Institut für Theoretische Physik
Universität Ulm



Nichtlineare optische Eigenschaften von Quantum-Well-Systemen in Micro-Cavities

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
Dr. rer. nat.
der Fakultät für Naturwissenschaften
der Universität Ulm

vorgelegt von
Reiner Steib
aus Eberhardzell

Ulm 2006

Amtierender Dekan:	Prof. Dr. A. Groß
1. Gutachter:	Prof. Dr. P. Reineker
2. Gutachter:	Prof. Dr. R. G. Winkler
Tag der Promotion:	19. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

I Single-Quantum-Well 9

1 Motivation und Überblick 11

2 Theoretische Beschreibung des Single-Quantum-Wells 15

2.1 Mikroskopische Beschreibung 16
2.1.1 Hamiltonoperator für die kohärente Bewegung 16
2.1.2 Ableitung der Maxwell-Bloch-Gleichungen 17
2.1.3 Zusammensetzung der Beiträge zum elektrischen Feld am Quantum-Well 20
2.1.4 Übergang auf ein rotierendes Bezugssystem 22
2.1.5 Stationäre Lösung bei verschwindendem Testfeld 23
2.1.6 Linearisierung der Bewegungsgleichungen 25
2.1.7 Stabilitätsanalyse der stationären Lösung 25
2.1.8 Lösung der linearisierten Bewegungsgleichungen 28
2.1.9 Definition und Berechnung der Suszeptibilitäten 30
2.1.10 Der Fall des freien Quantum-Wells 32
2.2 Übergang zur makroskopischen Polarisation 34
2.2.1 Die mikroskopische Polarisation eines Zwei-Niveau-Systems 34
2.2.2 Die makroskopische Polarisation des Quantum-Wells . . 35
2.3 Stetigkeits- und Sprungbedingungen der Cavity 36
2.3.1 Bezeichnungen der Indizes der Felder 36
2.3.2 Verhalten des Felds am Quantum-Well 38
2.3.3 Transmission und Reflexion an der Micro-Cavity 46
2.4 Berechnung der transmittierten und reflektierten Felder 51
2.4.1 Gleichungen für die Felder 51
2.4.2 Ergebnis für die transmittierten und reflektierten Felder 54
2.4.3 Der Grenzfall eines schwaches Pumpfelds 55

3 Numerische Ergebnisse für das Single-Quantum-Well 59
3.1 Definitionen und experimentelle Werte 59
3.1.1 Definition der Frequenzen und Dämpfungskonstanten . . 59
3.1.2 Typische experimentelle Werte 61
3.2 Suszeptibilität 63
3.3 Transmissionsspektren 70

II Doppel-Quantum-Well 75

4 Theoretische Beschreibung des Doppel-Quantum-Wells 77
4.1 Struktur eines Doppel-Quantum-Wells 77
4.2 Beitrag des statischen elektrischen Feldes zum Hamiltonoperator 79
4.3 Kompensationsbeitrag der indirekten Exzitonen 80
4.4 Stationäre Lösung und Bistabilität 84
4.4.1 Stationäre Lösung bei verschwindendem Testfeld 84
4.4.2 Bistabilität der stationären Lösung 85
4.4.3 Berechnung des Bistabilitätsbereichs bei festem Λ 87
4.4.4 Bistabilitätsbereich bei festem I_p 89
4.4.5 Ergebnis für die Besetzungszahl 91
4.5 Bewegungsgleichungen im rotierenden System 93
4.6 Linearisierung der Bewegungsgleichungen 93
4.7 Suszeptibilität beim Doppel-Quantum-Well 96

5 Numerische Ergebnisse für das Doppel-Quantum-Well 99
5.1 Suszeptibilität beim Doppel-Quantum-Well 99
5.2 Instabilität beim Doppel-Quantum-Well 100
5.3 Transmission beim Doppel-Quantum-Well 106

III Single-Quantum-Well mit Spin 111

6 Theoretische Beschreibung des Single-Quantum-Wells mit Spin 113
6.1 Mathematische Beschreibung des zirkular polarisierten Lichtfelds 113
6.2 Hamiltonoperator 115
6.3 Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Koeffizienten vom Spin-Index 120
6.4 Darstellung der Felder 121
6.5 Diskussion von bestimmten Fällen 124
6.5.1 Pump- und Testfeld linear polarisiert und senkrecht zueinander stehend 124

6.5.2 Pump- und Testfeld linear polarisiert mit beliebigem eingeschlossenen Winkel 128

Zusammenfassung **131**

Summary **135**

A Resonanz-Fluoreszenz-Spektrum eines angeregten TLS **139**
A.1 Dressed-Atom-Konzept 139
A.2 Maxwell-Bloch-Gleichungen ohne Dämpfung 143

B Untersuchung von Grenzfällen **145**
B.1 Näherungen für die Resonanznenner F, D_i und D_g 145
B.2 Näherungen für die dimensionslosen Suszeptibilitäten $\{h_{ij}\}$ . . . 146
B.3 Näherungen für die Koeffizienten $\{c_{ij}\}$ 147
B.3.1 Für verschwindendes Detuning 147
B.3.2 Für kleines Detuning 148

Literaturverzeichnis **151**

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

1 Microcavity-Struktur mit Quantum-Wells 6

Single-Quantum-Well

1.1 Single-Quantum-Well 12
1.2 Felder in der Cavity 13
1.3 Transmission vs. Detuning für verschiedene Pumpintensitäten . 13
1.4 Erzeugung des phasenkonjungierten Feldes 14

2.1 Transmittierte und reflektierte Felder 15
2.2 Stationäre Lösung für die Besetzungszahl $\bar{n}$ 26
2.3 Stationäre Lösung für $\bar{p}$ 27
2.4 Bezeichnung der Felder 37
2.5 Transmissionsmatrix: Von links einfallendes Feld 46
2.6 Transmissionsmatrix: Von rechts einfallendes Feld 47
2.7 Energieerhaltung 48
2.8 Rabi-Aufspaltung 56

3.1 Verschiedene Suszeptibilitäten 65
3.1 Verschiedene Suszeptibilitäten (Fortsetzung) 66
3.2 Suszeptibilität $\langle h_{11} \rangle$ 68
3.3 Suszeptibilität $\langle h_{12} \rangle$ 69
3.4 Vergleich der Transmission 72
3.4 Vergleich der Transmission (Fortsetzung) 73
3.5 Transmission für verschiedene Pumpstärken 74

Doppel-Quantum-Well

4.1 Doppel-Quantum-Well ohne statisches elektrisches Feld 78
4.2 Doppel-Quantum-Well mit statischem elektrischen Feldes 81
4.3 Diskriminante D_c in Abhängigkeit von δ 86
4.4 Bereich negativer Diskriminante in der δ-I_p-Ebene 88

4.5 Bereich negativer Diskriminante für sehr kleine Pumpintensitäten 89
4.6 Bistabilitätsbereich bei vorgegebener Pumpstärke 90
4.7 Besetzungszahl $\bar{n}$ 91
4.8 Besetzungszahl $\bar{n}$ im Bistabilitätsbereich 92

5.1 Suszeptibilitäten für verschiedene Pumpstärken 102
5.1 Suszeptibilitäten für verschiedene Pumpstärken (Fortsetzung) . 103
5.2 Untersuchung des Nenners der Suszeptibilitäten 104
5.2 Untersuchung des Nenners der Suszeptibilitäten (Fortsetzung) . 105
5.3 Bistabilitätsbereich und Instabilitätsbereich für $I_p = 0.1$ 106
5.4 Transmission für verschiedene Pumpstärken 107
5.4 Transmission für verschiedene Pumpstärken (Fortsetzung) . . . 108

Single-Quantum-Well mit Spin

6.1 Schematische Darstellung der Bandstruktur von GaAs 116
6.2 Quantenmechanischen Auswahlregeln bei GaAs 117
6.3 Bezeichnung der Felder 122
6.4 Einfallende Felder zu Abschnitt 6.5.1 124
6.5 Winkelabhängigkeit der transmittierten Felder 127
6.6 Einfallende Felder zu Abschnitt 6.5.2 127
6.7 Winkelabhängigkeit der transmittierten Felder 129
6.8 Winkelabhängigkeit für $\theta = 60°$ 130

Anhang

A.1 Energie-Niveaus im Dressed-Atom-Konzept 140

Tabellenverzeichnis

Single-Quantum-Well

3.1 Verwendete Frequenzen und Dämpfungskonstanten 62

Doppel-Quantum-Well

4.1 Abschätzung für den effektiven Separationsparameters η 83

Symbolverzeichnis

Griechische Symbole sind entsprechend der deutschen Transkription sortiert (z.B. „δ“ als „delta“). Die Nummern in Klammern bezeichnen die Gleichung, in der das Symbol eingeführt wurde.

A

α_{ij} nichtlineare Suszeptibilitäten ..... (2.43), Seite 30

B

B Hilfsmatrix ..... (2.108), Seite 51

C

c_{ij} Koeffizienten ..... (2.111), Seite 52

$c_{Q,m}$ Quantum-Well-Koeffizient (dimensionslos) ..... (2.83), Seite 44

D

D_g Resonanznenner $D(\omega_g)$ ..... (2.40), Seite 29

D_i Resonanznenner $D(\omega_i)$ ..... (2.40), Seite 29

D_p Resonanznenner $D(\omega_p)$ ..... (2.21), Seite 22

Δ Pump-Probe-Detuning ..... (2.20), Seite 22

δ skalierte Pumpfrequenz ..... (4.16), Seite 85

δn Abweichung von der stationären Lösung $\bar{n}$ ..... (2.32), Seite 25

δp Abweichung von der stationären Lösung $\bar{p}$ ..... (2.23), Seite 23

E

E_{cs} Kompensationsfeld *(charge separation)* ..... Seite 80

E_g^R reflektiertes Feld (ω_g) ..... Seite 37

E_g^T transmittiertes Feld (ω_g) ..... Seite 37
E_i^0 Einfallendes Testfeld ..... Seite 37
E_i^R reflektiertes Feld (ω_i) ..... Seite 37
E_i^T transmittiertes Feld (ω_i) ..... Seite 37
$\boldsymbol{E}_{\text{st.}}$ statisches elektrisches Feld ..... (4.2), Seite 79
$\mathcal{E}$ elektrisches Feld ..... (2.1), Seite 16
$\mathcal{E}_g$ erzeugtes Feld ..... (2.13), Seite 21
$\mathcal{E}_i$ Testfeld ..... (2.13), Seite 21
$\mathcal{E}_p$ Pumpfeld ..... (2.13), Seite 21
η effektiver Separationsparameter ..... (4.8), Seite 82

F

F Resonanznenner ..... (2.38), Seite 29

G

Γ longitudinale Dämpfungsrate ..... Seite 19
γ transversale Dämpfungsrate (Dephasing) ..... Seite 19
γ_{inh} inhomogene Linienverbreiterung ..... (3.1), Seite 60

H

H Hamiltonoperator ..... (2.1), Seite 16
$H_{\text{c–f}}$ Hamiltonoperator, Wechselwirkungsanteil ..... (2.1), Seite 16
H_{coh} Hamiltonoperator, kohärenter Anteil ..... (2.1), Seite 16
h_{ij} dimensionslose Suszeptibilitäten ..... (2.80), Seite 43
H_{kin} Hamiltonoperator, kinetischer Anteil ..... (2.1), Seite 16

I

I_p dimensionslose Pumpintensität ..... (2.28), Seite 24

L

ℓ mittlerer Abstand der Ladungsträger ..... (4.4), Seite 79
L Dicke der Cavity ..... Seite 37
Λ inverser Separationsparameter ..... (4.16), Seite 85

M

$\mathcal{M}$	Übergangsmatrix für die Cavity	(2.93), Seite 48
μ	Übergangsdipolmoment	(2.1), Seite 16

N

n	Besetzungszahl des Leitungsbandes	(2.3), Seite 17
$n^{(2D)}$	Anzahldichte der Zwei-Niveau-Systeme	(2.58), Seite 35
n_1	Koeffizient in $\delta n(t)$	(2.37), Seite 28
N_{an}	Anzahl der Wellenbäuche *(anti-nodes)*	(2.117), Seite 55
$\bar{n}$	stationäre Lösung von n (ohne Testfeld)	(2.26), Seite 23

O

ω'	Testfeld-Detuning	(3.3), Seite 61
ω_{bare}	Anregungsenergie im Doppel-Quantum-Well	(4.6), Seite 80
ω_c	Leitungsband-Energie	(2.1), Seite 16
ω_v	Valenzband-Energie	(2.1), Seite 16
ω_{cav}	Cavity-Resonanzfrequenz	(2.117), Seite 55
ω_{cv}	Bandlücke	Seite 19
ω_g	Frequenz des erzeugten Felds	(2.13), Seite 21
ω_i	Frequenz des Testfelds	(2.13), Seite 21
Ω_{LF}	Rabi-Aufspaltung	(2.117), Seite 55
Ω_p	Rabi-Frequenz	(2.22), Seite 22
ω_p	Frequenz des Pumpfelds	(2.13), Seite 21

P

P	Polarisation	(2.3), Seite 17
p	Polarisation im rotierenden System	(2.18), Seite 22
p_1	Koeffizient in $\delta p(t)$	(2.37), Seite 28
p_2	Koeffizient in $\delta p(t)$	(2.37), Seite 28
$\bar{p}$	stationäre Lösung von p (ohne Pumpfeld)	(2.23), Seite 23
ϕ	Phase von Ω_p	(2.45), Seite 31
ϕ_μ	Phase des Dipolmoments	(2.85), Seite 45

R

R	Reflexion	(2.96), Seite 48
r	Reflexionskoeffizient	(2.94), Seite 48
ρ	Abweichung des Reflexionskoeffizients	(2.102), Seite 49

T

T	Transmission	(2.96), Seite 48
t	Transmissionskoeffizient	(2.94), Seite 48
$T_i^{(1)}$	Transmission	(3.6), Seite 70
$T_i^{(2)}$	Transmission ohne phasenkonjungiertes Feld	(3.6), Seite 70
τ	$t^2 - r^2$	(2.112), Seite 53

Z

z_Q	Position des Quantum-Wells	Seite 37

Einleitung

Diese Arbeit befaßt sich mit der theoretischen Untersuchung von interessanten nichtlinearen optischen Effekten – wie zum Beispiel optische Bistabilität und parametrische Instabilität – in Halbleiter-Quantum-Well-Systemen, die in eine Micro-Cavity (Mikroresonator) eingebettet sind. Dies ist ein überaus spannendes und aktuelles Themengebiet, das gegenwärtig intensiv erforscht wird. In der Einleitung wird zunächst ein allgemeiner Überblick über die Bedeutung von elektronischen und optischen Eigenschaften von Halbleitern gegeben. Es folgt eine Erläuterung der wichtigsten Begriffe, wie beispielsweise Quantum-Wells, Micro-Cavities und Bistabilität. Anschließend wird auf aktuelle Entwicklungen eingegangen sowie der Aufbau der vorliegenden Arbeit und die darin erzielten neuen Ergebnisse erläutert.

Elektronische Eigenschaften von Halbleitern

Die elektronischen Eigenschaften von Halbleitern bilden die Basis der „digitalen Revolution“, die im ausgehenden 20. Jahrhundert einen Umbruch der Produktionsweise und fast aller Lebensbereiche darstellte und noch immer darstellt. Die Entwicklung immer kleinerer und leistungsfähigerer Computer-Bauelemente hat nicht nur das Potential der modernen Wissenschaft erweitert, sondern praktisch alle Aspekte unseres täglichen Lebens beeinflußt. Diese tiefgreifende Entwicklung basiert auf der Möglichkeit, die elektronischen Eigenschaften von Halbleitern gezielt zu manipulieren und die Bauelemente bis an die durch die Quantenmechanik vorgegebene Grenze zu minimieren. Dies ermöglicht die immer höhere Verdichtung von Halbleiterbauelementen.

Optische Eigenschaften von Halbleitern

Parallel zur Entwicklung der elektronischen Halbleiterbauelemente erfolgte der technologische Einsatz der optischen Eigenschaften von Halbleitern. Lichtemittierende Dioden (LED) aus Gallium-Arsenid (GaAs) werden im Alltag in den Displays elektrischer Geräte eingesetzt. Halbleiterlaser finden sich in CD- und DVD-Playern und -Recordern (Lesen und Beschreiben von optischen Datenträgern) sowie in Laser-Druckern. Darüber hinaus vergrößern Glasfaser-Anschlüsse die Kapazität der Kommunikationsnetzwerke drastisch. Deren Lichtquellen, Verstärker und Detektoren bestehen aus elektrooptischen Halbleiterbauelementen. Die Vergabe des Nobelpreises für Physik im Jahre 2000 [1] für grundlegende Arbeiten auf dem Gebiet der Informations- und Kommunikationstechnologie unterstreicht die Bedeutung dieses Gebiets. Der Preis ging zu je einem Viertel an Z. I. Alferov und H. Kroemer für die Entwicklung von Halbleiterheterostrukturen (siehe dazu auch den folgenden Abschnitt über Quantum-Wells) in der Hochgeschwindigkeits- und Optoelektronik und zur Hälfte an J. K. Kilby für seinen Beitrag zur Entwicklung des Integrierten Schaltkreises.

Quantum-Wells

In den letzten Jahrzehnten wurde es durch moderne Kristallwachstumstechniken möglich, Schichten aus Halbleitermaterialien zu produzieren, die so dünn sind, daß die Bewegung der Elektronen praktisch auf zwei Dimensionen beschränkt ist. Halbleiterschichten, die eine Dicke von weniger als 100 Å aufweisen, werden als *quantum-confined quasi-two-dimensional systems* bezeichnet. In solchen Quantum-Well-Strukturen (Quanten-Trog) sind die elektronischen Wellenfunktionen wie stehende Wellen in einem Rechteck-Potential quantisiert. Da die Elektronenbewegung senkrecht zur Quantum-Well-Schicht unterdrückt wird, ist der Halbleiter „quasi-zweidimensional“ [2,3]. Die Erfolge in der Nanotechnologie ermöglichen es, niederdimensionale Systeme wie Quantum-Wells, Quanten-Drähte und Quanten-Punkte sowie optische und elektronische Bauelemente mit bestimmten gewünschten Eigenschaften herzustellen und zu optimieren. Der Quanten-Hall-Effekt [4] und der Fraktionale Quanten-Hall-Effekt [5] sind Beispiele für neuartige Phänomene, die durch die Verfügbarkeit

von Halbleitersystemen mit reduzierter Dimension entdeckt wurden.

Micro-Cavities

Eine Micro-Cavity besteht typischerweise aus einer sehr dünnen Fabry-Perot-Cavity (Dicke im Bereich weniger Licht-Wellenlängen), in die ein Quantum-Well, eine dünne Halbleiterschicht, mehrere Quantum-Wells, Quanten-Drähte oder Quanten-Punkte eingebettet sind. Die Cavity ist von zwei Bragg-Spiegeln eingeschlossen. Ein Bragg-Spiegel ist eine periodische Struktur, die aus zwei Halbleitermaterialien oder Dielektrika mit unterschiedlichen Brechungsindizes besteht. Die Dicke der Schichten ist dabei so gewählt, daß das von allen Grenzflächen reflektierte Licht innerhalb eines gewissen spektralen Bereichs (Stop-Band) destruktiv interferiert. In Micro-Cavities hoher Güte erreicht das Reflexionsvermögen 99 % innerhalb des Stop-Bandes. Die Dicke der Cavity-Schicht beträgt gewöhnlich ein bis drei Licht-Wellenlängen bezogen auf das Zentrum des Stop-Bandes. Der Q-Faktor[1] der Cavity-Resonanzmode *(cavity mode)*, d. h. einer in der Cavity eingeschlossenen Licht-Mode, hängt vom Reflexionsvermögen der Spiegel ab und erreicht Werte von 1500–2000 [6]. Bei Quantum-Micro-Cavities werden die Parameter der Bragg-Spiegel und der Cavity so gewählt, daß eine Resonanz zwischen der Cavity-Resonanzmode und der Exziton-Resonanz[2] der eingebetteten Quanten-Struktur besteht. Der fundamentale Unterschied zwischen einer Fabry-Perot-Cavity und einer Micro-Cavity sind (Quanten-)Effekte, die aufgrund der geringen Abmessungen des Systems auftreten, beispielsweise eine Modifikation der Rate der spontanen Emission.

[1] Als Q-Faktor bezeichnet man das Verhältnis der Cavity-Resonanz-Frequenz zur Halbwertsbreite: $\frac{\omega_{\mathrm{cav}}}{\Delta\omega_{\mathrm{cav}}}$.

[2] In Halbleitern und organischen Materialien kann sich ein gebundener Zustand bestehend aus einem negativ geladenen Elektron und einem positiv geladenen Loch durch Absorption eines Photons bilden. Diesen gebundenen Zustand (ein Quasiteilchen[3]) bezeichnet man als Exziton [7–9]. Wenn das Elektron und das Loch rekombinieren, wird wieder ein Photon emittiert.

[3] Als Quasiteilchen bezeichnet man teilchenartige Gebilde, die in bestimmten Systemen wechselwirkender Teilchen entstehen. Dieses Gebilde kann ein gebundener Zustand, eine elementare Anregung oder eine Kombination mehrerer Teilchen in einem Festkörper sein, auf die durchaus typische Teilcheneigenschaften angewandt werden können. Das Konzept der Quasiteilchen geht auf Landaus Theorie der Fermi-Flüssigkeiten [10, 11] zurück.

Micro-Cavities sind aus den folgenden Gründen hervorragend dazu geeignet, nichtlineare optische Effekte zu untersuchen. Befindet sich Halbleitermaterial im Inneren einer Micro-Cavity werden die durch Rekombination entstandenen Photonen an den Wänden der Cavity reflektiert. Die Cavity-Photonen wechselwirken mit den Quantum-Well-Exzitonen und bilden ein neues Quasiteilchen (Cavity-Polariton), das sowohl Licht- als auch Materie-Eigenschaften besitzt. Die experimentelle Untersuchung von Cavity-Polaritonen begann historisch mit Reflexionsmessungen, welche die starke Kopplung zwischen der Exziton-Resonanz und der Cavity-Mode zeigten [12]. Wenn das Quantum-Well eine ausgeprägte Exziton-Resonanz besitzt und die Breite der entarteten Exziton- und der Cavity-Linie genügend schmal sind, beobachtet man zwei Peaks im Transmissionsspektrum und zwei Dips im Reflexionsspektrum. Diese Form der Licht-Materie-Wechselwirkung bezeichnet man als *normal-mode coupling* (NMC) [13]. Micro-Cavity-Systeme ermöglichen es, sowohl elektronische als auch photonische Eigenschaften in ein und derselben Struktur zu kontrollieren. Cavity-Polaritonen besitzen eine Reihe von interessanten Eigenschaften etwa eine sehr kleine Masse und einen kleinen *in-plane* Wellenvektor. Sie können im Gegensatz zu Exziton-Polaritonen in Volumen-Halbleitern[4] einfach und direkt untersucht werden, was die Entdeckung einer Vielzahl von neuartigen optischen Phänomenen ermöglichte [17, 18]. Beispielsweise basiert der *vertical cavity surface emitting laser (VCSEL)*, ein Halbleiterlaser bei dem das Licht senkrecht zur Ebene des Halbleiterchips abgestrahlt wird, auf Micro-Cavities. VCSEL werden bei optischen Kurzstreckenverbindungen (z. B. *Gigabit Ethernet* oder *Fibre Channel*) oder digitalen Signalprozessoren mit optischem Kern [19, 20] eingesetzt.

Vor kurzem wurden Polaritonen auch in Micro-Cavities gefunden, die mit organischen Materialien gefüllt waren (J-Aggregate von Zyanin-Farbstoffen [21], NTCDA-Polykristalle[5] [22]). Theoretische Aspekte dazu wurden in [23–25] behandelt.

[4] Exziton-Polaritonen, in den 1950er Jahren vorhergesagt [14, 15], wurden seit den 1960er Jahren in Volumen-Halbleitern [16] untersucht.

[5] NTCDA: *napthalenetetracarboxylic dianhydride*

Optische Bistabilität

Ein weiterer wichtiger Aspekt dieser Arbeit ist Bistabilität. Es wird sich zeigen, daß im System, das in Teil II untersucht wird, die Besetzungszahl $\bar{n}$ der stationären Lösung bistabil bezüglich der Pump-Frequenz wird.

Ein System wird als bistabil bezeichnet, wenn es im stationären Zustand für einen gegebenen Satz von Input-Parametern zwei interne Zustände annehmen kann und somit zwei korrespondierende stabile Output-Werte möglich sind. Zu jedem Zeitpunkt hängt der Output von der Vorgeschichte ab. Durch temporäre Änderung des Inputs sollte es möglich sein, das System in einen beliebigen der beiden Zustände zu bringen. Bistabile Systeme sind nichtlinear, jedoch ist Nichtlinearität kein hinreichendes Kriterium für Bistabilität. Bistabilität tritt in zahlreichen Gebieten der Physik auf, z. B. der Mechanik, dem Magnetismus, der Elektronik und der Optik. Den Übergang zwischen den beiden Zuständen kann man als Nichtgleichgewichtsphasenübergang bezeichnen. Das Konzept der optischen Bistabilität wurde in den frühen 1960er Jahren entdeckt, nachdem durch das Aufkommen der Laser enorm viele nichtlineare optische Phänomene sowohl theoretisch als auch experimentell untersucht wurden [26, 27].

Bistabile Systeme kann man auf zweierlei Arten klassifizieren. Ein System kann absorbierend oder dispersiv sein, und es kann intrinsisch oder hybrid sein. Ob ein System absorbierend oder dispersiv ist, hängt davon ab, ob das Feedback mittels intensitätsunabhängiger Absorption oder über den Brechungsindex auftritt. Offenbar ist diese Unterscheidung nicht scharf, da beide Mechanismen simultan auftreten können. Die Unterscheidung zwischen intrinsisch *(all-optical)* und hybrid (Mischung von Optik und Elektronik) ist dagegen scharf. In einem intrinsischen System rührt die Intensitätsabhängigkeit von einer direkten Wechselwirkung zwischen Licht und Materie her. In einem Hybrid-System wird die Intensitätsabhängigkeit durch ein elektrisches Signal aus einem Detektor, der die transmittierte Intensität überwacht, erzeugt. Dieses Signal wird meist über einen Phasenschieber angewandt, der sich in der Cavity befindet.

Optische Speicher und schnelle optische Schaltungen [28] können auf Bistabilität basieren. Moderne elektronische Computer benötigen eine große Dichte

von Transistoren pro Flächeneinheit und sehr schnelle Schaltungen. Aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation sind der Verkleinerung elektronischer Schaltungen Grenzen gesetzt, wenn sich die Bauelemente atomaren Größen annähern. Der Geschwindigkeit von elektronischen Schaltungen (Transistoren) sind ebenfalls Grenzen gesetzt. Optische Schaltungen bieten mehr Freiheit in der Topologie, da sich optische Signale ohne Störungen kreuzen können. Ein vollständig optischer Computer *(all-optical computer)* [29] könnte diese Beschränkungen aufheben und neue Möglichkeiten für rechenintensive Anwendungen aufgrund der inhärenten Parallelisierungsmöglichkeiten bieten.

Optische Bistabilität bei Quanten-Well-Systemen in Micro-Cavities

Die Erforschung sowohl von Quantum-Wells als auch der optischen Bistabilität haben eine relativ lange Geschichte. Die Ergebnisse sind heutzutage bereits etabliert und in zahlreiche Anwendungen eingeflossen. Durch die Kombination mit Micro-Cavities eröffnete sich in den 1990er Jahren jedoch ein neues und hochaktuelles Forschungsgebiet das in den letzten Jahren intensiv erforscht wurde [6, 13, 18, 30–37].

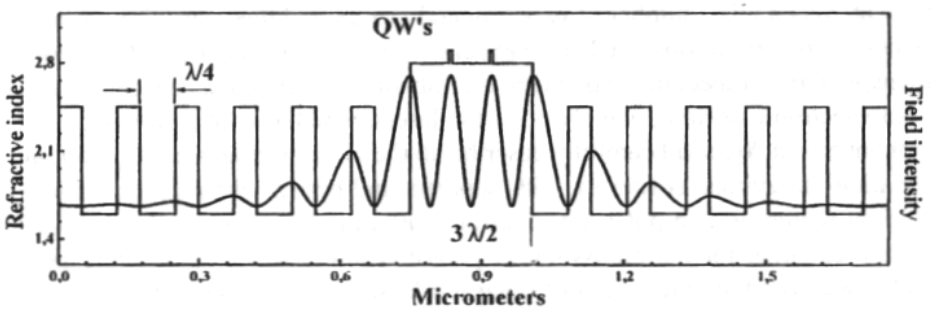


Abbildung 1: Eine typische Microcavity-Struktur (aus [6]).
Die Quantum-Wells sind an den Bäuchen des elektrischen Feldes innerhalb der Micro-Cavity positioniert.

Abbildung 1 zeigt eine typische Microcavity-Struktur. Die zentrale Schicht ist zwischen zwei Bragg-Spiegel eingebettet und hat eine Dicke $3\lambda/2$, wobei λ die Wellenlänge der Cavity-Resonanzmode (und der Exziton-Resonanz) ist. Ein oder mehrere Quantum-Wells werden an den Bäuchen des elektrischen Feldes positioniert, um ein starke Kopplung zu erreichen.

Gliederung der Arbeit

In der vorliegenden Dissertation werden nichtlineare optische Eigenschaften von Quantum-Well-Systemen untersucht, die sich im Inneren einer Micro-Cavity befinden. Das Quantum-Well-System stellt ein optisch nichtlineares Material dar. Es wird die Pump-Probe-Konfiguration betrachtet, bei der ein Pumpfeld das Material anregt, und die dadurch hervorgerufenen Wechselwirkungen mit Hilfe eines Testfelds detektiert werden.

Die Betrachtung des Single-Quantum-Well-Systems in Teil I, bei dem ein relativ einfaches analytisch handhabbares Modell verwendet wird, dient zugleich als Referenzsystem für die Untersuchung von Pump-Probe-Spektren bei komplizierteren Systemen. Diese Systeme sind zum einen gekoppelte Doppel-Quantum-Well-Systeme unter dem Einfluß eines statischen elektrischen Feldes (dies ist in Teil II dargestellt). Zum anderen sind es Single-Quantum-Well-Systeme unter Berücksichtigung des Spins des Halbleitermaterials und der Polarisation der einwirkenden Lichtfelder (Teil III).

Bei den in Teil II untersuchten Doppel-Quantum-Well-Systemen verschieben sich die Energieniveaus der beiden Quantum-Well-Systeme aufgrund des externen stationären Feldes und es entstehen bei geeigneter Wahl der Frequenz des Pumpfeldes indirekte Exzitonen. Indirekte Exzitonen sind Exzitonen, die durch räumlich getrennte Elektronen und Löcher in verschiedenen Schichten des Quantum-Wells gebildet werden. In dieser Konfiguration wird deshalb ein statisches Dipolmoment erzeugt. Die hier durchgeführte theoretische Beschreibung gilt nicht nur für diese spezielle Doppel-Quantum-Well-Konfiguration, sondern auch wesentlich allgemeiner für andere Materialien mit räumlich getrennten Ladungsträgern (z. B. organische *Charge-Transfer*-Kristalle [38]). Diese in der Literatur bislang nicht untersuchte Kombination mit einem statischen Dipolmoment ermöglicht die Erforschung neuartiger nichtlinearer optischer Eigenschaften. Durch das statische Dipolmoment im Quantum-Well kann es bei bestimmten Parametern zu Bistabilität kommen. Diese Bistabilität kann bereits bei nur *einem* einwirkenden Feld auftreten, d. h. wenn nur das Pumpfeld und kein Testfeld vorhanden ist.

Bei den Untersuchungen der Quantum-Well-Systeme mit statischem Dipolmo-

ment wurde ein weiterer interessanter Effekt entdeckt. Bei genügend großer Pumpstärke entsteht in der Pump-Probe-Konfiguration eine Instabilität des Systems in Bezug auf das Testfeld. Die zugehörigen Suszeptibilitäten divergieren, d. h. selbst ein infinitesimal kleines Test-Signal wird zu einer endlichen Amplitude verstärkt. Dieses infinitesimal kleine Test-Signal kann physikalisch durch die spontane Emission realisiert werden. Dieses unvermeidbare quantenmechanische Rauschen wird verstärkt und führt zu einer endlichen Population der Testfeld-Mode. Simultan wird das phasenkonjungierte Feld angeregt und es erreicht ebenfalls eine endliche Amplitude. Dieser Effekt der spontanen Erzeugung von Feldern kann als spezielles Beispiel für allgemeine Phänomene parametrischer Instabilität (wie z. B. [33]) betrachtet werden, die in Systemen mit externem Einfluß stattfinden können.

In Teil III wird abschließend das Referenzmodell aus Teil I im Hinblick auf Halbleiter-Quantum-Well-Systeme erweitert. Dabei werden im Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators (Wechselwirkung zwischen den Ladungsträgern und dem Lichtfeld) die nach den quantenmechanischen Auswahlregeln erlaubten Übergänge berücksichtigt. Dazu muß beim Halbleitermaterial der Spin und beim elektrischen Feld die Polarisation des Feldes betrachtet werden.

Teil I

Single-Quantum-Well

Kapitel 1

Motivation und Überblick

Experimentelle Beobachtung und deren Interpretation

Von Quochi et al. [31] wurden Halbleiter-Quantum-Wells (siehe Abbildung 1.1 auf der nächsten Seite) untersucht, die sich in einer Micro-Cavity hoher Güte befinden (Abbildung 1.2 auf Seite 13). Bei den mit Femto-Sekunden Laser-Pulsen durchgeführten Pump-Probe-Experimenten[1] wurde erstmals auch in Halbleiter-Quantum-Wells der Übergang vom Polariton-Dublett zum dynamischen Stark-Triplett *(ac Stark triplet)* bei Erhöhung der Pumpintensität beobachtet (siehe Abbildung 1.3 auf Seite 13).

Wenn ein freies Zwei-Niveau-System durch ein starkes kohärentes Feld angeregt wird, beobachtet man eine Triplett-Struktur in der Resonanz-Fluoreszenz. Mollow [40] berechnete die Emission eines freien Zwei-Niveau-Systems (das sogenannte Mollow-Triplett), sowie die optische Suszeptibilität eines stark angeregten Zwei-Niveau-Systems (Mollow-Spektrum). Die Triplett-Struktur in der Resonanz-Fluoreszenz kann man im Rahmen des Dressed-Atom-Konzepts (Anhang A.1) erklären.[2] Bei starker Anregung verändert sich die Struktur der

[1] Eine kurze Erklärung zu den Prinzipien von Pump-Probe-Experimenten findet sich beispielsweise in [39].

[2] Alternativ kann man die Lösung der Maxwell-Bloch-Gleichungen im rotierenden Bezugssystem bei Vernachlässigung der Dämpfung (Anhang A.2) betrachten.

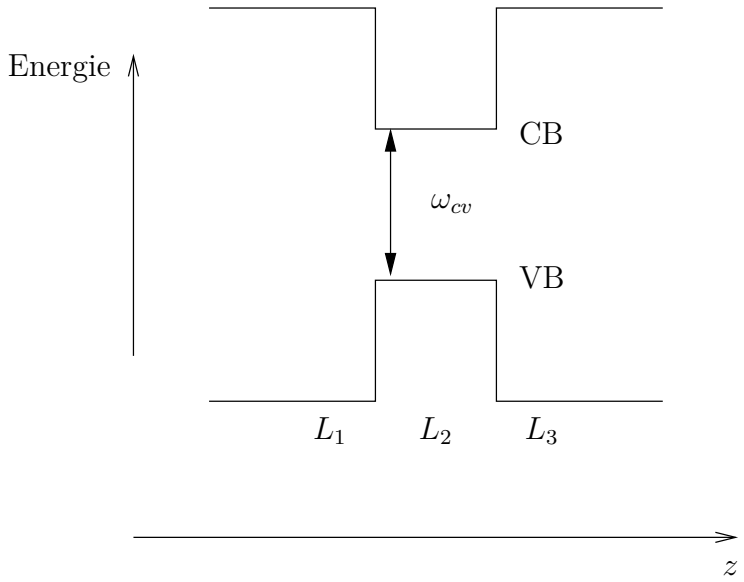


Abbildung 1.1: Ein Single-Quantum-Well besteht aus einer aktiven Schicht L_2 mit der Anregungsenergie ω_{cv} (das Leitungsband und das Valenzband sind mit CB bzw. VB bezeichnet). Die aktive Schicht ist auf beiden Seiten von einem Barrierenmaterial (L_1 und L_3) umgeben, das eine größere Energielücke besitzt.

Energie-Niveaus des Zwei-Niveau-Systems signifikant *(Stark shift)*, so daß zusätzliche Resonanzen – symmetrisch zur Frequenz der Anregung und jeweils um die Rabi-Frequenz [41] verschoben – auftreten. Bei schwacher Anregung hingegen ergibt sich beim freien Zwei-Niveau-System eine Singulett-Struktur. Wenn sich das angeregte Zwei-Niveau-System jedoch in einer Cavity befindet, beobachtet man aufgrund der Rabi-Aufspaltung (Kopplung zwischen Zwei-Niveau-System und Cavity) anstatt dieser Singulett-Struktur eine Dublett-Struktur [42–44].

Quochi et al. erklärten ihre Beobachtung in einem Modell, bei dem die nichtlineare optische Suszeptibilität eines Zwei-Niveau-Systems (Mollow-Spektrum) sowie die Randbedingungen der Micro-Cavity berücksichtigt wurden. Die in diesem Szenario berücksichtigten Felder sowie die Cavity und das Quantum-Well sind in Abbildung 1.2 auf der nächsten Seite skizziert.

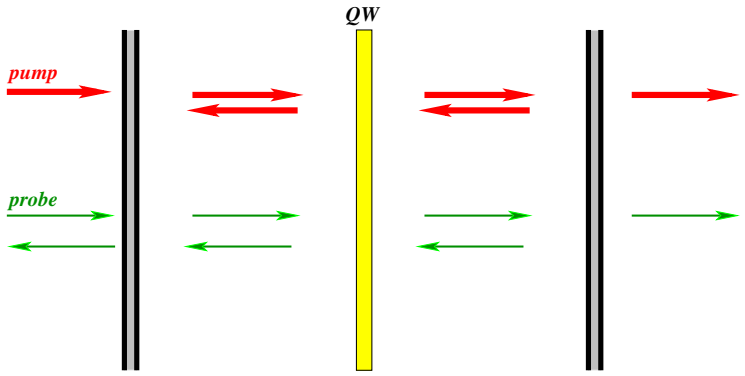


Abbildung 1.2: Felder in der Cavity und am Quantum-Well, die bei der Interpretation in [31] berücksichtigt wurden.

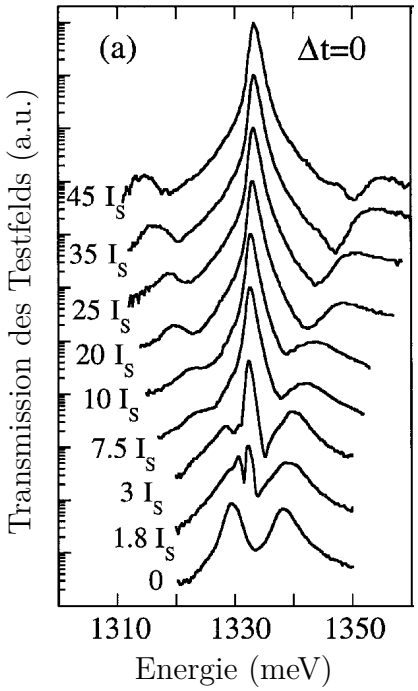


Abbildung 1.3: Messung der (Probe-) Transmission in Abhängigkeit von der Energie des Testfelds für verschiedene Pumpintensitäten [31].

Was wurde bei dieser Interpretation vernachlässigt?

Bei dieser Interpretation wurde vernachlässigt, daß bei nichtverschwindender Pumpintensität I_p neben der Mollow-Polarisation [40] ein zusätzliches, phasenkonjungiertes Feld $\mathcal{E}_g$ mit der Frequenz $\omega_g \equiv 2\omega_p - \omega_i$ entsteht [45] (siehe Abbildung 1.4).

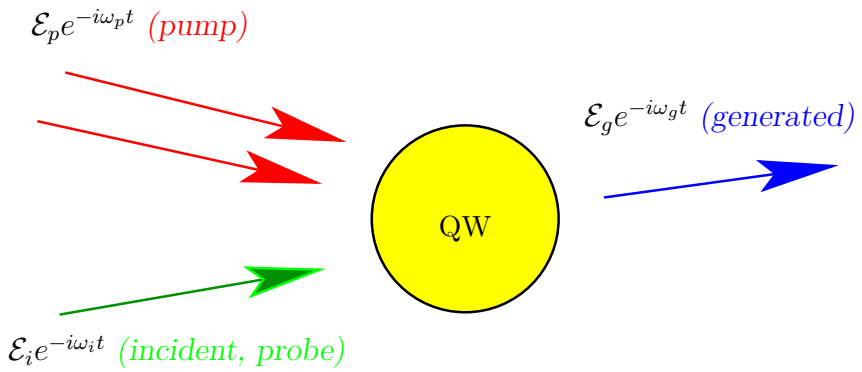


Abbildung 1.4: Nichtlinearer Prozeß zur Erzeugung des phasenkonjungierten Feldes $\mathcal{E}_g$ mit der Frequenz $\omega_g \equiv 2\omega_p - \omega_i$.

Für die Mollow-Polarisation gilt

$$p_i \sim \alpha_{11}(I_p) \cdot \mathcal{E}_i e^{-i\omega_i t}\,, \tag{1.1}$$

wobei ω_i die Frequenz des Testfelds und α_{11} die zugehörige Suszeptibilität bezeichnen.[3]

Das phasenkonjungierte Feld verursacht einen zusätzlichen Anteil p_g zur Polarisation (α_{21} ist die zugehörige Suszeptibilität):

$$p_g \sim \alpha_{21}(I_p) \cdot \mathcal{E}_i^* e^{-i\omega_g t}\,. \tag{1.2}$$

Diese zusätzliche Polarisation wurde in [31] nicht berücksichtigt.

[3] Details siehe Abschnitt 2.1 auf Seite 16ff, insbesondere Abschnitt 2.1.10 auf Seite 32.

Kapitel 2

Theoretische Beschreibung des Single-Quantum-Wells

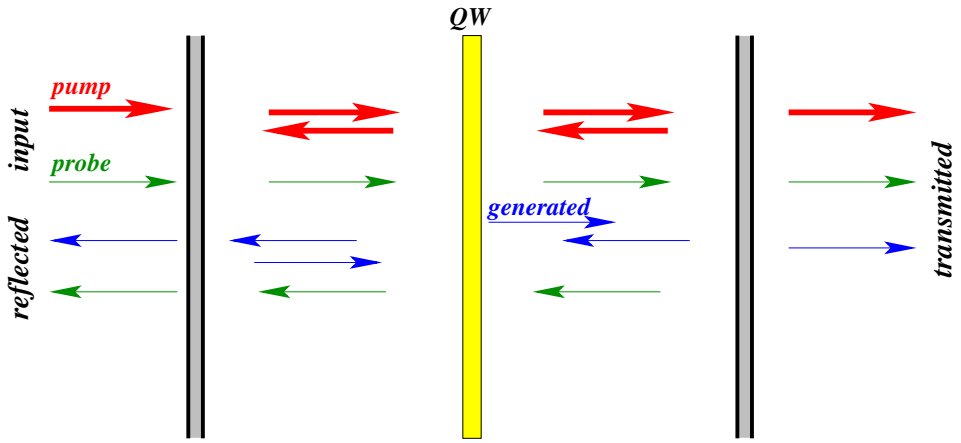


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der eingehenden *(input)*, transmittierten *(transmitted)* und reflektierten *(reflected)* Felder.

In diesem Kapitel wird das in Teil I der Arbeit verwendete Modell vorgestellt. In Teil I wird nur ein Single-Quantum-Well betrachtet. Das Quantum-Well befindet sich im Inneren einer Micro-Cavity und wird durch ein starkes Pumpfeld *(pump)* und ein schwaches Testfeld[1] *(probe)* angeregt. Das Ziel ist es letztendlich, die Intensitäten der transmittierten und reflektierten Felder, wie sie in Abbildung 2.1 schematisch dargestellt sind, unter Berücksichtigung des phasenkonjungiertes Feldes (siehe Abbildung 1.4) zu berechnen.

[1] Das Testfeld wird auch als Probefeld bezeichnet.

Zunächst wird ein mikroskopisches Modell für die komplexe Polarisation im Halbleiter-Quantum-Well betrachtet, die sich aufgrund der Anregung durch die auftretenden elektrischen Felder ausbildet (Abschnitt 2.1). Danach wird die zugehörige makroskopische Polarisation berechnet (Abschnitt 2.2 ab Seite 34) und die Stetigkeits- und Sprungbedingungen, die sich durch die Einbettung in die Micro-Cavity ergeben, berücksichtigt (Abschnitt 2.3 ab Seite 36). Schließlich werden die transmittierten und reflektierten Felder berechnet (Abschnitt 2.4 ab Seite 51). Die numerischen Ergebnisse für das Single-Quantum-Well sind in Abschnitt 3 ab Seite 59 dargestellt.

2.1 Mikroskopische Beschreibung

2.1.1 Hamiltonoperator für die kohärente Bewegung

Der kohärente Anteil des Hamiltonoperators für ein Zwei-Niveau-System (TLS, *two level system*) in einem externen Feld lautet

$$\begin{aligned} H_{\text{coh}} &= H_{\text{kinetic}} + H_{\text{carrier–field}} \\ &= \omega_c a_c^\dagger a_c + \omega_v a_v^\dagger a_v - \left(\mu \mathcal{E}(t)\, a_c^\dagger a_v + \mu^* \mathcal{E}^*(t)\, a_v^\dagger a_c\right) . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Indizes v und c bezeichnen das Valenz- bzw. Leitungsband des Modellhalbleiters.[2] ω_c und ω_v sind die zum Valenz- bzw. Leitungsband gehörigen Energien (mit $\hbar = 1$). Die Operatoren $a_c^\dagger$ und a_c (bzw. $a_v^\dagger$ und a_v) sind die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für die Elektronen im Valenzband (bzw. Leitungsband). Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gehorchen den Fermi-Vertauschungsregeln

$$\left[a_c, a_c^\dagger\right]_+ = 1 \quad \text{und} \quad \left[a_v, a_v^\dagger\right]_+ = 1 . \tag{2.2}$$

[2] Es wird auf die Berücksichtigung der k-Abhängigkeit verzichtet, da sie am Γ-Punkt vernachlässigbar ist. Die Berücksichtigung wäre in der Rechnung leicht möglich, jedoch würde sie in die späteren numerischen Auswertungen eine hohe Zahl an unbestimmten Parametern einbringen.

μ bezeichnet das Übergangsdipolmoment für den Übergang vom Valenz- zum Leitungsband ($\boldsymbol{\mu} \equiv \langle\, c\,|e\boldsymbol{r}|\, v\,\rangle$). Die reelle Größe $\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}^*(t)$ ist das am Ort des Zwei-Niveau-Systems herrschende elektrische Feld.

Die komplexe (mikroskopische) Polarisation eines Zwei-Niveau-Systems wird als der quantenmechanische Erwartungswert

$$P \equiv \left\langle a_v^\dagger a_c \right\rangle \tag{2.3a}$$

definiert und die Besetzungszahl des Leitungsband als

$$n \equiv \left\langle a_c^\dagger a_c \right\rangle . \tag{2.3b}$$

P, P^* und n sind dimensionslose Größen (mit $P^* \equiv \left\langle a_c^\dagger a_v \right\rangle$).

2.1.2 Ableitung der Maxwell-Bloch-Gleichungen

Allgemein gilt für einen Operator A im Heisenberg-Bild die Bewegungsgleichung

$$i\,\frac{d}{dt}A = [\,A, H\,]_- \,, \tag{2.4}$$

die man auch als Heisenbergsche Bewegungsgleichung bezeichnet [46, 47].

Kohärenter Anteil

Ausgehend vom Hamiltonoperator (2.1) und den Definitionen (2.3) werden die Bewegungsgleichungen für die Zweierkombinationen der im Hamiltonoperator auftretenden Operatoren berechnet.

Für die in der Definition der Polarisation P (2.3a) auftretende Operatorkom-

bination gilt

$$i\,\frac{d}{dt}\left(a_v^\dagger a_c\right) = i\left(\frac{d}{dt}a_v^\dagger\right)a_c + ia_v^\dagger\frac{d}{dt}a_c\,.$$

Mit (2.4) und den Vertauschungsregeln (2.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} i\,\frac{d}{dt}\left(a_v^\dagger a_c\right) &= \left[\,a_v^\dagger, H_{\mathrm{coh}}\,\right]_- a_c + a_v^\dagger[\,a_c, H_{\mathrm{coh}}\,]_- \\ &= (\omega_c - \omega_v)a_v^\dagger a_c + \mu\mathcal{E}\left(a_c^\dagger a_c - a_v^\dagger a_v\right)\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Für die Operatorkombination $a_c^\dagger a_c$ aus der Definition der Besetzungszahl n (2.3b) ergibt sich

$$\begin{aligned} i\,\frac{d}{dt}\left(a_c^\dagger a_c\right) &= i\left(\frac{d}{dt}a_c^\dagger\right)a_c + ia_c^\dagger\frac{d}{dt}a_c \\ &= \left[\,a_c^\dagger, H_{\mathrm{coh}}\,\right]_- a_c + a_c^\dagger[\,a_c, H_{\mathrm{coh}}\,]_- \\ &= -\mu\mathcal{E}a_c^\dagger a_v + \mu^*\mathcal{E}^* a_v^\dagger a_c \end{aligned}$$

und nach Bildung des Erwartungswerts erhält man für den kohärenten Anteil an der Bewegungsgleichung für n

$$\frac{d}{dt}n = i\mu\mathcal{E}P^* - i\mu^*\mathcal{E}^*P\,. \tag{2.6}$$

Für die Besetzungszahl des Valenzbands wird die Operatorkombination $a_v^\dagger a_v$ betrachtet

$$\begin{aligned} i\,\frac{d}{dt}\left(a_v^\dagger a_v\right) &= i\left(\frac{d}{dt}a_v^\dagger\right)a_v + ia_v^\dagger\frac{d}{dt}a_v \\ &= \left[\,a_v^\dagger, H_{\mathrm{coh}}\,\right]_- a_v + a_v^\dagger[\,a_v, H_{\mathrm{coh}}\,]_- \\ &= \mu\mathcal{E}a_c^\dagger a_v - \mu^*\mathcal{E}^* a_v^\dagger a_c \end{aligned}$$

und man erhält

$$\frac{d}{dt}\left\langle a_v^\dagger a_v\right\rangle = -i\mu\mathcal{E}P^* + i\mu^*\mathcal{E}^*P\,.$$

Der Vergleich mit (2.6) ergibt

$$\frac{d}{dt}\left\langle a_v^\dagger a_v \right\rangle = -\frac{d}{dt}\left\langle a_c^\dagger a_c \right\rangle = -\frac{d}{dt} n \,. \tag{2.7}$$

Aufgrund der Randbedingungen (Gleichgewichtszustand)

$$\left\langle a_v^\dagger a_v \right\rangle\Big|_{\text{equil.}} = 1 \quad \text{und} \quad \left\langle a_c^\dagger a_c \right\rangle\Big|_{\text{equil.}} = 0 \tag{2.8}$$

gilt für die Besetzungszahl $\left\langle a_v^\dagger a_v \right\rangle$ des Valenzbands:

$$\begin{aligned} \left\langle a_v^\dagger a_v \right\rangle &= 1 - \left\langle a_c^\dagger a_c \right\rangle \\ &= 1 - n \,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Die Differenz der Besetzungszahl

$$n - (1 - n) = 2n - 1$$

wird als Inversion bezeichnet. Mit der Definition (2.3a), der Bandlücke $\omega_{cv} \equiv \omega_c - \omega_v$ zwischen Leitungs- und Valenzband und (2.9) ergibt sich schließlich aus (2.5) für den kohärenten Anteil an der Bewegungsgleichung für P:

$$\frac{d}{dt} P = -i\omega_{cv} P + i\,(1 - 2n)\,\mu\mathcal{E} \,. \tag{2.10}$$

Inkohärenter Anteil

Der inkohärente Anteil in den Bewegungsgleichungen wird durch die Einführung phänomenologischer Dämpfungsterme für die Besetzungszahl (longitudinale Dämpfungsrate Γ) und das Dephasing (transversale Dämpfungsrate γ) berücksichtigt.

Für die longitudinale und transversale Dämpfungsrate gilt nach [48] folgende Beziehung:

$$\gamma = \frac{1}{2}\Gamma + \gamma_{\text{collision}} \tag{2.11}$$

und damit gilt stets

$$\gamma \geq \frac{1}{2}\Gamma\,, \tag{2.12}$$

da der durch Stöße verursachte Phasenzerfall $\gamma_{\text{collision}}$ *(collission dephasing rate)* nicht-negativ ist.

Nach Ergänzung durch die Dämpfungsterme erhält man aus den Bewegungsgleichungen (2.6) und (2.10) schließlich die sogenannten Maxwell-Bloch-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}P = -\left(\gamma + i\omega_{cv}\right)P + i\left(1-2n\right)\mu\mathcal{E} \tag{2.13a}$$

$$\frac{d}{dt}P^* = -\left(\gamma - i\omega_{cv}\right)P^* - i\left(1-2n\right)\mu^*\mathcal{E}^* \tag{2.13b}$$

$$\frac{d}{dt}n = -\Gamma n + i\mu\mathcal{E}P^* - i\mu^*\mathcal{E}^*P\,. \tag{2.13c}$$

Die Maxwell-Bloch-Gleichungen werden auch oft als optische Bloch-Gleichungen [48] bezeichnet. Wenn man die k-Abhängigkeit sowie die Coulomb-Wechselwirkung[3] zwischen den Ladungsträgern im Halbleiter mit berücksichtigt, erhält man die Halbleiter-Bloch-Gleichungen [3, 49]. Da das elektrische Feld $\mathcal{E}$ am Quantum-Well über die Maxwell-Gleichungen von der makroskopischen Polarisation (siehe Abschnitt 2.2 auf Seite 34) und damit von der komplexen, mikroskopischen Polarisation P abhängt, sind die Gleichungen (2.13) nichtlinear.

2.1.3 Zusammensetzung der Beiträge zum elektrischen Feld am Quantum-Well

Das von außen einwirkende elektrische Feld $\mathcal{E}(t)$ setzt sich aus einem starken Pumpfeld $\mathcal{E}_p$ *(pump)* und einem schwachen Testfeld $\mathcal{E}_i$ *(probe, incident)* zusammen. Die spektrale Breite des Pumpfeldes wird durch den Filtereffekt der

[3] Da an den Prozessen der Coulomb-Wechselwirkung stets mehr als ein Teilchen beteiligt ist, bezeichnet man diese auch als Vielteilchen-Effekte.

Cavity drastisch reduziert, so daß von einem monochromatischen Pumpfeld ausgegangen werden kann [31].

Bei nichtverschwindendem Pumpfeld wird im Quantum-Well durch das Testfeld ein weiteres Feld $\mathcal{E}_g$ *(generated)* erzeugt (siehe Abschnitt 1 auf Seite 11 und Abbildung 1.4 auf Seite 14). Da dieses Feld nach Reflexion an den Wänden der Micro-Cavity wiederum auf das Quantum-Well einwirkt (siehe Abbildung 2.1 auf Seite 15), wird auch dieses Feld schon von Anfang an berücksichtigt. Eine quantitative Beschreibung dieses Falls wird in Abschnitt 2.1.10 auf Seite 32 gegeben.

Das Feld am Quantum-Well setzt sich demnach folgendermaßen zusammen:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_p e^{-i\omega_p t} + \mathcal{E}_i e^{-i\omega_i t} + \mathcal{E}_g e^{-i\omega_g t} \tag{2.14}$$

Für die Frequenz des erzeugten phasenkonjungierten Feldes[4] gilt:

$$\omega_g \equiv 2\omega_p - \omega_i \,. \tag{2.15}$$

Das Pumpfeld $\mathcal{E}_p$ ist wesentlich stärker als das Testfeld $\mathcal{E}_i$ und das erzeugte Feld $\mathcal{E}_g$:

$$|\mathcal{E}_p| \gg |\mathcal{E}_i| \quad \text{und} \quad |\mathcal{E}_p| \gg |\mathcal{E}_g| \,. \tag{2.16}$$

Deshalb genügt es, die Felder $\mathcal{E}_i$ und $\mathcal{E}_g$ nur in erster Ordnung zu berücksichtigen, während alle Ordnungen des Pumpfelds $\mathcal{E}_p$ berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \mathcal{E}_p e^{-i\omega_p t} + \mathcal{E}_i e^{-i\omega_i t} + \mathcal{E}_g e^{-i\omega_g t} \\ &= \mathcal{E}_p e^{-i\omega_p t} + \mathcal{E}^{(1)}(t) \,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

[4] Andere Frequenz-Kombinationen, wie die dritte Harmonische $2\omega_p + \omega_i$, brauchen hier nicht berücksichtigt zu werden. Aufgrund des experimentellen Setups sind nur Frequenzen nahe bei ω_i von Interesse. Wegen $\omega_p \approx \omega_i$ ist daher nur $\omega_g \equiv 2\omega_p - \omega_i$ relevant.

2.1.4 Übergang auf ein rotierendes Bezugssystem

Die Dynamik des Systems wird durch das Pumpfeld dominiert. Daher ist der Übergang auf ein Bezugssystem, das mit der Frequenz des Pumpfeldes rotiert, zweckmäßig:

$$p(t) \equiv P(t)e^{+i\omega_p t} \quad \Longrightarrow \quad P(t) = p(t)e^{-i\omega_p t}\,. \tag{2.18}$$

Im rotierenden Bezugssystem haben die Maxwell-Bloch-Gleichungen (2.13) die Form

$$\frac{d}{dt}p = -\frac{\gamma}{D_p}p + i(1-2n)\left\{\Omega_p + \mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t} + \mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\} \tag{2.19a}$$

$$\frac{d}{dt}p^* = -\frac{\gamma}{D_p^*}p^* - i(1-2n)\left\{\Omega_p + \mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t} + \mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\}^* \tag{2.19b}$$

$$\frac{d}{dt}n = -\Gamma n + \left[i\left\{\Omega_p + \mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t} + \mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\}p^* + \text{c.c.}\right] \tag{2.19c}$$

Dabei wurden das Pump-Probe-Detuning[5]

$$\Delta_{pi} \equiv \Delta \equiv \omega_p - \omega_i\,, \tag{2.20}$$

der Resonanznenner[6]

$$D_p \equiv \frac{\gamma}{\gamma + i(\omega_{cv} - \omega_p)} \tag{2.21}$$

sowie die Rabi-Frequenz

$$\Omega_p \equiv \mu\mathcal{E}_p \tag{2.22}$$

eingeführt.

Für die Polarisation $p(t)$ im rotierenden System wird (wegen der Form der

[5] In der Literatur wird teilweise auch die Definiton $\Delta \equiv \omega_i - \omega_p$ verwendet, d. h. das Vorzeichen ist umgekehrt.

[6] Die Einführung von D_p vereinfacht die Notation hier noch nicht, jedoch später bei der Lösung der Bewegungsgleichungen auf Seite 29.

Bewegungsgleichungen (2.19)) eine Lösung der Gestalt

$$p(t) = \bar{p} + \delta p(t) \tag{2.23}$$

erwartet. Dabei ist $\bar{p}$ die stationäre Lösung, die man bei verschwindendem Testfeld erhält, und $\delta p(t)$ ist die Abweichung von der stationären Lösung, die in erster Ordnung berücksichtigt wird.

Es wird sich später zeigen (siehe (2.37a) auf Seite 28), daß sich $\delta p(t)$ wie folgt darstellen läßt:

$$\delta p(t) = p_1 e^{-i(\omega_i - \omega_p)t} + p_2 e^{-i(\omega_g - \omega_p)t} \tag{2.24}$$

$$= p_1 e^{i\Delta t} + p_2 e^{-i\Delta t}\,. \tag{2.25}$$

2.1.5 Stationäre Lösung bei verschwindendem Testfeld

Zunächst werden die stationären Lösungen $\bar{p}$, $\bar{p}^*$ und $\bar{n}$ der Maxwell-Bloch-Gleichungen im rotierenden System für verschwindendes Testfeld berechnet ($\mathcal{E}^{(1)}(t) \equiv 0$). Es wird demnach gefordert, daß die zeitlichen Ableitungen auf der linke Seite der Bewegungsgleichungen (2.19) verschwinden:

$$0 = -\frac{\gamma}{D_p}\bar{p} + i(1 - 2\bar{n})\Omega_p \tag{2.26a}$$

$$0 = -\frac{\gamma}{D_p^*}\bar{p}^* - i(1 - 2\bar{n})\Omega_p^* \tag{2.26b}$$

$$0 = -\Gamma\bar{n} + i\Omega_p\bar{p}^* - i\Omega_p^*\bar{p}\,. \tag{2.26c}$$

Aus (2.26) folgt die stationäre Lösung für das System:

$$\bar{p} = i\frac{\Omega_p}{\gamma}\,(1 - 2\bar{n})\,D_p \tag{2.27a}$$

$$\bar{p}^* = -i\frac{\Omega_p^*}{\gamma}\,(1 - 2\bar{n})\,D_p^* \tag{2.27b}$$

und

$$\bar{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2I_p \left[D_p + D_p^* \right]}{1 + 2I_p \left[D_p + D_p^* \right]} \,. \tag{2.27c}$$

Gleichung (2.27c) läßt sich auch als

$$1 - 2\bar{n} = \frac{1}{1 + 2I_p \left[D_p + D_p^* \right]} \tag{2.27d}$$

darstellen. In (2.27c) wurde

$$I_p \equiv \frac{|\Omega_p|^2}{\gamma\Gamma} \tag{2.28}$$

als (dimensionslose) Pumpintensität eingeführt.

In Abbildung 2.2(a) auf Seite 26 erkennt man den linearen Anstieg der Besetzungszahl für schwache Pumpintensität ($\bar{n} \propto I_p$). In Abbildung 2.2(b) ist die Besetzungszahl logarithmisch aufgetragen. Man erkennt die Konvergenz gegen $\frac{1}{2}$ bei sehr hoher Pumpintensität. Die verschiedenen Kurven entsprechen unterschiedlichen Werten des Pump-Detunings. Wegen

$$\begin{aligned} D_p + D_p^* &= 2\,\mathrm{Re}\, D_p \\ &= \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 + (\omega_{cv} - \omega_p)^2} \end{aligned} \tag{2.29}$$

hängt die stationäre Lösung für die Besetzungszahl $\bar{n}$ nur vom Verhältnis $|\omega_{cv} - \omega_p|/\gamma$ ab.

Für das in Abbildung 2.3 auf Seite 27 dargestellte Betragsquadrat gilt aufgrund von (2.27a) und (2.27b):

$$|\bar{p}|^2 = \frac{\Gamma}{\gamma} I_p (1 - 2\bar{n})^2 |D_p|^2 \,. \tag{2.30}$$

$|\bar{p}|^2$ steigt zunächst proportional zur Pumpintensität I_p an. Bei sehr starker Pumpintensität tritt aber eine Sättigung ein und $|\bar{p}|^2$ nimmt schließlich wieder

ab.

2.1.6 Linearisierung der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen (2.19) sollen nun linearisiert werden. Dazu wird folgender Ansatz benutzt:

$$p(t) = \bar{p} + \delta p(t) \tag{2.31a}$$
$$p^*(t) = \bar{p}^* + \delta p^*(t) \tag{2.31b}$$
$$n(t) = \bar{n} + \delta n(t)\,. \tag{2.31c}$$

Nach Einsetzen von (2.31) in (2.19) ergeben sich die linearisierten Bewegungsgleichungen für δp, δp^* und δn:

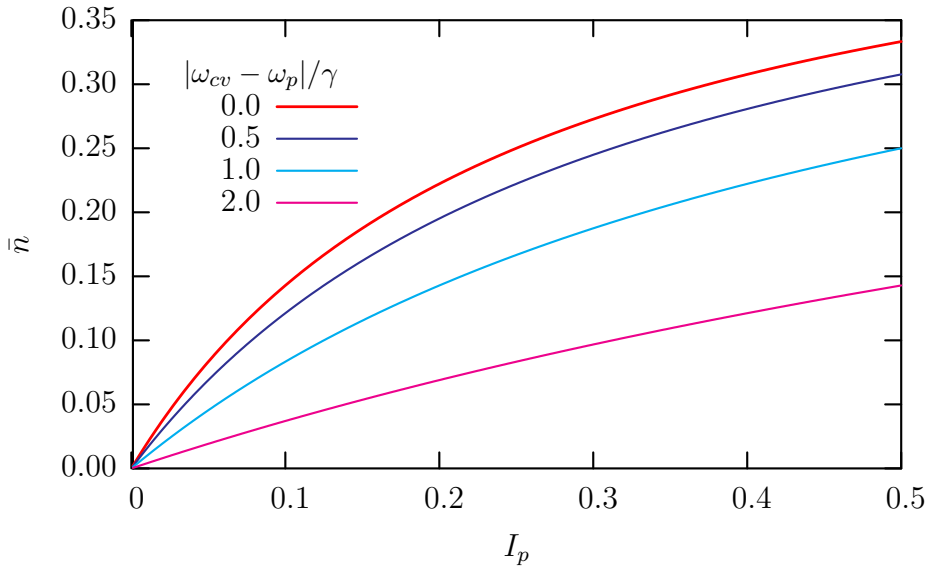
$$\frac{d}{dt}\delta p = -\frac{\gamma}{D_p}\delta p - 2i\Omega_p\delta n + (1-2\bar{n})i\left\{\mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t} + \mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\} \tag{2.32a}$$
$$\frac{d}{dt}\delta p^* = -\frac{\gamma}{D_p^*}\delta p^* + 2i\Omega_p^*\delta n - (1-2\bar{n})i\left\{\mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t} + \mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\}^* \tag{2.32b}$$
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta n = &-\Gamma\delta n + \left[i\Omega_p\delta p^* + \text{c.c.}\right] \\ &+ \left[i\left\{\mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t} + \mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\}\bar{p}^* + \text{c.c.}\right]\end{aligned} \tag{2.32c}$$

Dabei wurden in der Rechnung alle Terme vernachlässigt, die von zweiter Ordnung in $\mathcal{E}_i,\ \mathcal{E}_g$ bzw. $\delta p,\ \delta p^*$ oder δn sind.

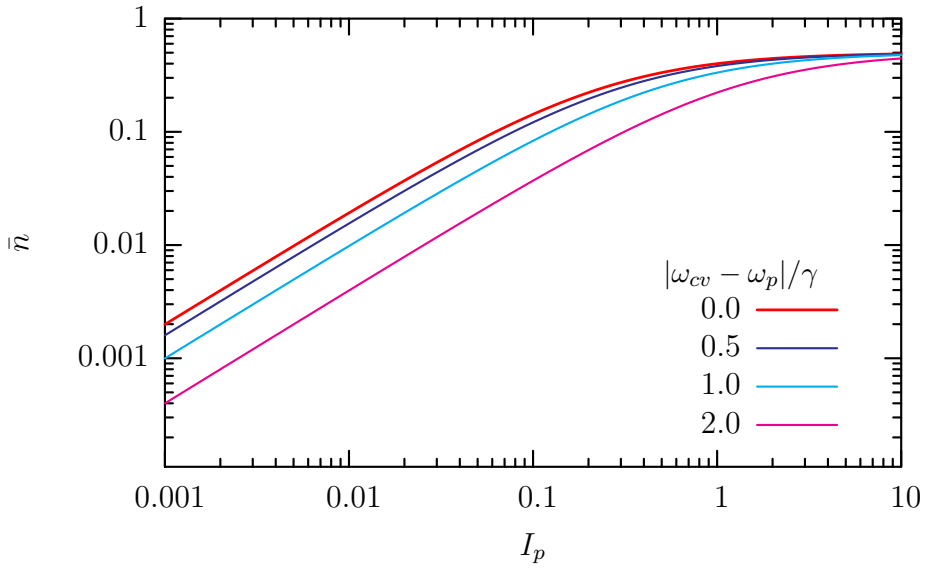
2.1.7 Stabilitätsanalyse der stationären Lösung

Die Stabilitätsanalyse der auf Seite 23 gefundenen stationären Lösung (2.27) führt mit dem Kriterium von Routh-Hurwitz [50] auf die Stabilitätsbedingungen (Determinante D_1)

$$4|\Omega_p|^2 + \left(\gamma^2 + (\omega_p - \omega_{cv})^2\right) + 2\gamma\Gamma > 0 \tag{2.33}$$

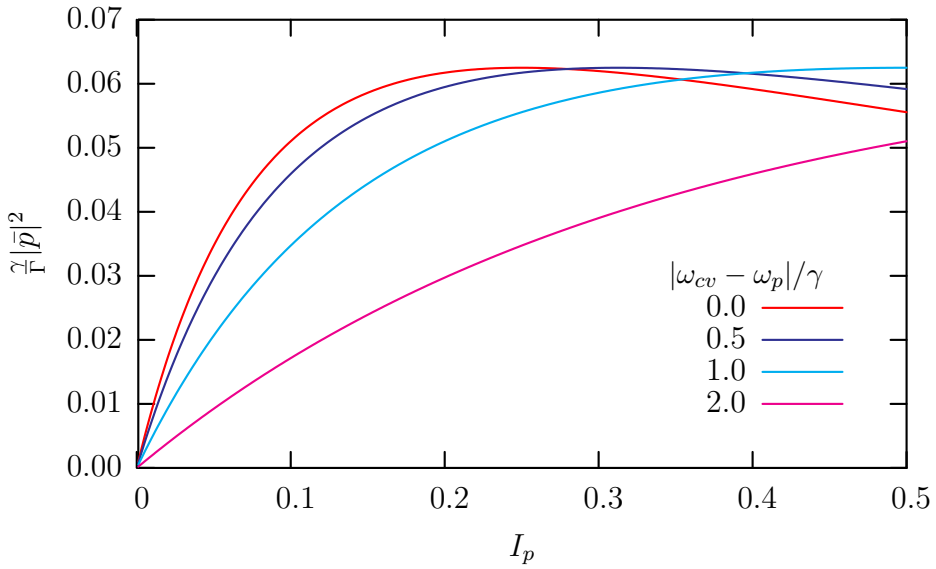


(a) Stationäre Lösung für die Besetzungszahl $\bar{n}$.

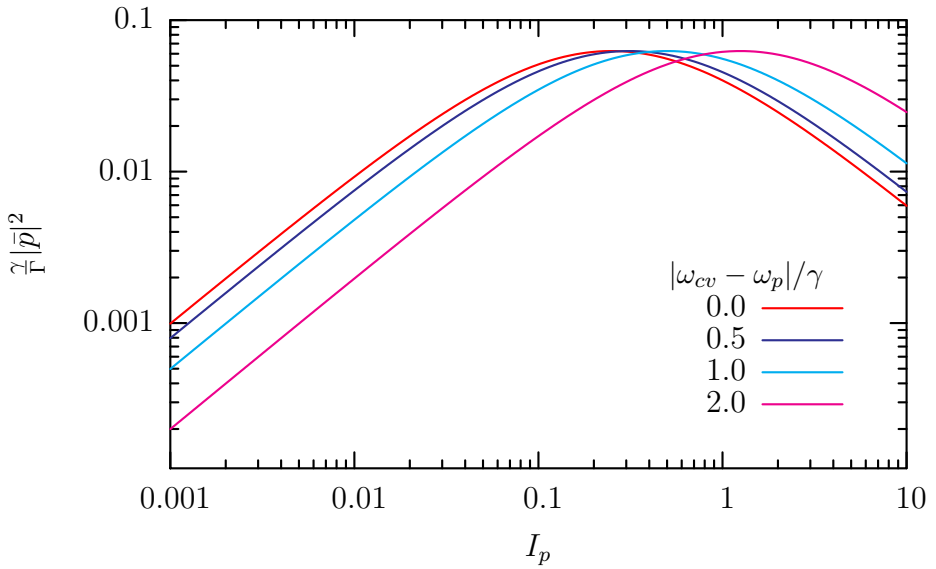


(b) Asymptotisches Verhalten der stationären Lösung.

Abbildung 2.2: Stationäre Lösung für die Besetzungszahl $\bar{n}$, siehe (2.27c). In (a) erkennt man den linearen Anstieg für schwache Pumpintensität ($\bar{n} \propto I_p$) und beim logarithmischen Plot (b) zusätzlich die Konvergenz gegen $\frac{1}{2}$ bei sehr hoher Pumpintensität.



(a) Stationäre Lösung für die Polarisation.



(b) Sättigung bei sehr starker Pumpintensität.

Abbildung 2.3: Die stationäre Lösung $|\bar{p}|^2$ der Polarisation steigt zunächst proportional zu Pumpintensität I_p an (a). Bei sehr starker Pumpintensität tritt aber eine Sättigung ein und $|\bar{p}|^2$ nimmt schließlich wieder ab (b).

sowie (Determinante D_2)

$$4|\Omega_p|^2(\Gamma+\gamma)+2\gamma\left(\gamma^2+(\omega_p-\omega_{cv})^2\right)+2\gamma\Gamma(\Gamma+2\gamma)>0\,. \tag{2.34}$$

Die stationäre Lösung (2.27) ist folglich für alle $\gamma > 0$ und beliebige andere Parameter stabil, da dann die beiden Bedingungen (2.33) und (2.34) für beliebige Werte der Pumpintensität und der Pumpfrequenz erfüllt sind:

$$4|\Omega_p|^2+\left(\gamma^2+(\omega_p-\omega_{cv})^2\right)+2\gamma\Gamma\geq\gamma^2>0 \tag{2.35}$$

und

$$4|\Omega_p|^2(\Gamma+\gamma)+2\gamma\left(\gamma^2+(\omega_p-\omega_{cv})^2\right)+2\gamma\Gamma(\Gamma+2\gamma)\geq 2\gamma^3>0\,. \tag{2.36}$$

In Abschnitt 4.4.2 auf Seite 85ff wird gezeigt, daß dies beim Doppel-Quantum-Well nicht der Fall ist.

2.1.8 Lösung der linearisierten Bewegungsgleichungen

Alle Inhomogenitäten in den linearisierten Bewegungsgleichungen (2.32) sind proportional zu $e^{i\Delta t}$ bzw. $e^{-i\Delta t}$ ($\Delta_{pi} \equiv \Delta$, siehe (2.20)). Deshalb kann man die Lösung des Systems (2.32) in der Form

$$\delta p(t) = p_1 e^{i\Delta t} + p_2 e^{-i\Delta t} \tag{2.37a}$$
$$\delta p^*(t) = p_1^* e^{-i\Delta t} + p_2^* e^{i\Delta t} \tag{2.37b}$$
$$\delta n(t) = n_1 e^{i\Delta t} + n_1^* e^{-i\Delta t} \tag{2.37c}$$

mit zeitunabhängigen Koeffizienten p_1, p_1^*, p_2, p_2^*, n_1 und n_1^* darstellen. Da die Besetzungszahl n reell ist, ist auch δn reell (siehe (2.31c) auf Seite 25). Deshalb wird in Gleichung (2.37c) n_1 und n_1^* verwendet. Ein weiterer, unabhängiger Koeffizient im zweiten Summanden ist nicht erforderlich.

Mit dem Ansatz (2.37) und der Definition

$$F \equiv \frac{\Gamma}{\Gamma+i(\omega_p-\omega_i)} \equiv \frac{\Gamma}{\Gamma+i\Delta_{pi}} \equiv \frac{\Gamma}{\Gamma+i\Delta} \tag{2.38}$$

wird nun die Lösung des Differentialgleichungssystems (2.32) berechnet. Dabei erhält man durch Separation der $e^{i\Delta t}$- und $e^{-i\Delta t}$-Anteile zunächst sechs Gleichungen von denen drei unabhängige Gleichungen verbleiben. Es ergibt sich ein algebraisches Gleichungssystem für die Koeffizienten p_1, p_2^* und n_1:

$$\left(i\Delta + \frac{\gamma}{D_p}\right) p_1 + 2i\Omega_p n_1 = i(1-2\bar{n})\mu\mathcal{E}_i \tag{2.39a}$$

$$\left(i\Delta + \frac{\gamma}{D_p^*}\right) p_2^* - 2i\Omega_p^* n_1 = -i(1-2\bar{n})\mu^*\mathcal{E}_g^* \tag{2.39b}$$

$$i\Omega_p^* p_1 - i\Omega_p p_2^* + \frac{\Gamma}{F} n_1 = (1-2\bar{n})\frac{1}{\gamma}\left\{\mu\mathcal{E}_i\, D_p^*\Omega_p^* + \mu^*\mathcal{E}_g^*\, D_p\Omega_p\right\} . \tag{2.39c}$$

Analog zur Definition (2.21) von D_p werden nun weitere Resonanznenner definiert:

$$D_i \equiv D(\omega_i) \equiv \frac{\gamma}{\gamma + i(\omega_{cv} - \omega_i)} , \tag{2.40a}$$

$$D_g \equiv D(\omega_g) \equiv \frac{\gamma}{\gamma + i(\omega_{cv} - \omega_g)} . \tag{2.40b}$$

Zusammenfassend gilt:

$$D_j \equiv D(\omega_j) \equiv \frac{\gamma}{\gamma + i(\omega_{cv} - \omega_j)} , \qquad j \in \{p, i, g\} . \tag{2.40c}$$

Näherungen (sehr kleines Detuning) für die Resonanznenner D_i, D_g und F sind in Anhang B.1 auf Seite 145 angegeben.

Mit (2.40) ergibt sich aus (2.39) schließlich:

$$\frac{\gamma}{D_i} p_1 + 2i\Omega_p n_1 = i(1-2\bar{n})\mu\mathcal{E}_i \tag{2.41a}$$

$$\frac{\gamma}{D_g^*} p_2^* - 2i\Omega_p^* n_1 = -i(1-2\bar{n})\mu^*\mathcal{E}_g^* \tag{2.41b}$$

$$i\Omega_p^* p_1 - i\Omega_p p_2^* + \frac{\Gamma}{F} n_1 = (1-2\bar{n})\frac{1}{\gamma}\left\{\mu\mathcal{E}_i\, D_p^*\Omega_p^* + \mu^*\mathcal{E}_g^*\, D_p\Omega_p\right\} . \tag{2.41c}$$

2.1.9 Definition und Berechnung der Suszeptibilitäten

Durch Lösen der algebraischen Gleichungen (2.41) erhält man für den Koeffizienten der Besetzungszahl

$$n_1 = (1-2\bar{n})\frac{F}{\gamma\Gamma}\cdot\frac{[D_i+D_p^*]\Omega_p^*\,\mu\mathcal{E}_i+[D_g^*+D_p]\Omega_p\,(\mu\mathcal{E}_g)^*}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]}\,. \tag{2.42}$$

Die Lösungen für die Koeffizienten der Polarisation p_1 und p_2^* kann man in der Form

$$p_1 = \alpha_{11}(\mu\mathcal{E}_i)+\alpha_{12}(\mu\mathcal{E}_g)^* \tag{2.43a}$$
$$p_2^* = \alpha_{21}^*(\mu\mathcal{E}_i)+\alpha_{22}^*(\mu\mathcal{E}_g)^*\,. \tag{2.43b}$$

darstellen, indem man die nichtlinearen Suszeptibilitäten α_{11}, α_{12}, α_{21} und α_{22} einführt. Die Gleichungen (2.43) stellen die Definitionsgleichungen für diese Suszeptibilitäten dar. Da P aus Definition (2.3a) (und damit auch p_1 und p_2^*) keine Polarisation im makroskopischen Sinne[7] darstellt und das Dipolmoment nicht in die Definition der Koeffizienten α_{ij} einbezogen wurde, sind dies keine Suszeptibilitäten im üblichen Sinne. Der Einfachheit halber wird dennoch diese Bezeichnung benutzt.

Man erhält mit den Definitionen (2.43) durch Lösen des Gleichungssystems für p_1, p_2^* und n_1 (2.41):

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= (1-2\bar{n})\frac{iD_i}{\gamma}\cdot\left\{1-\frac{2I_pF[D_i+D_p^*]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]}\right\} &\text{(2.44a)}\\ &= (1-2\bar{n})\frac{iD_i}{\gamma}\cdot\frac{1+2I_pF[D_g^*-D_p^*]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]}\\ \alpha_{12} &= (1-2\bar{n})\frac{-iD_i}{\gamma}\cdot e^{2i\phi}\cdot\frac{2I_pF[D_g^*+D_p]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]} &\text{(2.44b)}\\ \alpha_{21}^* &= (1-2\bar{n})\frac{iD_g^*}{\gamma}\cdot e^{-2i\phi}\cdot\frac{2I_pF[D_i+D_p^*]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]} &\text{(2.44c)}\end{aligned}$$

[7] Üblicherweise schreibt man den Zusammenhang zwischen der Polarisation P und dem elektrischen Feld E als $P=\chi E$. Dabei ist χ die Suszeptibilität. In (2.43) sind p_1 und p_2 keine makroskopischen Polarisationen, sondern dimensionslos.

$$\alpha_{22}^* = (1-2\bar{n})\frac{-iD_g^*}{\gamma}\cdot\left\{1-\frac{2I_pF[D_g^*+D_p]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]}\right\} \tag{2.44d}$$
$$= (1-2\bar{n})\frac{-iD_g^*}{\gamma}\cdot\frac{1+2I_pF[D_i-D_p]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]}\,.$$

In Abbildung 3.1 und 3.2 (auf den Seiten 65–69) sind die dimensionslosen Suszeptibilitäten h_{ij} graphisch dargestellt. Diese sind bis auf Vorfaktoren (Multiplikation mit ω_i bzw. ω_g sowie dimensionslosen Größen) mit den α_{ij} identisch (siehe Gleichung (2.84) auf Seite 44). Die Diskussion dazu erfolgt in Abschnitt 3.2 auf Seite 63ff.

Die Phase ϕ in (2.44b) und (2.44c) ist durch

$$\Omega_p \equiv |\Omega_p|e^{i\phi} \tag{2.45}$$

definiert. Es gilt aufgrund der Definitionen (2.28) und (2.22):

$$\text{in } \alpha_{12}\text{:} \qquad I_pe^{2i\phi} = \frac{1}{\gamma\Gamma}\Omega_p\Omega_p = \frac{1}{\gamma\Gamma}\mu\mathcal{E}_p\mu\mathcal{E}_p \tag{2.46a}$$

$$\text{in } \alpha_{21}^*\text{:} \qquad I_pe^{-2i\phi} = \frac{1}{\gamma\Gamma}\Omega_p^*\Omega_p^* = \frac{1}{\gamma\Gamma}(\mu\mathcal{E}_p)^*(\mu\mathcal{E}_p)^*\,. \tag{2.46b}$$

Es wird später ersichtlich (Gleichung (2.115) auf Seite 54), daß die transmittierten bzw. reflektierten Felder E_i^T und E_i^R nicht von der Phase ϕ abhängen, da dort α_{12} und α_{21}^* nicht einzeln auftreten, sondern nur als Produkt $\alpha_{12}\alpha_{21}^*$. Die Transmission und Reflexion der generierten Felder E_g^T und E_g^R hängen jedoch von der Phase ab.

Aufgrund der nichtlinearen Abhängigkeit von der Pumpintensität I_p induzieren die Suszeptibilitäten α_{ij} Polarisationen erster, dritter und höherer Ordnungen im Pumpfeld. Die Beiträge zu

$$p_1 = \alpha_{11}(\mu\mathcal{E}_i) + \alpha_{12}(\mu\mathcal{E}_g)^*$$

setzen sich aus

$$\alpha_{11}\mu\mathcal{E}_i = \tilde{\alpha}_{11}^{(1)}\mu\mathcal{E}_i + \tilde{\alpha}_{11}^{(3)}(\mu\mathcal{E}_p)^*\mu\mathcal{E}_p\mu\mathcal{E}_i + \ldots$$

und

$$\alpha_{12}(\mu\mathcal{E}_g)^* = \tilde{\alpha}_{12}^{(3)}\mu\mathcal{E}_p\mu\mathcal{E}_p(\mu\mathcal{E}_g)^* + \dots .$$

zusammen. Für die Beiträge zu

$$p_2 = \alpha_{21}(\mu\mathcal{E}_i)^* + \alpha_{22}(\mu\mathcal{E}_g)$$

gilt

$$\alpha_{21}(\mu\mathcal{E}_i)^* = \tilde{\alpha}_{21}^{(3)}\mu\mathcal{E}_p\mu\mathcal{E}_p(\mu\mathcal{E}_i)^* + \dots$$

und

$$\alpha_{22}\mu\mathcal{E}_g = \tilde{\alpha}_{22}^{(1)}\mu\mathcal{E}_g + \tilde{\alpha}_{22}^{(3)}(\mu\mathcal{E}_p)^*\mu\mathcal{E}_p\mu\mathcal{E}_g + \dots .$$

Die α_{ij} sind folglich nichtlineare Suszeptibilitäten.

2.1.10 Der Fall des freien Quantum-Wells

Das Verhalten eines freien Quantum-Wells, d. h. wenn keine Micro-Cavity vorhanden ist, ergibt sich, wenn das von links einfallende Feld $\mathcal{E}_g$ Null gesetzt wird. In diesem Fall folgt aus der Definition (2.43b) die Polarisation

$$p_2^* = \alpha_{21}^*(\mu\mathcal{E}_i)\,. \tag{2.47}$$

Bei nichtverschwindendem Pumpfeld ist $\alpha_{21}^* \neq 0$ (siehe (2.44c)). Dann wird durch das Testfeld $\mathcal{E}_i$ ein zusätzliches, phasenkonjungiertes Feld mit der Frequenz $\omega_g \equiv 2\omega_p - \omega_i$ erzeugt, wie anhand der folgenden Betrachtung gezeigt wird.

Für die Polarisation gilt nach der Definition (2.18) auf Seite 22

$$P(t) = p(t)e^{-i\omega_p t}\,. \tag{2.48}$$

Mit dem Linearisierungsansatz (2.31a) auf Seite 25

$$P(t) = (\bar{p} + \delta p)e^{-i\omega_p t} \tag{2.49}$$

und dem Ansatz (2.37a) auf Seite 28 erhält man

$$P(t) = \bar{p}e^{-i\omega_p t} + \left[p_1 e^{i\Delta t} + p_2 e^{-i\Delta t}\right] e^{-i\omega_p t}\,. \tag{2.50}$$

Nach Einsetzen der in Gleichung (2.43) auf Seite 30 definierten Suszeptibilitäten ergibt sich beim freien Quantum-Well

$$P(t) = \bar{p}e^{-i\omega_p t} + \alpha_{11}(\mu\mathcal{E}_i)e^{i(\Delta-\omega_p)t} + \alpha_{21}(\mu\mathcal{E}_i)^* e^{-i(\Delta+\omega_p)t}\,. \tag{2.51}$$

Die Frequenzen lassen sich über die Definitionen von $\Delta \equiv \omega_p - \omega_i$ (2.20) auf Seite 22 und $\omega_g \equiv 2\omega_p - \omega_i$ (2.15) auf Seite 21 vereinfachen, so daß gilt:

$$P(t) = \bar{p}e^{-i\omega_p t} + \alpha_{11}(\mu\mathcal{E}_i)e^{-i\omega_i t} + \alpha_{21}(\mu\mathcal{E}_i)^* e^{-i\omega_g t}\,. \tag{2.52}$$

Wegen der Kopplung zwischen Polarisation und Feld (siehe Gleichung (2.63a) auf Seite 39) tritt daher ein zusätzliches Feld mit der Frequenz ω_g auf. Da dieses Feld nach Reflexion an den Wänden der Micro-Cavity wieder auf das Quantum-Well einwirkt, wurde es schon im Ansatz (2.14) berücksichtigt (Abschnitt 2.1.3 auf Seite 20).

Der zweite bzw. dritte Summand in (2.52) entspricht den Größen p_i (1.1) bzw. p_g (1.2) auf Seite 14:

$$\begin{aligned} P(t) &= \bar{p}e^{-i\omega_p t} + \mu\alpha_{11}\mathcal{E}_i e^{-i\omega_i t} + \mu^*\alpha_{21}\mathcal{E}_i^* e^{-i\omega_g t} \\ P(t) &= \bar{p}e^{-i\omega_p t} + p_i \qquad\qquad\quad + p_g\,. \end{aligned} \tag{2.53}$$

2.2 Übergang zur makroskopischen Polarisation

2.2.1 Die mikroskopische Polarisation eines Zwei-Niveau-Systems

In Abschnitt 2.1 wurde P als die komplexe (mikroskopische) Polarisation $P(t)$ *eines* Zwei-Niveau-Systems definiert (siehe Gleichung (2.3) auf Seite 17). Zur besseren Unterscheidung von den im folgenden verwendeten makroskopischen Größen wird hier und in Abschnitt 2.2.2 die Bezeichnung $P_{\mathrm{TLS}}(t)$ verwendet.

$$P_{\mathrm{TLS}}(t) = \left\langle a_v^\dagger a_c \right\rangle . \tag{2.54}$$

Nach Übergang in das rotierende Bezugssystem (2.18) und dem Linearisierungsansatz (2.31a) ergibt sich

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{TLS}}(t) &= e^{-i\omega_p t} p(t) \\ &= e^{-i\omega_p t} \left(\bar{p} + \delta p(t) \right) . \end{aligned} \tag{2.55}$$

Für $\delta p(t)$ werden der Ansatz (2.37a) sowie die Definition der Suszeptibilitäten (2.43) eingesetzt

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{TLS}}(t) &= e^{-i\omega_p t} \left(\bar{p} + p_1 e^{i\Delta t} + p_2 e^{-i\Delta t} \right) \\ &= \bar{p} e^{-i\omega_p t} \\ &\quad + \left[\alpha_{11}(\mu\mathcal{E}_i) + \alpha_{12}(\mu\mathcal{E}_g)^* \right] e^{-i\omega_i t} \\ &\quad + \left[\alpha_{21}(\mu\mathcal{E}_i)^* + \alpha_{22}(\mu\mathcal{E}_g) \right] e^{-i\omega_g t} . \end{aligned} \tag{2.56}$$

Die Polarisation setzt sich somit aus den Beiträgen mit den drei Frequenzen ω_p, ω_i und ω_g zusammen:

$$P_{\mathrm{TLS}}(t) = \bar{p} e^{-i\omega_p t} + p_{\mathrm{TLS},\omega_i} e^{-i\omega_i t} + p_{\mathrm{TLS},\omega_g} e^{-i\omega_g t} . \tag{2.57}$$

Wie zuvor beim elektrischen Feld wird darauf verzichtet, explizit die reelle Größe $P_{\mathrm{TLS}}(t) + P_{\mathrm{TLS}}^*(t)$ zu betrachten.

2.2.2 Die makroskopische Polarisation des Quantum-Wells

Nach [49] gilt für den Operator der (makroskopischen) Polarisation im Halbleiter

$$P_{\text{semi-cond.}} = \frac{1}{V} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\mu_{\boldsymbol{k}} a^{\dagger}_{c,\boldsymbol{k}} a_{v,\boldsymbol{k}} + \mu^{*}_{\boldsymbol{k}} a^{\dagger}_{v,\boldsymbol{k}} a_{c,\boldsymbol{k}} \right) . \tag{2.58}$$

Dabei erzeugt $a^{\dagger}_{c,\boldsymbol{k}}$ ein Elektron im Leitungsband und $a^{\dagger}_{v,\boldsymbol{k}}$ ein Elektron im Valenzband mit Wellenvektor $\boldsymbol{k}$. $a_{c,\boldsymbol{k}}$ und $a_{v,\boldsymbol{k}}$ sind die entsprechenden Vernichtungsoperatoren. V ist das Volumen des aktiven Bereichs im Halbleiter und $\mu_{\boldsymbol{k}}$ ist das Übergangsdipolmoment zwischen Valenz- und Leitungsband.

Im folgenden ist die Polarisation des Pumpfeldes nicht von Interesse, so daß der erste Term in (2.57) nicht mehr explizit aufgeführt wird. Das Pumpfeld wird natürlich weiter über die Pumpintensität I_p in α_{ij} berücksichtigt. Es wird ein Quantum-Well betrachtet, dessen Dicke klein im Vergleich zu den Wellenlängen der beteiligten elektrischen Felder ist. Die Wellenlängen liegen in derselben Größenordnung wie die Dicke der Micro-Cavity. Das Quantum-Well selbst befindet sich in der Ebene $z = z_Q$ (siehe Abbildung 2.4 auf Seite 37). Die Anzahldichte der Zwei-Niveau-Systeme pro Fläche sei $n^{(2D)}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{V} \sum_{\boldsymbol{k}} \mu^{*}_{\boldsymbol{k}} \left\langle a^{\dagger}_{v,\boldsymbol{k}} a_{c,\boldsymbol{k}} \right\rangle \quad \longrightarrow \quad \delta(z - z_Q)\, n^{(2D)} \cdot \mu^{*} \cdot P_{\text{TLS}}(t) \,. \tag{2.59a}$$

$$\frac{1}{V} \sum_{\boldsymbol{k}} \mu_{\boldsymbol{k}} \left\langle a^{\dagger}_{c,\boldsymbol{k}} a_{v,\boldsymbol{k}} \right\rangle \quad \longrightarrow \quad \delta(z - z_Q)\, n^{(2D)} \cdot \mu \cdot P^{*}_{\text{TLS}}(t) \,. \tag{2.59b}$$

Die makroskopische Polarisation der Quantum-Wells ohne die Pumpfeld-Anteile kann analog zu (2.56) bzw. (2.57) dargestellt werden:

$$P(z,t) = P_{Q,i}(z) \cdot e^{-i\omega_i t} + P_{Q,g}(z) \cdot e^{-i\omega_g t} \tag{2.60}$$

mit

$$\begin{aligned} P_{Q,i}(z) &= \delta(z - z_Q) \cdot n^{(2D)} \cdot [\alpha_{11} \mu^{*} (\mu \mathcal{E}_i) + \alpha_{12} \mu^{*} (\mu \mathcal{E}_g)^{*}] \\ P_{Q,g}(z) &= \delta(z - z_Q) \cdot n^{(2D)} \cdot [\alpha_{21} \mu^{*} (\mu \mathcal{E}_i)^{*} + \alpha_{22} \mu^{*} (\mu \mathcal{E}_g)] \,. \end{aligned}$$

Mit (2.59) und der Definition der Suszeptibilitäten (2.43) ergibt sich

$$\begin{aligned} P(z,t) = \delta(z - z_Q) \cdot n^{(2D)} \cdot \\ \cdot \Big\{ [\alpha_{11}\mu^*(\mu\mathcal{E}_i) + \alpha_{12}\mu^*(\mu\mathcal{E}_g)^*]\, e^{-i\omega_i t} \\ + \; [\alpha_{21}\mu^*(\mu\mathcal{E}_i)^* + \alpha_{22}\mu^*(\mu\mathcal{E}_g)]\, e^{-i\omega_g t} \Big\} \,. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Diese Polarisation wird später in der Sprungbedingung für die Ableitung des Feldes verwendet (siehe Gleichung (2.73) auf Seite 41), die aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitet wird.

2.3 Stetigkeits- und Sprungbedingungen der Cavity

2.3.1 Bezeichnungen der Indizes der Felder

Das Ziel in den folgenden Abschnitten (2.3.2 und 2.3.3) ist es zunächst, die einzelnen Feldkomponenten links der Wände der Micro-Cavity bzw. des Quantum-Wells durch die jeweiligen rechtsseitigen Feldkomponenten auszudrücken.

Letztendlich sollen die transmittierten Felder E_i^T und E_g^T und die reflektierten Felder E_i^R und E_g^R jeweils als eine Funktion des einfallenden Testfeldes E_i^0 ausgedrückt werden.

In diesem Abschnitt werden folgende Bezeichnungen für die oberen und unteren Indizes der Felder verwendet:

- Die oberen Indizes werden zur räumlichen Zuordnung und zur Kennzeichnung der Ausbreitungsrichtung neu eingeführt:

  0 einfallendes Feld (hier: Testfeld)

  T transmittiertes Feld

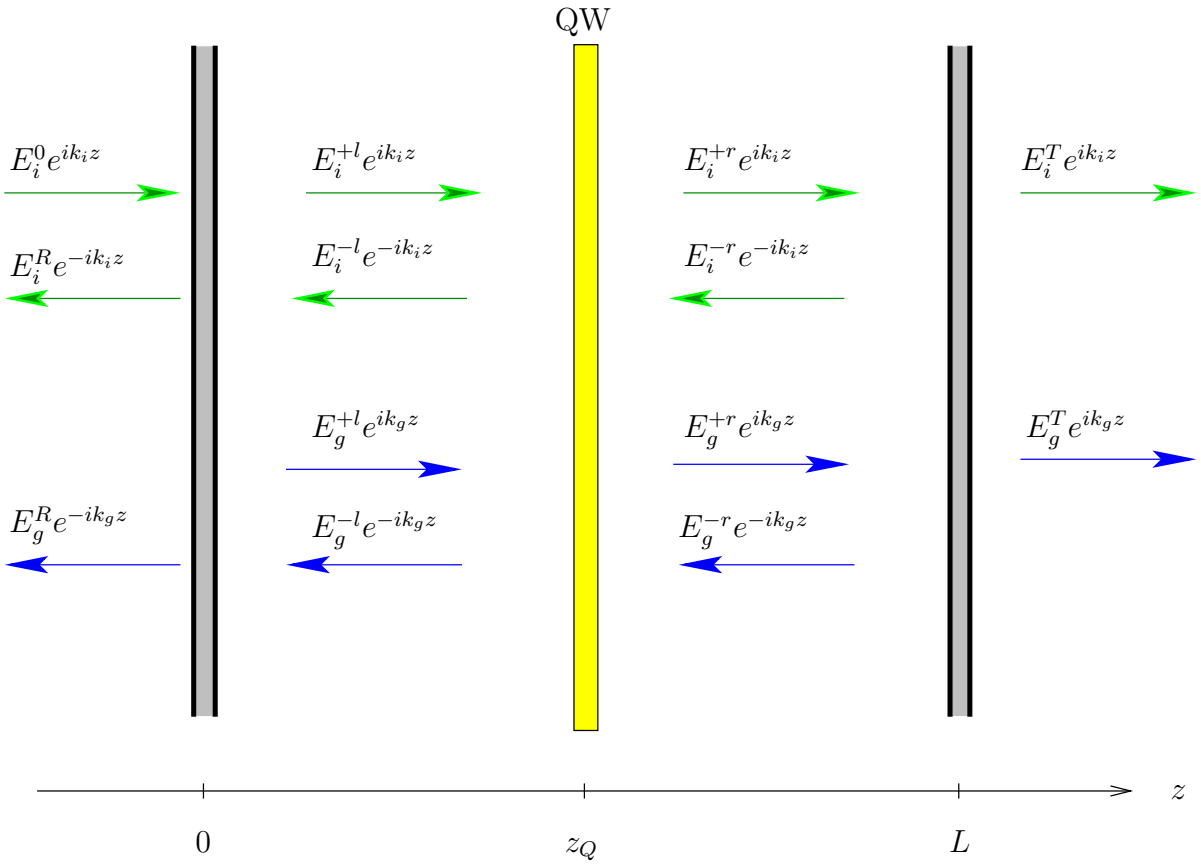


Abbildung 2.4: Bezeichnung der einfallenden, transmittierten und reflektierten Felder, sowie der Felder innerhalb der Micro-Cavity und am Quantum-Well. Das überall vorhandene Pumpfeld ist nicht dargestellt. Die Bezeichnungen sind in Abschnitt 2.3.1 erklärt.

R reflektiertes Feld

l Feld links des Quantum-Wells

r Feld rechts des Quantum-Wells

$+$ sich in positiver z-Richtung ausbreitendes Feld

$-$ sich in negativer z-Richtung ausbreitendes Feld

- Wie schon in den vorherigen Abschnitten kennzeichnen die unteren Indizes die zugehörige Frequenz:

  p Pumpfeld *(pump)*, in Abbildung 2.4 nicht dargestellt

  i Testfeld *(incident)*

  g erzeugtes Feld *(generated)*

Die Felder und die hier eingeführten Bezeichnungen sind in Abbildung 2.4 auf der vorherigen Seite skizziert.

2.3.2 Verhalten des Felds am Quantum-Well

Zur Berechnung der Stetigkeits- und Sprungbedingungen für das Feld und seine Ableitung werden die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= 4\pi\varrho\,, & \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\,, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0\,, & \nabla \times \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\,. \end{aligned} \tag{2.62}$$

betrachtet. Darin bezeichnen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ das elektrische bzw. das magnetische Feld, $\boldsymbol{D}$ die elektrische Verschiebung und $\boldsymbol{B}$ die magnetische Induktion. Letz-

tere sind durch die Materialgeichungen

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}\,, \tag{2.63a}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M} \tag{2.63b}$$

über die Polarisation $\boldsymbol{P}$ und die Magnetisierung $\boldsymbol{M}$ mit dem elektrischen bzw. magnetischen Feld verknüpft. Die freie Ladungsdichte ϱ und Stromdichte $\boldsymbol{j}$ verschwinden in unserem Fall.

Stetigkeit der Tangentialkomponente des Felds am Quantum-Well

Beim Durchgang durch das Quantum-Well ist die Tangentialkomponente des $\boldsymbol{E}$-Felds stetig.[8] Da der senkrechte Einfall des Feldes ($E_z = 0$) auf die Ebene des Quantum-Wells ($z = z_Q$) betrachtet wird, gilt:

$$E\Big|_{z=z_Q-0} = E\Big|_{z=z_Q+0}\,. \tag{2.64}$$

Die Größen bezeichnen dabei die Feldamplituden unmittelbar links ($z = z_Q - 0$) bzw. unmittelbar rechts ($z = z_Q + 0$) des Quantum-Wells. Die Dicke des Quantum-Wells ist klein im Vergleich zu den Wellenlängen der beteiligten elektrischen Felder und kann vernachlässigt werden. Die Felder setzen sich jeweils aus den in Abbildung 2.4 skizzierten Beiträgen zusammen:

$$\begin{aligned} E\Big|_{z=z_Q-0} &= E_i^{+l} e^{ik_i z_Q - i\omega_i t} + E_i^{-l} e^{-ik_i z_Q - i\omega_i t} \\ &\quad + E_g^{+l} e^{ik_g z_Q - i\omega_g t} + E_g^{-l} e^{-ik_g z_Q - i\omega_g t}\,, \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned} E\Big|_{z=z_Q+0} &= E_i^{+r} e^{ik_i z_Q - i\omega_i t} + E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q - i\omega_i t} \\ &\quad + E_g^{+r} e^{ik_g z_Q - i\omega_g t} + E_g^{-r} e^{-ik_g z_Q - i\omega_g t}\,. \end{aligned} \tag{2.66}$$

[8] Man integriert die Gleichung für $\nabla \times \boldsymbol{E}$ aus (2.62), wendet den Satz von Stokes an und betrachtet den Grenzübergang $\Delta z \to 0$ [51].

Wegen der Stetigkeitsbedingung (2.64) gilt folglich

$$\begin{aligned} &E_i^{+l} e^{ik_i z_Q - i\omega_i t} + E_i^{-l} e^{-ik_i z_Q - i\omega_i t} + E_g^{+l} e^{ik_g z_Q - i\omega_g t} + E_g^{-l} e^{-ik_g z_Q - i\omega_g t} \\ &= E_i^{+r} e^{ik_i z_Q - i\omega_i t} + E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q - i\omega_i t} + E_g^{+r} e^{ik_g z_Q - i\omega_g t} + E_g^{-r} e^{-ik_g z_Q - i\omega_g t} \,. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Aus dem Vergleich der $e^{-i\omega_i t}$-Anteile von (2.67) ergibt sich

$$E_i^{+l} e^{ik_i z_Q} + E_i^{-l} e^{-ik_i z_Q} = E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} + E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} \tag{2.68a}$$

sowie

$$E_g^{+l} e^{ik_g z_Q} + E_g^{-l} e^{-ik_g z_Q} = E_g^{+r} e^{ik_g z_Q} + E_g^{-r} e^{-ik_g z_Q} \tag{2.68b}$$

für die $e^{-i\omega_g t}$-Anteile.

Sprungbedingung für die Ableitung des Felds

Aus den Maxwell-Gleichungen (2.62) erhält man durch Bildung der Rotation

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{B}) \,, \tag{2.69}$$

und daraus folgt, da in den betrachteten Materialien die Magnetisierung $\boldsymbol{M}$ in (2.63b) verschwindet,

$$\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{D} \,. \tag{2.70}$$

Die Divergenz $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ verschwindet, da eine ebene Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet, betrachtet wird ($\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ und $E_z = 0$). Nach Einführung der Polarisation $\boldsymbol{P}$ über die Materialgleichung (2.63a) erhält man

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}) \,. \tag{2.71}$$

Für unseren Fall (Ausbreitung in z-Richtung) erhält man daher

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(z,t) = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(z,t)\,. \tag{2.72}$$

Mit der in Abschnitt 2.2 berechneten makroskopischen Polarisation $P(z,t)$ (2.61) ergibt sich durch z-Integration von (2.72)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}E\Big|_{z=z_Q-0}^{z=z_Q+0} = -\frac{4\pi}{c^2}n^{(2D)}\int_{z_Q-0}^{z_Q+0} dz\cdot\delta(z-z_Q)\cdot \\ \cdot\Big\{\left[\alpha_{11}\mu^*(\mu\mathcal{E}_i) + \alpha_{12}\mu^*(\mu\mathcal{E}_g)^*\right]e^{-i\omega_i t}\omega_i^2 \\ +\ \left[\alpha_{21}\mu^*(\mu\mathcal{E}_i)^* + \alpha_{22}\mu^*(\mu\mathcal{E}_g)\right]e^{-i\omega_g t}\omega_g^2\Big\}\,.\end{aligned} \tag{2.73}$$

Der Zeitableitungsterm in (2.72) verschwindet nach der Integration aufgrund der Stetigkeitsbedingung (2.64). Nach Auswertung der δ-Funktion auf der rechten Seite von (2.73) ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}E\Big|_{z=z_Q-0}^{z=z_Q+0} = -\frac{4\pi}{c^2}n^{(2D)}\cdot \\ \cdot\Big\{\left[\alpha_{11}\mu^*(\mu\mathcal{E}_i) + \alpha_{12}\mu^*(\mu\mathcal{E}_g)^*\right]e^{-i\omega_i t}\omega_i^2 \\ +\ \left[\alpha_{21}\mu^*(\mu\mathcal{E}_i)^* + \alpha_{22}\mu^*(\mu\mathcal{E}_g)\right]e^{-i\omega_g t}\omega_g^2\Big\}\,.\end{aligned} \tag{2.74}$$

In (2.74) werden nun auf der linken Seite die Felder, wie sie aus Abbildung 2.4 auf Seite 37 ersichtlich sind, eingesetzt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}E\Big|_{z=z_Q-0}^{z=z_Q+0} &= \frac{\partial}{\partial z}E\Big|_{z=z_Q+0} - \frac{\partial}{\partial z}E\Big|_{z=z_Q-0} \\ &= ik_i\left\{E_i^{+r}e^{ik_i z_Q} - E_i^{-r}e^{-ik_i z_Q} - E_i^{+l}e^{ik_i z_Q} + E_i^{-l}e^{-ik_i z_Q}\right\} \\ &\quad\cdot e^{-i\omega_i t} \\ &\quad + ik_g\left\{E_g^{+r}e^{ik_g z_Q} - E_g^{-r}e^{-ik_g z_Q} - E_g^{+l}e^{ik_g z_Q} + E_g^{-l}e^{-ik_g z_Q}\right\} \\ &\quad\cdot e^{-i\omega_g t}\,.\end{aligned} \tag{2.75}$$

Damit ergibt sich durch Gleichsetzen von (2.74) und (2.75)

$$\begin{aligned} ik_i \left\{ E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} - E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} - E_i^{+l} e^{ik_i z_Q} + E_i^{-l} e^{-ik_i z_Q} \right\} e^{-i\omega_i t} \\ +ik_g \left\{ E_g^{+r} e^{ik_g z_Q} - E_g^{-r} e^{-ik_g z_Q} - E_g^{+l} e^{ik_g z_Q} + E_g^{-l} e^{-ik_g z_Q} \right\} e^{-i\omega_g t} \\ = -\frac{4\pi}{c^2} n^{(2D)} \cdot \Big\{ \left[\alpha_{11} \mu^* (\mu \mathcal{E}_i) + \alpha_{12} \mu^* (\mu \mathcal{E}_g)^* \right] e^{-i\omega_i t} \omega_i^2 \\ + \left[\alpha_{21} \mu^* (\mu \mathcal{E}_i)^* + \alpha_{22} \mu^* (\mu \mathcal{E}_g) \right] e^{-i\omega_g t} \omega_g^2 \Big\} . \end{aligned} \tag{2.76}$$

Man erhält daraus durch Vergleich der $e^{-i\omega_i t}$-Anteile:

$$\begin{aligned} E_i^{+l} e^{ik_i z_Q} - E_i^{-l} e^{-ik_i z_Q} = \\ E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} - E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} \\ -\frac{4\pi i n^{(2D)} \omega_i^2}{k_i c^2} \Big\{ \alpha_{11} \mu^* \mu E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} + \alpha_{11} \mu^* \mu E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} \\ + \alpha_{12} \mu^* \mu^* E_g^{+r*} e^{-ik_g z_Q} + \alpha_{12} \mu^* \mu^* E_g^{-r*} e^{ik_g z_Q} \Big\} . \end{aligned} \tag{2.77}$$

Dabei wurde

$$\mathcal{E}_i = E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} + E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} \tag{2.78a}$$

und

$$\mathcal{E}_g^* = \left(E_g^{+r} e^{ik_g z_Q} + E_g^{-r} e^{-ik_g z_Q} \right)^* \tag{2.78b}$$

eingesetzt. Wegen der Stetigkeit des Feldes (2.67) spielt es keine Rolle, ob das Feld auf der linken oder rechten Seite des Quantum-Wells verwendet wird:

$$\mathcal{E}_i = E_i^{+l} e^{ik_i z_Q} + E_i^{-l} e^{-ik_i z_Q} = E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} + E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} \tag{2.79a}$$

$$\mathcal{E}_g = E_g^{+l} e^{ik_g z_Q} + E_g^{-l} e^{-ik_g z_Q} = E_g^{+r} e^{ik_g z_Q} + E_g^{-r} e^{-ik_g z_Q} \tag{2.79b}$$

Für die folgende Rechnung sind in (2.78) aber die rechtsseitigen Felder zweckmäßiger.

Die in (2.77) auftretenden Größen werden folgendermaßen zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} h_{11} &\equiv \frac{2\pi n^{(2D)}\omega_i^2}{k_i c^2} \cdot \alpha_{11}\mu^*\mu \\ &\equiv 2\pi n^{(2D)}\frac{\omega_i}{c} \cdot \alpha_{11}\mu^*\mu \end{aligned} \tag{2.80a}$$

$$\begin{aligned} h_{12} &\equiv \frac{2\pi n^{(2D)}\omega_i^2}{k_i c^2} \cdot \alpha_{12}\mu^*\mu^* \\ &\equiv 2\pi n^{(2D)}\frac{\omega_i}{c} \cdot \alpha_{12}\mu^*\mu^* \end{aligned} \tag{2.80b}$$

Analog werden für die anschließend benötigten k_g-Anteile definiert:

$$\begin{aligned} h_{21}^* &\equiv \frac{2\pi n^{(2D)}\omega_g^2}{k_g c^2} \cdot \alpha_{21}\mu^*\mu^* \\ &\equiv 2\pi n^{(2D)}\frac{\omega_g}{c} \cdot \alpha_{21}\mu^*\mu^* \end{aligned} \tag{2.80c}$$

$$\begin{aligned} h_{22}^* &\equiv \frac{2\pi n^{(2D)}\omega_g^2}{k_g c^2} \cdot \alpha_{22}\mu^*\mu \\ &\equiv 2\pi n^{(2D)}\frac{\omega_g}{c} \cdot \alpha_{22}\mu^*\mu \end{aligned} \tag{2.80d}$$

Nach Einsetzen der Definitionen (2.80a) und (2.80b) in (2.77) erhält man

$$\begin{aligned} E_i^{+l}e^{ik_i z_Q} - E_i^{-l}e^{-ik_i z_Q} \;=\; & (1-2ih_{11})\, E_i^{+r}e^{ik_i z_Q} \\ & -(1+2ih_{11})\, E_i^{-r}e^{-ik_i z_Q} \\ & -2ih_{12}\, E_g^{+r*}e^{-ik_g z_Q} \\ & -2ih_{12}\, E_g^{-r*}e^{ik_g z_Q}\,. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Durch Addieren und Subtrahieren von (2.79a) und (2.81) ergeben sich schließlich:

$$\begin{aligned} E_i^{+l}e^{ik_i z_Q} \;=\; & (1-ih_{11})\, E_i^{+r}e^{ik_i z_Q} \\ & -ih_{11}\, E_i^{-r}e^{-ik_i z_Q} \\ & -ih_{12}\, E_g^{+r*}e^{-ik_g z_Q} \\ & -ih_{12}\, E_g^{-r*}e^{ik_g z_Q} \end{aligned} \tag{2.82a}$$

$$\begin{aligned} E_i^{-l} e^{-ik_i z_Q} \;=\; & ih_{11}\, E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} \\ & +(1+ih_{11})\, E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} \\ & +ih_{12}\, E_g^{+r*} e^{-ik_g z_Q} \\ & +ih_{12}\, E_g^{-r*} e^{ik_g z_Q}\,. \end{aligned} \tag{2.82b}$$

Völlig analog wird mit den $e^{-i\omega_g t}$-Anteilen von (2.3.2) verfahren und man erhält letztendlich

$$\begin{aligned} E_g^{+l*} e^{-ik_g z_Q} \;=\; & ih_{21}\, E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} \\ & +ih_{21}\, E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} \\ & +(1+ih_{22})\, E_g^{+r*} e^{-ik_g z_Q} \\ & +ih_{22}\, E_g^{-r*} e^{ik_g z_Q} \end{aligned} \tag{2.82c}$$

$$\begin{aligned} E_g^{-l*} e^{ik_g z_Q} \;=\; & -ih_{21}\, E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} \\ & -ih_{21}\, E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} \\ & +ih_{22}\, E_g^{+r*} e^{-ik_g z_Q} \\ & +(1-ih_{22})\, E_g^{-r*} e^{ik_g z_Q}\,. \end{aligned} \tag{2.82d}$$

Anstelle der in Gleichung (2.43) auf Seite 30 eingeführten Suszeptibilitäten α_{11}, α_{12}, α_{21}^* und α_{22}^* werden in (2.82) und im folgenden die Größen h_{11}, h_{12}, h_{21} und h_{22} verwendet.

Zur Vereinfachung der Definitionen (2.80) von h_{ij} kann eine dimensionslose Konstante $c_{Q,m}$ eingeführt werden, die nur vom Betrag $|\mu|^2$ des Dipolmoments und der Anzahldichte $n^{(2D)}$ (siehe Gleichung (2.59) auf Seite 35) abhängt:

$$c_{Q,m} = 2\pi n^{(2D)} \frac{1}{c} |\mu|^2\,, \quad \text{mit} \quad [c_{Q,m}] = 1\,. \tag{2.83}$$

Es wird später gezeigt, daß die Konstante $c_{Q,m}$ über experimentell leicht zugängliche Größen bestimmt werden kann (siehe Gleichung (2.126) auf Seite 58). Die Koeffizienten $\{h_{ij}\}$ sind aufgrund der Definitionen der α_{ij} (Gleichung (2.43) auf Seite 30) ebenfalls dimensionslos:

$$h_{11} = 2\pi n^{(2D)} \frac{1}{c} \omega_i \mu^* \mu \cdot \alpha_{11} \qquad = c_{Q,m} \omega_i \alpha_{11} \tag{2.84a}$$

$$h_{12} = 2\pi n^{(2D)} \frac{1}{c} \omega_i \mu^* \mu^* \cdot \alpha_{12} \qquad = c_{Q,m} e^{-2i\phi_\mu} \omega_i \alpha_{12} \tag{2.84b}$$

$$h_{21} = 2\pi n^{(2D)} \frac{1}{c} \omega_g \mu \mu \cdot \alpha_{21}^* \qquad = c_{Q,m} e^{2i\phi_\mu} \omega_g \alpha_{21}^* \tag{2.84c}$$

$$h_{22} = 2\pi n^{(2D)} \frac{1}{c} \omega_g \mu^* \mu \cdot \alpha_{22}^* \qquad = c_{Q,m} \omega_g \alpha_{22}^* \,. \tag{2.84d}$$

Für die Phase ϕ_μ des Dipolmoments[9] gilt:

$$\mu = |\mu| e^{i\phi_\mu} \tag{2.85}$$

Näherungslösungen für die Koeffizienten $\{h_{ij}\}$ für kleines Detuning sind in Anhang B.2 auf Seite 146 angegeben.

Da die Suszeptibilitäten α_{12} und α_{21} noch jeweils das Pumpfeld in der Form $\Omega_p^2 = (\mu\mathcal{E})^2$ enthalten (siehe Gleichung (2.46) auf Seite 31), hängen alle $\{h_{ij}\}$ nicht von der Phase des Dipolmoments μ, sondern nur von dessen Betrag ab:

$$\text{in } h_{11}\text{:} \qquad \mu\mu^*\alpha_{11} \qquad \propto \mu\mu^*\Omega_p^*\Omega_p \qquad \propto \mu\mu^*\mu^*\mathcal{E}_p^*\mu\mathcal{E}_p \tag{2.86a}$$

$$\text{in } h_{12}\text{:} \qquad \mu^*\mu^*\alpha_{12} \qquad \propto \mu^*\mu^*\Omega_p\Omega_p \qquad \propto \mu^*\mu^*\mu\mathcal{E}_p\mu\mathcal{E}_p \tag{2.86b}$$

$$\text{in } h_{21}\text{:} \qquad \mu\mu\alpha_{21}^* \qquad \propto \mu\mu\Omega_p^*\Omega_p^* \qquad \propto \mu\mu\mu^*\mathcal{E}_p^*\mu^*\mathcal{E}_p^* \tag{2.86c}$$

$$\text{in } h_{22}\text{:} \qquad \mu^*\mu\alpha_{22}^* \qquad \propto \mu^*\mu\Omega_p^*\Omega_p \qquad \propto \mu^*\mu\mu^*\mathcal{E}_p^*\mu\mathcal{E}_p \,. \tag{2.86d}$$

Die Gleichungen (2.82) lassen sich nun kompakt in Matrixform zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix} E_i^{+l} e^{ik_i z_Q} \\ E_i^{-l} e^{-ik_i z_Q} \\ \left[E_g^{+l} e^{ik_g z_Q}\right]^* \\ \left[E_g^{-l} e^{-ik_g z_Q}\right]^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - ih_{11} & -ih_{11} & -ih_{12} & -ih_{12} \\ ih_{11} & 1 + ih_{11} & ih_{12} & ih_{12} \\ ih_{21} & ih_{21} & 1 + ih_{22} & ih_{22} \\ -ih_{21} & -ih_{21} & -ih_{22} & 1 - ih_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} \\ E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} \\ \left[E_g^{+r} e^{ik_g z_Q}\right]^* \\ \left[E_g^{-r} e^{-ik_g z_Q}\right]^* \end{bmatrix} . \tag{2.87}$$

Somit werden die Feldkomponenten links des Quantum-Wells durch die jeweiligen rechtsseitigen Feldkomponenten ausgedrückt.

[9] Die Phase ϕ_μ des Dipolmoments ϕ_μ ist nicht a priori identisch mit der in (2.45) eingeführten Phase ϕ der Rabi-Frequenz Ω_p

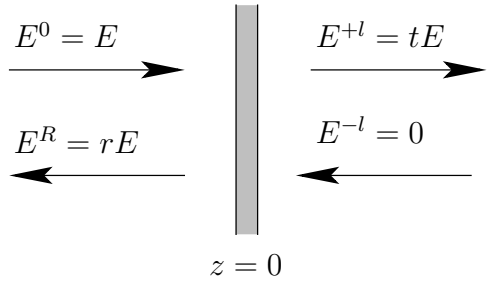


Abbildung 2.5: Bestimmung der Koeffizienten der Transmissionsmatrix, Fall 1: Von links einfallendes Feld.

2.3.3 Transmission und Reflexion der Felder an den Wänden der Micro-Cavity

2.3.3.1 Ableitung der Transmissionsmatrix

Auch der Durchgang des Feldes an den Wänden der Micro-Cavity wird in Matrixform dargestellt. Am Beispiel der Cavity-Wand bei $z = 0$ (siehe Abbildung 2.4 auf Seite 37) können die Felder folgendermaßen über eine Matrix $\mathcal{M}$ verknüpft werden (analoges gilt für $z = L$):

$$\begin{bmatrix} E^{+l} \\ E^{-l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E^0 \\ E^R \end{bmatrix} = \mathcal{M} \cdot \begin{bmatrix} E^0 \\ E^R \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

$\mathcal{M}$ erlaubt folglich die Berechnung der rechtsseitigen Felder unter Vorgabe der linksseitigen Felder. Zur Bestimmung der Koeffizienten M_{ij} werden zwei Spezialfälle betrachtet:

1. Zunächst wird, wie in Abbildung 2.5 skizziert, ein von links einfallendes Feld $E^0 = E$ betrachtet, während von rechts her kein Feld einwirkt ($E^{-l} = 0$). Die zwei verbleibenden Komponenten kann man als $E^{+l} = tE$ und $E^R = rE$ schreiben, wobei r und t komplexe Koeffizienten sind:

$$\begin{bmatrix} tE \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \\ rE \end{bmatrix} . \tag{2.89}$$

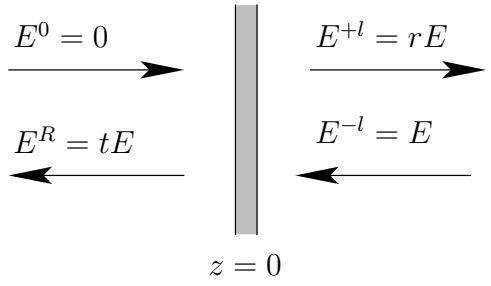


Abbildung 2.6: Bestimmung der Koeffizienten der Transmissionsmatrix, Fall 2: Von rechts einfallendes Feld.

Somit ergibt sich

$$t = M_{11} + rM_{12} \tag{2.90a}$$
$$0 = M_{21} + rM_{22}\,. \tag{2.90b}$$

2. Nun wird ein von rechts einfallendes Feld $E^{-l} = E$ angenommen (siehe Abbildung 2.6). Von links wirke kein Feld ($E^0 = 0$). Die Wände der Micro-Cavity seien bezüglich Transmission und Reflexion symmetrisch. Damit ergibt sich $E^{+l} = rE$ und $E^R = tE$ für die verbleibenden Komponenten:

$$\begin{bmatrix} rE \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ tE \end{bmatrix}\,. \tag{2.91}$$

Man erhält

$$r = tM_{12} \tag{2.92a}$$
$$1 = tM_{22}\,. \tag{2.92b}$$

Aus (2.90) und (2.92) folgt zusammenfassend die Transmissionsmatrix

$$\mathcal{M} = \frac{1}{t}\begin{bmatrix} t^2 - r^2 & r \\ -r & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det\mathcal{M} = 1\,. \tag{2.93}$$

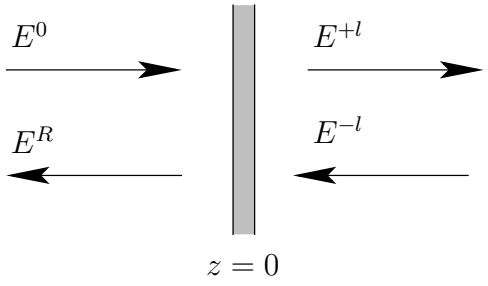


Abbildung 2.7: Energieerhaltung

Die inverse Matrix $\mathcal{M}^{-1}$, welche die Berechnung der linksseitigen Felder unter Vorgabe der rechtsseitigen Felder (umgekehrt zu dem in (2.88) betrachteten Fall) erlaubt, lautet

$$\mathcal{M}^{-1} \equiv \frac{1}{t} \begin{bmatrix} 1 & -r \\ r & t^2 - r^2 \end{bmatrix} . \tag{2.94}$$

r und t sind die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten des Resonators. Aus der Einführung dieser Koeffizienten in (2.89) bzw. (2.91) ist ersichtlich, daß

$$|r| \leq 1 \quad \text{und} \quad |t| \leq 1 \tag{2.95}$$

gilt. Die Größen

$$R \equiv |r|^2 \quad \text{und} \quad T \equiv |t|^2 \tag{2.96}$$

werden als Reflexion bzw. Transmission bezeichnet.

2.3.3.2 Energieerhaltung

Beim Durchgang des Feldes durch die Wände der Micro-Cavity muß wegen der Energieerhaltung

$$|E^0|^2 + |E^{-l}|^2 = |E^R|^2 + |E^{+l}|^2 \tag{2.97}$$

gelten. Aus der in Abbildung 2.7 auf der vorherigen Seite dargestellten Situation folgt:

$$E^{+l} = tE^0 + rE^{-l} \tag{2.98a}$$

$$E^R = rE^0 + tE^{-l}\,. \tag{2.98b}$$

Nach Einsetzen dieser Felder in (2.97), erhält man

$$\left|rE^0 + tE^{-l}\right|^2 + \left|tE^0 + rE^{-l}\right|^2 = |E^0|^2 + |E^{-l}|^2 \tag{2.99}$$

und damit

$$\begin{aligned}\left(|r|^2 + |t|^2\right)|E^0|^2 + \left(|r|^2 + |t|^2\right)|E^{-l}|^2 \\ + \left(r^*t + t^*r\right)[E^0]^*E^{-l} + \left(r^*t + t^*r\right)[E^{-l}]^*E^0 = |E^0|^2 + |E^{-l}|^2 \\ \forall E^0\,, E^{-l}\,.\end{aligned} \tag{2.100}$$

Da dies für alle E^0 und E^{-l} gelten muß, folgen schließlich die Bedingungen

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad R + T = 1 \tag{2.101a}$$

und

$$r^*t + t^*r = 0\,. \tag{2.101b}$$

Für eine ideale Micro-Cavity ($E^R \approx -E^0$, $r \approx -1$), d. h. eine Cavity mit sehr hoher Reflexion, gilt

$$r = -1 + \rho \quad \text{mit} \quad 0 < \rho \ll 1\,, \quad \rho \in \mathbb{R}\,. \tag{2.102}$$

Mit den Bedingungen aus der Energieerhaltung (2.101) folgt daraus

$$t = -t^* = i\sqrt{2\rho - \rho^2}\,. \tag{2.103}$$

Eine metallische Oberfläche ($E^R = -E^0$) entspricht dem Grenzfall

$$r = -1 \quad \wedge \quad t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho = 0\,. \tag{2.104}$$

In Anhang B.3 wird der Grenzfall der hohen Reflexion genauer betrachtet.

2.3.3.3 Matrixgleichungen für die Transmission und Reflexion

Mit der Matrix $\mathcal{M}^{-1}$ aus (2.94) können die Bedingungen für die Transmission und Reflexion an der Micro-Cavity bei $z = 0$ für das Testfeld in Matrixform als

$$\begin{bmatrix} E_i^0 \\ E_i^R \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E_i^{+l} \\ E_i^{-l} \end{bmatrix} \tag{2.105a}$$

und für das generierte Feld als

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \left[E_g^R\right]^* \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1^*} \cdot \begin{bmatrix} \left[E_g^{+l}\right]^* \\ \left[E_g^{-l}\right]^* \end{bmatrix} \tag{2.105b}$$

dargestellt werden. Siehe dazu wieder Abbildung 2.4 auf Seite 37.

Entsprechend gilt für das Testfeld bei $z = L$

$$\begin{bmatrix} E_i^{+r} e^{ik_i L} \\ E_i^{-r} e^{-ik_i L} \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E_i^T e^{ik_i L} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.106a}$$

und für das generierte Feld

$$\begin{bmatrix} \left[E_g^{+r} e^{ik_g L}\right]^* \\ \left[E_g^{-r} e^{-ik_g L}\right]^* \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1^*} \cdot \begin{bmatrix} \left[E_g^T e^{ik_g L}\right]^* \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{2.106b}$$

2.4 Berechnung der transmittierten und reflektierten Felder

2.4.1 Gleichungen für die Felder

Das Ziel ist es nun, die acht inneren Felder E_i^{+l}, E_i^{+r}, E_i^{-l}, E_i^{-r}, E_g^{+l}, E_g^{+r}, E_g^{-l} und E_g^{-r} (siehe Abbildung 2.4 auf Seite 37) zugunsten der äußeren Felder E_i^0, E_i^T, E_i^R, E_g^T und E_g^R zu eliminieren. Dazu werden die Matrixgleichungen für $z = z_Q$ (2.87), $z = 0$ (2.105) und $z = L$ (2.106) kombiniert. Diese längere Berechnung[10] wird hier nicht im Detail vorgestellt. Es werden nur die wichtigsten Schritte erklärt.

Die Matrixgleichungen am Quantum-Well (2.87) werden in Form von Block-Matrizen dargestellt

$$\begin{bmatrix} 1-ih_{11} & -ih_{11} & -ih_{12} & -ih_{12} \\ ih_{11} & 1+ih_{11} & ih_{12} & ih_{12} \\ ih_{21} & ih_{21} & 1+ih_{22} & ih_{22} \\ -ih_{21} & -ih_{21} & -ih_{22} & 1-ih_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbb{I}+B(h_{11}) & B(h_{12}) \\ B^*(h_{21}) & \mathbb{I}+B^*(h_{22}) \end{bmatrix}, \tag{2.107}$$

dabei ist $B(h_{ij})$ definiert als

$$B(h_{ij}) \equiv i \begin{bmatrix} -h_{ij} & -h_{ij} \\ h_{ij} & h_{ij} \end{bmatrix} \tag{2.108}$$

und $\mathbb{I}$ ist die zweidimensionale Einheitsmatrix. Gleichung (2.87) wird damit in Blöcke zerlegt und man erhält für den ersten Teil:

$$\begin{bmatrix} E_i^{+l} e^{ik_i z_Q} \\ E_i^{-l} e^{-ik_i z_Q} \end{bmatrix} = \Big(\mathbb{I}+B(h_{11})\Big) \cdot \begin{bmatrix} E_i^{+r} e^{ik_i z_Q} \\ E_i^{-r} e^{-ik_i z_Q} \end{bmatrix} + B(h_{12}) \begin{bmatrix} \left[E_g^{+r} e^{ik_g z_Q}\right]^* \\ \left[E_g^{-r} e^{-ik_g z_Q}\right]^* \end{bmatrix}. \tag{2.109}$$

[10] Die Berechnung wurde analytisch durchgeführt und zusätzlich mit Hilfe des Computeralgebra-Systems Maple [52] überprüft.

Dies kann man in die umgeformte Gleichung (2.105a) für $z = 0$ einsetzen:

$$\begin{bmatrix} E_i^0 \\ E_i^R \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E_i^{+l} \\ E_i^{-l} \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{-ik_i z_Q} & 0 \\ 0 & e^{ik_i z_Q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_i^{+l} e^{ik_i z_Q} \\ E_i^{-l} e^{-ik_i z_Q} \end{bmatrix} .$$

Mit Hilfe der Gleichung (2.106a) für $z = L$ kann man E_i^{+r} und E_i^{-r} aus (2.109) eliminieren. Die Gleichungen für die generierten Felder kann man in analoger Weise umformen, bis man schließlich ein Gleichungssystem der Form

$$t^2 E_i^0 = [\, c_{10} + ih_{11}\, c_{11}]\, E_i^T + ih_{12}\, c_{12}\, E_g^{T^*} \tag{2.110a}$$
$$t^2 E_i^{R^*} = [\, c_{20} + ih_{21}\, c_{21}]\, E_i^T + ih_{12}\, c_{22}\, E_g^{T^*} \tag{2.110b}$$
$$0 = [\, c_{30} + ih_{22}\, c_{31}]\, E_g^{T^*} + ih_{21}\, c_{32}\, E_i^T \tag{2.110c}$$
$$t^{*2} E_g^{R^*} = [\, c_{40} + ih_{22}\, c_{41}]\, E_g^{T^*} + ih_{21}\, c_{42}\, E_i^T \tag{2.110d}$$

für das eingehende Testfeld E_i^0 und die vier ausgehenden transmittierten (E_i^T, E_g^T) und reflektierten Felder (E_i^R, E_g^R) erhält.

Definition der Koeffizienten

Für die in (2.110) neu eingeführten zwölf Koeffizienten c_{ij} gilt:

$$c_{10} = 1 - r^2 e^{2ik_i L} \tag{2.111a}$$
$$c_{11} = -\left(1 + re^{2ik_i z_Q} + re^{2ik_i (L - z_Q)} + r^2 e^{2ik_i L}\right) \tag{2.111b}$$
$$c_{12} = -\frac{t}{t^*}\left(e^{-ik_i z_Q} + r^* e^{ik_g (z_Q - 2L)}\right)\left(e^{-ik_i z_Q} + re^{ik_i z_Q}\right) \tag{2.111c}$$
$$= -\frac{t}{t^*}\Big(e^{-i(k_i + k_g) z_Q} + re^{i(k_i - k_g) z_Q} + r^* e^{-ik_i z_Q + ik_g (z_Q - 2L)} + |r|^2 e^{ik_i z_Q + ik_g (z_Q - 2L)}\Big)$$
$$c_{20} = r\left[1 + \tau e^{2ik_i L}\right] \tag{2.111d}$$
$$c_{21} = \left(e^{ik_i z_Q} + re^{ik_i (2L - z_Q)}\right)\left(\tau e^{ik_i z_Q} - re^{-ik_i z_Q}\right) \tag{2.111e}$$
$$= \tau e^{2ik_i z_Q} - r + r\tau e^{2ik_i L} - r^2 e^{2ik_i (L - z_Q)}$$
$$c_{22} = \frac{t}{t^*}\left(\tau e^{ik_i x_Q} - re^{-ik_i z_Q}\right)\left(e^{-ik_g z_Q} + r^* e^{ik_g (z_Q - 2L)}\right) \tag{2.111f}$$

$$c_{30} = 1 - r^{*2} e^{-2ik_g L} \tag{2.111g}$$

$$c_{31} = 1 + r^* e^{2ik_g(z_Q - L)} + r^* e^{-2ik_g z_Q} + r^{*2} e^{-2ik_g L} \tag{2.111h}$$

$$c_{32} = \frac{t^*}{t} \left(e^{ik_g x_Q} + r^* e^{-ik_g x_Q} \right) \left(e^{ik_i x_Q} + r e^{ik_i(2L - z_Q)} \right) \tag{2.111i}$$

$$c_{40} = r^* \left(1 + \tau^* e^{-2ik_g L} \right) \tag{2.111j}$$

$$c_{41} = \left(r^* e^{ik_g x_Q} - \tau^* e^{-ik_g z_Q} \right) \left(e^{-ik_g z_Q} + r^* e^{ik_g(z_Q - 2L)} \right) \tag{2.111k}$$

$$c_{42} = \frac{t^*}{t} \left(r^* e^{ik_g z_Q} - \tau^* e^{-ik_g z_Q} \right) \left(e^{ik_i z_Q} + r e^{ik_i(2L - z_Q)} \right) . \tag{2.111l}$$

Die Koeffizienten c_{ij} hängen von folgenden Größen ab:

- den Wellenzahlen (bzw. Frequenzen) des Testfeldes und des generierten Feldes:

$$k_i \equiv \frac{\omega_i}{c} \quad \text{und} \quad k_g \equiv \frac{\omega_g}{c} = \frac{2\omega_p - \omega_i}{c} . \tag{2.112}$$

- den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten des Resonators:

$$r \quad \text{und} \quad t \quad \text{mit} \quad \tau \equiv t^2 - r^2 . \tag{2.113}$$

- der Dicke L der Micro-Cavity und Position z_Q des Quantum-Wells innerhalb der Micro-Cavity.

Näherungslösungen für die Koeffizienten $\{c_{ij}\}$ für bestimmte Grenzfälle (verschwindendes Detuning und kleines Detuning) sind in Anhang B.3 auf Seite 147ff angegeben.

Symmetrie der Koeffizienten

Die Koeffizienten besitzen die folgende Symmetrie bezüglich der Wellenzahlen k_i und k_g (siehe (2.112)):

$$c_{30}(k_g) = c_{10}^*(k_i \to k_g) \tag{2.114a}$$
$$c_{31}(k_g) = -c_{11}^*(k_i \to k_g) \tag{2.114b}$$
$$c_{32}(k_i, k_g) = -c_{12}^*(k_i \to k_g, k_g \to k_i) \tag{2.114c}$$
$$c_{40}(k_g) = c_{20}^*(k_i \to k_g) \tag{2.114d}$$
$$c_{41}(k_g) = -c_{21}^*(k_i \to k_g) \tag{2.114e}$$
$$c_{42}(k_i, k_g) = -c_{22}^*(k_i \to k_g, k_g \to k_i)\,. \tag{2.114f}$$

2.4.2 Ergebnis für die transmittierten und reflektierten Felder

Durch Auflösen des Gleichungssystems (2.110) erhält man schließlich die Amplituden der transmittierten Felder (E_i^T, E_g^T) und der reflektierten Felder (E_i^R, E_g^R) relativ zum eingehenden Testfeld E_i^0:

$$\frac{E_i^T}{E_i^0} = \frac{t^2}{c_{10} + ih_{11}\,c_{11} + h_{21}h_{12}\dfrac{c_{12}c_{32}}{c_{30} + ih_{22}\,c_{31}}} \tag{2.115a}$$
$$\frac{E_i^R}{E_i^0} = \frac{(c_{20} + ih_{11}\,c_{21})\,(c_{30} + ih_{22}\,c_{31}) + h_{21}h_{12}c_{22}c_{32}}{(c_{10} + ih_{11}\,c_{11})\,(c_{30} + ih_{22}\,c_{31}) + h_{21}h_{12}c_{12}c_{32}} \tag{2.115b}$$
$$\frac{E_g^{T*}}{E_i^0} = \frac{-t^2 ih_{21}c_{32}}{(c_{10} + ih_{11}\,c_{11})\,(c_{30} + ih_{22}\,c_{31}) + h_{21}h_{12}c_{12}c_{32}} \tag{2.115c}$$
$$\frac{E_g^{R*}}{E_i^0} = \left(\frac{t}{t^*}\right)^2 ih_{21}\frac{c_{42}\,(c_{30} + ih_{22}\,c_{31}) - c_{32}\,(c_{40} + ih_{22}\,c_{41})}{(c_{10} + ih_{11}\,c_{11})\,(c_{30} + ih_{22}\,c_{31}) + h_{21}h_{12}c_{12}c_{32}}\,. \tag{2.115d}$$

Die numerischen Ergebnisse hierzu sind in Abschnitt 3.3 auf Seite 70 dargestellt und werden dort diskutiert.

2.4.3 Der Grenzfall eines schwaches Pumpfelds

Bei verschwindendem oder schwachem Pumpfeld zeigt die Probe-Transmission $\left|E_i^T\right|^2$ eine Dublett-Struktur [42–44] mit Peaks nahe der Cavity-Resonanzfrequenz $\omega_i \approx \omega_{\mathrm{cav}}$. Diese Resonanzfrequenz ist definiert als

$$\omega_{\mathrm{cav}} \equiv k_{\mathrm{cav}} c = \frac{\pi c N_{\mathrm{an}}}{L}\,, \tag{2.116}$$

wobei N_{an} die Anzahl der Wellenbäuche[11] festlegt:

$$k_{\mathrm{cav}} L = N_{\mathrm{an}} \pi\,, \quad N_{\mathrm{an}} \in \mathbb{N}\,. \tag{2.117}$$

Der Abstand dieser im folgenden diskutierten Peaks wird als Rabi-Aufspaltung *(low field Rabi splitting)* Ω_{LF} bezeichnet [42–44]. Es wird gezeigt, daß über diese – experimentell leicht zugängliche – Rabi-Aufspaltung der in Gleichung (2.83) auf Seite 44 eingeführte Quantum-Well-Koeffizient

$$c_{Q,m} = 2\pi |\mu|^2 n^{(2D)} \frac{1}{c}$$

bestimmt werden kann. Separate Kenntnis des Dipolmoments μ und der Dichte $n^{(2D)}$ ist deshalb nicht erforderlich.

Transmission bei schwachem Pumpfeld

Ausgehend von (2.115a) ergibt sich für $I_p = 0$

$$\frac{E_i^T}{E_i^0} = \frac{t^2}{c_{10} + i h_{11}\, c_{11}}\,. \tag{2.118}$$

Dabei wurde verwendet, daß bei verschwindender Pumpintensität $I_p = 0$ auch die Suszeptibilitäten h_{12} und h_{21} verschwinden, wie man aus dem Ergebnis für α_{ij} (2.44) auf Seite 30 und der Definition von h_{ij} (2.84) auf Seite 44 erkennt.

Die Koeffizienten c_{10} und c_{11} aus (2.111) lassen sich weiter vereinfachen:

[11] Der Index „an“ in N_{an} steht für *anti-nodes*.

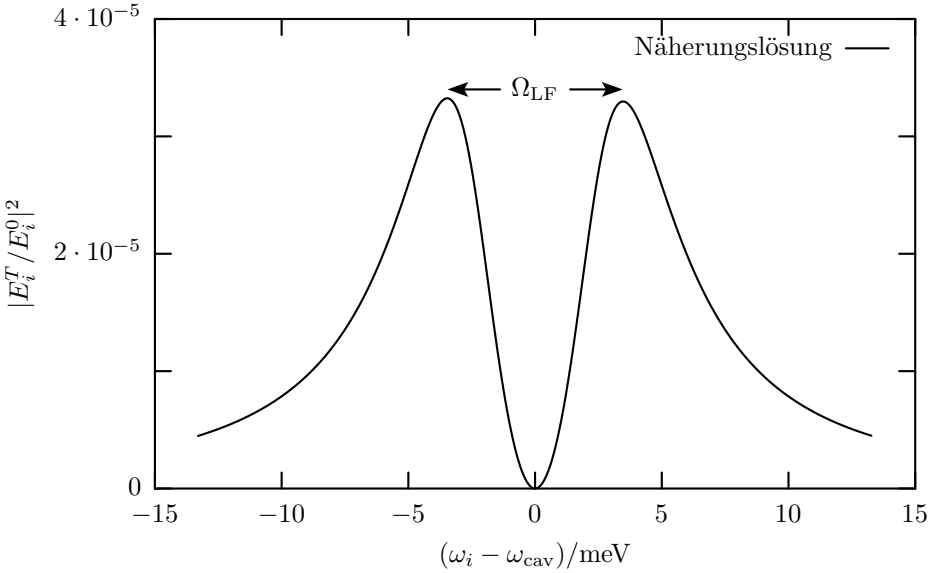


Abbildung 2.8: Rabi-Aufspaltung Ω_{LF} bei schwachem Pumpfeld. Die dargestellte Transmission $|E_i^T/E_i^0|^2$ ergibt sich aus der Näherungslösung (2.122).

- Bei Verwendung einer Micro-Cavity hoher Güte gilt nach (2.102)

$$r = -1 + \rho \quad \text{mit} \quad 0 < \rho \ll 1 \quad (\rho \in \mathbb{R})\,,$$

und es genügt, nur die erste Ordnung in ρ zu berücksichtigen.

- Für die Berechnung der Rabi-Aufspaltung sind nur Frequenzen nahe der in (2.116) eingeführten Cavity-Resonanzfrequenz ω_{cav} relevant. Es ist daher zweckmäßig, Differenzen zur Cavity-Resonanzfrequenz zu betrachten

$$k' \equiv \frac{\omega'}{c} \equiv \frac{\omega_i - \omega_{\mathrm{cav}}}{c} \tag{2.119}$$

und die Exponentialfunktionen in (2.111) zu entwickeln:

$$e^{2i\,k'L} \approx 1 + 2i\,k'L, \qquad |k'L| \ll 1\,.$$

Mit diesen Näherungen kann man (2.118) vereinfachen

$$\frac{E_i^T}{E_i^0} = \frac{t^2}{1 - r^2 e^{2i\,k'L} - ih_{11}\left(1 - re^{i\,k'L}\right)^2} \tag{2.120}$$

$$= \frac{t^2/2}{\rho - i\,k'L + ih_{11}\Big(-2 + \underbrace{\rho - i\,k'L}_{\text{Betrag} \ll 2}\Big)} \tag{2.121}$$

und man erhält schließlich

$$\frac{E_i^T}{E_i^0} = \frac{t^2/2}{\rho - ik'L - 2ih_{11}}\,. \tag{2.122}$$

Die Suszeptibilität h_{11} (aus Gleichung (2.84) auf Seite 44) läßt sich unter den oben genannten Voraussetzungen als

$$h_{11} = ic_{Q,m}\frac{\omega_i}{\gamma - i(\omega_i - \omega_{cv})}\,. \tag{2.123}$$

schreiben. Die Transmission $|E_i^T/E_i^0|^2$, die sich aus (2.122) ergibt, sowie die Rabi-Aufspaltung Ω_{LF} sind in Abbildung 2.8 auf der vorigen Seite dargestellt.

Berechnung der Rabi-Aufspaltung und Bestimmung des Quantum-Well-Koeffizienten

Nach weiteren Umformungen von (2.122) und Vernachlässigung der Dämpfung ($\gamma = 0$) und von ρ erhält man

$$\frac{E_i^T}{E_i^0} = \frac{-i\frac{t^2}{2}\omega'}{2c_{Q,m}\omega_{\mathrm{cav}} - \frac{L}{c}\omega'^2}\,. \tag{2.124}$$

ω' ist dabei das in (2.119) eingeführte Detuning des Testfelds bezüglich der Cavity-Resonanzfrequenz ω_{cav}:

$$\omega' \equiv \omega_i - \omega_{\mathrm{cav}}\,.$$

Die Rabi-Aufspaltung ist gleich dem Abstand der Maxima von $\left|\frac{E_i^T}{E_i^0}\right|^2$:

$$\Omega_{\mathrm{LF}} = 2\left(\frac{2}{N_{\mathrm{an}}\pi}c_{Q,m}\right)^{1/2}\omega_{\mathrm{cav}}\,. \tag{2.125}$$

Der Koeffizient $c_{Q,m}$ hängt gemäß Gleichung (2.83) auf Seite 44 nur von der Anzahldichte $n^{(2D)}$ und dem Betrag des Dipolmoments $|\mu|^2$ (d. h. der Elektron-Photon-Wechselwirkung) ab. Die Rabi-Aufspaltung hängt deshalb nicht von den Feldern ab.

Aus (2.125) kann man den in Gleichung (2.83) auf Seite 44 eingeführten Quantum-Well-Koeffizienten $c_{Q,m}$ über die experimentell leicht zugängliche Rabi-Aufspaltung Ω_{LF} und die Resonanzfrequenz der Cavity ω_{cav} bestimmen:

$$c_{Q,m} = \frac{N_{\mathrm{an}}\pi}{8}\left(\frac{\Omega_{\mathrm{LF}}}{\omega_{\mathrm{cav}}}\right)^2\,. \tag{2.126}$$

Kapitel 3

Numerische Ergebnisse für das Single-Quantum-Well

3.1 Definition und experimentelle Werte für Frequenzen und Dämpfungskonstanten

In diesem Abschnitt wird zunächst eine Zusammenfassung über die bislang definierten Frequenzen und Dämpfungskonstanten (siehe auch Tabelle 3.1 auf Seite 62) und deren typische experimentelle Werte gegeben.

3.1.1 Definition der Frequenzen und Dämpfungskonstanten

Die Frequenzen ω_p und ω_i sind die Frequenzen des einfallenden Pump- bzw. Testfeldes (*pump field* bzw. *probe field* oder *incident field*). ω_g aus Gleichung (2.15) auf Seite 21 ist die Frequenz des zusätzlichen, phasenkonjungierten Feldes *(generated field)*. Die in Gleichung (2.116) auf Seite 55 eingeführte Cavity-Resonanzfrequenz wird mit ω_{cav} bezeichnet. Diese wird auch *empty cavity energy* genannt [31].

Inhomogene Linienverbreiterung

In Abschnitt 2.1 auf Seite 16 wurde für die Bandlücke ein fester Wert ω_{cv} angenommen. Leichte Unterschiede in der Dicke und der Zusammensetzung (Konzentration der verschiedenen Elemente) des Quantum-Wells bewirken effektiv eine inhomogene Linienverbreiterung *(inhomogenous broadening)* [49]. Dies kann in einfacher Weise dadurch modelliert werden, daß eine Verteilungsfunktion $g(\omega_X)$ (z. B. Gauß-Verteilung) der Bandlücken angenommen wird und darüber integriert wird:

$$\omega_{cv} \rightsquigarrow \int\limits_{\omega_{cv}-N_{\text{inh}}\sigma_{\text{inh}}}^{\omega_{cv}+N_{\text{inh}}\sigma_{\text{inh}}} d\omega_X \, g(\omega_X) \cdot \ldots \, . \tag{3.1}$$

Die Standardabweichung der Verteilungsfunktion $g(\omega_X)$ wird mit σ_{inh} und deren Halbwertsbreite mit γ_{inh} bezeichnet. Die Halbwertsbreite γ_{inh} ist dabei die volle Breite bei der Hälfte des Maximalwerts (FWHM – *full width half maximum*). In den numerischen Berechnungen wurde für die Verteilungsfunktion $g(\omega_X)$ der Bandlücken eine Gauß-Verteilung angenommen. Bei den Integrationsgrenzen wurde $N_{\text{inh}} = 2$ gewählt, d. h. es wurde über ein Breite von $4\sigma_{\text{inh}}$ integriert.

Detuning

Da die Cavity-Resonanzfrequenz fest vorgegeben ist, ist es in einigen Fällen günstig, die Frequenzen als Differenz zur Cavity-Resonanzfrequenz anzugeben (z. B. in Gleichung (2.124) auf Seite 57). Für das Testfeld wird diese Differenz mit ω' bezeichnet:

$$\omega' \equiv \omega_i - \omega_{\text{cav}} \, . \tag{3.2}$$

Analog wird das Exziton-Detuning bezüglich der Cavity-Resonanzfrequenz mit ω'_X bezeichnet:

$$\omega'_X \equiv \omega_{cv} - \omega_{\text{cav}} \, . \tag{3.3}$$

Dämpfungskonstanten

Die Dämpfungsraten, die sich aus dem inkohärenten Anteil ergeben, wurden in Gleichung (2.13) auf Seite 20 eingeführt. Γ ist die longitudinale Dämpfungsrate (Bewegungsgleichung für n, siehe (2.13c)) und γ ist die transversale Dämpfungsrate (Bewegungsgleichung für P, siehe (2.13a)).

3.1.2 Typische experimentelle Werte

In experimentellen Arbeiten (z. B. [31, 53]) findet man die folgenden typischen experimentellen Werte für die Frequenzen und Dämpfungskonstanten (siehe auch Abbschnitt 3.1.1. Die Nummern beziehen sich auf die nachfolgenden Gleichungen.):

(3.4a) Die Pumpfrequenz ω_p ist gleich der Cavity-Resonanz.

(3.4b) Die Frequenz des Testfeldes ω_i wird um die Cavity-Resonanz-Frequenz variiert. Das Testfeld-Detuning $\omega' \equiv \omega_i - \omega_{\text{cav}}$ ist aber klein gegen die Cavity-Resonanz-Frequenz selbst.

(3.4c) Die Rabi-Aufspaltung Ω_{LF} beträgt etwa 8 meV.

(3.4d) Das Testfeld-Detuning ω' liegt ungefähr im Bereich $-\Omega_{\text{LF}} \ldots \Omega_{\text{LF}}$.

(3.4e) Die Bandlücke ω_{cv} beträgt 1330 meV.

(3.4f) In [31] ist für die Dämpfungskonstanten $1/\Gamma = 1/2\gamma = 1.5$ ps angegeben. Dies entspricht einer longitudinalen Dämpfungskonstante Γ von 2.66 meV. Die transversale Dämpfungskonstante γ ist halb so groß.

(3.4g) Die Halbwertsbreite der inhomogenen Linienverbreiterung γ_{inh} beträgt etwa 4 meV bis 6 meV.

Tabelle 3.1: Übersicht über die verwendeten Frequenzen und Dämpfungskonstanten.

Größe	Definition oder wichtige Beziehung	Erklärung
ω_p		Pumpfeld *(pump field)*
ω_i		Testfeld *(probe field, incident field)*
ω_g	$\equiv 2\omega_p - \omega_i$	Erzeugtes, phasenkonjungiertes Feld *(generated field)*
ω_{cav}	$k_{\mathrm{cav}} L = N_{\mathrm{an}}\pi$	Cavity-Resonanzfrequenz
ω_{cv}	$\int d\omega_X \, g(\omega_X) \cdot \ldots$	Bandlücke mit inhomogener Linienverbreiterung *(inhomogenous broadening)*
γ	$= \frac{1}{2}\Gamma + \gamma_{\mathrm{collision}}$ $\geq \frac{1}{2}\Gamma$	Transversale Dämpfung (P)
Γ	$= 2\,(\gamma - \gamma_{\mathrm{collision}})$ $\leq 2\gamma$	Longitudinale Dämpfung (n)
γ_{inh}		Breite (FWHM) des *inhomogenous broadening*
ω'	$\equiv \omega_i - \omega_{\mathrm{cav}}$	Testfeld-Detuning bzgl. der Cavity-Resonanz
ω'_X	$\equiv \omega_{cv} - \omega_{\mathrm{cav}}$	Exziton-Detuning bzgl. der Cavity-Resonanz
Ω_p	$\equiv \mu\mathcal{E}_p$	Rabi-Frequenz
Ω_{LF}		Rabi-Aufspaltung bei schwachem Pumpfeld

Zusammengefaßt ergibt sich:

$$\omega_p = \omega_{\text{cav}} \tag{3.4a}$$
$$\omega_i = \omega_{\text{cav}} + \omega' \text{ mit } |\omega'| \ll \omega_{\text{cav}} \tag{3.4b}$$
$$\Omega_{\text{LF}} \sim 8\,\text{meV} \tag{3.4c}$$
$$\omega' \sim -\Omega_{\text{LF}} \ldots \Omega_{\text{LF}} \tag{3.4d}$$
$$\omega_p = \omega_{\text{cav}} \approx \omega_{cv} \sim 1330\,\text{meV} \tag{3.4e}$$
$$\Gamma \approx 2\gamma \sim 2.66\,\text{meV} \tag{3.4f}$$
$$\gamma_{\text{inh}} \sim 5\,\text{meV (FWHM)} \tag{3.4g}$$

Bei allen in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Untersuchungen wurden die in (3.4) angegebenen Werte verwendet.

Die Programme zu den numerischen Berechnungen wurden in C++ implementiert. Für die Berechnung der inhomogenen Linienverbreiterung kam ein Algorithmus aus den *Numerical Recipes* [54] zum Einsatz (Integrationsverfahren `qromb`). Ansonsten wurden neben den C++-Standard-Bibliotheken ausschließlich eigene Bibliotheken und Module verwendet. Die Durchführung der numerischen Berechnungen erfolgte auf Workstations[1] der Arbeitsgruppe sowie auf Servern des kiz.[2]

3.2 Suszeptibilität

Für die (dimensionslosen) Suszeptibilitäten h_{ij} ergibt sich aus der Definition (2.84) auf Seite 44 sowie dem Ergebnis für die α_{ij} aus (2.44) auf Seite 30:

$$\begin{aligned} h_{11} &= c_{Q,m}\omega_i(1-2\bar{n})\frac{iD_i}{\gamma}\cdot\left\{1-\frac{2I_pF[D_i+D_p^*]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]}\right\} \\ &= c_{Q,m}\omega_i(1-2\bar{n})\frac{iD_i}{\gamma}\cdot\frac{1+2I_pF[D_g^*-D_p^*]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]} \end{aligned} \tag{3.5a}$$

[1] Als Compiler wurde `g++` aus der *GNU Compiler Collection* auf GNU/Linux eingesetzt.

[2] Auf den Servern des kiz (Kommunikations- und Informationszentrum der Universität Ulm) wurden die Betriebsysteme SUN Solaris, HP-UX, IRIX und Tru64 UNIX mit den jeweiligen Compilern des Herstellers und der `g++` aus der *GNU Compiler Collection* eingesetzt.

$$h_{12} = c_{Q,m}\omega_i(1-2\bar{n})\frac{-iD_i}{\gamma}\cdot e^{2i\phi}\cdot\frac{2I_pF[D_g^*+D_p]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]} \tag{3.5b}$$

$$h_{21} = c_{Q,m}\omega_g(1-2\bar{n})\frac{iD_g^*}{\gamma}\cdot e^{-2i\phi}\cdot\frac{2I_pF[D_i+D_p^*]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]} \tag{3.5c}$$

$$\begin{aligned} h_{22} &= c_{Q,m}\omega_g(1-2\bar{n})\frac{-iD_g^*}{\gamma}\cdot\left\{1-\frac{2I_pF[D_g^*+D_p]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]}\right\} \\ &= c_{Q,m}\omega_g(1-2\bar{n})\frac{-iD_g^*}{\gamma}\cdot\frac{1+2I_pF[D_i-D_p]}{1+2I_pF[D_g^*+D_i]} \end{aligned} \tag{3.5d}$$

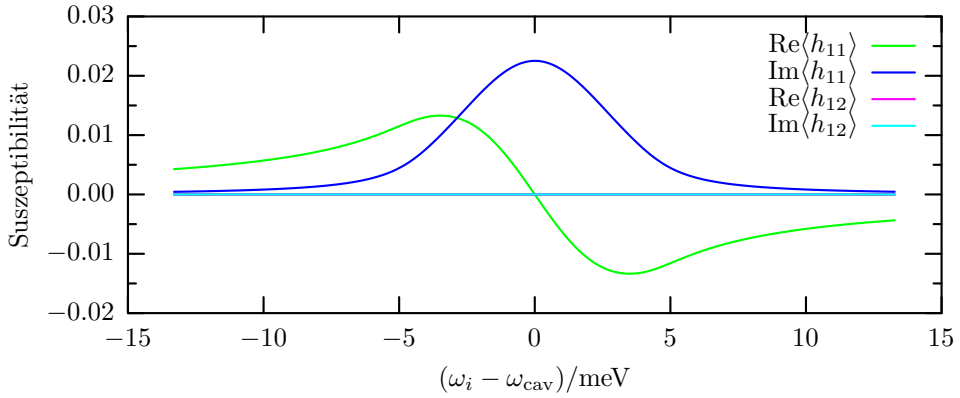
Diese Suszeptibilitäten sind in den Abbildungen 3.1–3.3 (auf den Seiten 65–69) dargestellt.

Die Abbildungen 3.1(a)–3.1(f) zeigen die Real- und Imaginärteile von h_{11} und h_{12}. Die Winkelklammern $\langle\dots\rangle$ zeigen an, daß die inhomogene Linienverbreiterung berücksichtigt wurde (siehe Abschnitt 3.1.1 auf Seite 59). In den einzelnen Teilabbildungen wurden verschiedene Pumpintensitäten I_p benutzt.

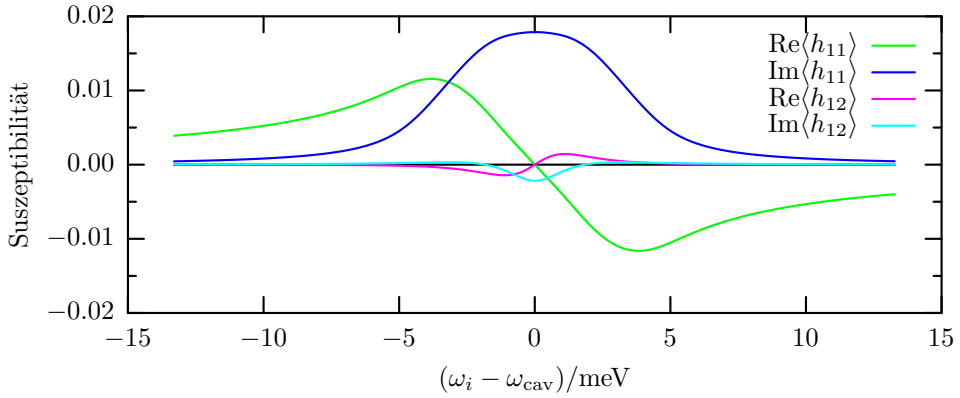
Abbildung 3.1(a) zeigt den Fall ohne Pumpfeld ($I_p = 0$). $\mathrm{Re}\,\langle h_{12}\rangle$ und $\mathrm{Im}\,\langle h_{12}\rangle$ sind Null, da kein Pumpfeld vorliegt. $\mathrm{Re}\,\langle h_{11}\rangle$ und $\mathrm{Im}\,\langle h_{11}\rangle$ zeigen daher den ohne Nichtlinearität zu erwartenden Verlauf [55, 56]. In den folgenden Abbildungen wird die Pumpintensität schrittweise erhöht. Bei $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.050$ und 0.075 (Abbildung 3.1(b) und 3.1(c)) erkennt man das Anwachsen von h_{12} und die gleichzeitige leichte Deformation bei h_{11}. Ab etwa $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.100$ (Abbildung 3.1(d)) entwickelt sich das Spektrum hin zum typischen Mollow-Spektrum [40, 57], das man bei $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.120$ und 0.135 (Abbildung 3.1(e) und 3.1(f)) deutlich erkennt.

In den Abbildungen 3.2 und 3.3 sind ebenfalls die Suszeptibilitäten aufgetragen. Jedoch sind $\mathrm{Re}\,\langle h_{11}\rangle$ (3.2(a)), $\mathrm{Im}\,\langle h_{11}\rangle$ (3.2(b)), $\mathrm{Re}\,\langle h_{12}\rangle$ (3.3(a)) und $\mathrm{Im}\,\langle h_{12}\rangle$ (3.3(b)) in separaten Abbildungen dargestellt, um die Entwicklung bei Erhöhung der Pumpintensität aufzuzeigen. Die Graphen zu höheren Pumpintensitäten sind jeweils nach oben versetzt. Am linken und rechten Rand ist zur besseren Orientierung jeweils die Null-Linie eingezeichnet.

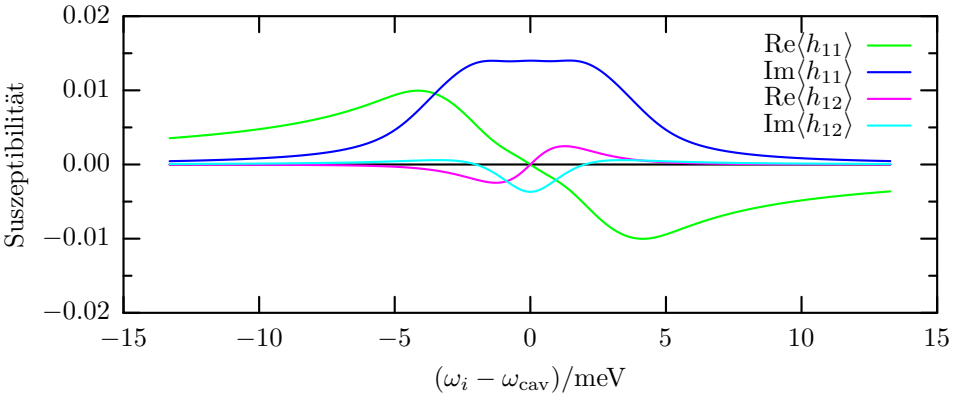
Der Imaginärteil von h_{11} zeigt in Abbildung 3.2(b) die Entwicklung von der Absorptionskurve hin zum Mollow-Spektrum.



(a) $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.000$.

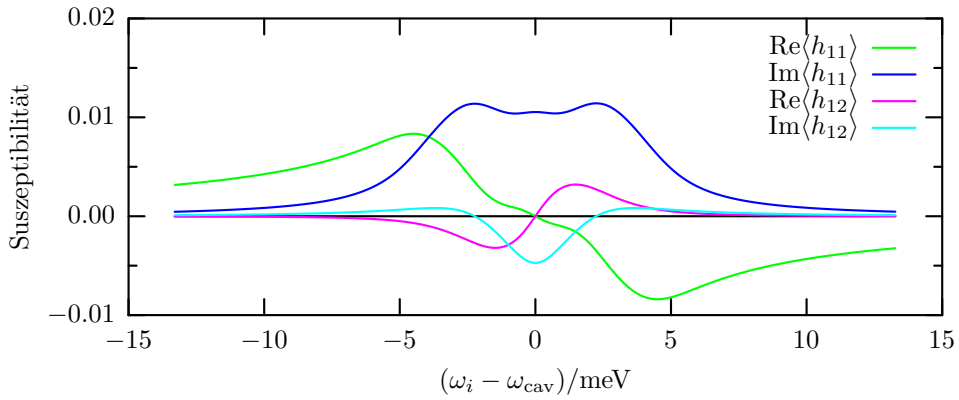


(b) $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.050$.

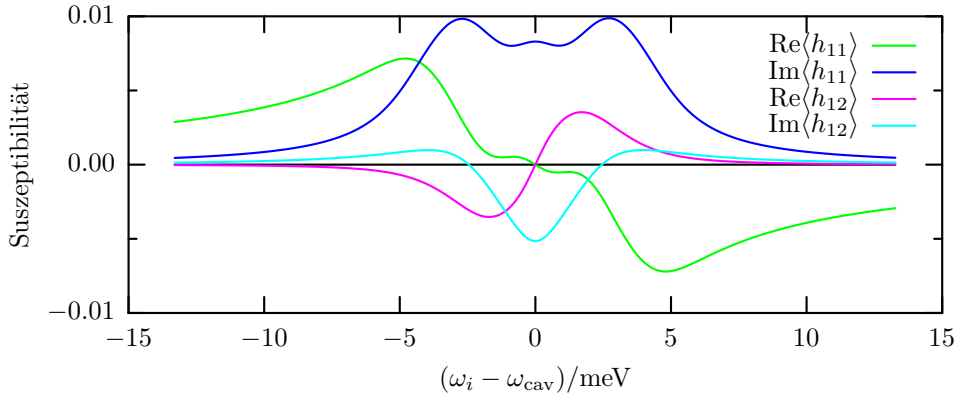


(c) $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.075$.

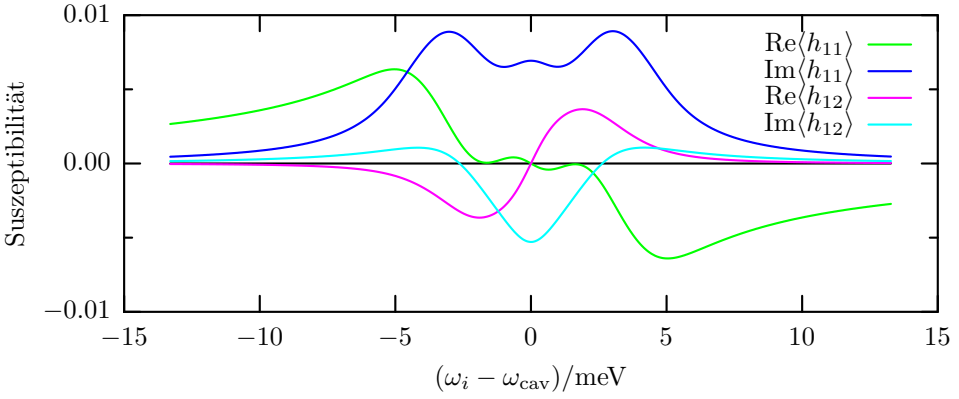
Abbildung 3.1: Verschiedene Suszeptibilitäten $\{h_{ij}\}$ in Abhängigkeit von der Testfeld-Frequenz für verschiedene Pumpintensitäten.



(d) $\Omega_p/\Omega_{\text{LF}} = 0.100$.



(e) $\Omega_p/\Omega_{\text{LF}} = 0.120$.



(f) $\Omega_p/\Omega_{\text{LF}} = 0.135$.

Abbildung 3.1: Verschiedene Suszeptibilitäten $\{h_{ij}\}$ in Abhängigkeit von der Testfeld-Frequenz für verschiedene Pumpintensitäten.

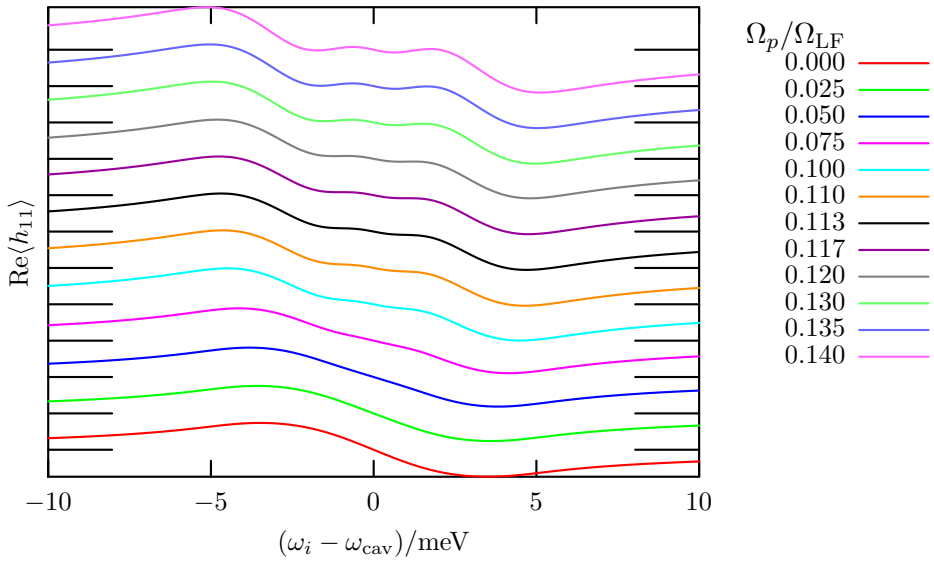
Bei positiven Werten von $\operatorname{Im} h_{12}$ findet keine Absorption, sondern stimulierte Emission statt (siehe Abbildung 3.3(b)):

$$h_{12} \propto \alpha_{12}^{*} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{Im} h_{12} \;\propto\; (-\operatorname{Im} \alpha_{12})\,.$$

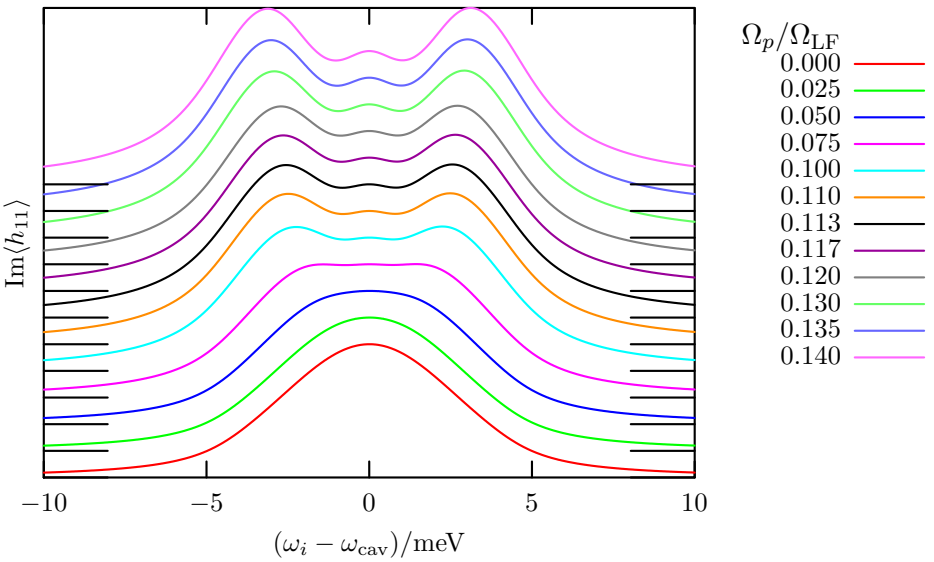
Wegen des unterschiedlichen Vorzeichens von $\operatorname{Im} h_{12}$ und $\operatorname{Im} \alpha_{12}$ liegt bei negativen Werten von $\operatorname{Im} h_{12}$ Absorption und bei positiven Werten Emission vor. Die Bereiche mit stimulierter Emission, d. h.

$$|\omega_i - \omega_{\mathrm{cav}}| \gtrsim 2.5\,\mathrm{meV}\,,$$

kann man in den Graphen von $\operatorname{Im} h_{12}$ in Abbildung 3.1(b)– 3.1(f) gut erkennen. Bei wachsender Pumpstärke verschiebt sich der Beginn der beiden Bereiche weg von der Cavity-Resonanz ($\omega_i = \omega_{\mathrm{cav}}$) nach außen. Der Betrag von $\operatorname{Im} h_{12}$ wird bei wachsender Pumpstärke jedoch größer.

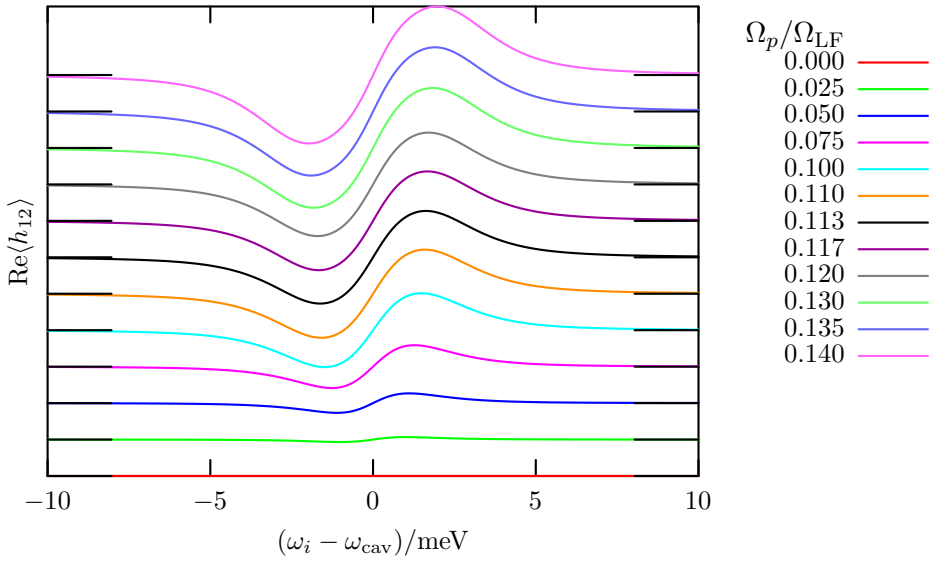


(a) Realteil von $\langle h_{11}\rangle$

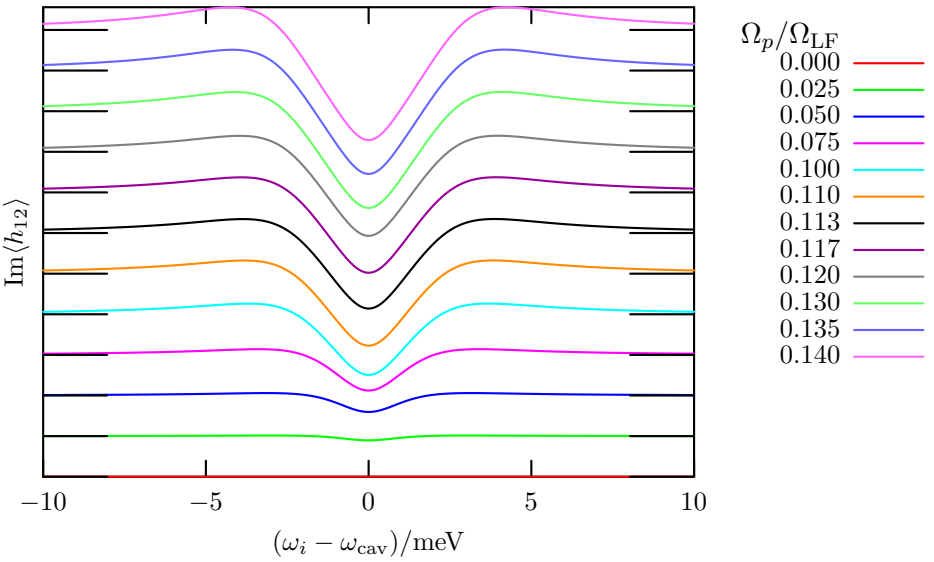


(b) Imaginärteil von $\langle h_{11}\rangle$

Abbildung 3.2: Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität $\langle h_{11}\rangle$. Die Pumpintensität steigt von unten nach oben an. Zur besseren Orientierung ist jeweils die Null-Linie am Rand eingezeichnet.



(a) Realteil von $\langle h_{12}\rangle$



(b) Imaginärteil von $\langle h_{12}\rangle$

Abbildung 3.3: Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität $\langle h_{12}\rangle$. Die Pumpintensität steigt von unten nach oben an.

3.3 Transmissionsspektren

Die berechnete Transmission jeweils mit und ohne Berücksichtigung des phasenkonjungierten Feldes ist in Abbildung 3.4 auf Seite 72 aufgetragen. Da die Felder in (2.115) komplex sind, wird das Betragsquadrat betrachtet:

$$T_i^{(1)} \equiv \left|\frac{E_i^T}{E_i^0}\right|^2 = \left|\frac{t^2}{c_{10} + ih_{11}\, c_{11} + h_{21}h_{12}\dfrac{c_{12}c_{32}}{c_{30} + ih_{22}\, c_{31}}}\right|^2 \tag{3.6a}$$

$$T_i^{(2)} \equiv \left|\frac{E_i^T}{E_i^0}\right|^2_{\text{w/o gen.}} = \left|\frac{t^2}{c_{10} + ih_{11}\, c_{11}}\right|^2 . \tag{3.6b}$$

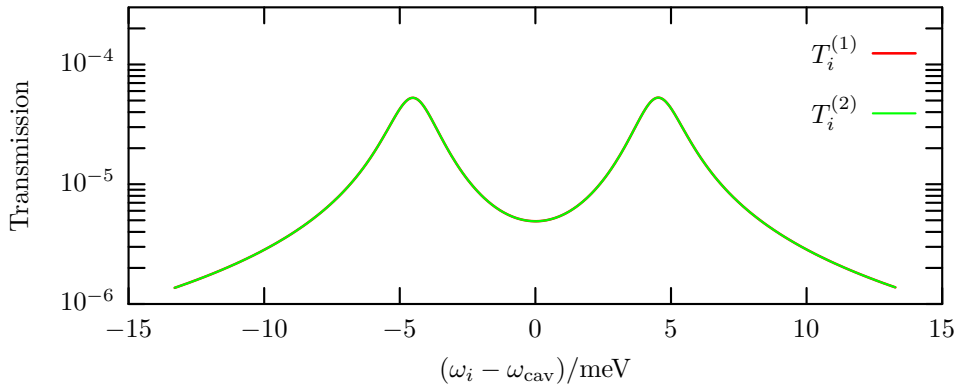
$T_i^{(1)}$ ist die in Gleichung (2.115a) auf Seite 54 berechnete Transmission unter Berücksichtigung des phasenkonjungierten Feldes. $T_i^{(2)}$ ist die Transmission ohne Berücksichtigung des phasenkonjungierten Feldes, die man erhält, indem man den Grenzfall $h_{12}, h_{21} \longrightarrow 0$ betrachtet. Der Index i zeigt an, daß es sich um den ω_i-Anteil handelt.

Bei geringer Pumpintensität $\Omega_p/\Omega_{\text{LF}} \lesssim 0.05$ stimmen die Kurven für $T_i^{(1)}$ und $T_i^{(2)}$ noch sehr gut überein, siehe Abbildungen 3.4(a)–3.4(b) auf Seite 72. Das phasenkonjungierte Feld liefert noch keinen signifikanten Beitrag. Jedoch ändert sich bei höherer Pumpstärke das Transmissions-Spektrum deutlich, wenn man das phasenkonjungierte Feld berücksichtigt, wie man in den Abbildungen 3.4(c)–3.4(f) klar erkennt. Das Feedback des phasenkonjungierten Feldes bewirkt eine merkliche Änderung des Transmissions-Spektrums. Selbiges gilt auch für die Reflektionsspektren, die aus Platzgründen hier nicht dargestellt sind.[3] Um die Transmissions- und Reflektionsspektren korrekt zu bestimmen muß daher das phasenkonjungierte Feld berücksichtigt werden.

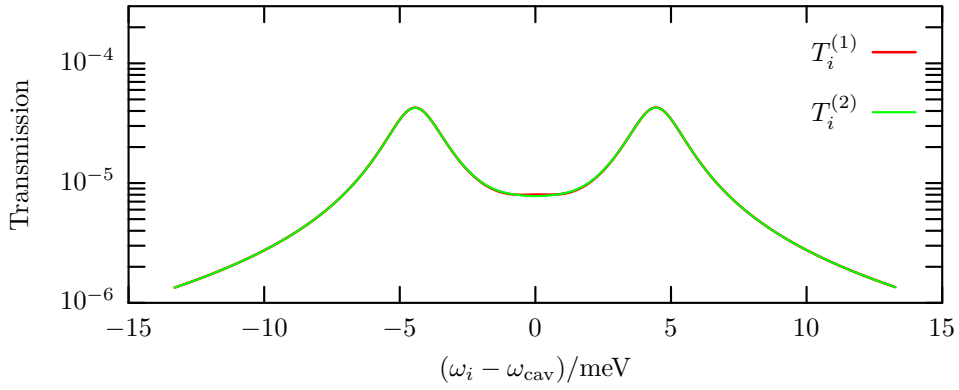
Zusammenfassend sind die Transmissionen für verschiedene Pumpintensitäten (diese sind in der Legende angegeben) in Abbildung 3.5 auf Seite 74 einzeln, d. h. einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung des phasenkonjungiertes

[3] Neben den dargestellten Transmissionsspektren für die ω_i-Anteile wurden auch die ω_g-Anteile berechnet und untersucht, aber aus Platzgründen hier nicht dargestellt. Ebenso die Reflektionsspektren für die ω_i- und ω_g-Anteile.

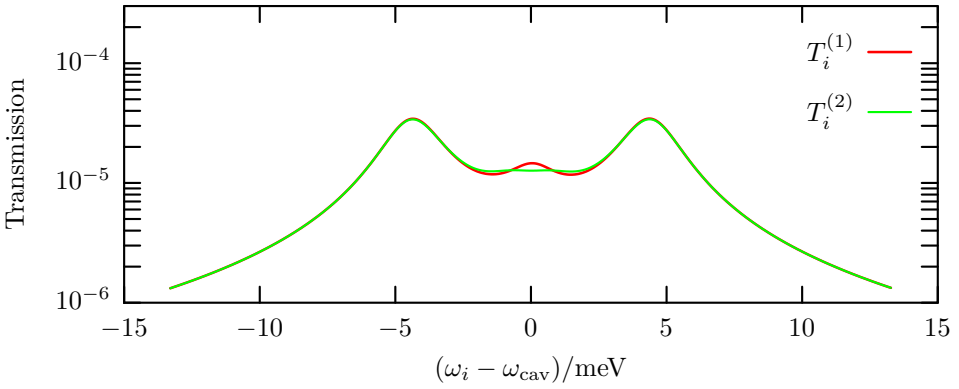
Feld, dargestellt. Bei Erhöhung der Pumpintensität ist der experimentell beobachtete Übergang vom Polariton-Dublett (siehe Abschnitt 1 auf Seite 11) bei kleinen Pumpintensitäten ($\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} \lesssim 0.050$, siehe auch die Abbildungen 3.4(a) und 3.4(b)) zum dynamischen Stark-Triplett *(ac Stark triplet)* ($\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} \gtrsim 0.100$, siehe Abbildungen 3.4(d)–3.4(f)) klar zu erkennen. Mit Berücksichtigung des phasenkonjungierten Feldes (Abbildung 3.5(a)) ist die Triplett-Struktur noch deutlicher erkennbar als ohne (Abbildung 3.5(b)).



(a) $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.000$.

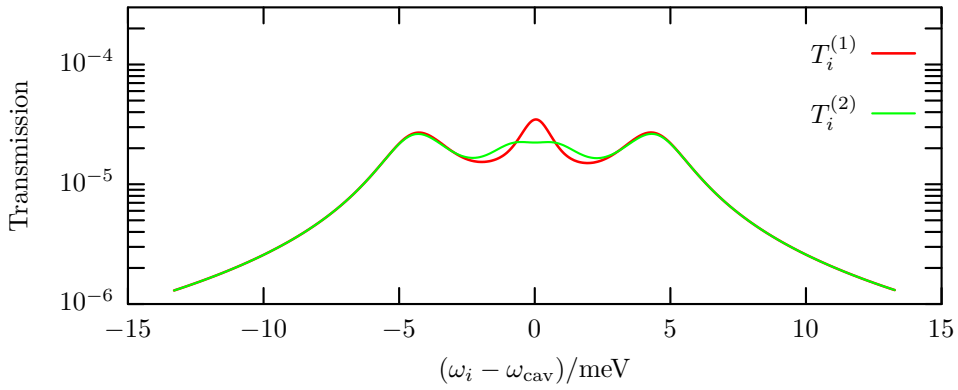


(b) $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.050$.

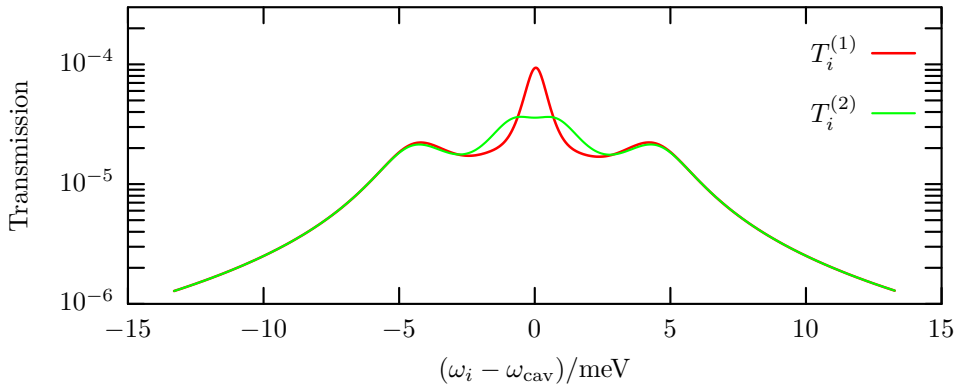


(c) $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.075$.

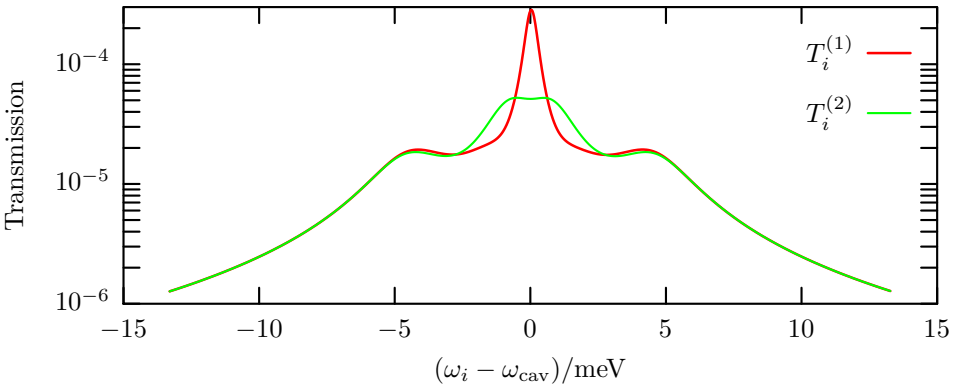
Abbildung 3.4: Vergleich der Transmission.
$T_i^{(1)}$ und $T_i^{(2)}$ sind die Transmissionen mit bzw. ohne Berücksichtigung des phasenkonjungiertes Feldes (siehe Gleichung (3.6) auf Seite 70).



(d) $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.100$.

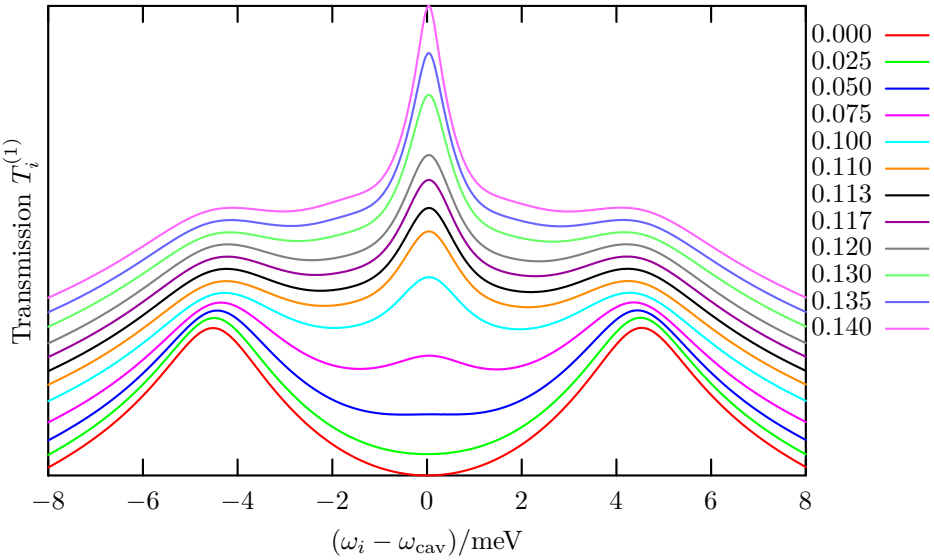


(e) $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.120$.

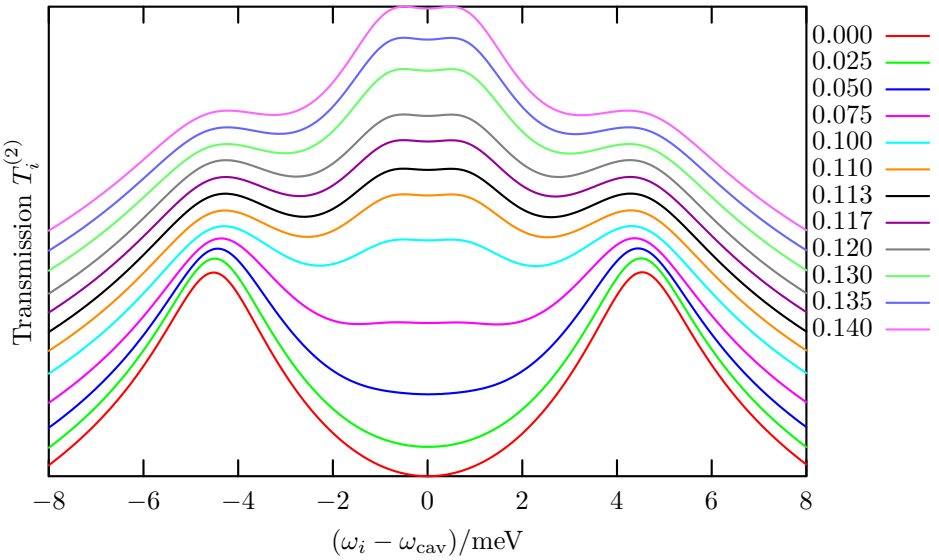


(f) $\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}} = 0.135$.

Abbildung 3.4: Vergleich der Transmission (Fortsetzung)



(a) Mit Berücksichtigung des phasenkonjungiertes Feldes.



(b) Ohne Berücksichtigung des phasenkonjungiertes Feldes.

Abbildung 3.5: Transmission für verschiedene Pumpstärken (a) mit und (b) ohne Berücksichtigung des phasenkonjungiertes Feldes. Die Pumpintensität ($\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}}$) steigt von unten nach oben an und ist in der Legende angegeben.

Teil II

Doppel-Quantum-Well

Kapitel 4

Theoretische Beschreibung des Doppel-Quantum-Wells

4.1 Struktur eines Doppel-Quantum-Wells

In Abbildung 4.1 auf der nächsten Seite ist die Bandstruktur in einem Doppel-Quantum-Well im Ortsraum schematisch dargestellt.

Die aktiven Schichten (L_1 und L_3) bestehen aus einem Halbleitermaterial, beispielsweise GaAs, das die Bandlücke $\omega_{cv} \equiv \omega_c - \omega_v$ aufweist. Dazwischen befindet sich ein anderes Halbleitermaterial, beispielsweise AlGaAs [2]. Dieses Material fungiert als Barriere, da es eine höhere Energielücke als das aktive Halbleitermaterial besitzt.

Auf das Doppel-Quantum-Well soll ein statisches elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ senkrecht zur Ebene des Quantum-Well (z = const) wirken. Die Energieniveaus erfahren aufgrund dieses statischen Feldes eine Energieverschiebung, welche die Bildung von *indirekten Exzitonen* ermöglicht. Bei indirekten Exzitonen liegen räumlich getrennte Ladungsträger vor. Die Energieverschiebung durch das statische elektrische Feld sowie der Kompensationsbeitrag, der durch die räumlich getrennten Ladungsträger der indirekten Exzitonen entsteht, werden in den folgenden Abschnitten berechnet.

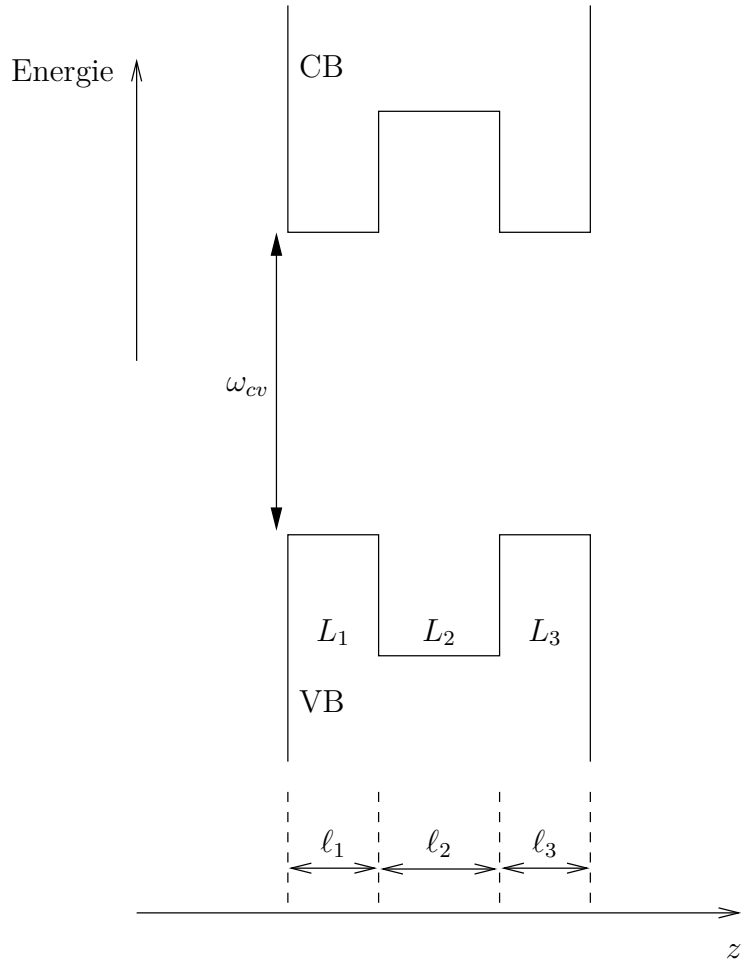


Abbildung 4.1: Doppel-Quantum-Well ohne statisches elektrisches Feld.
Die zwei Schichten L_1 und L_3 bestehen aus demselben Halbleitermaterial und haben dieselbe Schichtdicke $\ell_1 = \ell_3$. Die Anregungsenergie beträgt ω_{cv}. Das Barrierenmaterial bildet die Schicht L_2, die eine größere Energielücke besitzt (das Leitungsband und das Valenzband sind mit CB bzw. VB bezeichnet). Auch die Dicke ℓ_2 unterscheidet sich in der Regel von ℓ_1.

4.2 Beitrag des statischen elektrischen Feldes zum Hamiltonoperator

Für ein statisches elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ in negativer z-Richtung gilt für das zugehörige elektrische Potential $\phi_{\text{st.}}$:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{st.}}(z) &= E^0_{\text{st.}} \cdot z && (4.1) \\ \boldsymbol{E}_{\text{st.}} &= -\nabla\phi_{\text{st.}}(z) \\ &= -E^0_{\text{st.}} \cdot \boldsymbol{e}_z \,. && (4.2) \end{aligned}$$

Die Bandstruktur im Doppel-Quantum-Well ändert sich aufgrund des statischen elektrischen Feldes auf die in in Abbildung 4.2 auf Seite 81 dargestellte Weise. Ein Elektron, das sich am Ort z befindet, besitzt daher die zusätzliche Energie $E = -e \cdot \phi_{\text{st.}}(z)$. z_1 und z_3 seien typische Koordinaten für die Löcher im Valenzband bzw. die Elektronen im Leitungsband. Für die Potentialterme im Hamiltonoperator (kinetischer Anteil) gilt dann (siehe Gleichung (2.1) auf Seite 16):

$$H_{\text{kinetic}} = \left[\omega_c - e\phi(z_3)\right] a_c^\dagger a_c + \left[\omega_v - e\phi(z_1)\right] a_v^\dagger a_v \,. \tag{4.3}$$

Für den Beitrag von H_{kinetic} an der Bewegungsgleichung für die Polarisation $P \equiv \left\langle a_v^\dagger a_c \right\rangle$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left[\, H_{\text{kinetic}}, a_v^\dagger a_c \,\right]_- &= -\left[(\omega_c - \omega_v) - e\left(\phi(z_3) - \phi(z_1)\right)\right] a_v^\dagger a_c \\ &= -\left[(\omega_c - \omega_v) - eE^0_{\text{st.}}(z_3 - z_1)\right] a_v^\dagger a_c \\ &= -\left[\omega_{cv} - eE^0_{\text{st.}}\ell\right] a_v^\dagger a_c \,. && (4.4) \end{aligned}$$

Dabei ist $\ell \equiv z_3 - z_1$ der mittlere Abstand zwischen den positiven und negativen Ladungsträgern (siehe Abbildung 4.2 auf Seite 81). In der Bewegungsgleichung erhält man schließlich (siehe Gleichung (2.10) auf Seite 19):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P &= -i\left[\omega_{cv} - eE^0_{\text{st.}}\ell\right] P + i\,(1-2n)\,\mu\mathcal{E} \\ &= -i\omega_{\text{bare}} P + i\,(1-2n)\,\mu\mathcal{E} && (4.5) \end{aligned}$$

mit der nackten Anregungsenergie

$$\omega_{\text{bare}} \equiv \omega_{cv} - eE^0_{\text{st.}}\ell\,. \tag{4.6}$$

ω_{bare} kann daher über den äußeren Parameter $E^0_{\text{st.}}$ variiert werden. Wenn im folgenden Anregungsenergien von Exzitonen betrachtet werden, sei die Ionisierungsenergie des Exzitons [58] in ω_{cv} bzw. ω_{bare} schon berücksichtigt.

4.3 Kompensationsbeitrag durch das Feld der indirekten Exzitonen

Werden im oben beschriebenen System – einem Doppel-Quantum-Well mit statischem elektrischem Feld – Exzitonen mit der Energie ω_{bare} erzeugt, liegen *räumlich getrennte* Ladungsträger (indirekte Exzitonen) vor. Diese erzeugen ein Feld, das entgegengesetzt zum statischen Feld wirkt.

Die beiden Schichten des Doppel-Quantum-Wells entsprechen den Ladungsverteilungen an den Platten eines Plattenkondensators. Für die Normalkomponente des elektrischen Feldes gilt an einer Grenzfläche:

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n} = 4\pi\sigma\,. \tag{4.7}$$

Mit $E_1 = 0$ (kein Feld außerhalb des Quantum-Wells) und $E_2 = E_{\text{cs}}$ (Feld zwischen den beiden Schichten) ergibt sich $E_{\text{cs}} = 4\pi\sigma$ für das Kompensationsfeld E_{cs} *(charge separation)*.

Die Ladungsdichte σ setzt sich andererseits folgendermaßen zusammen:

$$\sigma = n^{(2D)}\, e\, n\,.$$

Dabei ist $n^{(2D)}$ die Anzahldichte (pro Fläche) der Zwei-Niveau-Systeme und $n \equiv \left\langle a_c^\dagger a_c \right\rangle$ ist die mittlere Anzahl der Elektronen im Leitungsband pro Zwei-Niveau-System.

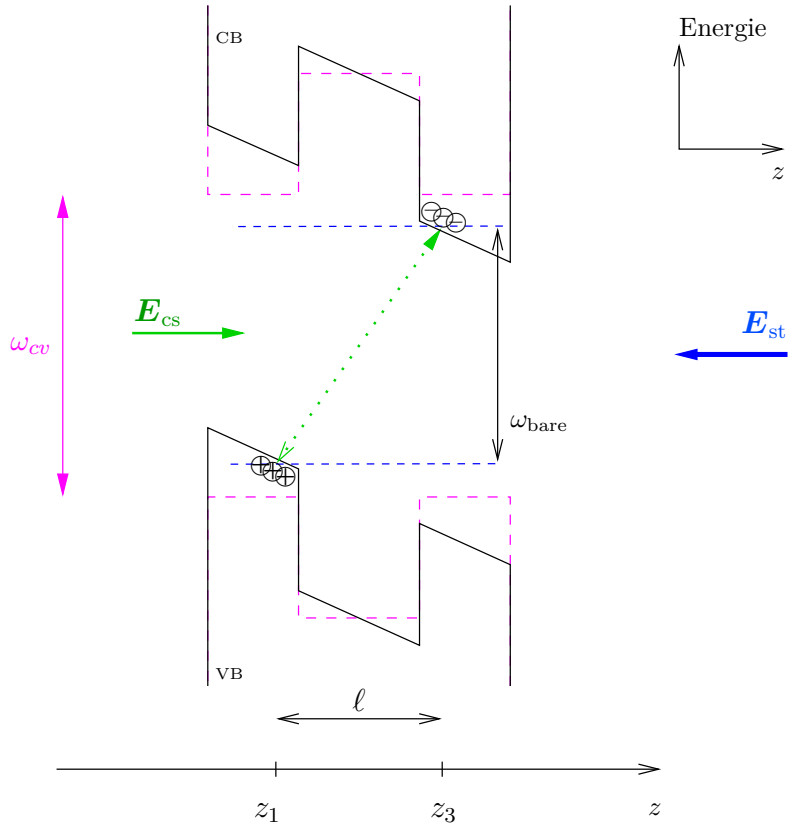


Abbildung 4.2: Doppel-Quantum-Well unter dem Einfluß eines statischen elektrischen Feldes ($\boldsymbol{E}_{\mathrm{st}}$) senkrecht zum Quantum-Well (in negativer z-Richtung).
Die Energieniveaus ohne statisches elektrisches Feld (siehe Abbildung 4.1) sind gestrichelt eingezeichnet. Die Anregungsenergie beträgt ω_{cv}. Unter dem Einfluß des statischen elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}_{\mathrm{st}}$ verschieben sich die Energieniveaus. Durch Anregung mit der Frequenz ω_{bare} werden indirekte Exzitonen erzeugt (gepunkteter Pfeil). Durch die räumliche Trennung der Ladungsträger *(charge separation)* entsteht ein Kompensationsfeld $\boldsymbol{E}_{\mathrm{cs}}$, welches von der Besetzungszahl dieser Exzitonen und dem Abstand $\ell \equiv z_3 - z_1$ der Ladungsträger abhängt.

Für den Kompensationsbeitrag zum elektrischen Feld gilt dann:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{cs}} &= \left(4\pi n^{(2D)}\, e\right) n \\ &= \eta' n\,. \end{aligned}$$

Für das zugehörige elektrostatische Potential gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{\mathrm{cs}} &= -\nabla\varphi_{\mathrm{cs}} \\ E_{\mathrm{cs}} &= -\frac{\partial}{\partial z}\varphi_{\mathrm{cs}}(z) \\ \varphi_{\mathrm{cs}}(z) &= -\eta' n z\,. \end{aligned}$$

Der Kompensationsbeitrag zum Energie-Shift beträgt dann

$$\begin{aligned} -e\left(\varphi_{\mathrm{cs}}(z_3) - \varphi_{\mathrm{cs}}(z_1)\right) &= -e(-\eta' n)\ell \\ &= e\,\ell\,\eta'\,n \\ &= 4\pi n^{(2D)}\, e^2\,\ell \cdot n \\ &= \hbar\eta \cdot n \end{aligned}$$

mit dem effektiven Separationsparameter

$$\eta \equiv \frac{4\pi e^2}{\hbar} n^{(2D)} \ell\,. \tag{4.8}$$

Der effektive Separationsparameter η hat somit die Dimension einer Frequenz.

Anstelle des Kommutators (4.4) hat man schließlich unter Berücksichtigung des Beitrags des statischen elektrischen Feldes und des Kompensationsbeitrags durch das Feld der indirekten Exzitonen

$$\begin{aligned} \left[\, H_{\mathrm{kinetic}}, a_v^\dagger a_c \,\right]_- &= -\left[\omega_{cv} - eE^0_{\mathrm{st.}}\ell + \eta \cdot n\right] a_v^\dagger a_c \\ &= -\left[\omega_{\mathrm{bare}} + \eta \cdot n\right] a_v^\dagger a_c\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Die Bewegungsgleichungen für P, P^* und n lauten somit nach Hinzufügen des

Tabelle 4.1: Abschätzung des effektiven Separationsparameters η. Durch geeignete Wahl der Materialien ist es problemlos möglich, einen Bereich $\eta = 10^2\gamma \ldots 10^8\gamma$ abzudecken. „CT“ steht für *Charge-Transfer*, d. h. organische *Charge-Transfer*-Kristalle, und „HL“ für Halbleiter.

Material	ℓ in Å	a_{eff} in Å	$\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1}$	$\Lambda \equiv \gamma/\eta$
CT	3	100	$3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^{-5}$
CT	3	1000	$3 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^{-3}$
CT	3	10000	3	0.3
CT	10	100	10^5	10^{-5}
CT	10	1000	10^3	10^{-7}
CT	10	10000	10^1	10^{-9}
HL	20	10	$2 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{-8}$
HL	20	100	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^{-6}$
HL	20	1000	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^{-4}$

inkohärenten Anteils

$$\frac{d}{dt}P = -\left(\gamma + i\omega_{\text{bare}} + i\eta \cdot n\right) P + i\left(1 - 2n\right)\mu\mathcal{E} \tag{4.10a}$$

$$\frac{d}{dt}P^* = -\left(\gamma - i\omega_{\text{bare}} - i\eta \cdot n\right) P^* - i\left(1 - 2n\right)\mu^*\mathcal{E}^* \tag{4.10b}$$

$$\frac{d}{dt}n = -\Gamma n + i\mu\mathcal{E}P^* - i\mu^*\mathcal{E}^*P\,. \tag{4.10c}$$

Diese Gleichungen beschreiben neben dem hier betrachteten Doppel-Quantum-Well-System auch andere Materialien mit räumlich getrennten Ladungsträgern, wie z. B. organische *Charge-Transfer*-Kristalle in getrennten Schichten *(segregated stack)* [38].

Abschätzung für den effektiven Separationsparameter η

Es soll nun abgeschätzt werden, wie groß der effektive Separationsparameter η im Vergleich zu anderen relevanten Größen, wie der transversalen Dämpfungs-

rate γ, ist. Aus der Definition (4.8)

$$\eta \equiv \frac{4\pi e^2}{\hbar} n^{(2D)} \ell$$

erhält man

$$\eta = 4\pi\, \alpha\, c \frac{\ell}{a_{\text{eff}}^2} \tag{4.11}$$

mit $n^{(2D)} = \frac{1}{a_{\text{eff}}^2}$ und $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$. Somit gilt

$$\eta \propto \frac{\ell}{a_{\text{eff}}^2}\,. \tag{4.12}$$

Auf der Fläche a_{eff}^2 existiert im Mittel ein aktives Zwei-Niveau-System. Für hochangeregte Halbleiter kann man $a_{\text{eff}} \sim 5 \ldots 10$Å annehmen. Kleinere Dichten, d. h. größere Werte von a_{eff}, sind möglich, indem man Materialien mit größeren Gitterkonstanten betrachtet. Der Ladungsabstand ℓ beträgt bei Halbleitern etwa $\ell \sim 25 \ldots 50$Å [2]. Er kann durch Vergrößern der Barrierendicke erhöht werden. Bei organischen *Charge-Transfer*-Kristallen liegt die typische Größenordnung bei $a_{\text{eff}} \sim 100$Å. Der Ladungsabstand (Donor-Akzeptor-Abstand in *Charge-Transfer*-Kristallen) kann bis zu $\ell \sim 3.5$Å klein sein [38]. Geringere Dichten sind problemlos zu realisieren. In Tabelle 4.1 auf der vorherigen Seite sind beispielhaft einige Wertepaare von ℓ und a_{eff}^2 und die daraus resultierenden Werte von $\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1}$ und $\Lambda \equiv \gamma/\eta$ dargestellt.

4.4 Stationäre Lösung und Bistabilität

4.4.1 Stationäre Lösung bei verschwindendem Testfeld

Unter Berücksichtigung der Beiträge des statischen elektrischen Felds (Abschnitt 4.2) und des Kompensationsbeitrags (Abschnitt 4.3) erhält man (analog zu Gleichung (2.26) auf Seite 23 beim Single-Quantum-Well) folgende Gleichungen für die stationäre Lösung im mit ω_p rotierenden System bei verschwin-

dendem Testfeld:

$$0 = -\left[\gamma + i(\omega_{\text{bare}} - \omega_p + \eta\bar{n})\right]\bar{p} + i(1-2\bar{n})\Omega_p \tag{4.13a}$$

$$0 = -\left[\gamma - i(\omega_{\text{bare}} - \omega_p + \eta\bar{n})\right]\bar{p}^* - i(1-2\bar{n})\Omega_p^* \tag{4.13b}$$

$$0 = -\Gamma\bar{n} + i\Omega_p\bar{p}^* - i\Omega_p^*\bar{p}\,. \tag{4.13c}$$

Es ist zweckmäßig die Variablen $\bar{p}$ und $\bar{p}^*$ in reelle Größen überzuführen. Dazu werden die reellen Größen q' und q'' folgendermaßen definiert:

$$q \equiv i\Omega_p p^*\,, \qquad q^* \equiv -i\Omega_p^* p \quad \text{und} \quad q \equiv q' + iq''\,. \tag{4.14}$$

Damit erhält man aus (4.13) drei Gleichungen für die drei reellen Variablen $\bar{n}$, q' und q'':

$$0 = \gamma q' + (\omega_{\text{bare}} - \omega_p + \eta\bar{n})\,q'' - |\Omega_p|^2(1-2\bar{n}) \tag{4.15a}$$

$$\gamma q'' = (\omega_{\text{bare}} - \omega_p + \eta\bar{n})\,q' \tag{4.15b}$$

$$2q' = \Gamma\bar{n}\,. \tag{4.15c}$$

Für die Besetzungszahl $\bar{n}$ erhält man nach Einführung der dimensionslosen Parameter

$$\Lambda \equiv \frac{\gamma}{\eta}\,, \qquad \delta \equiv \frac{\omega_p - \omega_{\text{bare}}}{\eta} \quad \text{und} \quad I_p \equiv \frac{|\Omega_p|^2}{\gamma\Gamma} \tag{4.16}$$

folgende Gleichung:

$$0 = \bar{n}^3 - 2\delta\bar{n}^2 + \left[\delta^2 + \Lambda^2\,(1+4I_p)\right]\bar{n} - 2\Lambda^2 I_p\,. \tag{4.17}$$

Das Lösungsverhalten dieser Gleichung dritten Grades in $\bar{n}$ wird im folgenden Abschnitt untersucht.

4.4.2 Bistabilität der stationären Lösung

Die Lösungen der kubischen Gleichung (4.17) kann man mit Hilfe der Cardanischen oder anderer Lösungsformeln berechnen [50]. Es wird sich zeigen, daß

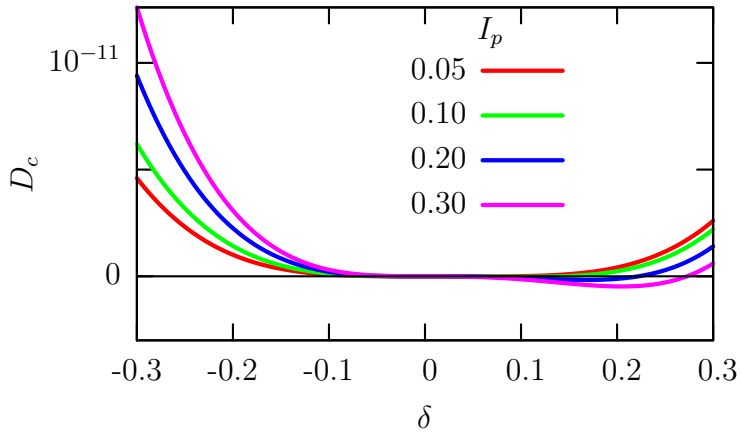


Abbildung 4.3: Diskriminante D_c in Abhängigkeit von δ für verschiedene Pumpintensitäten I_p ($\Lambda = 10^{-4}$)

in gewissen Parameterbereichen Bistabilität auftritt.

Die Normalform der kubischen Gleichung in [50] ist[1]

$$n^3 + r_c n^2 + s_c n + t_c = 0\,. \tag{4.18}$$

Durch Vergleich mit (4.17) ergeben sich die Koeffizienten r_c, s_c und t_c zu:

$$r_c = -2\delta\,, \tag{4.19a}$$
$$s_c = \delta^2 + \Lambda^2(1 + 4I_p)\,, \tag{4.19b}$$
$$t_c = -2\Lambda^2 I_p\,. \tag{4.19c}$$

Für die weiteren, bei der Lösung in [50] benötigten Koeffizienten p_c und q_c ergibt sich:

$$p_c = s_c - \frac{1}{3}r_c^2 \qquad = -\frac{1}{3}\delta^2 + \Lambda^2(1 + 4I_p)\,, \tag{4.20a}$$
$$q_c = \frac{2}{27}r_c^3 - \frac{1}{3}r_c s_c + t_c \qquad = \frac{2}{27}\delta\left(\delta^2 + 9\Lambda^2(1 + 4I_p)\right) - 2\Lambda^2 I_p\,. \tag{4.20b}$$

[1] Um Verwechslungen mit gleichnamigen bereits eingeführten Größen zu vermeiden, wurde der Index c *(cubic)* hinzugefügt.

Die Koeffizienten p_c und q_c gehen in die Diskriminante

$$D_c = \left(\frac{p_c}{3}\right)^3 + \left(\frac{q_c}{2}\right)^2 \tag{4.21}$$

ein, die das Lösungsverhalten der kubischen Gleichung bestimmt.

4.4.3 Berechnung des Bistabilitätsbereichs bei festem Λ

Für $D_c \leq 0$ hat die kubische Gleichung drei reelle Lösungen, andernfalls nur eine reelle Lösung. $p_c < 0$ ist offenbar eine notwendige Bedingung dafür, drei reelle Lösungen zu erhalten:

$$\begin{aligned} p_c < 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{3}\delta^2 > \Lambda^2(1+4I_p) \\ &\Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{3}(\omega_p - \omega_{\text{bare}})^2 > \gamma^2(1+4I_p)\,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Abbildung 4.3 auf der vorherigen Seite zeigt die Diskriminante D_c in Abhängigkeit von δ für verschiedene Pumpintensitäten I_p. Bei allen Kurven ist $\Lambda = 10^{-4}$. Man erhält nur bei bestimmten Pumpintensitäten drei reelle Lösungen für $\bar{n}$. Dazu muß zudem δ in einem bestimmten Intervall liegen: $\delta_0 < \delta < \delta_1$. $\delta_0(I_p)$ und $\delta_1(I_p)$ bezeichnen demnach die beiden Nullstellen (so vorhanden) der Funktion $D_c(\delta, I_p)$. In der Näherung für $\Lambda \ll 1$ kann man die Diskriminante auf die Form

$$D_{c,\text{approx}} = \frac{1}{27}\delta^3\Lambda^2\left(\delta(1+4I_p) - 2I_p\right) \tag{4.23}$$

vereinfachen. Für die Nullstellen erhält man daher

$$\delta_{0,\text{approx}} = 0 \quad \text{und} \quad \delta_{1,\text{approx}} = \frac{2I_p}{1+4I_p}\,. \tag{4.24}$$

In Abbildung 4.4 auf der nächsten Seite ist der Bereich mit drei reellen Lösungen in der δ-I_p-Ebene dargestellt, wobei die Näherungen (4.24) benutzt wurden. Der Vergleich mit der exakten Lösung zeigt, daß δ_1 sehr gut mit $\delta_{1,\text{approx}}$ übereinstimmt. Für sehr kleine Pumpintensitäten ist die Näherung $\delta_{0,\text{approx}} = 0$

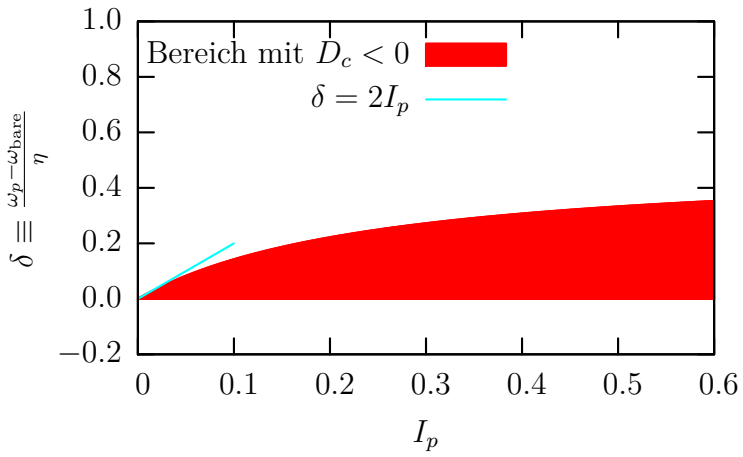


Abbildung 4.4: Bereich negativer Diskriminante in der δ-I_p-Ebene (Näherung). Die Begrenzungen des Bereichs sind durch $\delta_{0,\text{approx}}$ und $\delta_{1,\text{approx}}$ gegeben (siehe (4.24)).

zu ungenau. δ_0 kann man aber exakt aus (4.20) berechnen:

$$p_c(\delta_p) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta_p = \sqrt{3}\Lambda\sqrt{1+4I_p} \tag{4.25a}$$

und

$$p_c < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |\delta| > \delta_p\,. \tag{4.25b}$$

In Abbildung 4.5 auf der nächsten Seite ist der Bereich sehr kleiner Pumpintensitäten gesondert dargestellt. Der Bereich negativer Diskriminante ist in der δ-I_p-Ebene durch

$$\delta > \delta_p \quad \wedge \quad \delta < \delta_{1,\text{approx}} \tag{4.26}$$

gegeben.

Zusammenfassung zu Abschnitt 4.4.3

Bei gewissen Parametern zeigt das Doppel-Quantum-Well-System somit Bistabilität. Der δ-Bereich, in dem die Bistabilität auftritt, konnte analytisch berechnet und es konnten einfache Näherungsformeln angeben werden.

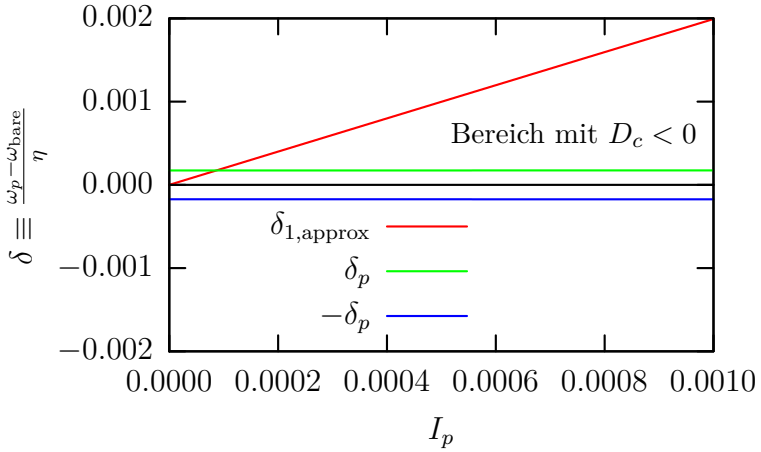


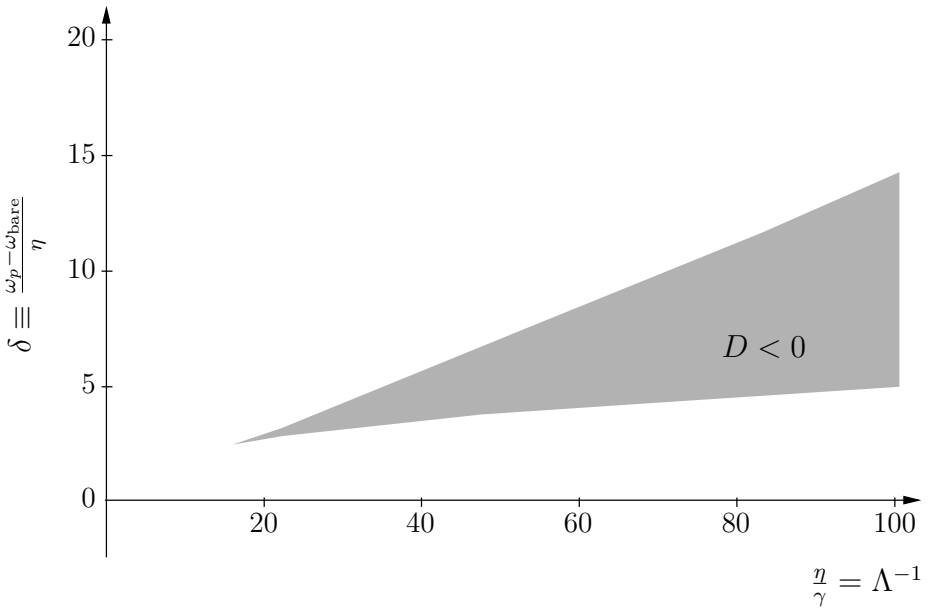
Abbildung 4.5: Bereich negativer Diskriminante in der δ-I_p-Ebene für sehr kleine Pumpintensitäten: $\delta > \delta_p \wedge \delta < \delta_{1,\text{approx}}$.

Die Bistabilität tritt bereits bei verschwindendem Testfeld auf. Im Resonanzfall $\omega_p = \omega_{\text{bare}}$ (Pumpfrequenz entspricht der modifizierten Bandlücke) tritt keine Bistabilität auf (siehe Gleichung (4.22) auf Seite 87). Wie man in Abbildung 4.5 erkennt, ist sowohl ein gewisses positives Pumpdetuning als auch eine Mindestintensität des Pumpfeldes erforderlich. Der Bistabilitätsbereich vergrößert sich mit wachsender Pumpstärke.

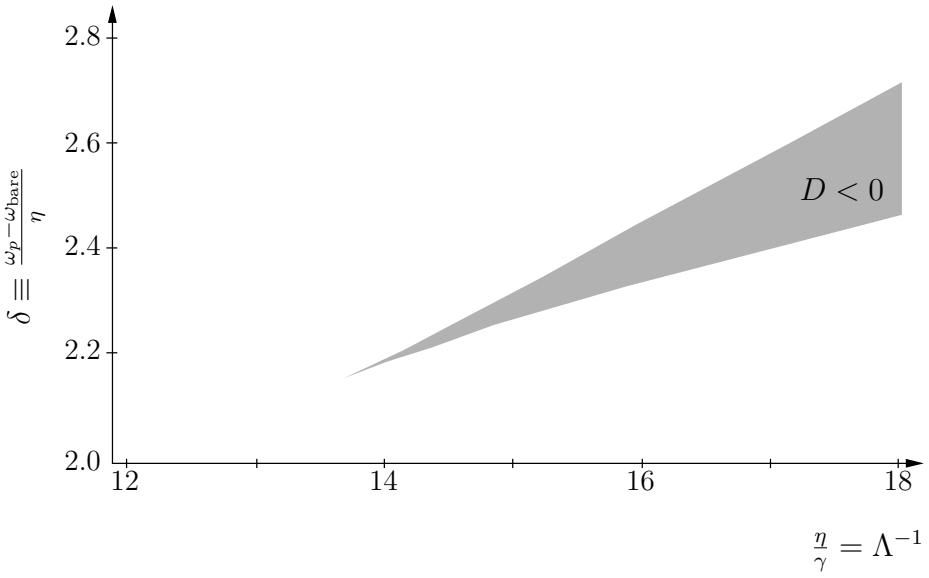
4.4.4 Bistabilitätsbereich bei festem I_p

In Abbildung 4.6 auf der nächsten Seite ist der Bistabilitätsbereich bei vorgegebener Pumpstärke $I_p = 0.1$ aufgetragen. Bei ansteigenden Werten des effektiven Separationsparameters η ($\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1}$) vergrößert sich der Bistabilitätsbereich in δ-Richtung. Für das Auftreten der Bistabilität muß der effektive Separationsparameter einen bestimmten Schwellenwert überschreiten, der wiederum von der Pumpstärke I_p abhängt.

Im Fall des Single-Quantum-Wells (siehe Abbildung 2.2 auf Seite 26) gibt es keine Bistabilität. Deshalb tritt erwartungsgemäß bei Annäherung an den Single-Quantum-Well-Fall, der dem Wert $\eta = 0$ entspricht, auch keine Bistabilität mehr auf.



(a) Übersicht



(b) Vergrößerung

Abbildung 4.6: Bistabilitätsbereich bei vorgegebener Pumpstärke $I_p = 0.1$. Die Abszisse $\frac{\eta}{\gamma} = \Lambda^{-1}$ ist proportional zum mittleren Abstand ℓ der Ladungsträger. Die Ordinate $\delta \equiv \frac{\omega_p - \omega_{\text{bare}}}{\eta}$ wächst mit zunehmendem statischen elektrischen Feld $E^0_{\text{st.}}$.

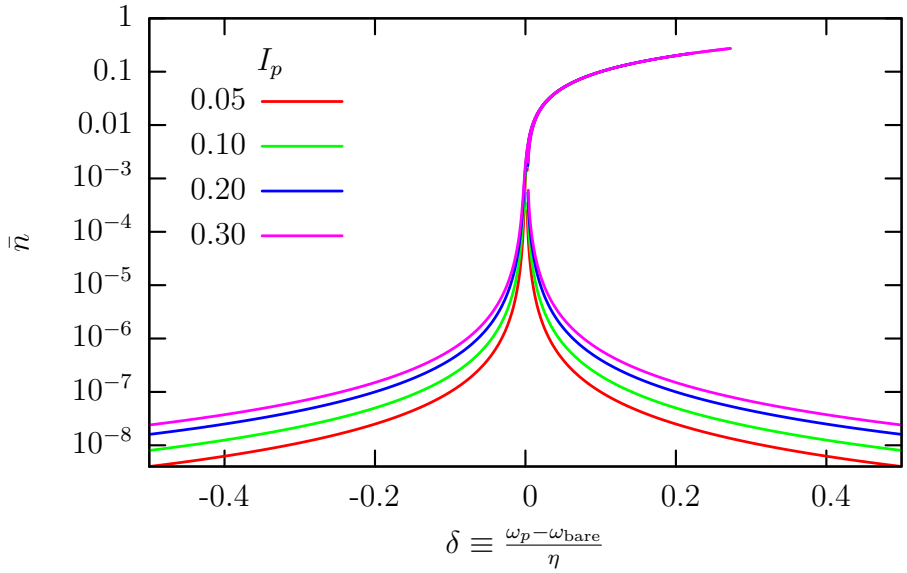
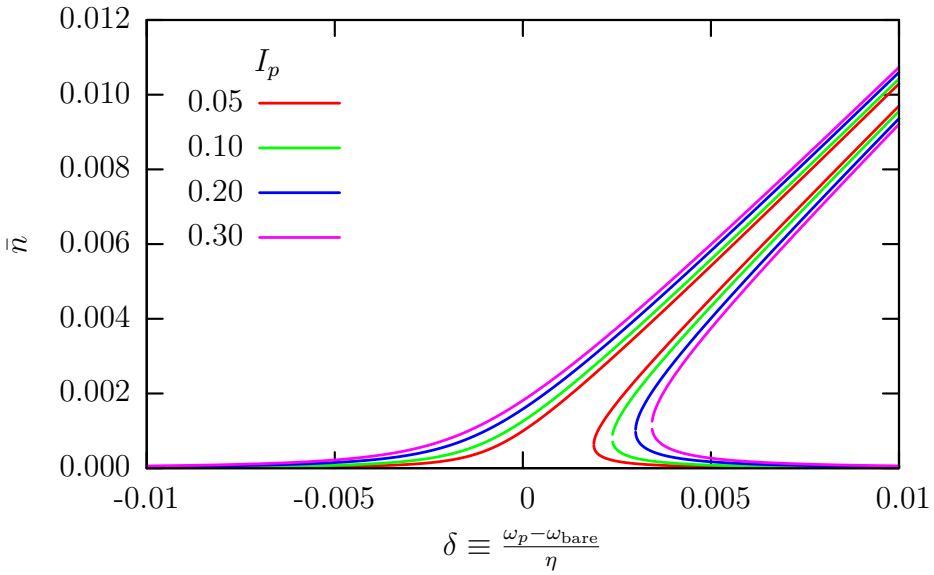


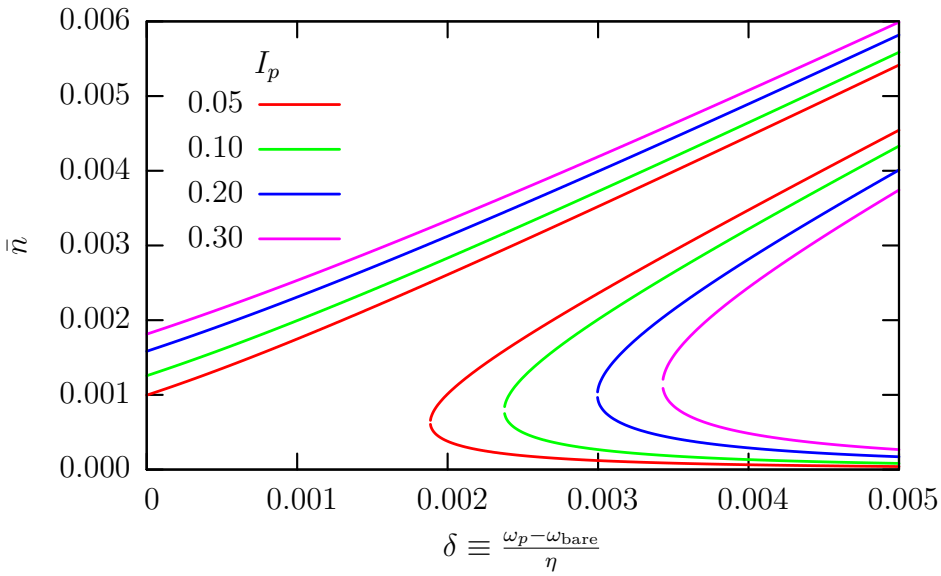
Abbildung 4.7: Besetzungszahl $\bar{n}$ (logarithmischer Auftrag) in Abhängigkeit von Pumpdetuning δ für verschiedene Pumpintensitäten I_p. Die Abszisse $\delta \equiv \frac{\omega_p - \omega_{\text{bare}}}{\eta}$ wächst mit zunehmendem statischem elektrischen Feld $E^0_{\text{st.}}$.

4.4.5 Ergebnis für die Besetzungszahl

Mit den Lösungsformeln für die kubische Gleichung aus [50] kann man nun die einzige reelle Lösung (Fall $D_c > 0$) bzw. die drei reellen Lösungen (Fall $D_c < 0$) der kubischen Gleichung (4.17) (Seite 85) für die Besetzungszahl $\bar{n}$ berechnen. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.7 in Abhängigkeit vom skalierten Pumpdetuning $\delta \equiv \frac{\omega_p - \omega_{\text{bare}}}{\eta}$ für verschiedene Pumpintensitäten I_p in der Übersicht dargestellt (logarithmischer Auftrag von $\bar{n}$). In den Abbildungen 4.8(a) und 4.8(b) sind dieselben Größen in kleineren Wertebereichen aufgetragen (linearer Auftrag beider Größen). Insbesondere der Übergang in den Bistabilitätsbereich ist genauer dargestellt.



(a)



(b)

Abbildung 4.8: Besetzungszahl $\bar{n}$ wie in Abbildung 4.7, jedoch linearer Auftrag von $\bar{n}$ für kleinere Wertebereiche am Übergang in den Bistabilitätsbereich.

4.5 Bewegungsgleichungen im rotierenden System

Aus Gleichung (4.10) (Seite 83) ergeben sich mit Gleichung (2.18) (Seite 22) die Maxwell-Bloch-Gleichungen im rotierenden Bezugssystem analog zu Gleichung (2.19) beim Single-Quantum-Well (Seite 22):

$$\frac{d}{dt}p = -\gamma\left(\frac{1}{D_p} + \frac{in}{\Lambda}\right)p + (1-2n)i\left\{\Omega_p + \mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t} + \mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\} \tag{4.27a}$$

$$\frac{d}{dt}p^* = -\gamma\left(\frac{1}{D_p^*} - \frac{in}{\Lambda}\right)p^* - (1-2n)i\left\{\Omega_p + \mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t} + \mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\}^* \tag{4.27b}$$

$$\frac{d}{dt}n = -\Gamma n + \left[i\left(\Omega_p + \mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t} + \mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right)p^* + \text{c.c.}\right] \tag{4.27c}$$

mit

$$D_j \equiv D(\omega_j) \equiv \frac{\gamma}{\gamma + i(\omega_{\text{bare}} - \omega_j)}\,, \qquad j \in \{p, i, g\}\,. \tag{4.28}$$

Im Unterschied zu Gleichung (2.40c) auf Seite 29 wird hier die in (4.6) (Seite 80) eingeführte nackte Bandlücke $\omega_{\text{bare}} \equiv \omega_{cv} - eE^0_{\text{st.}}\ell$ anstelle von ω_{cv} verwendet.

4.6 Linearisierung der Bewegungsgleichungen

Wie in Abschnitt 2.1.6 auf Seite 25 werden die Bewegungsgleichungen um die stationären Lösungen linearisiert:

$$p(t) = \bar{p} + \delta p(t) \tag{4.29a}$$

$$p^*(t) = \bar{p}^* + \delta p^*(t) \tag{4.29b}$$

$$n(t) = \bar{n} + \delta n(t)\,. \tag{4.29c}$$

Wenn alle Terme vernachlässigt werden, die von zweiter Ordnung in $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_g$ bzw. δp, δp^*, δn sind, erhält man die linearisierten Bewegungsgleichungen für δp, δp^* und δn (siehe Gleichung (2.32a) auf Seite 25):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta p = &-\left(\frac{\gamma}{D_p}+i\eta\bar{n}\right)\delta p - i\left(2\Omega_p+\eta\bar{p}\right)\delta n \\ &+(1-2\bar{n})i\left\{\mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t}+\mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\} \qquad (4.30a)\\ \frac{d}{dt}\delta p^* = &-\left(\frac{\gamma}{D_p^*}-i\eta\bar{n}\right)\delta p^* + i\left(2\Omega_p^*+\eta\bar{p}^*\right)\delta n \\ &-(1-2\bar{n})i\left\{\mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t}+\mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\}^* \qquad (4.30b)\\ \frac{d}{dt}\delta n = &-\Gamma\delta n + \left[i\Omega_p\delta p^* + \text{c.c.}\right] \\ &+\left[i\left\{\mu\mathcal{E}_i e^{i\Delta_{pi}t}+\mu\mathcal{E}_g e^{-i\Delta_{pi}t}\right\}\bar{p}^* + \text{c.c.}\right]. \qquad (4.30c)\end{aligned}$$

Mit dem Lösungsansatz (wie in Gleichung (2.37) auf Seite 28, $\Delta \equiv \omega_p - \omega_i$)

$$\begin{aligned}\delta p(t) &= p_1 e^{i\Delta t} + p_2 e^{-i\Delta t} \qquad (4.31a)\\ \delta p^*(t) &= p_1^* e^{-i\Delta t} + p_2^* e^{i\Delta t} \qquad (4.31b)\\ \delta n(t) &= n_1 e^{i\Delta t} + n_1^* e^{-i\Delta t} \qquad (4.31c)\end{aligned}$$

erhält man analog zu Gleichung (2.41) (siehe Seite 29)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\gamma}{D_i}+i\eta\bar{n}\right)p_1 + i\left(2\Omega_p+\eta\bar{p}\right)n_1 &= i(1-2\bar{n})\mu\mathcal{E}_i \qquad (4.32a)\\ \left(\frac{\gamma}{D_g^*}-i\eta\bar{n}\right)p_2^* - i\left(2\Omega_p^*+\eta\bar{p}^*\right)n_1 &= -i(1-2\bar{n})\mu^*\mathcal{E}_g^* \qquad (4.32b)\\ i\Omega_p^* p_1 - i\Omega_p p_2^* + \frac{\Gamma}{F}n_1 &= i\bar{p}^*\,\mu\mathcal{E}_i - i\bar{p}\,\mu^*\mathcal{E}_g^*\,. \qquad (4.32c)\end{aligned}$$

Es werden noch die neuen Resonanznenner G_j definiert

$$\begin{aligned}G_j \equiv G(\omega_j) &\equiv \frac{\gamma}{\gamma + i\left[(\omega_{\text{bare}}-\omega_j)+\eta\bar{n}\right]}\,, \qquad j\in\{p,i,g\} \qquad (4.33a)\\ \Longrightarrow \qquad \frac{\gamma}{G_j} &= \frac{\gamma}{D_j} + i\eta\bar{n}\,. \qquad (4.33b)\end{aligned}$$

Hervorzuheben ist hier, daß die Resonanznenner bei endlichem η – im Gegensatz zum Single-Quantum-Well – von der dynamischen Größe $\bar{n}$ abhängen.

Nach Einführung von G_i aus (4.33) in die Gleichungen (4.32) kann man letztere in Matrixform darstellen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{G_i} & 0 & \Omega_p \left\{2i - \Lambda^{-1} G_p (1-2\bar{n})\right\} \\ 0 & \frac{\gamma}{G_g^*} & -\Omega_p^* \left\{2i + \Lambda^{-1} G_p^* (1-2\bar{n})\right\} \\ i\Omega_p^* & -i\Omega_p & \frac{\Gamma}{F} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2^* \\ n_1 \end{bmatrix}$$
$$= (1-2\bar{n}) \begin{bmatrix} i\mu\mathcal{E}_i \\ -i\mu^*\mathcal{E}_g^* \\ \frac{1}{\gamma}\left[\Omega_p^* G_p^* \mu\mathcal{E}_i + \Omega_p G_p \mu^* \mathcal{E}_g^*\right] \end{bmatrix} . \quad (4.34)$$

Durch Lösen des Gleichungssystems (4.34) erhält man für den Koeffizienten der Besetzungszahl n_1 (siehe Gleichung (2.42) auf Seite 30)

$$n_1 = (1-2\bar{n}) \frac{F}{\gamma\Gamma} \cdot \frac{[G_i + G_p^*]\Omega_p^* \,\mu\mathcal{E}_i + [G_g^* + G_p]\Omega_p \,(\mu\mathcal{E}_g)^*}{1 + 2I_p F\left[G_i + G_g^*\right] + i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n}) I_p F\left[G_p G_i - G_p^* G_g^*\right]} . \quad (4.35)$$

Die Lösungen für die Koeffizienten der Polarisation $p_1,\ p_2^*$ kann man wieder (siehe Gleichung (2.43) auf Seite 30) durch Einführen der nichtlinearen Suszeptibilitäten α_{11}, α_{12}, α_{21} und α_{22} in der Form

$$p_1 = \alpha_{11}(\mu\mathcal{E}_i) + \alpha_{12}(\mu\mathcal{E}_g)^* \quad (4.36a)$$
$$p_2^* = \alpha_{21}^*(\mu\mathcal{E}_i) + \alpha_{22}^*(\mu\mathcal{E}_g)^* \quad (4.36b)$$

darstellen.

4.7 Suszeptibilität beim Doppel-Quantum-Well

Man erhält schließlich für die Suszeptibilitäten:

$$\alpha_{11} = (1-2\bar{n})\frac{iG_i}{\gamma}\times \\ \times \frac{1+2I_pF\left[G_g^*-G_p^*\right]-i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n})I_pFG_p^*\left[G_p+G_g^*\right]}{1+2I_pF\left[G_i+G_g^*\right]+i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n})I_pF\left[G_pG_i-G_p^*G_g^*\right]} \tag{4.37a}$$

$$\alpha_{12} = (1-2\bar{n})\frac{-iG_i}{\gamma}e^{2i\phi}\times \\ \times \frac{2I_pF\left[G_g^*+G_p\right]+i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n})I_pFG_p\left[G_p+G_g^*\right]}{1+2I_pF\left[G_i+G_g^*\right]+i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n})I_pF\left[G_pG_i-G_p^*G_g^*\right]} \tag{4.37b}$$

$$\alpha_{21}^* = (1-2\bar{n})\frac{iG_g^*}{\gamma}e^{-2i\phi}\times \\ \times \frac{2I_pF\left[G_i+G_p^*\right]-i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n})I_pFG_p\left[G_p^*+G_i\right]}{1+2I_pF\left[G_i+G_g^*\right]+i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n})I_pF\left[G_pG_i-G_p^*G_g^*\right]} \tag{4.37c}$$

$$\alpha_{22}^* = (1-2\bar{n})\frac{-iG_g^*}{\gamma}\times \\ \times \frac{1+2I_pF\left[G_i-G_p\right]+i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n})I_pFG_p\left[G_p^*+G_i\right]}{1+2I_pF\left[G_i+G_g^*\right]+i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n})I_pF\left[G_pG_i-G_p^*G_g^*\right]}\,. \tag{4.37d}$$

Im Grenzfall $\eta \to 0$ (bzw. $\Lambda^{-1} \to 0, G_j \to D_j$) ergibt sich das Ergebnis für das Single-Quantum-Well aus Abschnitt 2.1.6 (Gleichung (2.44) auf Seite 30).

Wie in Gleichung (2.84) auf Seite 44 werden wieder dimensionslose Suszeptibilitäten definiert:

$$h_{11} = 2\pi n^{(2D)}\frac{1}{c}\omega_i\mu^*\mu\cdot\alpha_{11} \;= c_{Q,m}\omega_i\alpha_{11} \tag{4.38a}$$

$$h_{12} = 2\pi n^{(2D)} \frac{1}{c} \omega_i \mu^* \mu^* \cdot \alpha_{12} = c_{Q,m} e^{-2i\phi_\mu} \omega_i \alpha_{12} \tag{4.38b}$$

$$h_{21} = 2\pi n^{(2D)} \frac{1}{c} \omega_g \mu \mu \cdot \alpha_{21}^* \quad = c_{Q,m} e^{2i\phi_\mu} \omega_g \alpha_{21}^* \tag{4.38c}$$

$$h_{22} = 2\pi n^{(2D)} \frac{1}{c} \omega_g \mu^* \mu \cdot \alpha_{22}^* \; = c_{Q,m} \omega_g \alpha_{22}^* \,. \tag{4.38d}$$

Im Gegensatz zu den Resonanznennern D_j beim Single-Quantum-Well hängen die Resonanznenner G_j von einer dynamischen Größe ($\bar{n}$) ab. Außerdem erhält man zusätzliche bzw. modifizierte Beiträge zu den Suszeptibilitäten durch die zusätzlichen Summanden

$$i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n}) I_p F \left[G_p G_i - G_p^* G_g^* \right] ,$$

im Nenner und in den Zählern, z. B.

$$-i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n}) I_p F G_p^* \left[G_p + G_g^* \right]$$

bei α_{11}. Deshalb zeigen die Suszeptibilitäten ein deutlich anderes Verhalten als beim Single-Quantum-Well. Dies wird im folgenden Abschnitt (5.1) untersucht.

Kapitel 5

Numerische Ergebnisse für das Doppel-Quantum-Well

5.1 Suszeptibilität beim Doppel-Quantum-Well

Bei der numerischen Untersuchung werden nur die Parameterbereiche betrachtet, in denen keine Bistabilität der stationären Lösung vorliegt. Nach Gleichung (4.22) auf Seite 87 ist dies insbesondere im Resonanzfall ($\omega_p = \omega_{\text{bare}}$, Pumpfrequenz entspricht der modifizierten Bandlücke) gegeben.

Die berechneten Suszeptibilitäten aus Gleichung (4.38) bzw. (4.37) sind in den Abbildungen 5.1(a)–5.1(e) graphisch dargestellt. Es wurde der Real- und Imaginärteil von h_{11} (siehe (4.38a)) unter Berücksichtigung der inhomogenen Linienverbreiterung aufgetragen. Bei kleinem Pumpfeld, beispielsweise in Abbildung 5.1(a), ist noch kein wesentlicher Unterschied zum Single-Quantum-Well (siehe Abbildungen 3.1(a)–3.1(f) auf den Seiten 65–66) erkennbar. Bei etwas höherer Pumpstärke ($I_p = 0.075$ in Abbildung 5.1(b), $I_p = 0.100$ in Abbildung 5.1(c)) hat der Realteil von h_{11} nicht mehr die übliche Form einer Suszeptibilität, wie es beim Single-Quantum-Well der Fall ist. Zudem weist $\text{Re}\langle h_{11}\rangle$ eine deutliche Asymmetrie auf. Bei weiterer Erhöhung der Pumpstärke beginnt der Realteil von h_{11} zu divergieren (siehe Abbildung 5.1(d) und 5.1(e)). Mathematisch bedeutet dies, daß der Nenner in Gleichung (4.37), d. h. sowohl sein Real- als auch Imaginärteil, verschwindet. Bei den hier betrachte-

ten Parametern zeigt die numerische Untersuchung, daß der Imaginärteil des Nenners in Gleichung (4.37) stets verschwindet. Dies kann man für den Fall[1] $\omega_p = \omega_i = \omega_{\text{bare}}$ auch analytisch[2] zeigen. Daher werden in Abbildung 5.2 (siehe Seite 104) die Realteile der einzelnen Summanden des Nenners von (4.37) betrachtet:

$$h_{\text{denom.}} = \underbrace{1}_{\text{1. Summand}} \underbrace{+ 2I_p F \left[G_i + G_g^*\right]}_{\text{2. Summand}} \underbrace{+ i\Lambda^{-1}(1-2\bar{n}) I_p F \left[G_p G_i - G_p^* G_g^*\right]}_{\text{3. Summand}} . \tag{5.1}$$

Der erste Summand ist konstant gleich Eins. Der zweite Summand ist stets positiv, da I_p positiv ist und F im betrachteten Fall Eins ist. Nur der dritte Summand wird bei negativem Detuning negativ. Bei zugleich großer Pumpstärke und genügend großem Λ^{-1} (bzw. η) gleicht dieser negative Beitrag die positiven Beiträge der ersten beiden Summanden aus und der gesamte Realteil des Nenners wird Null. Es kommt zu einer Singularität der Suszeptibilitäten, deren physikalische Bedeutung im folgenden Abschnitt (5.2) erläutert wird.

5.2 Instabilität beim Doppel-Quantum-Well

Physikalisch bedeutet diese Singularität der Suszeptibilität, daß selbst ein infinitesimal kleines Test-Signal zu einer endlichen Amplitude verstärkt wird. Das infinitesimal kleine Test-Signal kann physikalisch durch die spontane Emission realisiert werden. Dieses unvermeidbare quantenmechanische Rauschen wird verstärkt und führt zu einer endlichen Population der ω_i-Mode. Simultan wird das Feld mit der Frequenz ω_g erzeugt und es erreicht ebenfalls eine endliche Amplitude. Dieser Effekt der spontanen Erzeugung von Feldern mit den Frequenzen ω_i und ω_g (mit $\omega_i + \omega_g = 2\omega_p$) kann als spezielles Beispiel für allgemeine Phänomene parametrischer Instabilität betrachtet werden, die

[1] Da die Pumpfrequenz der modifizierten Bandlücke entspricht und die Divergenz bei $\omega_i - \omega_{\text{cav}} = 0$ (siehe Abbildung 5.1(d) auf Seite 103) stattfindet, ist dies zugleich der interessanteste Fall.

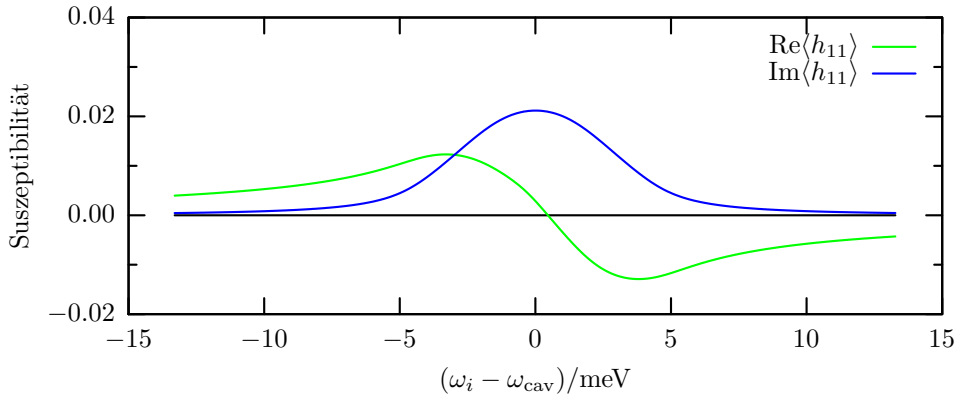
[2] Für $\omega_p = \omega_i = \omega_{\text{bare}}$ gilt $G_p = G_i = G_g = G$. Dann ist $G_i + G_g^*$ in Gleichung (5.1) reell und $G_p G_i - G_p^* G_g^*$ rein imaginär. Alle drei Summanden in (5.1) sind somit reell.

in Systemen mit externem Einfluß stattfinden können. Die Rolle des externen Einflusses übernimmt hier das Pumpfeld.

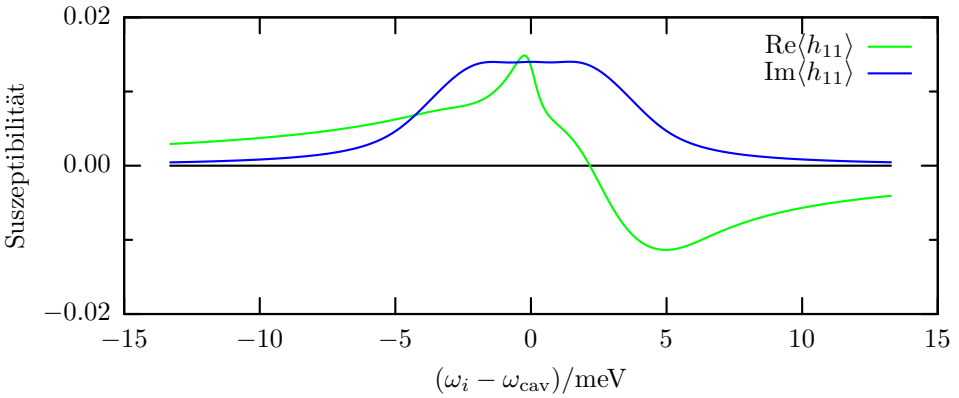
Wie üblich sind semi-klassische Methoden nicht ausreichend, um die anfängliche Entwicklung der Instabilität, ausgehend vom spontanen Rauschen, zu beschreiben. Dieses quantenmechanische Regime erfordert auch eine konsistente quantenmechanische Beschreibung des Feldes, die über den Umfang dieser Arbeit hinausgeht. Weiterhin kann der hier benutzte Formalismus (lineare Antwort bezüglich Probe- und erzeugtem Feld) den stationären Zustand bei bereits entwickelter Instabilität nicht adäquat beschreiben. Offensichtlich würde dies erfordern, das Testfeld und das erzeugte Feld nicht als schwache Felder zu betrachten, um die nichtlinearen Effekte, die damit in Zusammenhang stehen, einzubeziehen. Diese Untersuchung behandelt aber nur das Pumpfeld als starkes Feld (siehe Abschnitt 2.1.3 auf Seite 20). Jedoch ist dieser Formalismus ausreichend um ein strenges Kriterium für das Auftreten der Instabilität anzugeben (siehe Diskussion in Abschnitt 5.1).

Es ist bemerkenswert, daß die Instabilität in der Micro-Cavity-Konfiguration nur dann auftritt, wenn ein Doppel-Quantum-Well betrachtet wird, oder wenn gekoppelte Quantum-Wells mit optischen Charge-Transfer-Übergängen vorliegen. In der Single-Quantum-Well-Konfiguration tritt keine Instabilität auf.

In Abbildung 5.3 auf Seite 106 sind die Bereiche der in Abschnitt 4.4.2 auf Seite 85 diskutierten Bistabilität und der Instabilitätsbereich in der Übersicht dargestellt. Der dunkelgrau markierte Bereich ist der Bistabilitätsbereich. Im hellgrau markierten Bereich tritt Instabilität auf. Die Instabilität wurde nur im Resonanzfall $\omega_p = \omega_{\text{bare}}$ untersucht. Im Resonanzfall kann keine Bistabilität der stationären Lösung auftreten (siehe Gleichung (4.22) auf Seite 87). Wie in der Single-Quantum-Well-Konfiguration ist dies für Pump-Probe-Experimente die bevorzugte Situation, da dann am Ort des Quantum-Wells hohe Intensitäten des Pumpfelds erreicht werden können.

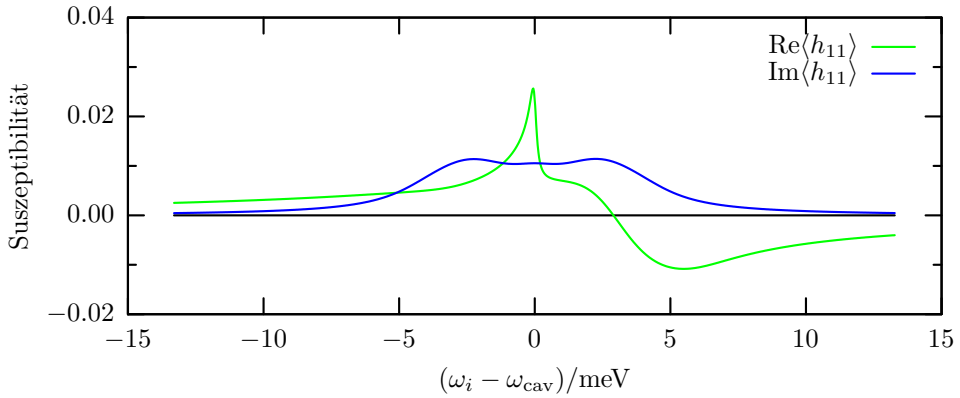


(a) $I_p = 0.025$.

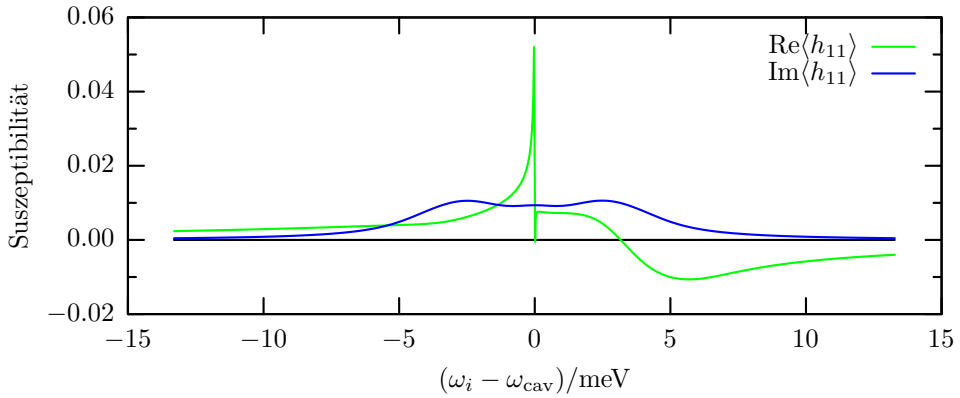


(b) $I_p = 0.075$.

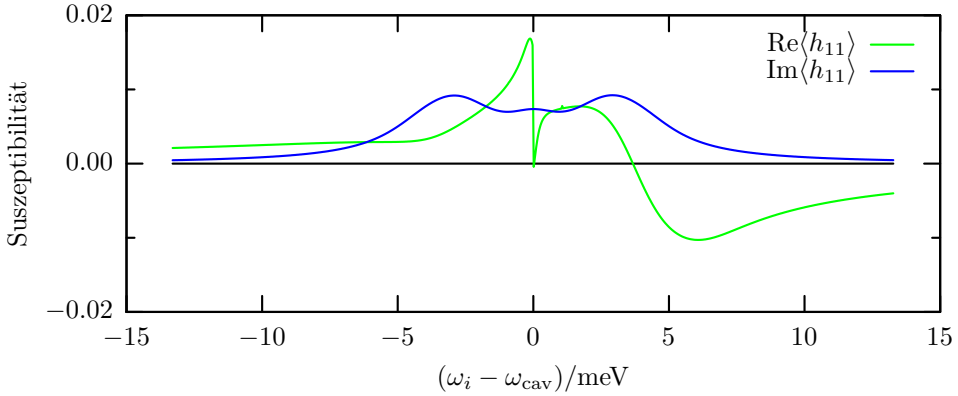
Abbildung 5.1: Suszeptibilitäten nahe dem Instabilitätsbereich für verschiedene Pumpstärken ($\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1} = 8.0$).



(c) $I_p = 0.100$.

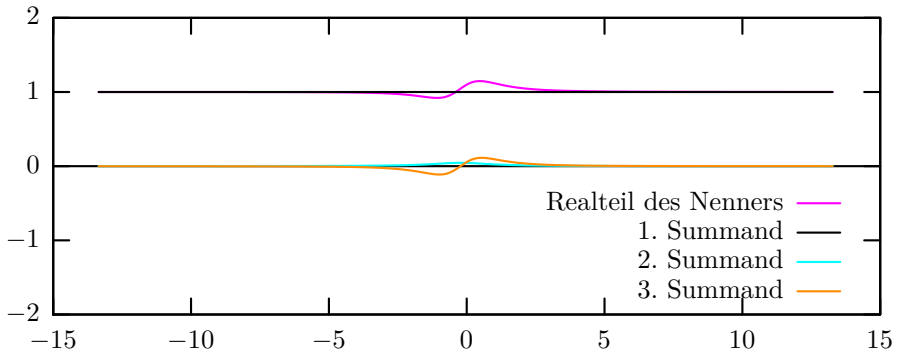


(d) $I_p = 0.110$.

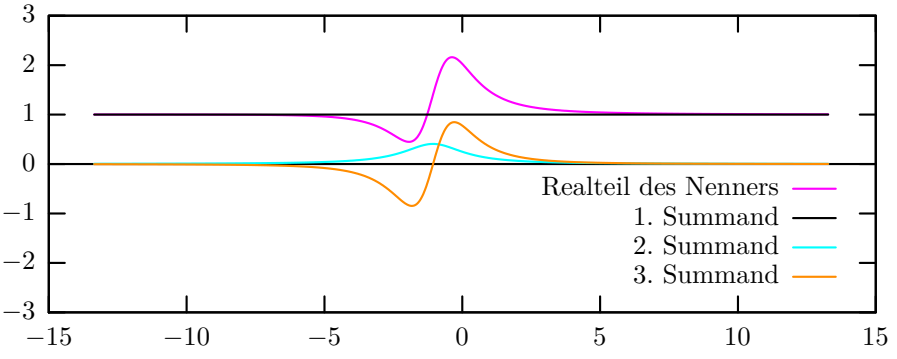


(e) $I_p = 0.130$.

Abbildung 5.1: Suszeptibilitäten nahe dem Instabilitätsbereich für verschiedene Pumpstärken ($\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1} = 8.0$) (Fortsetzung).

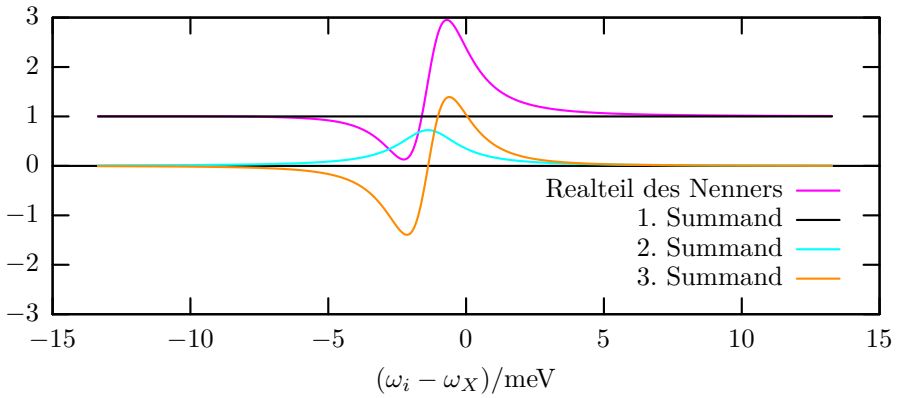


(a) $I_p = 0.025$.

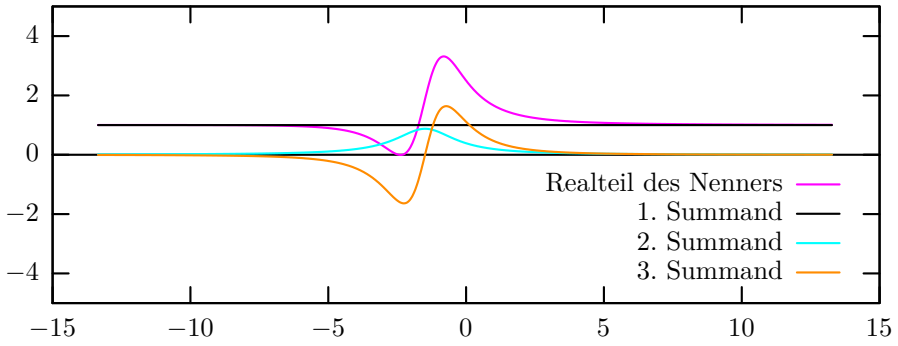


(b) $I_p = 0.075$.

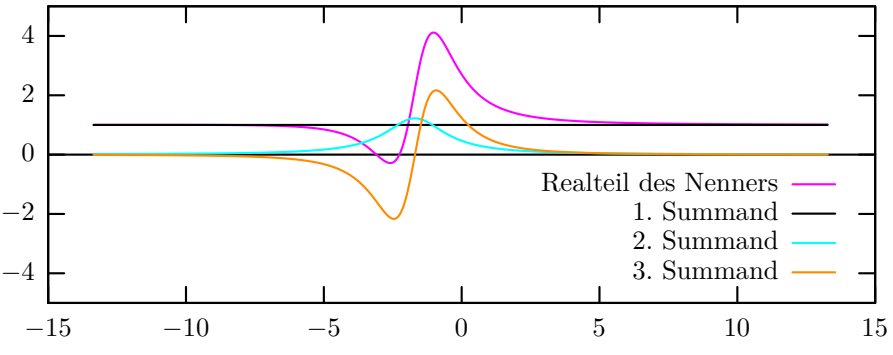
Abbildung 5.2: Untersuchung des Nenners der Suszeptibilitäten nahe dem Instabilitätsbereich für verschiedene Pumpstärken ($\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1} = 8.0$). Neben dem Realteil des Nenners sind die einzelnen Summanden des Nenners dargestellt.



(c) $I_p = 0.100$.



(d) $I_p = 0.110$.



(e) $I_p = 0.130$.

Abbildung 5.2: Untersuchung des Nenners der Suszeptibilitäten nahe dem Instabilitätsbereich ($\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1} = 8.0$) (Fortsetzung).

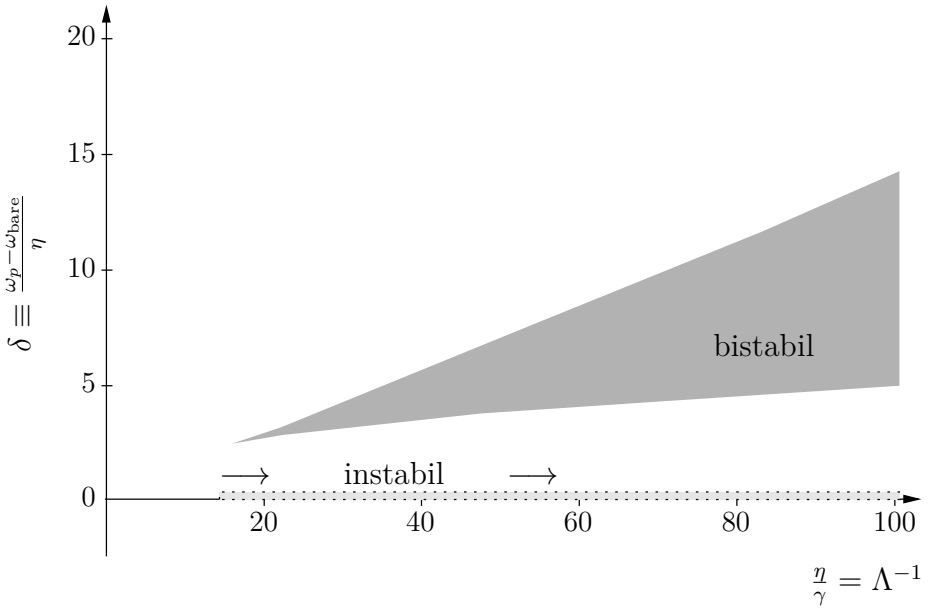


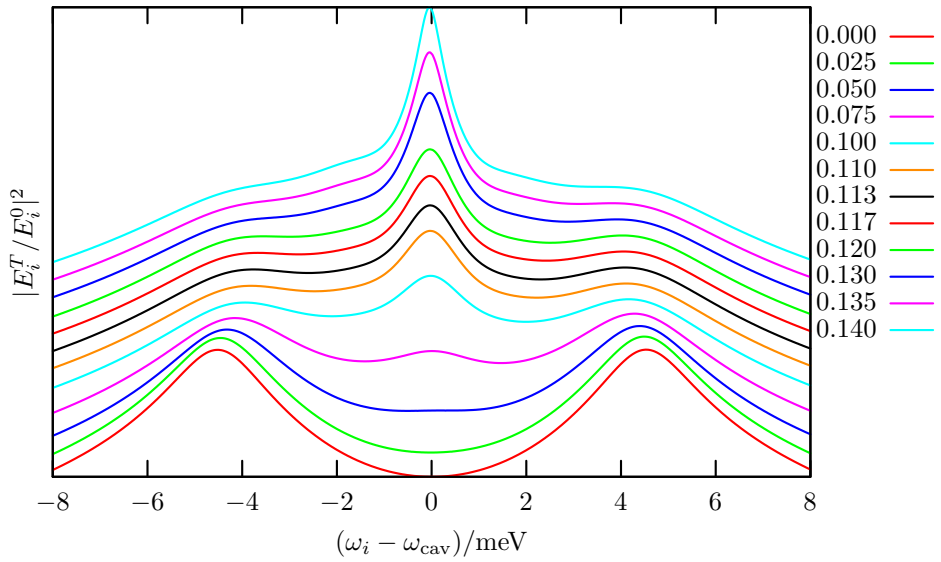
Abbildung 5.3: Bistabilitätsbereich und Instabilitätsbereich für $I_p = 0.1$

5.3 Transmission beim Doppel-Quantum-Well

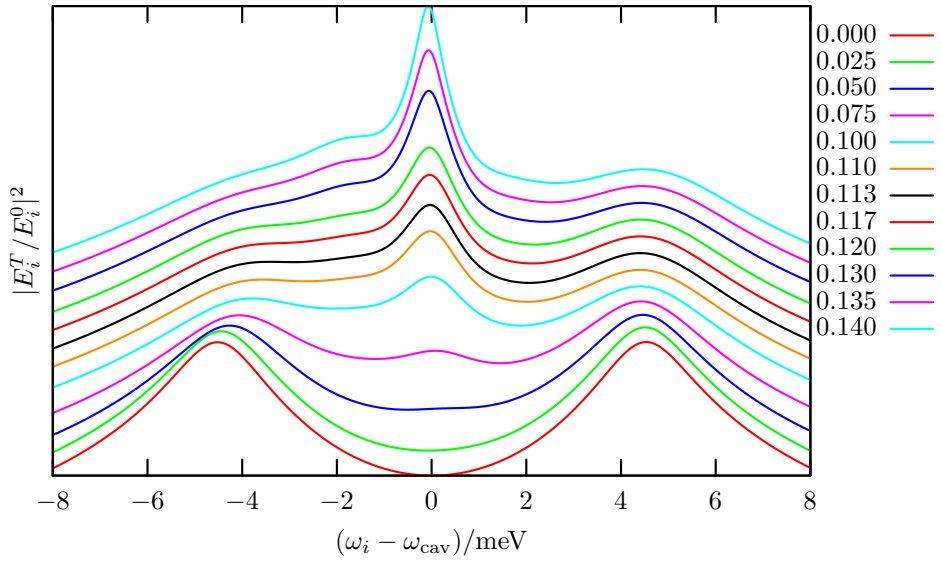
Nun werden die Transmissionsspektren des Doppel-Quantum-Well betrachtet, das sich im Inneren einer Micro-Cavity befindet. Die mathematische Berechnung der Transmission erfolgt völlig analog zu Abschnitt 2.4 (siehe Seite 51ff) beim Single-Quantum-Well. Es werden lediglich die Suszeptibilitäten für das Doppel-Quantum-Well aus (4.38) (h_{ij}) bzw. (4.37) (α_{ij}) benutzt.

Die Transmissionspektren beim Doppel-Quantum-Well sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Wie im Fall des Single-Quantum-Wells (in Abschnitt 3.3 auf Seite 70ff diskutiert) ist die Transmission für unterschiedliche Pumpstärken aufgetragen, die in der Legende angegeben sind. Es wird hier ausschließlich die Transmission mit Berücksichtigung des phasenkonjungierten Feldes betrachtet.

Das in Abbildung 5.4(a) ($\Lambda^{-1} = 1$) dargestellte Verhalten entspricht noch nahezu dem Single-Quantum-Well-Fall (siehe Abbildung 3.5(a) auf Seite 74), d. h. dem Grenzfall $\eta \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \Lambda \longrightarrow \infty$. In Abbildung 5.4(b) ($\Lambda^{-1} = 3$) wird das Spektrum bereits leicht asymmetrisch. In dieser Abbildung und bei weiterer

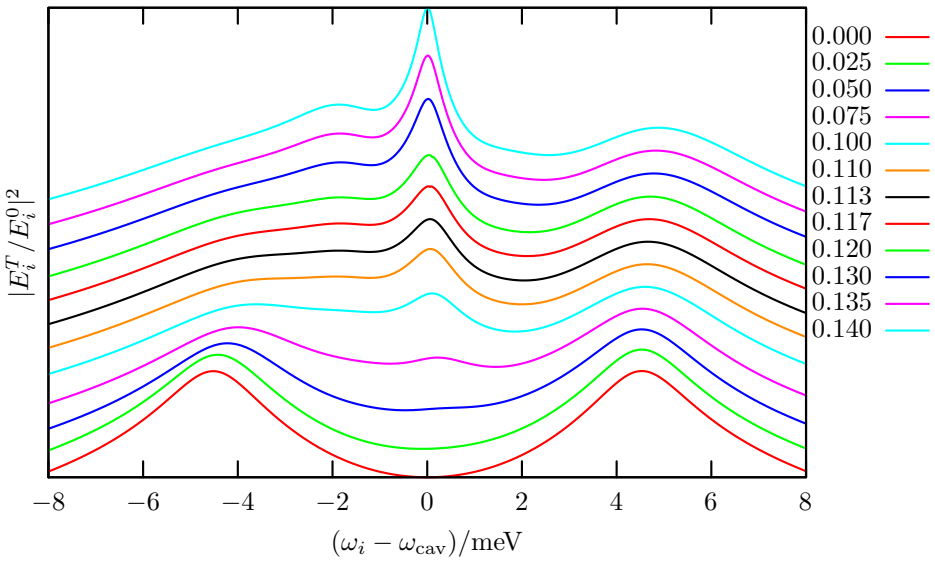


(a) $\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1} = 1$. Dies entspricht noch nahezu dem Single-Quantum-Well-Fall, d. h. dem Grenzfall $\eta \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \Lambda \longrightarrow \infty$.

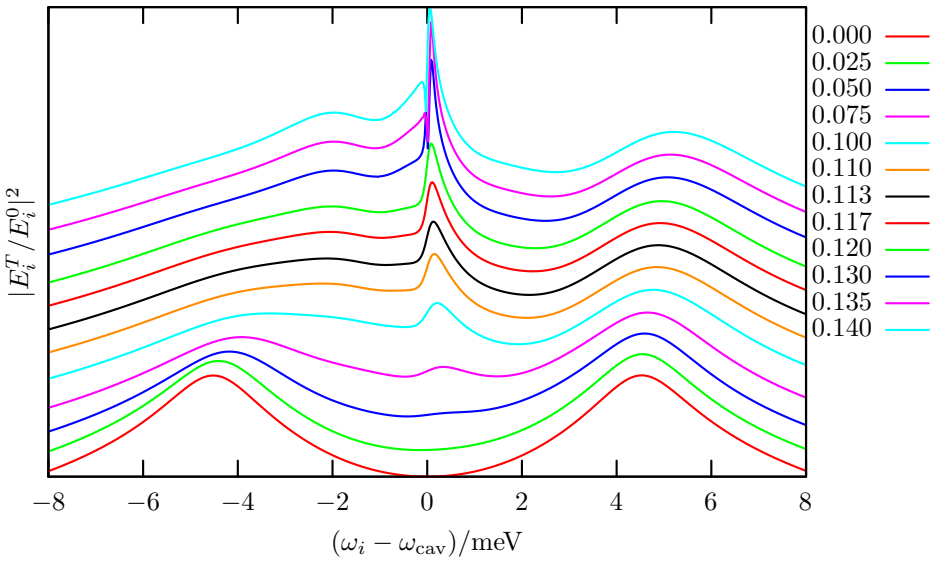


(b) $\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1} = 3$. Das Spektrum wird asymmetrisch.

Abbildung 5.4: Transmission für verschiedene Λ. Die Pumpintensitäten ($\Omega_p/\Omega_{\mathrm{LF}}$) sind in der Legende angegeben.



(c) $\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1} = 5$. Blauverschiebung des niederenergetischen Peaks.



(d) $\eta/\gamma \equiv \Lambda^{-1} = 7$. Einsetzen der Instabilität

Abbildung 5.4: Transmission für verschiedene Λ (Fortsetzung).

Erhöhung von Λ^{-1} (Abbildung 5.4(c), $\Lambda^{-1} = 5$) erkennt man eine Verschiebung des niederenergetischen Peaks zu höherer Energie (Blauverschiebung), wenn die Pumpintensität erhöht wird. Dies ist sowohl im Dublett- als auch im Triplett-Regime zu beobachten. Bei $\Lambda^{-1} = 7$ in Abbildung 5.4(d) ist die Asymmetrie und die Energieverschiebung noch deutlicher ausgeprägt. Zudem erkennt man die beginnende Instabilität bei den höheren Pumpstärken. Bei der numerischen Berechnung der Transmission wurde, wie auf Seite 60 erklärt, die inhomogene Linienverbreiterung berücksichtigt. Über die Singularität der Suszeptibilitäten wird dabei integriert (siehe Gleichung (3.1) auf Seite 60), so daß die Transmission auch bei höheren Pumpstärken keine Singularität an dieser Stelle aufweist.

Teil III

Single-Quantum-Well mit Spin

Kapitel 6

Theoretische Beschreibung des Single-Quantum-Wells unter Berücksichtigung des Spins

6.1 Mathematische Beschreibung des zirkular polarisierten Lichtfelds

In diesem Teil der Arbeit soll die Wechselwirkung des Halbleiter-Quantum-Wells mit zirkular polarisierten Lichtfeldern untersucht werden.

Das elektrische Feld kann man stets als Linearkombination von links-zirkular und rechts-zirkular polarisierten Komponenten darstellen. Die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_\pm$ der zirkularen Polarisation werden (wie in [48]) als

$$\boldsymbol{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{e}_x \pm i \boldsymbol{e}_y \right) \tag{6.1}$$

definiert. Die kartesischen Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{e}_y$ kann man als

$$\boldsymbol{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{e}_+ + \boldsymbol{e}_- \right) \tag{6.2a}$$

und

$$\boldsymbol{e}_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{e}_+ - \boldsymbol{e}_-\right) \tag{6.2b}$$

darstellen. Die zirkularen Einheitsvektoren haben folgende Eigenschaften:

$$\boldsymbol{e}_\pm^* = \boldsymbol{e}_\mp\,, \qquad \boldsymbol{e}_\pm \cdot \boldsymbol{e}_\pm = 0\,, \qquad \boldsymbol{e}_\pm \cdot \boldsymbol{e}_\mp = 1\,. \tag{6.3}$$

Das in z-Richtung einfallende Feld $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ kann man somit als

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{E}} &= \mathcal{E}_x\boldsymbol{e}_x + \mathcal{E}_y\boldsymbol{e}_y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{E}_x - i\mathcal{E}_y\right)\boldsymbol{e}_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y\right)\boldsymbol{e}_-\end{aligned} \tag{6.4}$$

schreiben. Ebenso kann man das Dipolmoment[1] zerlegen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \mu_x\boldsymbol{e}_x + \mu_y\boldsymbol{e}_y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mu_x - i\mu_y\right)\boldsymbol{e}_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mu_x + i\mu_y\right)\boldsymbol{e}_-\,.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Das im Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators auftretende Produkt $\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}$ läßt sich somit schreiben als

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2}\left\{(\mu_x - i\mu_y)(\mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y) + (\mu_x + i\mu_y)(\mathcal{E}_x - i\mathcal{E}_y)\right\} \\ &= \underbrace{\mu_-\mathcal{E}_-}_{\text{Wechselwirkung mit } \sigma_-} + \underbrace{\mu_+\mathcal{E}_+}_{\text{Wechselwirkung mit } \sigma_+}\end{aligned} \tag{6.6}$$

Später (Abbildung 6.2 auf Seite 117 und Gleichung (6.13) auf Seite 118) wird ersichtlich, daß diese beiden Terme der Wechselwirkung mit σ_+ bzw. σ_- entsprechen. Der Term $\boldsymbol{\mu}^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^*$ läßt sich in analoger Weise zerlegen.

Für die zirkularen Komponenten des Dipolmoments und des elektrischen Feldes gilt:

$$\mu_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mu_x \pm i\mu_y\right) \tag{6.7}$$

[1] O. B. d. A. $\mu_z = 0$

und

$$\mathcal{E}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{E}_x \mp i \mathcal{E}_y \right) . \tag{6.8}$$

Umgekehrt gilt für die kartesischen Komponenten des Dipolmoments

$$\mu_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mu_+ + \mu_- \right) \tag{6.9a}$$

$$\mu_y = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\mu_+ - \mu_- \right) \tag{6.9b}$$

und für die kartesischen Komponenten des Feldes

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_- \right) \tag{6.10a}$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{E}_+ - \mathcal{E}_- \right) . \tag{6.10b}$$

Im folgenden Abschnitt wird der Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators ebenfalls in die zirkularen Komponenten zerlegt, um die Darstellung aus (6.6) für das Produkt $\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}$ verwenden zu können.

6.2 Hamiltonoperator

Der Hamiltonoperator für die Wechselwirkung zwischen den Ladungsträgern im Halbleiter und einem externen Licht-Feld lautet [49]

$$\begin{aligned} H &= H_{\text{kinetic}} + H_{\text{carrier–field}} \\ &= \underbrace{\sum_{\boldsymbol{k},\sigma=\pm 3/2} \omega_v(\boldsymbol{k}) a_v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma) a_v(\boldsymbol{k},\sigma)}_{\text{Valenzband (VB)}} + \underbrace{\sum_{\boldsymbol{k},\sigma=\pm 1/2} \omega_c(\boldsymbol{k}) a_c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma) a_c(\boldsymbol{k},\sigma)}_{\text{Leitungsband (CB)}} \\ &\quad \underbrace{- \sum_{\boldsymbol{k},\sigma,\sigma'} \left(\boldsymbol{\mu}_k \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot a_c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma) a_v(\boldsymbol{k},\sigma') + \text{h.c.} \right)}_{\text{Wechselwirkung } \textit{(carrier–field)}} . \end{aligned} \tag{6.11}$$

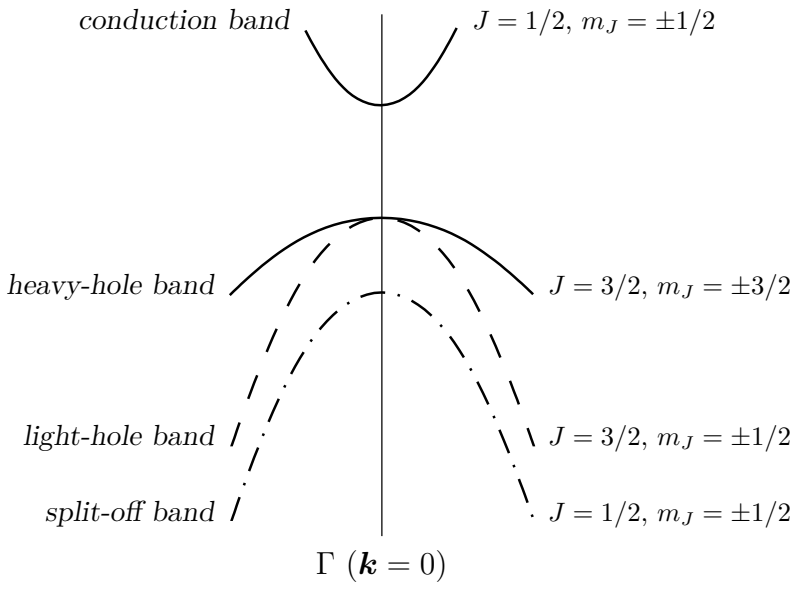


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung der Bandstruktur von GaAs

Als ein Halbleitermaterial wird hier Gallium-Arsenid (GaAs) betrachtet. GaAs ist ein Halbleiter mit einer relativ einfachen Bandstruktur. Das Minimum des Leitungsbandes und das Maximum des Valenzbandes liegen im Γ-Punkt ($\boldsymbol{k} = 0$), d. h. GaAs besitzt eine direkte Bandlücke. Ein Teil der Bandstruktur von GaAs am Γ-Punkt ist in Abbildung 6.1 schematisch dargestellt [2]. Die Bänder werden durch die Quantenzahlen J und m_J klassifiziert. Der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J}$ setzt sich dabei aus dem Bahndrehimpuls $\boldsymbol{\ell}$ und dem Spin $\boldsymbol{s}$ zusammen. Die Spin-Bahn-Kopplung führt zu einer Reduzierung der Valenzband-Entartung. Eines der drei Valenzbänder ist energetisch abgesenkt. Der Gesamtdrehimpuls für die Valenzbänder (p-Orbital, d. h. $\ell = 1$) ist $J = 3/2$ bzw. $J = 1/2$. Löcher in den beiden oberen, am Γ-Punkt entarteten Valenzbändern, bezeichnet man als schwere (*heavy-hole*: $J = 3/2$, $m_J = \pm 3/2$) bzw. leichte Löcher (*light-hole*: $J = 3/2$, $m_J = \pm 1/2$). Das untere Band bezeichnet man als *split-off*-Band ($J = 1/2$, $m_J = \pm 1/2$). Im Leitungsband gilt $J = 1/2$, $m_J = \pm 1/2$ (s-Orbital, d. h. $\ell = 0$). [2, 49]

In Quantum-Wells sind die Bänder ebenfalls parabolisch. Jedoch wird die Entartung der Bänder der schweren und leichten Löcher aufgrund des *Confinements* (Energie-Shift durch den Einschluß in einem Kastenpotential) aufgeho-

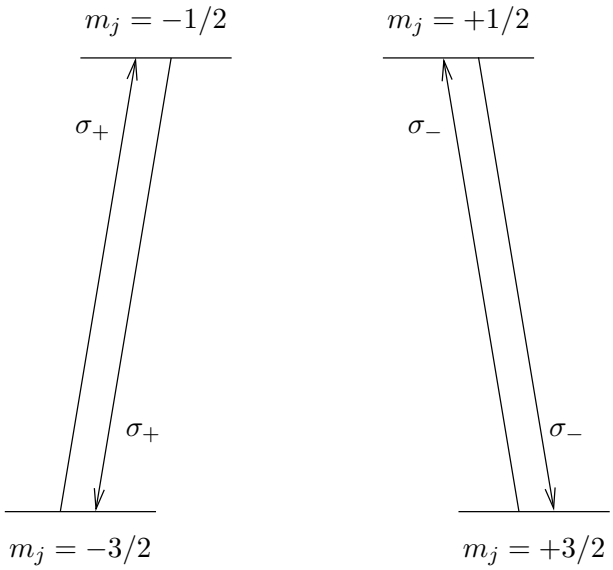


Abbildung 6.2: Schematische Darstellung der quantenmechanischen Auswahlregeln am Beispiel der Übergänge vom 4 p-Zustand im Valenzband ($m_j = \pm 3/2$, *heavy hole*) zum 4 s-Zustand im Leitungsband ($m_j = \pm 1/2$) in GaAs. Die Pfeile entsprechen (von links nach rechts) den vier Termen im Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators (6.12) bzw. (6.13). Die Übergänge σ_+ und σ_- bezeichnen die Wechselwirkung mit rechts-zirkular bzw. links-zirkular polarisiertem Licht [59].

ben [2]. Die Linienbreite der Exziton-Resonanz der schweren Löcher ist klein gegen die Aufspaltung zwischen den Bändern der schweren und leichten Löcher [60]. Daher wird nur das energetisch höchste Valenzband betrachtet, d. h. die schweren Löcher. Dann ergeben sich die in Abbildung 6.2 auf der vorherigen Seite dargestellten Übergänge (siehe [59]), die nach den quantenmechanischen Auswahlregeln möglich sind. Mathematisch entspricht dies der Zerlegung der Feld-Terme $\boldsymbol{\mu}_k \boldsymbol{\mathcal{E}}$ nach (6.6) (wobei nur die nach den Auswahlregeln erlaubten Kombinationen betrachtet werden) und dem Einsetzen in den Hamiltonoperator (6.11). Man erhält dann folgenden Hamiltonoperator:

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\boldsymbol{k},\sigma=\pm 3/2} \omega_v(\boldsymbol{k}) a_v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma) a_v(\boldsymbol{k},\sigma) + \sum_{\boldsymbol{k},\sigma=\pm 1/2} \omega_c(\boldsymbol{k}) a_c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma) a_c(\boldsymbol{k},\sigma) \\ & - \sum_{\boldsymbol{k}} \Big(\mu_+ \mathcal{E}_+ \cdot a_c^\dagger(\boldsymbol{k},-1/2) a_v(\boldsymbol{k},-3/2) \\ & \qquad + \mu_+^* \mathcal{E}_+^* \cdot a_v(\boldsymbol{k},-3/2)^\dagger a_c(\boldsymbol{k},-1/2) \\ & \qquad + \mu_- \mathcal{E}_- \cdot a_c^\dagger(\boldsymbol{k},+1/2) a_v(\boldsymbol{k},+3/2) \\ & \qquad + \mu_-^* \mathcal{E}_-^* \cdot a_v^\dagger(\boldsymbol{k},+3/2) a_c(\boldsymbol{k},+1/2) \Big) . \end{aligned} \tag{6.12}$$

Die vier Terme im Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators entsprechen den in Abbildung 6.2 auf der vorherigen Seite skizzierten vier Übergängen. Wenn man vom Modellhalbleiter zurück zum Zwei-Niveau-System geht, erhält man

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\sigma=\pm 3/2} \omega_v a_{v,\sigma}^\dagger a_{v,\sigma} + \sum_{\sigma=\pm 1/2} \omega_v a_{c,\sigma}^\dagger a_{c,\sigma} \\ & - \left(\mu_+ \mathcal{E}_+ \cdot a_{c,-1/2}^\dagger a_{v,-3/2} + \mu_+^* \mathcal{E}_+^* \cdot a_{v,-3/2}^\dagger a_{c,-1/2} \right) \\ & - \left(\mu_- \mathcal{E}_- \cdot a_{c,+1/2}^\dagger a_{v,+3/2} + \mu_-^* \mathcal{E}_-^* \cdot a_{v,+3/2}^\dagger a_{c,+1/2} \right) . \end{aligned} \tag{6.13}$$

Analog zu Abschnitt 2.1 auf Seite 16 werden Polarisation und Besetzungszahl definiert. Die Berücksichtigung des Spins erfordert jedoch die Definition der jeweiligen Größen getrennt für σ_+

$$P_{\sigma_+} = \left\langle a_{v,-3/2}^\dagger a_{c,-1/2} \right\rangle \tag{6.14a}$$

$$P_{\sigma_+}^* = \left\langle a_{c,-1/2}^\dagger a_{v,-3/2} \right\rangle \tag{6.14b}$$

$$n_{\sigma_+} = \left\langle a_{c,-1/2}^\dagger a_{c,-1/2} \right\rangle \tag{6.14c}$$

und für σ_-

$$P_{\sigma_-} = \left\langle a^\dagger_{v,+3/2} a_{c,+1/2} \right\rangle \tag{6.15a}$$
$$P^*_{\sigma_-} = \left\langle a^\dagger_{c,+1/2} a_{v,+3/2} \right\rangle \tag{6.15b}$$
$$n_{\sigma_-} = \left\langle a^\dagger_{c,+1/2} a_{c,+1/2} \right\rangle . \tag{6.15c}$$

Die Definitionen (6.14) und (6.15) können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$P_\sigma = \left\langle a^\dagger_{v,\sigma} a_{c,\sigma} \right\rangle \tag{6.16a}$$
$$P^*_\sigma = \left\langle a^\dagger_{c,\sigma} a_{v,\sigma} \right\rangle \tag{6.16b}$$
$$n_\sigma = \left\langle a^\dagger_{c,\sigma} a_{c,\sigma} \right\rangle \tag{6.16c}$$

mit $\sigma \in \{\sigma_+, \sigma_-\}$:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_+ & \begin{cases} v, \sigma_+ & \longrightarrow & v, -3/2 \\ c, \sigma_+ & \longrightarrow & c, -1/2 \end{cases} \\ \sigma_- & \begin{cases} v, \sigma_- & \longrightarrow & v, +3/2 \\ c, \sigma_- & \longrightarrow & c, +1/2 \end{cases} \end{cases} . \tag{6.17}$$

Der Index $\sigma \in \{\sigma_+, \sigma_-\}$ der zirkularen Polarisation entspricht dem rechts- bzw. links-zirkular polarisierten Lichtfeld bzw. dem Spin-Index bei den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Elektronen ($\sigma = \mp 3/2$ beim Valenzband und $\sigma = \mp 1/2$ beim Leitungsband, siehe auch Abbildung 6.2 auf Seite 117).

Damit ergeben sich in analoger Weise wie in Abschnitt 2.1.2 auf Seite 17 die Maxwell-Bloch-Gleichungen (siehe Gleichung (2.13) auf Seite 20)

$$\frac{d}{dt} P_\sigma = -\left(\gamma + i\omega_{cv}\right) P_\sigma + i\left(1 - 2n_\sigma\right) \mu_\sigma \mathcal{E}_\sigma \tag{6.18a}$$
$$\frac{d}{dt} P^*_\sigma = -\left(\gamma - i\omega_{cv}\right) P^*_\sigma - i\left(1 - 2n_\sigma\right) \mu^*_\sigma \mathcal{E}^*_\sigma \tag{6.18b}$$
$$\frac{d}{dt} n_\sigma = -\Gamma n_\sigma + i\mu_\sigma \mathcal{E}_\sigma P^*_\sigma - i\mu^*_\sigma \mathcal{E}^*_\sigma P_\sigma . \tag{6.18c}$$

Man erhält somit insgesamt drei Gleichungen für die Größen P_{σ_+}, $P^*_{\sigma_+}$ und

n_{σ_+} sowie drei Gleichungen für P_{σ_-}, $P^*_{\sigma_-}$ und n_{σ_-}. Die Gleichungen zu den unterschiedlichen Spin-Indizes (σ_+ und σ_-) sind entkoppelt.[2] Daher kann man die beiden Gleichungssysteme getrennt lösen.

6.3 Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Koeffizienten vom Spin-Index

Es wird nun diskutiert, inwiefern bei der Lösung der Gleichungssysteme die Koeffizienten α_{ij} (2.44) aus Abschnitt 2.1.9 auf Seite 30 und darauf aufbauend die Ergebnisse für die Felder (Gleichung (2.115) auf Seite 54) übernommen werden können, d. h. ob die auftretenden Größen vom Spin-Index abhängen.

- Die Frequenz $\omega_{cv} = \omega_c - \omega_v$ (d. h. die Bandlücke) ist unabhängig vom Spin, weil die Valenzband-Energieniveaus für $\sigma = \pm 3/2$ und die Leitungsband-Energieniveaus für $\sigma = \pm 1/2$ entartet sind.

- Die transversalen und longitudinalen Dämpfungskonstanten γ und Γ hängen nicht vom Spin ab.

- Die Frequenzen der Pump- und Testfelder ω_j (mit $j \in \{p, i, g\}$) sind unabhängig vom Spin.

- Damit sind die Resonanznenner $D(\omega_j)$ (mit $j \in \{p, i, g\}$) und F unabhängig vom Spin.

- Im Quantum-Well ist das Dipolmoment in x- und y-Richtung aus Symmetriegründen (Isotropie in der x-y-Ebene) gleich groß:

$$\mu_x = \mu_y \,. \tag{6.19}$$

[2] Wenn man, ausgehend vom Hamiltonoperator der freien Ladungsträger (*free-carrier Hamiltonian*, siehe z. B. [49, Kap. 2.1]), die Bewegungsgleichungen für die Polarisation und Besetzungszahl berechnet, erhält man Erwartungswerte von Vier-Operator-Termen. In Hartree-Fock-Näherung (Faktorisierung der Vier-Operator-Terme in Produkte von Zwei-Operator-Termen, [49, Kap. 3.1]) ergibt sich *keine* Kopplung der Gleichungen zu unterschiedlichen Spin-Indizes.

Nach Definition (6.7) erhält man daher für μ_+ und μ_-

$$\mu_\pm = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \mu_x = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \mu_y \,. \tag{6.20}$$

Die Beträge von $\mu_\pm$ und $\mu_{x,y}$ sind gleich:

$$|\mu_+| = |\mu_-| = |\mu_x| = |\mu_y| \,. \tag{6.21}$$

- Die dimensionslosen Pumpintensitäten $I_{p,\sigma} \equiv \frac{|\Omega_{p,\sigma}|^2}{\gamma\Gamma}$ hängen jedoch vom Spin ab:

$$I_{p,+} = \frac{|\mu|^2}{\gamma\Gamma} |\mathcal{E}_{p,+}|^2 \tag{6.22a}$$

$$I_{p,-} = \frac{|\mu|^2}{\gamma\Gamma} |\mathcal{E}_{p,-}|^2 \,. \tag{6.22b}$$

- Die Größen h_{ij} (siehe Gleichung (2.84) auf Seite 44) hängen nicht vom Spin ab, da in $c_{Q,m}$ nur $|\mu|^2$ eingeht (siehe Gleichung (2.83) auf Seite 44).

- Die Koeffizienten c_{ij} (siehe Gleichung (2.111) auf Seite 52) sind unabhängig vom Spin-Index.

Unter Beachtung von Gleichung (6.22) kann man folglich die Ergebnisse aus Teil I übernehmen.

6.4 Darstellung der Felder

Die auftretenden Felder (siehe Abbildung 6.3 auf der nächsten Seite) kann man in ihre Polarisationskomponenten zerlegen. Für die eingehenden Felder (Pump- und Testfeld) gilt

$$\boldsymbol{E}_p = E_{p,+}\boldsymbol{e}_+ + E_{p,-}\boldsymbol{e}_- \tag{6.23a}$$

$$\boldsymbol{E}_i^0 = E_{i,+}^0\boldsymbol{e}_+ + E_{i,-}^0\boldsymbol{e}_- \tag{6.23b}$$

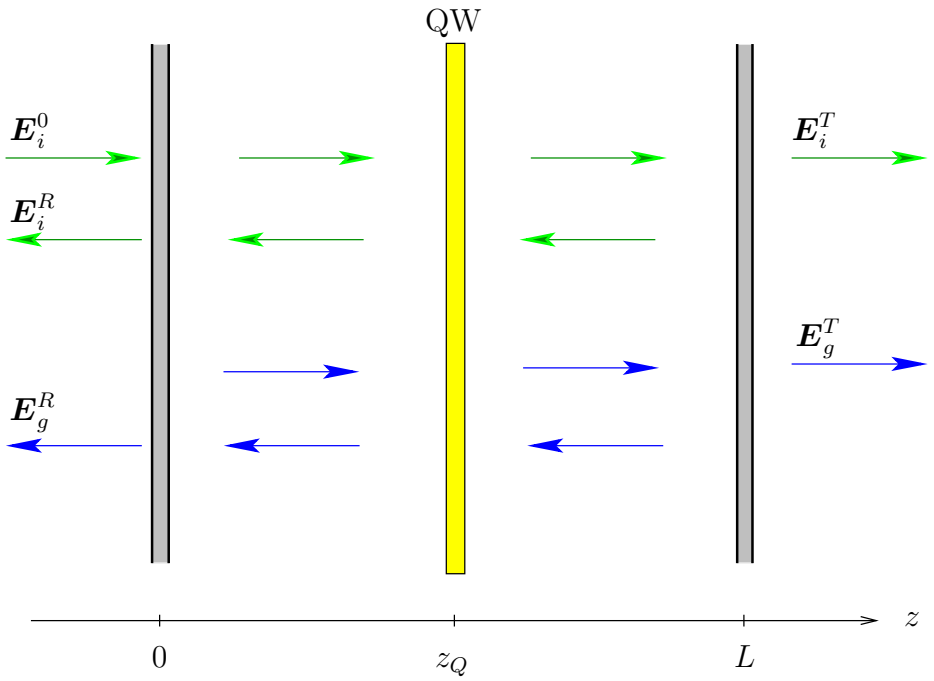


Abbildung 6.3: Bezeichnung der einfallenden, transmittierten und reflektierten Felder.

und für die transmittierten und reflektierten Felder analog

$$\boldsymbol{E}_i^T = E_{i,+}^T \boldsymbol{e}_+ + E_{i,-}^T \boldsymbol{e}_- \tag{6.23c}$$
$$\boldsymbol{E}_g^T = E_{g,+}^T \boldsymbol{e}_+ + E_{g,-}^T \boldsymbol{e}_- \tag{6.23d}$$
$$\boldsymbol{E}_i^R = E_{i,+}^R \boldsymbol{e}_+ + E_{i,-}^R \boldsymbol{e}_- \tag{6.23e}$$
$$\boldsymbol{E}_g^R = E_{g,+}^R \boldsymbol{e}_+ + E_{g,-}^R \boldsymbol{e}_- \,. \tag{6.23f}$$

Dabei kann man, wie in Abschnitt 6.3 dargelegt, die einzelnen Komponenten separat berechnen:

$$E_{i,\sigma}^T = f_i^T(I_{p,\sigma}) \qquad E_{i,\sigma}^0 \tag{6.24a}$$
$$E_{i,\sigma}^R = f_i^R(I_{p,\sigma}) \qquad E_{i,\sigma}^0 \tag{6.24b}$$
$$E_{g,\sigma}^{T\ *} = f_g^T(I_{p,\sigma}, \phi_\sigma) E_{i,\sigma}^0 \tag{6.24c}$$
$$E_{g,\sigma}^{R\ *} = f_g^R(I_{p,\sigma}, \phi_\sigma) E_{i,\sigma}^0 \,. \tag{6.24d}$$

Die Funktionen $f_j^K(I_{p,\sigma})$ entsprechen dabei den Termen in Gleichung (2.115) auf Seite 54:

$$f_i^T(I_{p,\sigma}) = \frac{t^2}{c_{10} + ih_{11}\,c_{11} + h_{21}h_{12}\dfrac{c_{12}c_{32}}{c_{30} + ih_{22}\,c_{31}}} \tag{6.25a}$$

$$f_i^R(I_{p,\sigma}) = \frac{(c_{20} + ih_{11}\,c_{21})\,(c_{30} + ih_{22}\,c_{31}) + h_{21}h_{12}c_{22}c_{32}}{(c_{10} + ih_{11}\,c_{11})\,(c_{30} + ih_{22}\,c_{31}) + h_{21}h_{12}c_{12}c_{32}} \tag{6.25b}$$

$$f_g^T(I_{p,\sigma}, \phi_\sigma) = \frac{-t^2 ih_{21}c_{32}}{(c_{10} + ih_{11}\,c_{11})\,(c_{30} + ih_{22}\,c_{31}) + h_{21}h_{12}c_{12}c_{32}} \tag{6.25c}$$

$$f_g^R(I_{p,\sigma}, \phi_\sigma) = \left(\frac{t}{t^*}\right)^2 ih_{21}\frac{c_{42}\,(c_{30} + ih_{22}\,c_{31}) - c_{32}\,(c_{40} + ih_{22}\,c_{41})}{(c_{10} + ih_{11}\,c_{11})\,(c_{30} + ih_{22}\,c_{31}) + h_{21}h_{12}c_{12}c_{32}}\,. \tag{6.25d}$$

Die $f_j^K(I_{p,\sigma})$ selbst sind nicht vom Spin abhängig. Lediglich aufgrund der unterschiedlichen Pump-Intensitäten $I_{p,+}$ bzw. $I_{p,-}$ ergibt sich über die Koeffizienten $\{h_{ij}\}$ (Gleichung (2.84) auf Seite 44) bzw. die Suszeptibilitäten $\{\alpha_{ij}\}$ (Gleichung (2.44a) auf Seite 30) die Spin-Abhängigkeit.

Zusammenfassend erhält man deshalb für das Testfeld

$$E_{i,\sigma}^K = f_i^K(I_{p,\sigma})E_{i,\sigma}^0\,, \tag{6.26a}$$

mit $K \in \{R, T\}$ (Reflexion und Transmission) und $\sigma \in \{+, -\}$ (Polarisation). Für das generierte Feld erhält man wegen $h_{21} \propto e^{-2i\phi_\sigma}$

$$E_{g,\sigma}^{K\,*} = f_g^K(I_{p,\sigma}, \phi_\sigma)E_{i,\sigma}^0 \tag{6.26b}$$

$$= \tilde{f}_g^K(I_{p,\sigma})e^{-2i\phi_\sigma}E_{i,\sigma}^0\,. \tag{6.26c}$$

Die Phasen ϕ_σ sind analog zu (2.45) in Teil I (Seite 31) definiert:

$$\Omega_{p,\sigma} \equiv |\Omega_{p,\sigma}|e^{i\phi_\sigma} = \mu_\sigma \mathcal{E}_{p,\sigma}\,. \tag{6.27}$$

6.5 Diskussion von bestimmten Fällen

In diesem Abschnitt werden nur die transmittierten Felder (das transmittierte Testfeld $\boldsymbol{E}_i^T$ und das transmittierte erzeugte Feld $\boldsymbol{E}_g^T$), nicht aber die reflektierten Felder diskutiert. Aufgrund von Gleichung (6.26) ergeben sich für die reflektierten Felder analoge Ergebnisse.

6.5.1 Pump- und Testfeld linear polarisiert und senkrecht zueinander stehend

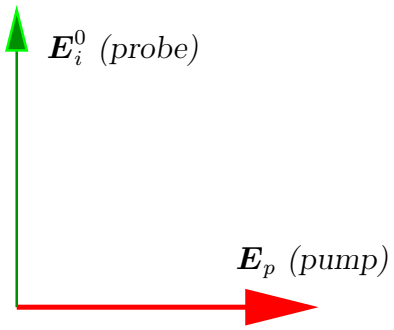


Abbildung 6.4: Die einfallenden Pump- und Testfelder sind linear polarisiert und senkrecht aufeinander

Der Fall linearer Polarisation und Orthogonalität der einfallenden Pump- und Testfelder ist in Abbildung 6.4 skizziert. Das Pumpfeld sei o. B. d. A. in x-Richtung

$$E_{p,x} \equiv E_p\,, \qquad\qquad E_{p,y} \equiv 0$$

und das Testfeld in y-Richtung

$$E_{i,x}^0 \equiv 0\,, \qquad\qquad E_{i,y}^0 \equiv E_i^0$$

polarisiert. Die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Felder ist entlang der z-Achse. Für die zirkularen Komponenten der einlaufenden Felder gilt somit

nach Gleichung (6.8) auf Seite 115

$$E_{p,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_p \,, \qquad E_{p,-} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_p \tag{6.28}$$

und

$$E^0_{i,+} = -\frac{i}{\sqrt{2}} E^0_i \,, \qquad E^0_{i,-} = +\frac{i}{\sqrt{2}} E^0_i \,. \tag{6.29}$$

Mit (6.26a) und $I_{p,+} = I_{p,-}$ erhält man für die zirkularen Komponenten der transmittierten Felder

$$\begin{aligned} E^T_{i,+} &= f^T_i(I_{p,+}) E^0_{i,+} = -\frac{i}{\sqrt{2}} f^T_i(I_{p,+}) E^0_i \,, \\ E^T_{i,-} &= f^T_i(I_{p,-}) E^0_{i,-} = +\frac{i}{\sqrt{2}} f^T_i(I_{p,+}) E^0_i \end{aligned}$$

und mit Gleichung (6.10) auf Seite 115 sowie (6.29)

$$E^T_{i,x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(E^T_{i,+} + E^T_{i,-} \right) = 0 \,, \tag{6.30a}$$

$$E^T_{i,y} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(E^T_{i,+} - E^T_{i,-} \right) = f^T_i(I_{p,+}) E^0_i \tag{6.30b}$$

für die kartesischen Komponenten.

Die zirkularen Komponenten für das erzeugte Feld lauten:

$$\begin{aligned} {E^T_{g,+}}^* &= f^T_g(I_{p,+}, \phi_+) E^0_{i,+} = \tilde{f}^T_g(I_{p,+}) e^{-2i\phi_+} E^0_{i,+} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \tilde{f}^T_g(I_{p,+}) e^{-2i\phi_+} E^0_i \,, \\ {E^T_{g,-}}^* &= f^T_g(I_{p,-}, \phi_-) E^0_{i,-} = \tilde{f}^T_g(I_{p,-}) e^{-2i\phi_-} E^0_{i,-} \\ &= +\frac{i}{\sqrt{2}} \tilde{f}^T_g(I_{p,+}) e^{-2i\phi_+} E^0_i \,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit (6.10)

$$E_{g,x}^{T\ *} = -\frac{i}{2}\left(e^{-2i\phi_+} - e^{-2i\phi_-}\right)\tilde{f}_g^T(I_{p,+})E_i^0\,,$$
$$E_{g,y}^{T\ *} = -\frac{1}{2}\left(e^{-2i\phi_+} + e^{-2i\phi_-}\right)\tilde{f}_g^T(I_{p,+})E_i^0$$

für die kartesischen Komponenten.

Für den Betrag von $E_{g,x}^T$ und $E_{g,y}^T$ ist die relative Phase $\Delta\phi \equiv \phi_+ - \phi_-$ entscheidend:

$$E_{g,x}^{T\ *} = -\frac{i}{2}e^{-2i\phi_+}\left(1 - e^{2i\Delta\phi}\right)\tilde{f}_g^T(I_{p,+})E_i^0\,, \tag{6.31a}$$
$$E_{g,y}^{T\ *} = -\frac{1}{2}e^{-2i\phi_+}\left(1 + e^{2i\Delta\phi}\right)\tilde{f}_g^T(I_{p,+})E_i^0\,. \tag{6.31b}$$

Für den Fall $\boldsymbol{E}_p \equiv E_p\boldsymbol{e}_x$, der hier betrachtet wird, gilt wegen (6.8), daß die zirkularen Komponenten des Pumpfeldes $E_{p,+}$ und $E_{p,-}$ gleich sind: $E_{p,+} = E_{p,-}$. $E_{p,+}$ und $E_{p,-}$ haben deshalb insbesondere dieselbe Phase und somit verschwindet die relative Phase ($\Delta\phi = 0$). Für die kartesischen Komponenten des erzeugten Feldes erhält man aus (6.31) mit $e^{2i\Delta\phi} = 1$:

$$E_{g,x}^{T\ *} = 0\,, \tag{6.32a}$$
$$E_{g,y}^{T\ *} = -e^{-2i\phi_+}\tilde{f}_g^T(I_{p,+})E_i^0\,. \tag{6.32b}$$

Wenn die beiden einfallenden Felder, Pumpfeld $\boldsymbol{E}_p$ und Testfeld $\boldsymbol{E}_i^0$, linear polarisiert sind und senkrecht aufeinander stehen, ist das transmittierte Testfeld $\boldsymbol{E}_i^T$ deshalb parallel zum einfallenden Testfeld (6.30), und das transmittierte erzeugte Feld $\boldsymbol{E}_g^T$ ist anti-parallel zum einfallenden Testfeld (6.32) (siehe Abbildung 6.5 auf der nächsten Seite).

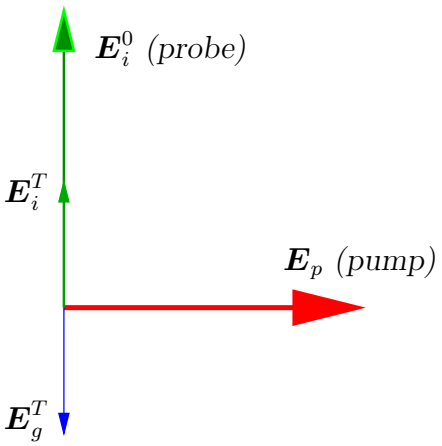


Abbildung 6.5: Richtungen der transmittierten Felder E_i^T und E_g^T wie sie in (6.30) bzw. (6.32) berechnet wurden.

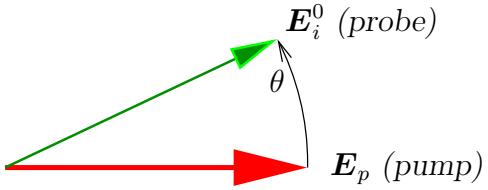


Abbildung 6.6: Pump- und Testfeld seien linear polarisiert. Der eingeschlossene Winkel sei θ.

6.5.2 Pump- und Testfeld linear polarisiert mit beliebigem eingeschlossenen Winkel

Pump- und Testfeld seien wieder linear polarisiert. Es wird wieder angenommen, daß das Pumpfeld in x-Richtung polarisiert ist:

$$E_{p,x} \equiv E_p\,, \qquad\qquad E_{p,y} \equiv 0\,.$$

Der Winkel zwischen dem Pumpfeld und dem Testfeld sei nun θ, wie in Abbildung 6.6 auf der vorherigen Seite dargestellt:

$$E^0_{i,x} \equiv E^0_i \cos\theta\,, \qquad\qquad E^0_{i,y} \equiv E^0_i \sin\theta\,.$$

Für die zirkularen Komponenten des eingehenden Pumpfeldes gilt nach (6.8) wiederum

$$E_{p,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_p\,, \qquad\qquad E_{p,-} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_p\,.$$

Für das einfallende Testfeld erhält man

$$\begin{aligned} E^0_{i,+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E^0_{i,x} - iE^0_{i,y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} E^0_i \left(\cos\theta - i\sin\theta\right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} E^0_i e^{-i\theta}\,, \\ E^0_{i,-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E^0_{i,x} + iE^0_{i,y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} E^0_i \left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} E^0_i e^{+i\theta}\,. \end{aligned}$$

Für die zirkularen Komponenten des transmittierten Testfeldes gilt wieder mit (6.26a)

$$\begin{aligned} E^T_{i,+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} f^T_i(I_{p,+}) e^{-i\theta} E^0_i\,, \\ E^T_{i,-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} f^T_i(I_{p,+}) e^{+i\theta} E^0_i \end{aligned}$$

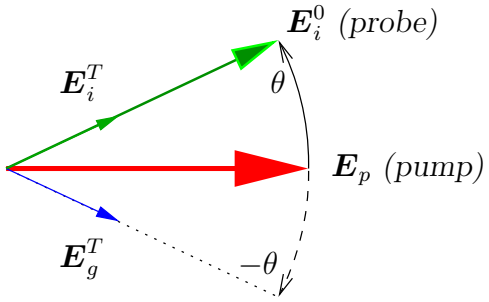


Abbildung 6.7: Winkelabhängigkeit der transmittierten Felder $\boldsymbol{E}_i^T$ und $\boldsymbol{E}_g^T$ wie sie in (6.33) bzw. (6.34) berechnet wurde.

und mit (6.10) ergibt sich

$$E_{i,x}^T = f_i^T(I_{p,+})E_i^0 \cos\theta\,, \tag{6.33a}$$
$$E_{i,y}^T = f_i^T(I_{p,+})E_i^0 \sin\theta \tag{6.33b}$$

für die kartesischen Komponenten.

Die zirkularen Komponenten des erzeugten Feldes lauten mit (6.26b) und (6.26c)

$$\begin{aligned} {E_{g,+}^T}^* &= f_g^T(I_{p,+},\phi_+)E_{i,+}^0 = \tilde{f}_g^T(I_{p,+})e^{-2i\phi_+}E_{i,+}^0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{f}_g^T(I_{p,+})e^{-2i\phi_+}e^{-i\theta}E_i^0\,, \\ {E_{g,-}^T}^* &= f_g^T(I_{p,-},\phi_-)E_{i,-}^0 = \tilde{f}_g^T(I_{p,-})e^{-2i\phi_-}E_{i,-}^0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{f}_g^T(I_{p,+})e^{-2i\phi_+}e^{+i\theta}E_i^0\,. \end{aligned}$$

Für die kartesischen Komponenten ergibt sich damit wiederum mit (6.10) sowie mit $\Delta\phi = 0$:

$${E_{g,x}^T}^* = e^{-2i\phi_+}\tilde{f}_g^T(I_{p,+})E_i^0\cos(-\theta)\,, \tag{6.34a}$$
$${E_{g,y}^T}^* = e^{-2i\phi_+}\tilde{f}_g^T(I_{p,+})E_i^0\sin(-\theta)\,. \tag{6.34b}$$

Dieses Ergebnis ist in Abbildung 6.7 graphisch dargestellt. Das transmittierte Testfeld $\boldsymbol{E}_i^T$ ist parallel zum einfallenden Testfeld, siehe (6.33). Dies ist unab-

hängig vom Winkel θ. Das transmittierte erzeugte Feld $\boldsymbol{E}_g^T$ (6.34) ist bezüglich der Einfallsebene des Pumpfeldes (bei unserer Wahl von $\boldsymbol{E}_p$ ist dies die x-z-Ebene) gespiegelt.

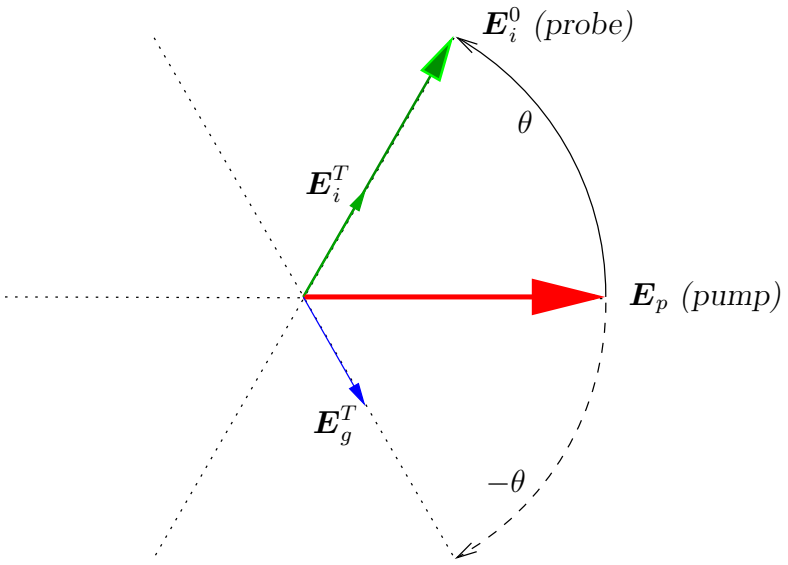


Abbildung 6.8: Winkelabhängigkeit der transmittierten Felder $\boldsymbol{E}_i^T$ und $\boldsymbol{E}_g^T$ für $\theta = 60°$.

In dieser Konfiguration kann folglich die Polarisationsebene des transmittierten erzeugten Feldes $\boldsymbol{E}_g^T$ festgelegt werden, indem man den Winkel θ zwischen Pumpfeld $\boldsymbol{E}_p^T$ und Testfeld $\boldsymbol{E}_i^T$ variiert. Für $\theta = 60°$ sind die Polarisationsebenen der Felder am deutlichsten separiert. Die Polarisationsebenen von Pump-, Test- und erzeugtem Feld stehen, wie in Abbildung 6.8 dargestellt, im Winkel von je 60°aufeinander. Mit $\theta = 45°$ kann man erreichen, daß die Polarisationsebenen des Testfeldes und des erzeugten Feldes senkrecht aufeinander stehen.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation wurden nichtlineare optische Eigenschaften von Quantum-Well-Systemen untersucht, die sich im Inneren einer Micro-Cavity befinden. Das Quantum-Well-System stellt ein optisch nichtlineares Material dar. Es wurde die Pump-Probe-Konfiguration betrachtet, bei der ein Pumpfeld das Material anregt, und die dadurch hervorgerufene Wechselwirkung mittels eines Testfelds detektiert wird.

In Teil I wurde ein Single-Quantum-Well in einer Micro-Cavity betrachtet. Dabei zeigte sich, daß die nichtlineare optische Antwort des Quantum-Wells im Vergleich zu einem freien (isolierten) Quantum-Well stark modifiziert wird. Diese Modifikation entsteht dadurch, daß innerhalb der Micro-Cavity Vielfachreflexionen der einfallenden Felder entstehen. Die Vielfachreflexionen führen insbesondere dazu, daß sich die beiden schwachen Felder[3] gegenseitig beeinflussen, weil in Gegenwart der Micro-Cavity nicht nur das Testfeld eine Quelle des erzeugten Feldes darstellt. Auch das erzeugte Feld selbst wirkt nach Reflexion an den Wänden der Micro-Cavity wieder auf das Quantum-Well ein. Dabei wird unter dem Einfluß des Pumpfeldes wiederum ein Feld mit der Frequenz $2\omega_p - \omega_g = \omega_i$ erzeugt, welches seinerseits nach Reflexion an den Wänden der Micro-Cavity wieder als zusätzlicher Beitrag zum Testfeld auf das Quantum-Well einwirkt und berücksichtigt werden muß. Dieser wechselseitige Einfluß ist bei einem freien Quantum-Well nicht vorhanden, weil in diesem Fall das erzeugte Feld einfach vom Quantum-Well weg propagiert. Daher entsteht bei Betrachtung von Quantum-Well-Systemen, die sich in einer Micro-Cavity befinden, eine merkliche Intensität des erzeugten Feldes am Ort des Quantum-Wells, die noch durch die Mehrfachreflexionen verstärkt wird. Dieses Feld muß-

[3] Die beiden schwachen Felder sind das Testfeld (Probefeld) mit der Frequenz ω_i und das erzeugte phasenkonjungierte Feld mit der Frequenz $\omega_g \equiv 2\omega_p - \omega_i$.

te folglich bei der Berechnung der Transmissions- und Reflexionskoeffizienten des Testfeldes berücksichtigt werden (siehe Kapitel 2). Aufgrund des wechselseitigen Einflusses der Felder aufeinander weichen die Transmissions- und Reflexionsspektren (Kapitel 3) deutlich von denen ab, die man erhält, wenn man das erzeugte Feld nicht berücksichtigt, wie es in früheren Arbeiten betrachtet wurde [31]. Das aus experimentellen Arbeiten bekannte Verhalten, insbesondere der Übergang vom Polariton-Dublett zu einem *ac Stark triplet*, konnte mit einem relativ einfachen analytischen Modell reproduziert werden.

Die Betrachtung des Single-Quantum-Well-Systems in Teil I diente zugleich als Referenzsystem für die Untersuchung von Pump-Probe-Spektren bei komplizierteren Systemen. Diese Systeme waren zum einen gekoppelte Doppel-Quantum-Well-Systeme unter dem Einfluß eines statischen elektrischen Feldes. Dies ist in Teil II dargestellt. Zum anderen waren es Single-Quantum-Well-Systeme unter Berücksichtigung des Spins des Halbleitermaterials und der Polarisation der einwirkenden Lichtfelder (Teil III).

Die Doppel-Quantum-Well-Systeme wurden in Teil II untersucht. Aufgrund des externen stationären Feldes verschieben sich die Energieniveaus der beiden Quantum-Well-Systeme, und es entstehen bei geeigneter Wahl der Frequenz des Pumpfeldes indirekte Exzitonen, d. h. Exzitonen, die durch räumlich getrennte Elektronen und Löcher in verschiedenen Quantum-Wells gebildet werden. Die in diesem Teil durchgeführte theoretische Beschreibung deckt neben den Doppel-Quantum-Well-Systemen auch Materialien mit räumlich getrennten Ladungsträgern (organische *Charge-Transfer*-Kristalle) ab. Bei Betrachtung dieser beiden Szenarios sind deshalb die physikalisch sinnvollen Parameterbereiche innerhalb der mathematischen Beschreibung recht groß.

Wie in Teil I beim Single-Quantum-Well wurde zunächst die stationäre Lösung der Maxwell-Bloch-Gleichungen bei verschwindendem Testfeld berechnet. Dabei zeigte sich, daß im Doppel-Quantum-Well-System bei gewissen Parametern Bistabilität auftritt. Die Bistabilität kann deshalb bereits bei nur *einem* einwirkendem Feld auftreten.[4] Der Parameterbereich, in dem die Bistabilität auftritt, konnte analytisch berechnet und einfache Näherungsformeln angegeben werden.

[4] Nur das Pumpfeld ist vorhanden. Es wirkt kein Testfeld ein.

Es wurde gezeigt, daß im Resonanzfall[5], der in den weiteren numerischen Untersuchungen betrachtet wurde, keine Bistabilität auftritt. Bei diesen Untersuchungen wurde ein interessanter Effekt in der Pump-Probe-Konfiguration entdeckt. Bei genügend großer Pumpstärke entsteht eine Instabilität des Systems in Bezug auf das Testfeld. Die zugehörigen Suszeptibilitäten divergieren, d. h. selbst ein infinitesimal kleines Test-Signal wird zu einer endlichen Amplitude verstärkt. Das infinitesimal kleine Test-Signal kann physikalisch durch die spontane Emission realisiert werden. Dieses unvermeidbare quantenmechanische Rauschen wird verstärkt und führt zu einer endlichen Population der Testfeld-Mode (ω_i-Mode). Simultan wird das phasenkonjungierte Feld mit der Frequenz ω_g erzeugt, und es erreicht ebenfalls eine endliche Amplitude. Dieser Effekt der spontanen Erzeugung von Feldern mit den Frequenzen ω_i und ω_g (mit $\omega_i + \omega_g = 2\omega_p$) kann als spezielles Beispiel für allgemeine Phänomene parametrischer Instabilität (wie z. B. in [33]) betrachtet werden, die in Systemen mit externem Einfluß stattfinden können. Die Rolle des externen Einflusses übernimmt hier das Pumpfeld. Wie üblich sind semi-klassische Methoden nicht ausreichend, um die anfängliche Entwicklung der Instabilität, ausgehend vom spontanen Rauschen, zu beschreiben. Dieses quantenmechanische Regime erfordert eine konsistente quantenmechanische Beschreibung, die über den Umfang dieser Arbeit hinausgeht. Weiterhin kann der hier benutzte Formalismus (lineare Antwort bezüglich Testfeld und erzeugtem Feld) den stationären Zustand bei bereits entwickelter Instabilität nicht adäquat beschreiben. Offensichtlich würde dies erfordern, das Testfeld und das erzeugte Feld nicht als schwache Felder zu betrachten, um die nichtlinearen Effekte, die damit in Zusammenhang stehen, einzubeziehen. Die vorliegende Untersuchung behandelt nur das Pumpfeld als starkes Feld. Jedoch war dieser Formalismus ausreichend, um ein strenges Kriterium für das Auftreten der Instabilität anzugeben. Diese parametrische Instabilität ist spezifisch für das Doppel-Quantum-Well-System. Im Single-Quantum-Well-System tritt sie nicht auf. Bei der Darstellung der Transmissions- und Reflexionsspektren zeigte sich, daß die Spektren im Gegensatz zum Single-Quantum-Well asymmetrisch werden. Der niederenergetische Peak verschiebt sich zu höheren Energien.

[5] Pumpfrequenz entspricht der (durch das statische elektrische Feld) modifizierten Bandlücke.

Abschließend wurde in Teil III das Referenzmodell aus Teil I im Hinblick auf Halbleiter-Quantum-Well-Systeme erweitert. Dabei wurden im Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators (Wechselwirkung zwischen den Ladungsträgern und dem Lichtfeld) die nach den quantenmechanischen Auswahlregeln erlaubten Übergänge berücksichtigt. Dazu mußte beim Halbleitermaterial der Spin und beim elektrischen Feld die Polarisation des Feldes mit einbezogen werden. Die Transmission und Reflexion wurde allgemeingültig analytisch berechnet. Es zeigte sich, daß die Polarisation der transmittierten ($\boldsymbol{E}_i^T$, $\boldsymbol{E}_g^T$) und reflektierten Felder ($\boldsymbol{E}_i^R$, $\boldsymbol{E}_g^R$) durch die Polarisation von Pump- und Testfeld bestimmt werden kann. Beispielsweise kann bei linear polarisierten Pump- und Testfeldern die Polarisationsebene des transmittierten erzeugten Feldes $\boldsymbol{E}_g^T$ so gesteuert werden, daß die getrennte Detektion der Felder beim Experiment vereinfacht wird.

Summary

In this thesis the nonlinear response of a microcavity containing a thin layer of a nonlinear optical medium, a quantum well was studied. Particularly, the pump-probe configuration where the nonlinear optical medium is excited by a pump field and the interaction between the pump field and the medium is detected with a probe field was considered.

In Part I a single quantum well was considered. It was found that the nonlinear response of the quantum well is strongly modified compared to an isolated quantum well. This modification is due to multiple light reflections within the microcavity. In particular, this results in a mutual influence of two weak light fields[6], because in the presence of the microcavity not only the probe field is a source for the generated field, but also the generated field being reflected at the microcavity and returning back to the quantum well, becomes a source of an additional contribution ($2\omega_p - \omega_g = \omega_i$) to the probe field through the nonlinear generation mechanism. This mutual influence is apparently absent for an isolated quantum well, where the generated field simply propagates away from the quantum well.

Thus, for a quantum well inside a microcavity, there is an appreciable intensity (enhanced due to multiple scattering) of the generated field. The presence of this field should be taken into account when calculating the transmission and reflection coefficients of the probe field (see Chapter 2). Due to the mutual influence effect, these coefficients and the resulting spectra (Chapter 3) differ considerably from those in the case of the presence of the generated field being ignored as done in earlier papers in the field [31].

[6] The two weak fields are the probe field of frequency ω_i and a generated field of frequency $\omega_g \equiv 2\omega_p - \omega_i$.

Experimental results, particularly the transition from a polariton doublet to an ac Stark triplet could be reproduced with a quite simple analytical model. The study of the case of a single quantum well in Part I establishes a reference point for the consideration of more complicated quantum well systems. Namely systems of two coupled quantum wells under the influence of a static electrical field (Part II) and single quantum well systems taking into account the spin of the material and the light polarization (Part III) were investigated.

Systems of two coupled quantum wells under the influence of a static electric field were investigated in Part II. The presence of the external static electric field leads to a shift of the energy levels of the quantum well system. This shift allows the generation of indirect excitons (electrons and holes are spatially separated in different quantum wells) when the pump frequency is chosen appropriately. The treatment in Part II also covers other systems with spatially separated carriers such as organic charge transfer crystals. Thus, a wide range of the charge separation parameter can be realized in experiments.

As in Part I for the single quantum well, the stationary solution of the Maxwell-Bloch equations for a vanishing probe field was calculated. It was found that for certain parameters the response of the system shows bistability even in the single (pump) field scenario without a probe field. The region of parameters where bistability occurs has been calculated analytically and simple approximative solutions were found.

It was shown that for the resonance situation[7] there is no bistability. For the numerical calculation this resonance situation was considered. A at a sufficiently large pump intensity an interesting effect of an instability in the considered system arises. The transmission coefficients of the probe field tend to infinity. This means that even an infinitesimally weak probe signal would be amplified to a finite amplitude. Physically, spontaneous emission may act as the infinitesimally weak probe signal. This unavoidable quantum noise is amplified and results in a finite population of the mode ω_i. Simultaneously, the field of frequency ω_g is generated and reaches a finite amplitude, too. This effect of spontaneous generation of fields with frequencies ω_i and ω_g ($\omega_i + \omega_g =$

[7] When the pump frequency equals the band gap modified by the electrical field.

$2\omega_p$) may be considered as a particular example of the general phenomenon of parametric instability (see e. g. [33]) that may take place in systems under external influence (here the pump field acts as external influence).

As usual, a semiclassical approach is not powerful enough to describe the initial development of the instability starting from the spontaneous noise. This quantum regime requires a consistent quantum treatment that goes beyond the scope of the present investigation. Moreover, the applied formalism of the linear response cannot describe the steady state regime of the well developed instability. This problem would apparently require to treat the probe field and generated field as non-weak fields additionally take into account nonlinear effects connected with them (whereas the formalism in this thesis treats only the pump field as a strong one). However, this formalism is sufficient to find out rigorously the conditions for the instability.

It is interesting to mention that the instability in the considered microcavity configuration takes place only for the coupled quantum wells with charge transfer optical transition. No such instability exists in the single quantum well configuration.

Finally, in Part III the reference model considered in Part I was extended with regard to semiconductor quantum well systems. In the interaction part of the Hamiltonian (interaction between the carriers and the light field) only the transitions according to the quantum mechanical selection rules were taken into account. Therefore the spin of the material and the polarization of the incident light fields had to be considered. The transmission and the reflection were calculated analytically. It was found that it is possible to control the polarization of the transmitted ($\boldsymbol{E}_i^T$, $\boldsymbol{E}_g^T$) and reflected field ($\boldsymbol{E}_i^R$, $\boldsymbol{E}_g^R$) by appropriate polarizations of the pump and the probe field. E. g. for linearly polarized pump and probe fields, it is possible to simplify the separate detection of $\boldsymbol{E}_i^T$ and $\boldsymbol{E}_g^T$ (by separating their polarization planes) by varying the angle between the polarization planes of the incoming pump and probe fields.

Anhang A

Resonanz-Fluoreszenz-Spektrum eines angeregten Zwei-Niveau-Systems

A.1 Dressed-Atom-Konzept

Die Wechselwirkung zwischen einem Zwei-Niveau-System (Atom) und einem äußerem Lichtfeld läßt sich im Rahmen des Dressed-Atom-Konzepts beschreiben [61,62]. Zu diesem Zweck betrachtet man das äußere Feld als quantisiertes Feld einer Frequenz ω in der Form[1]

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \tag{A.1a}$$

$$H_0 = \hbar\omega_1 A_{11} + \hbar\omega_2 A_{22} + \hbar\omega a^\dagger a \tag{A.1b}$$

$$H_{\text{int}} = -\hbar\lambda \left(a^\dagger A_{12} + a A_{21} \right) . \tag{A.1c}$$

H_0 beschreibt die freie Bewegung des Atom und des Lichtfelds. Dabei sind $\hbar\omega_1$ und $\hbar\omega_2$ die Energien des unteren bzw. oberen Niveaus des Zwei-Niveau-Systems. A_{11} und A_{22} sind die zugehörigen Anzahloperatoren. ω ist die Frequenz des Lichtfelds. $a^\dagger$ und a sind die zugehörigen Erzeugungs- und Vernichtungs-

[1] Hamiltonoperator des Jaynes-Cummings-Modells [63] in der Rotating-Wave-Näherung (RWA, *rotating wave approximation*).

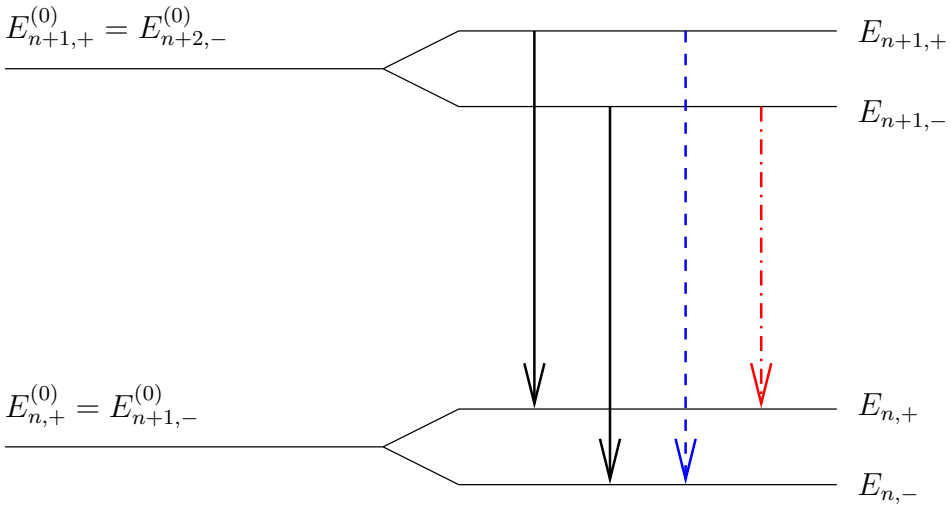


Abbildung A.1: Energie-Niveaus eines Atoms (Zwei-Niveau-System), das von einem resonanten Lichtfeld angeregt wird.
Die ungestörten, entarteten Energie-Niveaus sind im linken Teil und die Energie-Niveaus der *dressed-atom states* im rechten Teil skizziert. Die Energie-Niveaus der *dressed-atom states* sind um $\hbar\Omega_n$ bzw. $\hbar\Omega_{n+1}$ aufgespaltenen (siehe (A.7)).

operatoren. H_{int} beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem Atom und dem Lichtfeld mit der Kopplungskonstante λ. A_{12} und A_{21} beschreiben die Übergänge im Zwei-Niveau-System.

Die Eigenwert-Gleichung für H_0 läßt sich als

$$H_0|\, n, i\,\rangle = \hbar(n\omega + \omega_i)|\, n, i\,\rangle \tag{A.2}$$

darstellen, wobei i den Zustand des Atoms ($i \in \{1, 2\}$ bzw. $i \in \{-, +\}$) beschreibt und n die Anzahl der Photonen ist. Bei exakter Resonanz ($\omega_2 - \omega_1 \equiv \omega_{21} = \omega$) sind die Eigenwerte zu H_0 (mit Ausnahme des Grundzustands) zweifach entartet, da die Zustände $|\, n, +\,\rangle$ und $|\, n+1, -\,\rangle$ beide zur Energie $E^{(0)}_{n,+} = E^{(0)}_{n+1,-}$ gehören. Diese Entartung wird durch die Wechselwirkung zwischen dem Atom und dem Feld aufgehoben. Bei exakter Resonanz erhält man durch Diagonalisierung von (A.1)

$$H|\, n, \pm\,\rangle = E_{n,\pm}|\, n, \pm\,\rangle \tag{A.3}$$

mit

$$E_{n,\pm} = \hbar\left(\omega_2 + n\omega \pm \frac{1}{2}\Omega_n\right) \tag{A.4}$$

und

$$|\, n, \pm\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\, n+1\,\rangle|-\rangle \pm |\, n\,\rangle|+\rangle\right), \tag{A.5}$$

wobei Ω_n die n-Photon-Rabi-Frequenz ist. Die Rabi-Frequenz Ω_n läßt sich auch als

$$\Omega_n = \frac{2}{\hbar}|\boldsymbol{\mu}_{21}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0)|\sqrt{n+1} \tag{A.6}$$

darstellen, wobei $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0)$ das elektrische Feld am Ort des Atom $\boldsymbol{r}_0$ ist. $\boldsymbol{\mu}_{21}$ ist das Übergangsdipolmoment. In (A.4) erkennt man, daß die ursprünglich entarteten Energie-Niveaus $E^{(0)}_{+,n} = E^{(0)}_{-,n+1}$ in zwei Niveaus, deren Abstand $\hbar\Omega_n$ beträgt, aufspalten. Dies ist in Abbildung A.1 dargestellt. Für die vier aufgespaltenen

Energie-Niveaus in Abbildung A.1 gilt:

$$E_{\pm,n} = E^{(0)}_{+,n} \pm \Omega_n \tag{A.7a}$$

$$E_{\pm,n+1} = E^{(0)}_{+,n+1} \pm \Omega_{n+1}\,. \tag{A.7b}$$

Da die Zustände $|\, n, \pm \,\rangle$ gegenüber den Atom-Eigenzuständen aufgrund der Wechselwirkung mit dem Lichtfeld modifiziert sind, bezeichnet man als sie *dressed-atom states*. Für die Energie-Differenzen der in Abbildung A.1 skizzierten Übergänge gilt (von links nach rechts):

$$\frac{1}{\hbar}\left(E_{n+1,\pm} - E_{n,\pm}\right) = \omega_{21} \pm \frac{1}{2}\left(\Omega_{n+1} - \Omega_n\right) \tag{A.8a}$$

$$\frac{1}{\hbar}\left(E_{n+1,\pm} - E_{n,\mp}\right) = \omega_{21} \pm \frac{1}{2}\left(\Omega_{n+1} + \Omega_n\right)\,. \tag{A.8b}$$

Betrachtet man den Grenzfall eines klassisches Felds[2] kann man die Rabi-Frequenzen vereinfachen:

$$\Omega_{n+1} \approx \Omega_n \approx \Omega\,. \tag{A.9}$$

Die beiden Übergänge (A.8a) reduzieren sich zu einem Übergang mit der Frequenz ω_{21} und die Übergänge (A.8b) vereinfachen sich zu $\omega_{21} \pm \Omega$:

$$\frac{1}{\hbar}\left(E_{n+1,\pm} - E_{n,\pm}\right) = \omega_{21} \tag{A.10a}$$

$$\frac{1}{\hbar}\left(E_{n+1,\pm} - E_{n,\mp}\right) = \omega_{21} \pm \Omega\,. \tag{A.10b}$$

Im Dressed-Atom-Konzept ergibt sich somit für das Resonanz-Fluoreszenz-Spektrum eine Triplett-Struktur mit Peaks an den drei Frequenzen[3] ω_{21} und $\omega_{21} \pm \Omega$. Zudem ergibt sich, daß das Verhältnis der Intensitäten etwa 2:1 beträgt (zentraler Peak bei ω_{21} (A.10a) im Vergleich zur Intensität der äußeren Peaks (A.10b)).

[2] Im klassisches Grenzfall hat die Photonen-Verteilungsfunktion ihr Maximum bei einem großen Wert von n.

[3] Man erhält drei Peaks sofern die Rabi-Frequenzen groß genug im Vergleich zur Linienbreite ist.

A.2 Maxwell-Bloch-Gleichungen ohne Dämpfung

Eine alternative Erklärung der Triplett-Struktur im Resonanz-Fluoreszenz-Spektrum ergibt sich anhand der Maxwell-Bloch-Gleichungen. Aus den Maxwell-Bloch-Gleichungen im rotierenden Bezugssystem (2.19) (Seite 22) ergibt sich bei Beschränkung auf das Pumpfeld ($\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_g = 0$) und unter Vernachlässigung der Dämpfung (Grenzfall starker Anregung):

$$\frac{d}{dt}p = i(1-2n)\Omega_p \tag{A.11a}$$

$$\frac{d}{dt}p^* = -i(1-2n)\Omega_p^* \tag{A.11b}$$

$$\frac{d}{dt}n = i\left\{\Omega_p p^* + \Omega_p^* p\right\} . \tag{A.11c}$$

Die einfache Lösung für dieses lineare Differentialgleichungssystem lautet

$$p = \text{const} \quad \text{mit} \quad \arg p = \arg \Omega_p + \frac{\pi}{2} \tag{A.12a}$$

$$n = \frac{1}{2} . \tag{A.12b}$$

Der zentrale Peak im Resonanz-Fluoreszenz-Spektrum entspricht der Relaxation zu dieser einfachen stationären Lösung.

Als weitere nicht-triviale Lösung ergibt sich für die Differenz der Besetzungszahl (Inversion)

$$\Delta n = n - (1-n) = 2n - 1$$

des Zwei-Niveau-Systems bei starker Anregung eine schnelle sinus-förmige Oszillation[4] mit der Rabi-Frequenz Ω_p. Die äußeren Peaks der Triplett-Struktur korrespondieren zu dieser Lösung des Systems (A.11).

[4] Diese Oszillationen nennt man Rabi-Oszillationen oder optische Nutation [64].

Anhang B

Untersuchung von Grenzfällen

Im folgenden werden Näherungslösungen für einige im Hauptteil verwendeten Ausdrücke in bestimmten Grenzfällen angegeben. Mit Hilfe dieser Näherungslösungen wurde die Plausibilität der numerischen Lösungen überprüft.

B.1 Näherungen für die Resonanznenner F, D_i und D_g

Für die Resonanznenner F (siehe (2.38) auf Seite 28), D_i und D_g (siehe (2.40) auf Seite 29) ergibt sich für den Fall, daß das Detuning klein gegen die longitudinale und die transversale Dämpfungsrate (Γ bzw. γ, siehe Abschnitt 2.1.2 auf Seite 19) ist ($|\omega'| \ll \gamma, \Gamma$):

$$F = \frac{\Gamma}{\Gamma + i(\omega_p - \omega_i)} = \frac{\Gamma}{\Gamma + i\omega'} = \frac{1}{1 + i\frac{\omega'}{\Gamma}} = 1 - i\frac{\omega'}{\Gamma} \tag{B.1}$$

$$D_i = \frac{\gamma}{\gamma + i(\omega_{cv} - \omega_{\mathrm{cav}} - \omega')} = 1 + i\,\frac{\omega' + (\omega_{\mathrm{cav}} - \omega_{cv})}{\gamma} \tag{B.2}$$

$$D_g = \frac{\gamma}{\gamma + i(\omega_{cv} - \omega_{\mathrm{cav}} + \omega')} = 1 + i\,\frac{-\omega' + (\omega_{\mathrm{cav}} - \omega_{cv})}{\gamma}\,. \tag{B.3}$$

B.2 Näherungen für die dimensionslosen Suszeptibilitäten $\{h_{ij}\}$

Die dimensionslosen Suszeptibilitäten $\{h_{ij}\}$ wurden in (2.84) auf Seite 44 definiert.

Für kleines Detuning, d. h.

$$\omega_i = \omega_{\text{cav}} + \omega' \quad \text{mit} \quad \omega' \ll \omega_{\text{cav}}\,, \tag{B.4}$$

gilt für die Vorfaktoren in Gleichung (2.84) auf Seite 44

$$c_{Q,m}\omega_i = \frac{N_{\text{an}}\pi}{8}\frac{\Omega_{\text{LF}}^2}{\omega_{\text{cav}}}(1+\frac{\omega'}{\omega_{\text{cav}}}) \tag{B.5a}$$

$$c_{Q,m}\omega_g = \frac{N_{\text{an}}\pi}{8}\frac{\Omega_{\text{LF}}^2}{\omega_{\text{cav}}}(1-\frac{\omega'}{\omega_{\text{cav}}}) \tag{B.5b}$$

und bei sehr kleinem Detuning

$$c_{Q,m}\omega_i \approx \frac{N_{\text{an}}\pi}{8}\frac{\Omega_{\text{LF}}^2}{\omega_{\text{cav}}} \tag{B.6a}$$

$$c_{Q,m}\omega_g \approx \frac{N_{\text{an}}\pi}{8}\frac{\Omega_{\text{LF}}^2}{\omega_{\text{cav}}}\,. \tag{B.6b}$$

Mit den Näherungen (B.5) ergibt sich für die dimensionslosen Suszeptibilitäten für kleines Detuning:

$$h_{11} = \frac{N_{\text{an}}\pi}{8}\frac{\Omega_{\text{LF}}^2}{\omega_{\text{cav}}}(1+\frac{\omega'}{\omega_{\text{cav}}})\alpha_{11} \tag{B.7a}$$

$$h_{12} = \frac{N_{\text{an}}\pi}{8}\frac{\Omega_{\text{LF}}^2}{\omega_{\text{cav}}}(1+\frac{\omega'}{\omega_{\text{cav}}})\alpha_{12}e^{-2i\phi_\mu} \tag{B.7b}$$

$$h_{21} = \frac{N_{\text{an}}\pi}{8}\frac{\Omega_{\text{LF}}^2}{\omega_{\text{cav}}}(1-\frac{\omega'}{\omega_{\text{cav}}})\alpha_{21}^*e^{2i\phi_\mu} \tag{B.7c}$$

$$h_{22} = \frac{N_{\text{an}}\pi}{8}\frac{\Omega_{\text{LF}}^2}{\omega_{\text{cav}}}(1-\frac{\omega'}{\omega_{\text{cav}}})\alpha_{22}^*\,. \tag{B.7d}$$

B.3 Näherungen für die Koeffizienten $\{c_{ij}\}$

Die Koeffizienten $\{c_{ij}\}$ (2.111) wurden in Abschnitt 2.4.1 auf Seite 52 definiert. Um Näherungen für diese Koeffizienten angeben zu können, betrachtet man zunächst die Ausdrücke, die sich aus den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten zusammensetzen und dann die Exponentialfunktionen.

Im Falle einer idealen Cavity (hoher Reflexionskoeffizient) läßt sich der in Abschnitt 2.3.3 auf Seite 46 eingeführte Reflexionskoeffizienten r des Resonators als

$$r = -1 + \rho \quad \text{mit} \quad 0 < \rho \ll 1 \tag{B.8}$$

darstellen. Der Grenzfall einer metallischen Oberfläche entspricht $r = -1$, d. h. $\rho = 0$.

Für den Transmissionskoeffizienten t und andere in Abschnitt 2.3.3 auftretende Ausdrücke ergibt sich bei hohem Reflexionskoeffizienten:

$$r^2 = 1 - 2\rho \tag{B.9}$$

$$t = i\sqrt{1 - r^2} = i\sqrt{2\rho} \tag{B.10}$$

$$t^2 = -2\rho \tag{B.11}$$

$$\frac{t}{t^*} = \frac{t^*}{t} = -1\,. \tag{B.12}$$

B.3.1 Für verschwindendes Detuning

Die Koeffizienten $\{c_{ij}\}$ lassen sich bei verschwindendem Detuning

$$\omega_i = \omega_{\text{cav}}$$

stark vereinfachen. In erster Ordnung in ρ erhält man (nur $\{c_{1j}\}$ und $\{c_{3j}\}$ werden für die Transmission benötigt) für eine ideale Cavity (B.8) und für

verschwindendes Detuning:

$$c_{10} = 2\rho \tag{B.13a}$$
$$c_{11} = -4(1-\rho) \tag{B.13b}$$
$$c_{12} = -4(1-\rho) \tag{B.13c}$$
$$c_{30} = 2\rho \tag{B.13d}$$
$$c_{31} = 4(1-\rho) \tag{B.13e}$$
$$c_{32} = 4(1-\rho)\,. \tag{B.13f}$$

B.3.2 Für kleines Detuning

Bei kleinem Detuning läßt sich k_i als $k_{\text{cav}} + k'$ darstellen, wobei k' eine kleine Abweichung darstellt:

$$k_i = k_{\text{cav}} + k' \quad \text{mit} \quad |k'L| \ll 1\,, \tag{B.14a}$$
$$k_g = k_{\text{cav}} - k'\,. \tag{B.14b}$$

Setzt man wieder eine ideale Cavity (B.8) voraus und benutzt zudem

$$k_{\text{cav}} L = N_{\text{an}}\pi \tag{B.15}$$
$$N_{\text{an}} = N_{\text{anti-nodes}} = 1, \underline{3}, 5, \ldots \tag{B.16}$$
$$e^{ik_{\text{cav}}L} = -1 \tag{B.17}$$
$$z_Q = \frac{L}{2} \tag{B.18}$$

so erhält man für die Exponentialfunktionen in (2.111) auf Seite 52 in erster Ordnung in $k'z_Q$:

$$e^{\pm ik_i z_Q} = \mp i(1 \pm ik'z_Q) \tag{B.19a}$$
$$e^{\pm ik_g z_Q} = \mp i(1 \mp ik'z_Q) \tag{B.19b}$$
$$e^{\pm 2ik_i z_Q} = -(1 \pm 2ik'z_Q) \tag{B.19c}$$
$$e^{\pm 2ik_g z_Q} = -(1 \mp 2ik'z_Q) \tag{B.19d}$$

$$e^{\pm 3ik_i z_Q} = \pm i(1 \pm 3ik' z_Q) \tag{B.19e}$$
$$e^{\pm 3ik_g z_Q} = \pm i(1 \mp 3ik' z_Q) \tag{B.19f}$$
$$e^{\pm 4ik_i z_Q} = 1 \pm 4ik' z_Q \tag{B.19g}$$
$$e^{\pm 4ik_g z_Q} = 1 \mp 4ik' z_Q\,. \tag{B.19h}$$

Für die Koeffizienten $\{c_{ij}\}$ (siehe Gleichung (2.111) auf Seite 52) ergibt sich mit (B.9)–(B.12) sowie (B.19) in erster Ordnung in ρ und erster Ordnung in $k'z_Q$:

$$c_{10} = 2(\rho - 2ik' z_Q) \tag{B.20a}$$
$$c_{11} = -4(1 - \rho + 2ik' z_Q) \tag{B.20b}$$
$$c_{12} = -4(1 - \rho + 2ik' z_Q) \tag{B.20c}$$
$$c_{30} = 2(\rho - 2ik' z_Q) \tag{B.20d}$$
$$c_{31} = 4(1 - \rho + 2ik' z_Q) \tag{B.20e}$$
$$c_{32} = 4(1 - \rho + 2ik' z_Q)\,. \tag{B.20f}$$

Literaturverzeichnis

[1] The Nobel Prize in Physics 2000 “for basic work on information and communication technology”.
URL: <http://nobelprize.org/physics/laureates/2000/>.
Zitiert auf Seite 2.

[2] N. Peyghambarian, S. W. Koch und A. Mysyrowicz.
Introduction to Semiconductor Optics.
Prentice-Hall, New Jersey, 1993.
Zitiert auf den Seiten 2, 77, 84, 116 und 118.

[3] H. Haug und S. W. Koch.
Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors.
World Scientific Publishing, Singapore, 2004.
Zitiert auf den Seiten 2 und 20.

[4] The Nobel Prize in Physics 1985 “for the discovery of the quantized Hall effect”.
URL: <http://nobelprize.org/physics/laureates/1985/>.
Zitiert auf Seite 2.

[5] The Nobel Prize in Physics 1998 “for their discovery of a new form of quantum fluid with fractionally charged excitations”.
URL: <http://nobelprize.org/physics/laureates/1998/>.
Zitiert auf Seite 2.

[6] A. Kavokin und G. Malpuech.
Cavity Polaritons, Band 32 aus *Thin Filmes and Nanostructures.*
Elsevier, Amsterdam, 2003.
Zitiert auf den Seiten 3 und 6.

[7] J. Frenkel.
On the Transformation of Light into Heat in Solids. I.

Phys. Rev., **37**, 17, 1931.
Zitiert auf Seite 3.

[8] J. Frenkel.
On the Transformation of Light into Heat in Solids. II.
Phys. Rev., **37**, 1276, 1931.
Zitiert auf Seite 3.

[9] A. S. Davydov.
Theory of Molecular Excitons.
Plenum Press, New York, 1971.
Zitiert auf Seite 3.

[10] L. D. Landau und E. M. Lifschitz.
Statistische Physik, Teil 1, Band V aus *Lehrbuch der Theoretischen Physik.*
Akademie Verlag, Berlin, 1979/1987.
Zitiert auf Seite 3.

[11] L. D. Landau und E. M. Lifschitz.
Statistische Physik, Teil 2, Theorie des kondensierten Zustands, Band IX aus *Lehrbuch der Theoretischen Physik.*
Akademie Verlag, Berlin, 1992.
Zitiert auf Seite 3.

[12] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa und Y. Arakawa.
Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity.
Phys. Rev. Lett., **96**, 3314–3317, 1992.
Zitiert auf Seite 4.

[13] G. Khitrova, H. M. Gibbs, F. Jahnke, M. Kira und S. W. Koch.
Nonlinear optics of normal-mode-coupling semiconductor microcavities.
Rev. Mod. Phys., **71** (5), 1999.
Zitiert auf den Seiten 4 und 6.

[14] J. J. Hopfield.
Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals.
Phys. Rev., **112**, 1555, 1958.
Zitiert auf Seite 4.

[15] V. M. Agranovich.

Zh. Eksper. Teor. Fiz., **37**, 1555, 1959.
Zitiert auf Seite 4.

[16] V. M. Agranovich und V. L. Ginzburg.
Spatial Dispersion in Crystal Opics and the Theory of Excitons.
Interscience Publishers, London, 1966.
Zitiert auf Seite 4.

[17] M. S. Skolnick, T. A. Fisher und D. M. Whittaker.
Strong coupling phenomena in quantum microcavity structures.
Semiconductor Science and Technology, **13** (7), 645, 1998.
Zitiert auf Seite 4.

[18] K. J. Vahala.
Optical microcavities.
Nature, **424**, 839, 2003.
Zitiert auf den Seiten 4 und 6.

[19] Embedded Processor Forum: Optischer Signalprozessor aus Israel.
URL: `<http://www.heise.de/newsticker/meldung/27071>`, 02.05.2002.
Heise Online.
Zitiert auf Seite 4.

[20] Startup bringt optischen Hochleistungs-Prozessor auf den Markt.
URL: `<http://www.heise.de/newsticker/meldung/41590>`, 31.10.2003.
Heise Online.
Zitiert auf Seite 4.

[21] D. G. Lidzey, D. D. C. Bradley, M. S. Skolnick, T. Virgili, S. Walker und D. M. Whittaker.
Strong exciton-photon coupling in an organic semiconductor microcavity.
Nature, **395**, 53–55, 1998.
Zitiert auf Seite 4.

[22] R. J. Holmes und S. R. Forrest.
Strong Exciton-Photon Coupling and Exciton Hybridization in a Thermally Evaporated Polycrystalline Film of an Organic small molecule.
Phys. Rev. Lett., S. 186404, 2004.
Zitiert auf Seite 4.

[23] V. M. Agranovich, M. Litinskaya und D. G. Lidzey.
Cavity polaritons in microcavities containing disordered organic semiconductors.

Phys. Rev. B, S. 085311, 2003.
Zitiert auf Seite 4.

[24] M. Litinskaya, P. Reineker und V. M. Agranovich.
Exciton-polaritons in a crystalline anisotropic organic microcavity.
Phys. stat. sol. (a), **201**, 646, 2004.
Zitiert auf Seite 4.

[25] M. Litinskaya, P. Reineker und V. M. Agranovich.
Fast polariton relaxation in strongly coupled organic microcavities.
J. Lumin., **110** (4), 364–372, 2004.
Zitiert auf Seite 4.

[26] H. M. Gibbs.
Optical Bistability: Controlling Light with Light.
Academic Press, Orlando, 1985.
Zitiert auf Seite 5.

[27] B. S. Wherrett und D. C. Hutchings.
Optical bistability.
In O. Keller (Hrsg.), *Nonlinear Optics in Solids*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
Zitiert auf Seite 5.

[28] P. W. Smith und W. J. Tomlinson.
Bistable optical devices promise subpicosecond switching.
IEEE Spectrum, **18**, 26–33, 1981.
Zitiert auf Seite 5.

[29] A. Huang.
The first all-optical switch.
Science News, 22.06.1991.
URL: `<http://newton.ex.ac.uk/aip/physnews.39.html>`.
Zitiert auf Seite 6.

[30] F. Jahnke, M. Kira, S. W. Koch, G. Khitrova, E. K. Landmark, T. R. Nelson, D. V. Wick, J. D. Berger, O. Lyngnes, H. M. Gibbs und K. Tai.
Excitonic nonlinearities of semiconductor microcavities in the nonperturbative regime.
Phys. Rev. Lett., **77** (26), 5257–5260, 1996.
Zitiert auf Seite 6.

[31] F. Quochi, G. Bongiovanni, A. Mura, J. L. Staehli, B. Deveaud, R. P.

Stanley, U. Oesterle und R. Houdré.
Strongly driven semiconductor microcavities: From the polariton doublet to an ac Stark triplet.
Phys. Rev. Lett., **80** (21), 4733–4736, 1998.
Zitiert auf den Seiten 6, 11, 13, 14, 21, 59, 61, 132 und 135.

[32] C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud und A. Quattropani.
Theory of the angle-resonant polariton amplifier.
Phys. Rev. B, **62** (8), R4825, 2000.
Zitiert auf Seite 6.

[33] P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker und J. S. Roberts.
Angle-resonant stimulated polariton amplifier.
Phys. Rev. Lett., **84** (7), 1547, 2000.
Zitiert auf den Seiten 6, 8, 133 und 137.

[34] Yoshihisa Yamamoto, Francesco Tassone und Hui Cao.
Semiconductor Cavity Quantum Electrodynamics, Band 169 aus *Springer Tracts in Modern Physics*.
Springer-Verlag, Berlin, 2000.
Zitiert auf Seite 6.

[35] Y. Yamamoto.
Half matter, half-light amplifier.
Nature, **405**, 629, 2000.
Zitiert auf Seite 6.

[36] C. Ciuti, P. Schwendimann und A. Quattropani.
Parametric luminescence of microcavity polaritons.
Phys. Rev. B, **62** (4), 041303 R, 2001.
Zitiert auf Seite 6.

[37] P. G. Savvidis, C. Ciuti, D. M. Whittaker J. J. Baumberg, M. S. Skolnick und J. S. Roberts.
Parametric luminescence of microcavity polaritons.
Phys. Rev. B, **64** (7), 075311, 2001.
Zitiert auf Seite 6.

[38] D. Haarer und R. Philpott.
Excitons and polarons in organic weak charge transfer crystals.
In V. M. Agranovich und R.M. Hochstrasser (Hrsg.), *Specroscopy and*

Excitation Dynamics of Condensed Molecular Systems. North-Holland, 1983.
Zitiert auf den Seiten 7, 83 und 84.

[39] D. S. Chemla und J. Shah.
Many-body and correlation effects in semiconductors.
Nature, **411**, 2001.
Zitiert auf Seite 11.

[40] B. R. Mollow.
Stimulated emission and absorption near resonance for driven systems.
Phys. Rev. A, **5** (5), 2217–2222, 1972.
Zitiert auf den Seiten 11, 14 und 64.

[41] I. I. Rabi.
Space quantization in a gyrating magnetic field.
Phys. Rev., **51** (8), 652–654, 1937.
Zitiert auf Seite 12.

[42] J. J. Sanchez-Mondragon, N. B. Narozhny und J. H. Eberly.
Theory of spontaneous-emission line shape in an ideal cavity.
Phys. Rev. Lett., **51** (7), 550–553, 1983.
Zitiert auf den Seiten 12 und 55.

[43] G. S. Agarwal.
Vacuum-field rabi splittings in microwave absorption by Rydberg atoms in a cavity.
Phys. Rev. Lett., **53** (18), 1732–1734, 1984.
Zitiert auf den Seiten 12 und 55.

[44] R. J. Thompson, G. Rempe und H. J. Kimble.
Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity.
Phys. Rev. Lett., **68** (8), 1132–1135, 1992.
Zitiert auf den Seiten 12 und 55.

[45] Y. R. Shen.
The Principles of Nonlinear Optics.
John Wiley & Sons, New York, 1984.
Zitiert auf Seite 14.

[46] W. Greiner.
Quantenmechanik.
Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 1989.

Zitiert auf Seite 17.

[47] A. Messiah.
Quantenmechanik.
de Gruyter, 1976.
Zitiert auf Seite 17.

[48] R. W. Boyd.
Nonlinear Optics.
Academic Press, San Diego, 1992.
Zitiert auf den Seiten 19, 20 und 113.

[49] W. W. Chow und S. W. Koch.
Semiconductor-Laser Fundamentals.
Springer-Verlag, Berlin, 1999.
Zitiert auf den Seiten 20, 35, 60, 115, 116 und 120.

[50] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew.
Taschenbuch der Mathematik.
Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 1989.
Zitiert auf den Seiten 25, 85, 86 und 91.

[51] W. Greiner.
Klassische Elektrodynamik.
Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 1991.
Zitiert auf Seite 39.

[52] Maple.
Maplesoft, Waterloo Maple Inc.
URL: `<http://www.maplesoft.com/>`.
Zitiert auf Seite 51.

[53] G. Bongiovanni, A. Mura, F. Quochi, S. Gürtler, J. L. Staehli, F. Tassone, R. P. Stanley, U. Oesterle und R. Houdré.
Coherent exciton-photon dynamics in semiconductor microcavities: The influence of inhomogeneous broadening.
Phys. Rev. B, **55** (11), 7084–7090, 1997.
Zitiert auf Seite 61.

[54] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery.
Numerical Recipes in C.
Cambridge University Press, 1992.
Zitiert auf Seite 63.

[55] N. Bloembergen.
Nonlinear Optics.
Benjamin, Reading, 1977.
Zitiert auf Seite 64.

[56] D. L. Mills.
Nonlinear Optics.
Springer-Verlag, Berlin, 1991.
Zitiert auf Seite 64.

[57] P. Meystre und M. Sargent III.
Elements of Quantum Optics.
Springer-Verlag, Berlin, 1990.
Zitiert auf Seite 64.

[58] C. Kittel.
Quantentheorie der Festkörper.
Oldenbourg, München und Wien, 1970.
Zitiert auf Seite 80.

[59] R. Winkler und M. Oestreich.
Spinelektronik.
Physik Journal, **3** (11), 2004.
Zitiert auf den Seiten 117 und 118.

[60] C. Sieh, T. Meier, F. Jahnke, A. Knorr, S. W. Koch P. Brick, M. Hübner, C. Ell, J. Prineas, G. Khitrova und H. M. Gibbs.
Couloumb memory signatures in the excitonic optical stark effect.
Phys. Rev. Lett., **82** (15), 3112, 1999.
Zitiert auf Seite 118.

[61] C. Cohen-Tannoudji und S. Reynaud.
Modification of resonance raman scattering in very intense laser fields.
J. Phys. B, **10** (3), 365–383, 1977.
Zitiert auf Seite 139.

[62] W. Vogel und D.-G. Welsch.
Quantum Optics.
Akademie Verlag, Berlin, 1994.
Zitiert auf Seite 139.

[63] E. T. Jaynes und F. W. Cummings.
Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with appli-

cation to beam maser.
Proc. IEEE, **51**, 89–109, 1963.
Zitiert auf Seite 139.

[64] L. Mandel und E. Wolf.
Optical coherence and quantum optics.
Cambridge University Press, 1995.
Zitiert auf Seite 143.

Danksagung

Herrn Prof. Dr. P. Reineker danke ich für die interessante Aufgabenstellung und die Betreuung bei der Bearbeitung des Themas.

Herrn Prof. Dr. R. G. Winkler danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Herrn Prof. Dr. V. I. Yudson danke ich für die regen Diskussionen und Anregungen, die maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen.

Bei Frau Prof. Dr. U. Kaiser sowie den Herren Prof. Dr. M. Freyberger, Prof. Dr. W. Kratz und Prof. Dr. W. Lütkebohmert möchte ich mich für die Bereitschaft am Promotionskolloquium teilzunehmen bedanken.

Bei allen Abteilungsmitgliedern, die für eine angenehme Atmosphäre und ein gutes Arbeitsklima gesorgt haben, möchte ich mich herzlich bedanken. In diesem Zusammenhang möchte ich insbesondere Frau Dr. G. Brancolini und Frau Dr. E. Mayr sowie die Herren Dr. A. Engelmann, Dr. T. Hofmann und Dipl.-Phys. C. Supritz erwähnen.

Diese Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Quantenkohärenz in Halbleitern“ gefördert.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbst verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ulm, 21. November 2006