezahnfunktion   | | $\frac{1}{a\,s^2} - \frac{e^{-as}}{s\,(1-e^{-as})}$ |
| 62 | $\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}$ | | $\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s\,\sinh l\sqrt{s}}$ |
| 63 | $1+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 t}\cos(n-\frac{1}{2})\pi x$ | | $\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\,\cosh\sqrt{s}}$ |

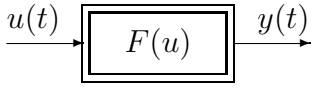
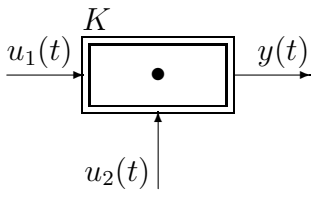
## A.5 Regeln zum Umformen von Blockschaltbildern

| Vorgang | Originalschaltung | entsprechende Schaltung |
|---|---|---|
| Vertauschen von Elementen |  |  |
| Vertauschen von Summationsstellen |  |  |
| Vertauschen von Verzweigungsstellen |  |  |
| Verlegen einer Summationsstelle entgegen der Wirkungsrichtung |  |  |
| Verlegen einer Summationsstelle in Wirkungsrichtung |  |  |
| Verlegen einer Verzweigungsstelle entgegen der Wirkungsrichtung |  |  |
| Verlegen einer Verzweigungsstelle in Wirkungsrichtung |  |  |
| Verlegen einer Verzweigungsstelle vor eine Summationsstelle |  |  |
| Verlegen einer Verzweigungsstelle hinter eine Summationsstelle |  |  |
| Zusammenfassung einer Reihenschaltung |  |  |
| Zusammenfassung einer Parallelschaltung |  |  |
| Zusammenfassung einer Kreisschaltung |  |  |

## A.6 Blockschaltbildsymbole im Zeitbereich

| **Elementare lineare Glieder** | | |
|---|---|---|
| P–Glied | $y(t) = Ku(t)$ |   |
| I–Glied | $y(t) = K_I \int_0^t u(\tau)\, d\tau$ |   |
| D–Glied | $y(t) = T_D \dot{u}(t)$ |   |
| $T_t$–Glied | $y(t) = Ku(t - T_t)$ |   |
| Summationsstelle | $y(t) = u_1(t) \pm u_2(t)$ |   |

| **Zusammengesetzte lineare Glieder** | | |
|---|---|---|
| $PT_1$–Glied | $T_1 \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$ |   |
| $PT_2$–Glied | $T^2 \ddot{y}(t) + 2DT\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$ mit $T = \frac{1}{\omega_0}$ |   |

| **Nichtlineare Glieder** | | |
|---|---|---|
| Kennlinienglied | $y(t) = F[u(t)]$ |   |
| Multiplizierglied | $y(t) = Ku_1(t)\, u_2(t)$ |   |