Robuste Portfolio Optimierung in Lévy Märkten



ulm university universität ulm

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat

der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

der Universität Ulm

vorgelegt von

Dipl.-Math. oec. Frank Wittemann

aus Offenburg

Universität Ulm, 2008

Institut für Optimierung und Operations Research

Amtierender Dekan:	Prof. Dr. F. Stehling
Erster Gutachter:	Prof. Dr. U. Rieder
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. R. Kiesel
Tag der Promotion:	16. Dezember 2008

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis **v**

1 Einleitung **1**

1.1 Motivation 1

1.2 Überblick 2

1.3 Aufbau der Arbeit 5

2 Robustes Optimierungsproblem **7**

2.1 Das Modell und die primale Problemstellung 7

2.2 Das duale Optimierungsproblem 14

2.2.1 Martingalmaße 15

2.2.2 Duales Optimierungsproblem 18

2.2.3 Zusammenhang von primalem und dualem Optimalwert 26

2.3 Die Darstellung eines optimalen Konsumprozesses 42

3 Existenz und Berechnung der dualen Lösungen **49**

3.1 Die Berechnung des optimalen Lagrangemultiplikators 49

3.2 Die Existenz der dualen Lösungen 51

3.3 Die Berechnung der dualen Lösungen 53

3.3.1 Power Nutzenfunktion 53

3.3.2 Logarithmische Nutzenfunktion 70

3.3.3 Exponentielle Funktion 76

4 Berechnung einer Investmentstrategie **83**

4.1 Das allgemeine Hedgingtheorem 83

4.2 Die Lösung des primalen Problems 88

4.2.1 Sprung-Diffusions Modell 90

4.2.2 Sprungmodell 96

4.3 Standard Portfolio Optimierungsprobleme 100

5 Beispiele **107**

5.1 Der unvollständige Black-Scholes Markt 107

5.2 Der Poisson-Diffusions Markt 110

5.3 Der Compound-Poisson-Diffusions Markt 113

5.4 Numerische Analyse 117

A Grundlagen **123**

A.1 Lévy Prozesse 123

A.2 Hilfsresultate Kapitel 2 127

A.3 Differenzierbarkeit 128

A.3.1 Richtungsableitungen 128

A.3.2 Differenzenoperator 131

Literaturverzeichnis **133**

Summary **141**

Abbildungsverzeichnis

5.1 das ungünstigste, subjektive Maß 112

5.2 das ungünstigste Martingalmaß 115

5.3 das ungünstigste, subjektive Maß 116

5.4 der Zusammenhang zwischen ρ und ζ_{Q_P} 119

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Geldanlage ist in der heutigen Welt aufgrund der Globalisierung ein immer komplexeres Thema. Durch die weltweite Vernetzung werden Veränderungen in Sekundenschnelle in die Tat umgesetzt und realisiert. Ein Blick in die jüngste Vergangenheit zeigt, wie durch falsche Investitionspolitiken Immobilienmärkte zusammenbrechen können und Aktienwerte über Nacht ins Bodenlose fallen. Ein Modell zur Beschreibung der Wirklichkeit solcher Szenarien bzgl. den Aktienkursverläufen sollte also Sprünge im Aktienkurs berücksichtigen und nicht wie das weit verbreitete Black-Scholes Modell diese verbieten. Der Nutzen aus der obigen Krise war und ist sicher für Anleger nicht optimal, viele von ihnen, vor allem Rentner aus den USA, verspielten mit Spekulationen am Aktienmarkt auch ihre Rente, die sie ernähren soll. Diese blinden Investitionen zur Finanzierung des Konsumverhaltens im Rentenalter brachte vielen Menschen den wirtschaftlichen Ruin.

Dieses Beispiel ist eine große Anregung und Herausforderung, sich Gedanken zu machen, wie man durch intelligente Investitionen sich einen Konsum leisten kann, der einem einen größtmöglichen Nutzen bietet auch in Zeiten, in denen Aktienkursverläufe Sprünge nach oben und unten aufweisen können.

Betrachten wir also einen Investor, dem zu Beginn eines vorgegebenen Zeitabschnitts ein gewisses Anfangskapital zur Verfügung steht, so sind wir an dem erwarteten, durch ein Maß K gewichteten Nutzen aus diesem Konsumverhalten interessiert. Durch das Maß K wird die Art des Konsums gesteuert, sodass beispielsweise alles gleichmäßig über den gesamten Zeitabschnitt oder alles am Ende (Problem der Endnutzenmaximierung) konsumiert wird. Da auch bzgl. dem Aktienkursverlauf oft Uneinigkeit herrscht, werden mehrere Modelle für die Aktienmodellierung zugelassen und die Problemstellung in der Weise verallgemeinert, dass man den erwarteten Konsumnutzen bzgl. des Modells betrachtet, welches diesem erwarteten Konsumnutzen den kleinsten Wert zuweist. Diese Art der Problemformulierung ist weniger anfällig bzgl. falschen, subjektiven Einschätzungen über den Aktienkursverlauf und wird daher als robust bezeichnet. Wählen wir das Aktienmodell, welches

den erwarteten Konsumnutzen bzgl. dem Maß K minimiert, so nennen wir den Konsum optimal, bei dem dieser minimal erwartete Nutzen maximiert wird.

Da dieses Konsumverhalten ausschließlich durch das gegebene Anfangsvermögen finanziert werden muss, ist man auch an einer zugehörigen Investmentstrategie interessiert. Daher zerlegt man das obige Problem in zwei Teilprobleme. Beim Ersten wird das optimale Konsumverhalten ermittelt, beim Zweiten durch einen Hedgingansatz eine geeignete Strategie berechnet, die das optimale Konsumverhalten ermöglicht. Diese Vorgehensweise zur Lösung der genannten Fragestellung wird als Martingalmethode bezeichnet.

1.2 Überblick

Wir geben einen kurzen Überblick bzgl. den Arbeiten, die sich unter Zuhilfenahme der Martingalmethode oder durch Vervollständigung des Marktes mit dem Thema der (nicht) robusten Konsumnutzenmaximierung auseinandergesetzt haben.

Bisherige Arbeiten

In der Arbeit von [Karatzas et al] wurde das Optimierungsproblem der Endnutzenmaximierung in vollständigen und unvollständigen **Black-Scholes Märkten** untersucht. Mit Theorem 6.3 gaben die Autoren das optimale Endvermögen sowie die zugehörige Hedgingstrategie für den vollständigen Black-Scholes Markt an. Im unvollständigen Fall wurden mit Theorem 11.8 Existenzaussagen für die Hedgingstrategie getroffen. Hier wurde der Markt durch Hinzunahme weiterer Aktien zuvor künstlich vervollständigt.

Eine andere Lösungsmethode wurde in der Arbeit von [Xu, Shreve] vorgestellt. Da das Problem der Konsum- und Endnutzenmaximierung im Black-Scholes Markt nicht direkt gelöst werden konnte, formulierten die Autoren ein zum Ausgangsproblem duales Hilfsproblem, mit dessen Lösung sie dann einen optimalen Konsumprozess angeben konnten.

Die Finanzmärkte wurden nun nach und nach allgemeiner modelliert. [Kallsen] gelang es, das Problem der Konsumnutzenmaximierung in **Lévy Märkten** für die drei populärsten Nutzenfunktionen zu lösen, indem er den zugehörigen optimalen Konsumprozess und die entsprechende Investmentstrategie angab. Im Vergleich zu den beiden vorherigen Arbeiten wurden die Resultate hier allerdings nicht hergeleitet, sondern lediglich die Optimalität der entsprechenden Prozesse nachgewiesen.

Aufbauend auf der Idee der Vervollständigung von [Karatzas et al] lösten [Corcuera et al] im Lévy Markt das Problem der Endnutzenmaximierung mittels Power Jump Assets. Neben der Herleitung einer Hedgingstrategie für das optimale Endvermögen wurde auch die Existenz des Martingalmaßes kurz thematisiert, bei dem nicht in die Hilfsassets investiert wird.

Zentral erschienen uns die Arbeiten von [Kramkov, Schachermayer] (1999) und (2003), da sie den Grundstein für die Erweiterung der Martingalmethode bzgl. unvollständigen Märkten legte. Hier wie

auch in allen folgenden Arbeiten wurden allgemeine **Semimartingalmärkte** betrachtet. [Kramkov, Schachermayer] stellten neben der Erweiterung der Martingalmethode durch Einführung eines dualen Hilfsproblems auch die optimale Lösung für das Endnutzenmaximierungsproblem vor. Durch die Erweiterung des zulässigen Bereichs im dualen Optimierungsproblem war es ihnen möglich, die Existenz der dualen und primalen Lösung zu garantieren. Auch hier konnte das optimale Endvermögen angegeben werden. In seiner Dissertation gelang es [Xu], ohne Erweiterung des dualen Bereichs das Problem der Endnutzenmaximierung bzgl. einer speziell gewählten Nutzenfunktion und für Aktien mit Sprunghöhen zwischen -1 und 0 zu lösen (siehe Proposition 3.4 und Remark 3.5 von [Xu]). Doch trotz dieser speziellen Wahl war es ihm nicht möglich, mehr wie eine Existenzaussage bzgl. einer dualen Lösung in der Menge der lokalen Martingalmaße anzugeben. Auch eine zugehörige Hedgingstrategie wurde nicht berechnet. Diese Existenzaussage bzgl. lokal beschränkten Aktienkursprozessen wurde zuvor schon in der Arbeit von [Bellini, Frittelli] formuliert.

[Cvitanić et al] griffen den Grundgedanken von [Kramkov, Schachermayer] auf, vergrößerten den zulässigen Bereich des dualen Optimierungsproblems noch weiter und lösten damit das Problem der Endnutzenmaximierung mit Zusatzeinkommen.

Motiviert durch diese letzte Arbeit wurde der Dualitätsansatz anschließend von [Karatzas, Žitković] für Probleme der Konsumnutzenmaximierung (mit zufälligem, terminalem Zusatzeinkommen) verallgemeinert. Die nächste Möglichkeit weiterer Verallgemeinerungen sah man dann in der Modellierung der Aktienkurse. Es entstand die Idee der robusten Maximierung, bei der mehrere Modelle für die zugrundeliegende Aktie zugelassen sind.

So lösten [Quenez], [Schied, Wu] und [Gundel] (2005) das Problem der robusten Endnutzenmaximierung, zeitgleich dazu [Burgert, Rüschendorf] sowie [Wittmüß] das robuste Problem der Konsumnutzenmaximierung.

Kritik

Trotz der genannten Fortschritte gibt es in jedem der bisherigen Modelle Nachteile. Das Black-Scholes Modell ist unter allen das Einzige, welches Sprünge in der zugrundeliegenden Aktie nicht zulässt. Es ist daher nur bedingt ein gutes Modell für die Wirklichkeit.

Wesentlich realitätsnäher ist der Lévy Markt. Hier kann die Aktie springen und viele Resultate lassen sich auch simulativ über Computerprogramme anschaulich illustrieren. Die von uns dazu bisher gefundene Literatur weist jedoch einige Lücken auf. So wurde ein reiner Sprungmarkt (d. h. ein Lévy Markt ohne Brown'sche Bewegung) nach unserer Kenntnis noch nicht betrachtet. Die Herleitung der Strategie über Vervollständigung ist leider nur für den Fall der Endnutzenmaximierung behandelt worden und entspricht auch keiner allgemeinen Theorie, die ohne weiteres auf jeden Markt direkt angewendet werden kann. Zwar wurde in [Kallsen] für die erwartete Konsumnutzenmaximierung eine Strategie angegeben, doch bleiben die Lösungsmethoden offen.

Bei den Semimartingalmärkten hingegen war das Vorgehen methodischer, da alle genannten Autoren den Dualitätsansatz verwendeten. Eine explizite Darstellung des optimalen Konsumprozesses bzw.

des optimalen Endvermögens gab es hier nur bedingt: als Verallgemeinerung des Lévy Marktes gibt es auch hier keine Existenzaussage für ein ungünstigstes Martingalmaß, d. h. ein (Martingal) Maß, welches eine Lösung des dualen Problems darstellt. Die Autoren behalfen sich durch eine geeignete Erweiterung der zugelassenen Martingalmaßmenge. Der Lohn dieser Erweiterung war die Garantie der Existenz einer dualen Lösung, der Preis die fehlende Explizitheit der entsprechenden Dichteprozesse. Damit konnte auch in keiner der genannten Arbeiten eine Hedgingstrategie angegeben werden.

Hauptresultate dieser Arbeit

In dieser Arbeit betrachten wir das robuste Problem der erwarteten Konsumnutzenmaximierung in Lévy Märkten. Zur Lösung verwenden wir die in Semimartingalmärkten vorgestellte Erweiterung der Martingalmethode. Allerdings vermeiden wir die Ausdehnung des zulässigen dualen Bereichs. Es gelingt uns, das duale Problem aufzustellen und die nötigen Beziehungen zum primalen Problem bzgl. dieses kleineren, dualen Bereichs nachzuweisen. Zwar können wir wie die anderen Autoren die Existenz einer dualen Lösung damit nicht garantieren, wir diskutieren allerdings, unter welchen Bedingungen diese existiert und erlangen damit den entscheidenden Vorteil, im Falle der Existenz eine explizite Formel für den optimalen Konsumprozess angeben zu können. Trotz der Unvollständigkeit des Marktes gelingt es uns, eine Investmentstrategie auch im Fall eines Sprungmodells herzuleiten, d. h. zusammengefasst:

- Unser Modell der robusten Konsumnutzenmaximierung verallgemeinert einerseits den Black-Scholes Markt auf Lévy Märkte und ist andererseits gerade noch so konkret, um explizite Lösungen (wie im Black-Scholes Markt) angeben zu können.
- Es gelingt uns, den Dualitätsansatz auf unser robustes Modell zu übertragen und damit eine Verallgemeinerung gegenüber der Arbeit von [Kallsen] nicht nur in Hinblick auf das Verständnis zu erreichen, sondern durch die robuste Formulierung der primalen Problemstellung auch die dortige Arbeit in dieser Hinsicht zu verallgemeinern.
- Durch die Wahl eines allgemeinen Maßes K im primalen Optimierungsproblem sind wir in der Lage, verschiedene Problemstellungen zu lösen, z. B. Endnutzenmaximierung, Maximierung des Konsumnutzens zu diskreten Zeitpunkten oder zeitstetige Konsumnutzenmaximierung.
- Durch die fehlende Erweiterung des zugelassenen dualen Bereichs sind wir im Gegensatz zum Semimartingalmarkt in der Lage, eine konkrete Formel für den optimalen Konsumprozess herzuleiten.
- Außerdem können wir eine Investmentstrategie berechnen und somit eine vollständige Lösung der primalen Problemstellung angeben.
- Den Sprungmarkt können wir mit einer analogen Vorgehensweise ebenfalls lösen.

1.3 Aufbau der Arbeit

Zu Beginn stellen wir in **Kapitel 2** das betrachtete Modell sowie das primale Optimierungsproblem der robusten Konsumnutzenmaximierung in Lévy Märkten vor. Nach der Einführung des dualen Optimierungsproblems geben wir in Theorem 2.32 den Zusammenhang zwischen primalem und dualem Optimalwert an. Die Existenz eines optimalen Konsumprozesses sowie dessen Darstellung folgen in Theorem 2.38 und Theorem 2.40. Bei der Darstellung setzen wir die Existenz eines ungünstigsten Martingalmaßes voraus. Diese Bedingung ist auch in Lemma 2.37 wichtig für die Existenz des optimalen Lagrangemultiplikators.

In **Kapitel 3** geben wir die Berechnung des Lagrangemultiplikators durch Theorem 3.1 an. In Theorem 3.2 weisen wir anschließend die Existenz des ungünstigsten Wahrscheinlichkeitsmaßes nach. Damit haben wir bis auf das ungünstigste Martingalmaß alle Existenzfragen geklärt. Dieser bislang offenen Frage widmen wir uns in Abschnitt 3.3 für die populärsten Fälle von Nutzenfunktionen: der logarithmischen und der Power Nutzenfunktion sowie der Exponentialfunktion. Wir versuchen, die Frage der Existenz auf einen kleineren Bereich von Girsanov-Parametern, durch die jeder Maßwechsel beschrieben wird, zu verlagern. In Theorem 3.7 zeigen wir, dass man sich bei der Suche nach den ungünstigsten Parametern auf deterministische und zeitunabhängige Girsanov-Parameter beschränken kann. Damit können wir ein konvexes Optimierungsproblem betrachten und Lösungen herzuleiten. Die Existenz von ungünstigsten Parametern wird in Theorem 3.13 für den Fall einer Sprung-Diffusions Aktie thematisiert. In Theorem 3.16 geben wir dann die vollständige Lösung des primalen Optimierungsproblems für die Power Nutzenfunktion an. Für den logarithmischen und den Exponentialfall leiten wir ebenfalls konvexe Optimierungsprobleme her, deren Lösung die in der Literatur bekannten Girsanov-Parameter darstellen. Auch hier geben wir die vollständige Lösung des primalen Optimierungsproblems an (siehe Theorem 3.26 und 3.33). Jeweils parallel leiten wir zudem analoge Aussagen für den Sprungmarkt her.

Darauf aufbauend geben wir in **Kapitel 4** mit Theorem 4.6 und Theorem 4.9 Hedgingstrategien für allgemeine Zahlungsansprüche in Lévy Märkten an. Damit können wir in den Theoremen 4.14, 4.19 und 4.20 Investmentstrategien für alle optimalen Konsumprozesse aus Kapitel 3 im Sprung-Diffusionsfall angeben. Die Investmentstrategien im Sprungmodell werden im Anschluss diskutiert. Der Nachweis, dass unsere Ergebnisse die bisherigen Resultate von [Corcuera et al] sowie [Kallsen] verallgemeinern, beschließt Kapitel 4.

Mit den Beispielen in **Kapitel 5** runden wir die Arbeit ab. Wir zeigen für konkrete Zahlenwerte den steigenden Schwierigkeitsgrad bei der Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung durch Hinzunahme von zulässigen Sprunghöhen für die zugrundeliegende Aktie. Beginnend mit einem unvollständigen Black-Scholes Markt gehen wir zu einem Poisson-Diffusions Markt mit einer festen Sprunghöhe über. Hier gelingt es uns, nicht nur die Existenz des kritischen Parameters ζ nachzuweisen, wir sind sogar in der Lage, eine explizite Formel für ζ als Lösung einer Market-Price-of-Risk-Gleichung auszurechnen. Erweitern wir den Sprungbereich auf $(-1, \infty)\backslash\{0\}$, so ist es nicht mehr möglich, geschlossene Formeln anzugeben. In diesem allgemeinen Fall gelingt es uns dann mit Maple, einen

kritischen Parameter ζ zu berechnen. Damit können wir die ungünstigsten Wahrscheinlichkeitsmaße sowie die Investmentstrategien explizit beschreiben. Abschließend vergleichen wir die Optimalwerte zwischen den Modellen mit Sprüngen und dem Black-Scholes Modell. Im letzten Abschnitt untersuchen wir u. a. den Einfluss der subjektiven Maße auf die Investmentstrategie. In Theorem 5.3 stellen wir fest, das unter dem ungünstigsten Wahrscheinlichkeitsmaß prozentual weniger in die Aktie investiert wird wie unter jedem anderen subjektiven Maß.

Kapitel 2

Robustes Optimierungsproblem

In diesem Kapitel lösen wir das primale Optimierungsproblem der robusten Konsumnutzenmaximierung in Lévy Märkten unter Verwendung der Martingalmethode. Im Vergleich zu anderen Lösungsmethoden spielt hier die Menge der äquivalenten, lokalen Martingalmaße eine wichtige Rolle im dualen Optimierungsproblem, mit dessen Hilfe eine Lösung der primalen Fragestellung angegeben werden kann. Bei einigen Beweisideen dienten die Arbeiten von [Karatzas, Žitković], [Wittmüß], [Burgert, Rüschendorf] und [Kramkov, Schachermayer] als Vorlage.

In **Abschnitt 2.1** widmen wir uns der Modellierung des Finanzmarktes und erläutern die primale Problemstellung. Der anschließende **Abschnitt 2.2** behandelt die Einführung des dualen Problems sowie den Zusammenhang zwischen primalem und dualem Optimalwert. Im letzten **Abschnitt 2.3** geben wir unter Verwendung der beiden vorangegangenen Abschnitte eine Existenzaussage sowie eine explizite Darstellung eines optimalen Konsumratenprozesses in Abhängigkeit der dualen Lösung an.

2.1 Das Modell und die primale Problemstellung

Gegeben ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P_0)$. Darauf definieren wir unseren Finanzmarkt, der aus einer Aktie S und einem Bond B besteht. Wir modellieren die Aktie und den Bond durch $S_t = S_0\mathcal{E}(L)_t, S_0 > 0$ und $B_t \equiv 1$ für alle $t \in [0,T]$ mit $T > 0$ als betrachteten, endlichen Zeithorizont. Der Lévy Prozess L besitzt unter P_0 das Tripel $(\mu_{P_0}, \sigma^2_{P_0}, \nu_{P_0})$ mit $\sigma_{P_0} \geq 0$.

Die betrachtete Filtration $(\mathcal{F}^L_t)_{t\in[0,T]}$ sei die Vervollständigung der vom Lévy Prozess L erzeugten Filtration. Der Prozess $(W_t)_{t\in[0,T]}$ beschreibt den Wiener Prozess unter P_0, mit $(\mathcal{F}^W_t)_{t\in[0,T]}$ und $(\mathcal{F}^J_t)_{t\in[0,T]}$ bezeichnen wir jeweils die von der Brown'schen Bewegung und die vom Sprunganteil J des Lévy Prozesses L erzeugte Filtration. Wir setzen $\mathcal{F} := \mathcal{F}^L_T$. Das im Folgenden betrachtete Maß $\delta(A, [0,t])$ beschreibt die Anzahl der Sprünge im Zeitintervall $[0,t]$ mit Sprunghöhen in A.

Annahme 2.1

$\int_{|x|>1} |x|\nu_{P_0}(dx) < \infty$ und $\int_{0<|x|\leq 1} |x|\nu_{P_0}(dx) < \infty$. ◇

Der folgenden Aktienkursdarstellung ist zu entnehmen, dass nur Sprünge $x \in (-1,\infty)\backslash\{0\}$ sinnvoll sind, da wir sonst negative Aktienkurse erhalten. Daher legen wir die Menge $\mathbb{R}_0$ durch $\mathbb{R}_0 := (-1,\infty)\backslash\{0\}$ fest. Wir erhalten für $(S_t)_{t\in[0,T]}$ die Darstellung:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0\mathcal{E}(L)_t \\ &= S_0 \exp\left(\mu_{P_0}t + \sigma_{P_0}W_t + \int_0^t\int_{0<|x|\leq 1} x(\delta-\nu_{P_0})(dx,ds) + \int_0^t\int_{|x|>1} x\delta(dx,ds) - \frac{1}{2}\sigma_{P_0}^2 t\right) \\ &\quad \prod_{0<s\leq t}\left(1+\int_{\mathbb{R}_0} x\delta(dx,ds)\right)\exp\left(-\int_{\mathbb{R}_0} x\delta(dx,ds)\right) \qquad (2.1) \\ &= S_0 \exp\left(\left(\mu_{P_0} - \frac{1}{2}\sigma_{P_0}^2 + \int_{|x|>1} x\nu_{P_0}(dx)\right)t + \sigma_{P_0}W_t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} x(\delta-\nu_{P_0})(dx,ds)\right) \\ &\quad \prod_{0<s\leq t}\left(1+\int_{\mathbb{R}_0} x\delta(dx,ds)\right)\exp\left(-\int_{\mathbb{R}_0} x\delta(dx,ds)\right) \end{aligned}$$

oder in Differentialschreibweise

$$dS_t = S_{t-}\left(\mu_{P_0}dt + \sigma_{P_0}dW_t + \int_{0<|x|\leq 1} x(\delta-\nu_{P_0})(dx,dt) + \int_{|x|>1} x\delta(dx,dt)\right), S_0 > 0.$$

Nach Proposition A.14 ist der Prozess S ein Martingal unter P_0 wenn $\mu_{P_0} + \int_{|x|>1} x\nu_{P_0}(dx) = 0$ und $\int_{|x|>1} |x|\nu_{P_0}(dx) < \infty$ gilt. Da eine Aktie ein im Vergleich zum Bond riskantes Papier ist, muss der Drift der Aktie echt größer dem risikolosen Zinssatz des Bonds sein, den wir hier auf 0 setzen. Daher treffen wir

Annahme 2.2

$\mu_{P_0} + \int_{|x|>1} x\nu_{P_0}(dx) > 0$. ◇

Bevor wir neben P_0 weitere Wahrscheinlichkeitsmaße P betrachten, führen wir den Begriff „äquivalent“ ein.

Definition 2.3

Gegeben seien zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P_1 und P_2 auf $(\Omega,\mathcal{F})$. Dann heißen P_1 und P_2 zueinander äquivalent (in Zeichen $P_1 \sim P_2$), wenn $\forall A \in \mathcal{F}:\ P_1(A) = 0$ gilt $P_2(A) = 0$ und umgekehrt. Ist es durch den Kontext klar, dass wir von Wahrscheinlichkeitsmaßen sprechen, so schreiben wir fortan kurz „Maße“.

In [Bingham, Kiesel] wird die folgende Eigenschaft zweier äquivalenter Maße P_1 und P_2 für Mengen $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$ gezeigt:

$$\begin{aligned} P_1 \sim P_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (P_1(A_1) = 0 \Leftrightarrow P_2(A_1) = 0) \quad \Leftrightarrow \quad (P_1(A_2) > 0 \Leftrightarrow P_2(A_2) > 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (P_1(A_3) = 1 \Leftrightarrow P_2(A_3) = 1). \end{aligned}$$

Die Menge aller betrachteten, subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaße

Wir betrachten eine Menge $\mathcal{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen, über die wir die Robustheit bzgl. der Aktienkursmodellierung in die Problemstellung einbringen. Unser vorrangiges Ziel ist die Existenz eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes $P^\star$ in dem Sinne, dass das später eingeführte robuste Problem äquivalent zum nicht robusten Problem bzgl. $P^\star$ ist. Eine natürliche Annahme in diesem Rahmen ist, dass $P^\star \in \mathcal{P}$ gilt. Dies wird durch die folgende Annahme garantiert. Dabei verstehen wir unter $\mathcal{L}^0(P_0)$ die Menge aller $\mathcal{F}_T^L$ messbaren Zufallsvariablen.

Annahme 2.4

- $\mathcal{P}$ ist konvex,
- $P \sim P_0$ für jedes $P \in \mathcal{P}$,
- die Menge $\left\{ \frac{dP}{dP_0} : P \in \mathcal{P} \right\}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{L}^0(P_0)$. ◇

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $P_0 \in \mathcal{P}$. Analog zu Annahme 2.2 für P_0 treffen wir für die restlichen Maße $P \in \mathcal{P}$ die folgende Voraussetzung.

Annahme 2.5
Es gelten für jedes $P \in \mathcal{P}$ die Ungleichungen

$$\int_{|x|>1} |x| \nu_P(dx) < \infty \quad \text{und} \quad \int_{0<|x|\leq 1} |x| \nu_P(dx) < \infty. \qquad \diamond$$

Wir modellieren die verschiedenen Ansichten $P \in \mathcal{P}$ des Anlegers so, dass er unabhängig von der Wahl seiner subjektiven Sichtweise $P \in \mathcal{P}$ einen Lévy Prozess als treibende Kraft seines Aktienkurses behält. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Girsanov-Parameter ζ_P und η_P, welche den Maßwechsel von P_0 nach P beschreiben, zeitunabhängig und deterministisch sind. Die Darstellung des Dichteprozesses eines solchen Maßes wird in der folgenden Proposition beschrieben.

Proposition 2.6
Sei L ein Lévy Prozess bzgl. P_0 mit Tripel $(\mu_{P_0}, \sigma^2_{P_0}, \nu_{P_0})$ und sei $P \sim P_0$ so, dass L unter P wieder ein Lévy Prozess ist. Dann existiert eine Borel messbare Funktion $\eta_P : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ und eine Konstante $\zeta_P \in \mathbb{R}$, mit denen das Lévy Tripel unter P wie folgt beschrieben werden kann:

- $\mu_P = \mu_{P_0} + \sigma_{P_0}^2 \zeta_P + \int_{0<|x|\leq 1} x(\eta_P(x) - 1)\nu_{P_0}(dx)$,
- $\sigma_P = \sigma_{P_0}$,
- $\nu_P(dx) = \eta_P(x)\nu_{P_0}(dx)$,
- $\int_{0<|x|\leq 1} x(\eta_P(x) - 1)\nu_{P_0}(dx) < \infty$.

Der Dichteprozess ist unter $\int_{\mathbb{R}_0} |\eta_P(x) - 1|\nu_{P_0}(dx) < \infty$ für alle $P \in \mathcal{P}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dP_0} &= \mathcal{E}\left(\sigma_{P_0}\zeta_P W_\cdot + \int_0^\cdot \int_{\mathbb{R}_0} (\eta_P(x) - 1)(\delta - \nu_{P_0})(dx, ds)\right)_T \\ &= \exp\left(\sigma_{P_0}\zeta_P W_T - \frac{1}{2}\sigma_{P_0}^2\zeta_P^2 T + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \ln \eta_P(x)\delta(dx, ds) - T\int_{\mathbb{R}_0} (\eta_P(x) - 1)\nu_{P_0}(dx)\right).\end{aligned}$$

Beweis:
Da von $P \sim P_0$ gefordert wird, dass der Prozess L wieder ein Lévy bzgl. P ist, folgt mit Korollar A.5 [Jeanblanc et al], dass die Girsanov-Parameter ζ_P und η_P, welche nach Proposition A.1 [Jeanblanc et al] existieren, deterministisch und zeitunabhängig sind. Dass man jedes solche Maß P wie oben beschrieben über eine Dichte charakterisieren kann, folgt aus Proposition 3 [Esche, Schweitzer]. Für die Umformungen von $\frac{dP}{dP_0}$ gilt:

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}\left(\sigma_{P_0}\zeta_P W_\cdot + \int_0^\cdot \int_{\mathbb{R}_0} (\eta_P(x) - 1)(\delta - \nu_{P_0})(dx, ds)\right)_T \\ = \;& \exp\left(\sigma_{P_0}\zeta_P W_T + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} (\eta_P(x) - 1)(\delta - \nu_{P_0})(dx, ds) - \frac{1}{2}\sigma_{P_0}^2\zeta_P^2 T\right) \\ & \underbrace{\prod_{0<s\leq T} \left(1 + \int_{\mathbb{R}_0} (\eta_P(x) - 1)\delta(dx, ds)\right) \cdot \exp\left(-\int_{\mathbb{R}_0} (\eta_P(x) - 1)\delta(dx, ds)\right)}_{=\exp\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \ln \eta_P(x)\delta(dx,ds)\right) \exp\left(-\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} (\eta_P(x)-1)\delta(dx,ds)\right)} \\ = \;& \exp\left(\sigma_{P_0}\zeta_P W_T - \frac{1}{2}\sigma_{P_0}^2\zeta_P^2 T + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \ln \eta_P(x)\delta(dx, ds) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} (\eta_P(x) - 1)\nu_{P_0}(dx)ds\right).\end{aligned}$$

□

Wie in der obigen Proposition zu sehen ist, ändert sich beim Übergang von P_0 nach P die Volatilität des stetigen Anteils nicht, sodass wir fortan nur noch σ schreiben.

Die Wahrscheinlichkeiten werden beim Maßwechsel von P_0 nach P nicht irgendwie verschoben, sondern alle Wahrscheinlichkeiten unter P_0 werden gleichermaßen über die Exponentialfunktion verändert. Für alle Zeitpunkte $t \in [0, T]$ wird die Dichte der Zufallsvariablen W_t (von 0 ausgehend) um $\sigma\zeta_P t$ verschoben. Die Änderung der Wahrscheinlichkeit auf den einzelnen Pfaden bringt auch im Sprungterm eine Veränderung mit sich, da sich die erwartete Anzahl an Sprüngen für jede

Sprunghöhe x um den Faktor $\eta_P(x)$ ändert. Die Sprunghöhen sowie der Verlauf aller Pfade des Aktienkurses bleiben beim Maßwechsel unverändert.

Wir zeigen nun, wie sich die Tripel aus Beispiel A.10 unter dem Maß $P \in \mathcal{P}$ verändern und was dies für die einzelnen Prozesse in ihrer Darstellung bedeutet. Dazu setzen wir die Tripel der einzelnen Prozesse in die Gleichungen von Proposition 2.6 ein und erhalten die folgenden Resultate:

Beispiel 2.7

- Brown'sche Bewegung W : das Tripel von σW unter P_0 lautet $\big(0, \sigma^2, 0\big)$ und für das Tripel von σW unter P erhalten wir $\big(\sigma^2\zeta_P, \sigma^2, 0\big)$, d. h. es gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\sigma W_t = \sigma^2 \zeta_P t + \sigma W_t^P, \tag{2.2}$$

  wobei W^P eine Brown'sche Bewegung unter P ist.

- Poisson Prozess $(N_t)_{t\in[0,T]}$ mit Intensität $\lambda_{P_0} t$: das Tripel von N unter P_0 lautet $\big(\lambda_{P_0}, 0, \lambda_{P_0}\mathbb{1}_{\{x=1\}}dx\big)$ und für das Tripel von N unter P erhalten wir $\big(\lambda_{P_0}\eta_P(1), 0, \eta_P(1)\lambda_{P_0}\mathbb{1}_{\{x=1\}}dx\big)$.

- Compound-Poisson Prozess: das Tripel von $\sum_{i=1}^N X_i$ (mit F_X als Verteilungsfunktion der unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen X_i) unter P_0 lautet $\Big(\lambda_{P_0}\int_{0<|x|\le 1} xF_X(dx), 0, \lambda_{P_0}F_X(dx)\Big)$ und für das Tripel von $\sum_{i=1}^N X_i$ unter P erhalten wir

$$\left(\lambda_{P_0}\int_{0<|x|\le 1} xF_X(dx) + \lambda_{P_0}\int_{0<|x|\le 1} x(\eta_P(x)-1)F_X(dx), 0, \eta_P(x)\lambda_{P_0}F_X(dx)\right).$$

◇

Der Aktienkurs unter einem Maß $P \in \mathcal{P}$

Mit Proposition 2.6 können wir den unter P_0 modellierten Aktienkurs wie folgt bzgl. einem beliebigen Maß $P \in \mathcal{P}$ darstellen. Wir erhalten für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\left(\mu_{P_0} t + \sigma W_t + \int_0^t\int_{0<|x|\le 1} x(\delta-\nu_{P_0})(dx,ds) + \int_0^t\int_{|x|>1} x\delta(dx,ds) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \\ &\quad \prod_{0<s\le t}\left(1+\int_{\mathbb{R}_0} x\delta(dx,ds)\right)\exp\left(-\int_{\mathbb{R}_0} x\delta(dx,ds)\right) \\ &= S_0 \exp\left(\mu_{P_0} t + \sigma W_t^P + \sigma^2\zeta_P t + \int_0^t\int_{0<|x|\le 1} x(\delta-\nu_P)(dx,ds)\right. \\ &\quad \left. + \int_0^t\int_{0<|x|\le 1} x(\nu_P-\nu_{P_0})(dx,ds) + \int_0^t\int_{|x|>1} x\delta(dx,ds) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\prod_{0<s\leq t}\Big(1+\int_{\mathbb{R}_0}x\delta(dx,ds)\Big)\exp\Big(-\int_{\mathbb{R}_0}x\delta(dx,ds)\Big)\\
=\;& S_0\exp\Big(\mu_P t+\sigma W_t^P+\int_0^t\int_{0<|x|\leq 1}x(\delta-\nu_P)(dx,ds)+\int_0^t\int_{|x|>1}x\delta(dx,ds)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\Big)\\
&\prod_{0<s\leq t}\Big(1+\int_{\mathbb{R}_0}x\delta(dx,ds)\Big)\exp\Big(-\int_{\mathbb{R}_0}x\delta(dx,ds)\Big). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Ein Vergleich zwischen (2.1) und (2.3) zeigt, dass unter dem Maß $P\in\mathcal{P}$ die Aktie S dieselbe Darstellung wie unter P_0 besitzt, nur wird μ_{P_0} durch μ_P, ν_{P_0} durch ν_P und W_t durch W_t^P ersetzt. Damit wird der Aktienkurs S unter P modelliert zu $S=S_0\mathcal{E}(L^P)$, wobei L^P ein P Lévy Prozess ist mit Tripel $\big(\mu_P,\sigma^2,\nu_P\big)$ und Wiener Prozess W_t^P.

Analog zur Annahme 2.2 betrachten wir nur solche Maße $P\in\mathcal{P}$, die die folgende Ungleichung erfüllen:

Annahme 2.8
Es gelte für jedes Maß $P\in\mathcal{P}$

$$\mu_P+\textstyle\int_{|x|>1}x\nu_P(dx)>0. \qquad \diamond$$

Strategie und Konsumprozess

- Mit dem Paar $(\alpha,\beta)=(\alpha_t,\beta_t)_{t\in[0,T]}$ beschreiben wir unsere Strategie, wobei α_t die Anzahl an gehaltenen Aktien und β_t die Anzahl an gehaltenen Bond Anteilen zur Zeit t angeben. Dabei bezeichnen wir nur solche Prozesse α als Strategie, bei denen der Prozess $(\alpha_t)_{t\in[0,T]}$ vorhersagbar (d. h. α_t ist $\mathcal{F}_{t-}^L$ messbar $\forall t\in[0,T]$) und integrierbar bzgl. S ist.

  Eine Strategie heißt selbstfinanzierend, wenn $\alpha_tS_t+\beta_t=x_0+\int_0^t\alpha_s dS_s\;\;\forall t\in[0,T],\;\;P_0$ fast sicher gilt und wird als zulässig bezeichnet, wenn darüberhinaus die Ungleichung $x_0+\int_0^t\alpha_s dS_s\geq 0\;\;\forall t\in[0,T],\;\;P_0$ fast sicher erfüllt ist. Mit $\mathcal{A}(x_0)$ bezeichnen wir die Menge aller zulässigen Strategien, d. h.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x_0)\;:=\;&\Big\{(\alpha_t)_{t\in[0,T]}:\alpha_t \text{ ist } \mathcal{F}_{t-}^L \text{ messbar für alle } t\in[0,T], \text{ selbstfinanzierend},\\
&x_0+\int_0^t\alpha_s dS_s\geq 0\quad\text{für alle } t\in[0,T] \text{ und integrierbar bzgl. } S\Big\}.
\end{aligned}$$

- Der Konsumprozess $C=(C_t)_{t\in[0,T]}$ ist ein nicht negativer, nicht fallender und adaptierter RCLL (d. h. rechtsstetig mit linksseitigen Grenzwerten) Prozess, der angibt, welchen Geldbetrag der Investor bis einschließlich dem Zeitpunkt $t\in[0,T]$ konsumiert hat. Wir werden im Folgenden nur Konsumprozesse der Form $C_t=\int_0^t c_sK(ds)$ mit einem endlichen, monoton wachsenden, positiven, diffusen Maß K auf $[0,T]$ betrachten, d. h. insgesamt

$0 < K([0,t]) < K([0,T]) < \infty \quad \forall\, 0 < t < T$. Der Vermögensprozess $V(\alpha, c)$ ist somit zur Zeit $t \in [0,T]$ gegeben durch

$$V_t(\alpha, c) := x_0 + \int_0^t \alpha_s dS_s - \int_0^t c_s K(ds)$$

und wir fordern, dass $V_T(\alpha, c) \geq 0$ ist, d. h.

$$x_0 + \int_0^T \alpha_s dS_s - \int_0^T c_s K(ds) \geq 0 \quad P_0 \text{ fast sicher.} \tag{2.4}$$

Mit $\mathcal{C}(x_0)$ bezeichnen wir die Menge aller Konsumratenprozesse $(c_t)_{t\in[0,T]}$, für die eine Strategie aus der Menge $\mathcal{A}(x_0)$ mit der Eigenschaft (2.4) existiert.

Definition 2.9

Wir bezeichnen eine Funktion $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, welche streng konkav, streng monoton wachsend, stetig differenzierbar ist und die Inada Bedingungen

$$U'(0) := \lim_{x\to 0} U'(x) = \infty \quad \text{und} \quad U'(\infty) := \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0 \tag{2.5}$$

erfüllt, als Nutzenfunktion. Wir nehmen an, dass die betrachtete Nutzenfunktion U eine asymptotische Elastizität (kurz: AE) echt kleiner 1 besitzt, d. h. es gelte

$$\text{AE}(U) := \overline{\lim_{x\to\infty}}\, x\frac{U'(x)}{U(x)} < 1.$$

Unter der Legendre Transformation von $-U(-x)$ verstehen wir die konjugierte Funktion $V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$V(y) := \sup_{x>0}(U(x) - xy).$$

Für jede Nutzenfunktion U, die (2.5) erfüllt, ist V streng konvex, monoton fallend, stetig differenzierbar und neben $V'(0) = -\infty, V'(\infty) = 0, V(0) = U(\infty), V(\infty) = U(0)$ ist auch die Gleichung

$$U(x) = \inf_{y>0}(V(y) + xy)$$

erfüllt. Die Ableitung von U ist die Inverse der negativen Ableitung von V, welche wir mit I bezeichnen, d. h.

$$I := -V' = (U')^{-1}.$$

Die Funktion I ist aufgrund der Definition von U eine Abbildung von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$.

Die primale Problemstellung

Wir untersuchen das folgende Konsumproblem: einem Investor steht zu Beginn eines Zeitabschnitts von $[0,T]$ ein Anfangskapital von $x_0 \in (0,\infty)$ zur Verfügung. Der Investor möchte nun seinen Konsum so steuern, dass der daraus resultierende, erwartete Nutzen maximal wird. Durch entsprechende Wahl des Maßes K, welches in die primale Zielfunktion mit einfließt, kann dies z. B. ein gleichmäßig über die Zeit $[0,T]$ resultierender Konsumratenprozess sein oder ein vollständiger Konsum am Ende der Laufzeit T, was dem Problem der Endnutzenmaximierung entspricht. Da sich der Investor im Unklaren bzgl. der Aktienkursentwicklung ist, hat er mehrere Vorstellungen über die Verteilung des Aktienkurses, welche wir über die Menge $\mathcal{P}$ modellieren. Als optimaler Konsumratenprozess ist ein Prozess $c \in \mathcal{C}(x_0)$ gesucht, der bzgl. des Infimums aller Maße aus der Menge $\mathcal{P}$ den erwarteten Nutzen des Konsumratenprozesses über die Zeit $[0,T]$ bzgl. dem Maß K maximiert. Unser primales Optimierungsproblem lautet daher

$$\begin{cases} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right] \to \max \\ c \in \mathcal{C}(x_0). \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit $u(x_0)$ den primalen Optimalwert und unter $u_P(x_0)$ den primalen Optimalwert für ein festes Maß $P \in \mathcal{P}$, d. h.

$$u(x_0) := \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right]$$

und $$u_P(x_0) := \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right].$$

Zudem setzen wir für alle $x_0 \in (-\infty,0]$ die Funktionen $u(x_0)$ und $u_P(x_0)$ auf $-\infty$ $\forall P \in \mathcal{P}$. Damit unser Problem wohldefiniert ist, treffen wir die folgenden Annahmen:

Annahme 2.10

(i) Die Nutzenfunktion U sei so gewählt, dass $U^-(c)$ $P \times K$ integrierbar auf $\Omega \times [0,T]$ bzgl. allen $c \in \mathcal{C}(x_0)$ und allen $P \in \mathcal{P}$ ist.

(ii) Für jedes $P \in \mathcal{P}$ gibt es ein $x_0 \in (0,\infty)$, sodass $u_P(x_0) < \infty$ gilt. ◇

2.2 Das duale Optimierungsproblem

Um einen optimalen Konsumratenprozess für das primale Optimierungsproblem zu erhalten, führen wir das duale Optimierungsproblem mit Hilfe der Menge aller äquivalenten, lokalen Martingalmaße ein. Neben den zugehörigen Dichteprozessen werden auch Umformungen diskutiert, die im Laufenden benötigt werden. Mit einer Diskussion über die Eigenschaften und den Zusammenhang von primalem und dualem Optimalwert beenden wir diesen Abschnitt.

2.2.1 Martingalmaße

Wir führen hier die Menge aller P_0 äquivalenten, lokalen Martingalmaße ein, die durch das Modell gegeben sind.

Definition 2.11
Wir nennen ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q mit den beiden Eigenschaften

(i) Q ist äquivalent zu P_0,

(ii) $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ist ein lokales Q Martingal,

ein P_0 äquivalentes, lokales Martingalmaß. Mit $\mathcal{M}^{P_0}$ bezeichnen wir die Menge aller Maße mit den Eigenschaften (i) und (ii). Für diese Menge treffen wir die folgende Annahme:

Annahme 2.12
Es gelte $\mathcal{M}^{P_0} \neq \emptyset$. ◇

Nach Proposition 2 [Esche, Schweitzer] besitzt jedes P_0 absolutstetige Maß Q Girsanov-Parameter, die das neue Tripel eines Semimartingals unter Q beschreiben. Im Falle der Menge $\mathcal{P}$ haben wir mit Proposition 2.6 die Parameter- und Dichtetransformation für Maße angegeben, unter denen der Lévy Prozess wieder ein Lévy Prozess ist. Ein allgemeineres Resultat für die Martingalmaße, bei denen die Lévy Eigenschaft auch unter dem neuen Maß verloren gehen kann, geben die folgenden beiden Propositionen an. Im Fall $Q \sim P_0$ können wir die Dichte eines Lévy Prozesses wie folgt mit stochastischen Prozessen ζ_Q und η_Q beschreiben:

Proposition 2.13
Sei L ein P_0 Lévy Prozess und $Q \sim P_0$ mit den Girsanov-Parametern (ζ_Q, η_Q). Dann ist die Radon-Nikodym Ableitung von Q bzgl. P_0 gegeben durch

$$\frac{dQ}{dP_0} = \mathcal{E}\bigg(\int_0^\cdot \zeta_Q(s)\sigma dW_s + \int_0^\cdot \int_{\mathbb{R}_0} (\eta_Q(x,s)-1)(\delta - \nu_{P_0})(dx,ds)\bigg)_T.$$

Beweis:
siehe Proposition A.3 [Jeanblanc et al]. □

Analog zu (2.2) gilt für die Brown'sche Bewegung unter $Q \in \mathcal{M}^{P_0}$ für alle $t \in [0,T]$

$$\sigma W_t^Q = \sigma W_t - \int_0^t \sigma^2 \zeta_Q(s) ds.$$

Bemerkung 2.14
Da wir ausschließlich äquivalente Maße betrachten, gilt $\eta_P > 0$ und $\eta_Q > 0$ $P_0 \times \lambda$ als auch ν_{P_0} fast sicher, wobei λ das Lebesgue Maß auf $[0,T]$ bezeichnet, siehe Remark A.2 [Jeanblanc et al].

Wir geben nun Bedingungen für die Prozesse ζ_Q und η_Q an, damit das Maß Q ein Martingalmaß ist.

Proposition 2.15
Sei L ein P_0 Lévy Prozess mit Lévy Tripel $\left(\mu_{P_0}, \sigma^2, \nu_{P_0}(dx)\right)$ und sei $Q \sim P_0$. Dann gilt

$$Q \in \mathcal{M}^{P_0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} |x(\eta_Q(x,s)-1)|\nu_{P_0}(dx)ds < \infty \quad P_0 \text{ fast sicher} \quad \text{und} \\ \bullet \quad \mu_{P_0} + \int_{|x|>1} x\nu_{P_0}(dx) + \sigma^2\zeta_Q(s) + \int_{\mathbb{R}_0} x(\eta_Q(x,s)-1)\nu_{P_0}(dx) = 0 \\ \quad P_0 \times \lambda \text{ fast sicher.} \end{cases}.$$

Beweis:
siehe Proposition A.7 [Jeanblanc et al] oder Proposition 2 [Esche, Schweizer]. □

Die äquivalenten, lokalen Martingalmaße sind durch das Marktmodell gegeben und können nicht wie die Menge $\mathcal{P}$ eingeschränkt werden. Daher ist es bei $\mathcal{M}^{P_0}$ auch möglich, dass die zugehörigen Girsanov-Parameter ζ_Q und η_Q stochastisch und zeitabhängig sind. In der folgenden Definition geben wir die Ableitung $\frac{dQ}{dP}$ mit $P \in \mathcal{P}$ und $Q \in \mathcal{M}^{P_0}$ über die eingeführten Ableitungen $\frac{dP}{dP_0}$ sowie $\frac{dQ}{dP_0}$ an.

Definition 2.16
Sei $P \in \mathcal{P}$ und $Q \in \mathcal{M}^{P_0}$. Dann definieren wir ein Martingalmaß $Q \in \mathcal{M}^P$ über $Q(A) := \int_A \frac{dQ}{dP} dP = \mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\mathbb{1}_A\right]$ mit $A \in \mathcal{F}_T^L$, wobei für die Radon-Nikodym Ableitung $\frac{dQ}{dP}$ gilt

$$\frac{dQ}{dP} := \frac{dQ/dP_0}{dP/dP_0}.$$

Bemerkung 2.17
Nach [Kramkov, Schachermayer] (1999) ist die Menge $\mathcal{M}^P$ der P äquivalenten, lokalen Martingalmaße abgeschlossen bzgl. abzählbaren Konvexkombinationen.

Wir fassen in der anschließenden Menge $\mathcal{M}$ alle zulässigen Paare an Maßen zusammen, d. h.

$$\mathcal{M} := \left\{(P,Q) : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{M}^P\right\}.$$

Definition 2.18
Seien M_1, M_2 zwei äquivalente Maße mit $\mathcal{F}_T^L$ messbarer Radon-Nikodym Ableitung $\frac{dM_1}{dM_2}$, so definieren wir den Dichteprozess von $\frac{dM_1}{dM_2}$ zur Zeit $t \in [0,T]$ durch

$$Z_t^{M_1,M_2} := \mathbb{E}_{M_2}\left[\frac{dM_1}{dM_2}\middle|\mathcal{F}_t^L\right] \quad \text{und es gilt} \quad Z_T^{M_1,M_2} = \frac{dM_1}{dM_2}.$$

Lemma 2.19
Es gilt für alle $(P,Q) \in \mathcal{M}$

(i) $\mathbb{E}_Q\left[\frac{1}{Z_t^{Q,P}}\right] = 1$ für alle $t \in [0,T]$.

(ii) $\frac{1}{Z_t^{Q,P}} = Z_t^{P,Q}$ und damit $\mathbb{E}_Q\left[Z_t^{P,Q}\right] = 1$ für alle $t \in [0,T]$.

(iii) $\frac{Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P,P_0}} = Z_t^{Q,P}$ für alle $t \in [0,T]$.

Beweis:

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q\left[\frac{1}{Z_t^{Q,P}}\right] &= \mathbb{E}_Q\left[\frac{1}{\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}\right] = \mathbb{E}_P\left[\frac{dQ/dP}{\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}\right] = \mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ/dP}{\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\frac{1}{\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]\right] = 1.\end{aligned}$$

(ii) Es ist zu zeigen, dass $Z_t^{P,Q} Z_t^{Q,P} = 1$ für alle $t \in [0,T]$ gilt. Mit Lemma 5.2.2 [Shreve] ergibt sich

$$\begin{aligned}Z_t^{P,Q} Z_t^{Q,P} &= \mathbb{E}_Q\left[\frac{dP}{dQ}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right] = \frac{\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\frac{dP}{dQ}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}{\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right] \\ &= 1 \quad \text{für alle } t \in [0,T].\end{aligned}$$

Zudem erhalten wir die Gültigkeit von $\mathbb{E}_Q\left[Z_t^{P,Q}\right] = \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{E}_Q\left[\frac{dP}{dQ}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]\right] = \mathbb{E}_Q\left[\frac{dP}{dQ}\right] = 1$ für alle $t \in [0,T]$.

(iii) Mit Lemma 5.2.2 [Shreve] folgt

- $\mathbb{E}_{P_0}\left[\frac{dQ}{dP_0}\middle|\mathcal{F}_t^L\right] = \frac{\mathbb{E}_P\left[\frac{dP_0}{dP}\frac{dQ}{dP_0}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}{\mathbb{E}_P\left[\frac{dP_0}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]} = \frac{\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}{\mathbb{E}_P\left[\frac{dP_0}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}$.
- $\mathbb{E}_{P_0}\left[\frac{dP}{dP_0}\middle|\mathcal{F}_t^L\right] = \frac{\mathbb{E}_P\left[\frac{dP_0}{dP}\frac{dP}{dP_0}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}{\mathbb{E}_P\left[\frac{dP_0}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]} = \frac{1}{\mathbb{E}_P\left[\frac{dP_0}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}$.

Damit gilt für alle $t \in [0,T], (P,Q) \in \mathcal{M}$

$$\frac{Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P,P_0}} = \frac{\mathbb{E}_{P_0}\left[\frac{dQ}{dP_0}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}{\mathbb{E}_{P_0}\left[\frac{dP}{dP_0}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]} = \frac{\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}{\mathbb{E}_P\left[\frac{dP_0}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]}\mathbb{E}_P\left[\frac{dP_0}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right] = \mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_t^L\right] = Z_t^{Q,P}.$$

□

2.2.2 Duales Optimierungsproblem

Wir sind nun in der Lage, das duale Hilfsproblem herzuleiten und aufzustellen. Dazu benötigen wir noch die anschließende Charakterisierung der zugelassenen Konsumprozesse. Die Hauptaufgabe besteht nach der Definition der dualen Problemstellung dann in der Verifikation der benötigten Beziehungen zwischen dualem und primalem Optimalwert.

Proposition 2.20
Sei $C = (C_t)_{t\in[0,T]}$ mit $C_t := \int_0^t c_s K(ds)$ ein nicht fallender, positiver, rechtsstetiger und adaptierter Prozess.

(i) Es gilt für $P \in \mathcal{P}$ und $x_0 \in (0,\infty)$ beliebig

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right] \leq x_0 \quad \forall Q \in \mathcal{M}^P \\ \Leftrightarrow \quad & \exists\, \alpha \in \mathcal{A}(x_0) : \; x_0 + \int_0^T \alpha_t dS_t - \int_0^T c_t K(dt) \geq 0 \quad P \text{ fast sicher.} \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} & \sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right] \leq x_0 \quad P \in \mathcal{P} \\ \Leftrightarrow \quad & \sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right] \leq x_0 \quad \forall P \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Beweis:

(i) Sei $P \in \mathcal{P}$ beliebig und C ein nicht fallender, rechtsstetiger und adaptierter Prozess mit $C_0 = 0, C_t = \int_0^t c_s K(ds)$ und $\mathbb{E}_P[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)] \leq x_0 \quad \forall Q \in \mathcal{M}^P$. Da $t \mapsto C_{t-}$ einen linksseitig stetigen Prozess mit existierenden, rechtsseitigen Grenzwerten darstellt, ist nach Theorem 17 [Protter] das stochastische Integral $\int_0^t C_{s-} dZ_s^{Q,P}$, $0 \leq t \leq T$ ein lokales Martingal. Somit können wir eine nicht fallende Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart finden, dass $\int_0^{\cdot\wedge\tau_n} C_{s-} dZ_s^{Q,P}$ gleichgradig integrierbare Martingale für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind mit $P(\tau_n = T) \to 1$ für $n \to \infty$.

Nach Satz 11.4 [Bauer], der Produktintegration sowie

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P\left[Z_{\tau_n}^{Q,P} C_{\tau_n}\right] &= \mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP}\middle|\mathcal{F}_{\tau_n}^L\right] C_{\tau_n}\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP} C_{\tau_n}\middle|\mathcal{F}_{\tau_n}^L\right]\right] = \mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP} C_{\tau_n}\right] = \mathbb{E}_Q\left[C_{\tau_n}\right] \end{aligned}$$

erhalten wir die Ungleichungskette

$$x_0 \;\geq\; \mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P} dC_t\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P\left[\int_0^{\tau_n} Z_t^{Q,P} dC_t\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P\left[\int_0^{\tau_n} Z_{t-}^{Q,P} dC_t + \sum_{t\le\tau_n} \Delta Z_t^{Q,P} \Delta C_t\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P\left[Z_{\tau_n}^{Q,P} C_{\tau_n} - \int_0^{\tau_n} C_{t-} dZ_t^{Q,P}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_Q[C_{\tau_n}] = \mathbb{E}_Q[C_T] \quad \text{für jedes } Q \in \mathcal{M}^P.
\end{aligned}
$$

Sei $R_t := \operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_Q\left[C_T \middle| \mathcal{F}_t^L\right]$, $0 \le t \le T$. Nach dem Beweis von Lemma 1.2 [Kirch] ist der Prozess R ein Supermartingal für jedes $Q \in \mathcal{M}^P$ mit einer RCLL Modifikation, welche wir im Folgenden betrachten. Zudem ist R nach unten durch 0 beschränkt und für $t = 0$ gilt weiter

$$R_0 := \operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_Q\left[C_T \middle| \mathcal{F}_0^L\right] \le x_0.$$

Mit Annahme 2.12 wenden wir Theorem 1 [Föllmer, Kabanov] bzgl. R an und können die Existenz eines vorhersagbaren, S integrierbaren Prozesses $(\alpha_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{A}(R_0)$ folgern, der aufgrund der Beschränktheit von R auch zulässig ist, d. h. da $\mathcal{A}(R_0) \subseteq \mathcal{A}(x_0)$ gilt $\alpha \in \mathcal{A}(x_0)$. Des Weiteren erhalten wir die Existenz eines nicht fallenden Prozesses F mit $F_0 = 0$ derart, dass $R_t = R_0 + \int_0^t \alpha_s dS_s - F_t$ gilt. Zudem haben wir wegen der Monotonie von C die Ungleichung $x_0 + \int_0^t \alpha_s dS_s - F_t \ge R_0 + \int_0^t \alpha_s dS_s - F_t = R_t \ge C_t$ nach Definition von R_t, sodass $x_0 + \int_0^T \alpha_s dS_s - C_T \ge F_T \ge F_0 = 0$ gilt.

Für die Rückrichtung nehmen wir die Existenz eines $\alpha \in \mathcal{A}(x_0)$ an mit $x_0 + \int_0^T \alpha_t dS_t - \int_0^T c_t K(dt) \ge 0$ und folgern mit Fubini

$$x_0 \ge \mathbb{E}_Q\left[x_0 + \int_0^T \alpha_s dS_s\right] \ge \mathbb{E}_Q\left[\int_0^T c_t K(dt)\right] = \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right] \quad \forall Q \in \mathcal{M}^P,$$

da $\left(x_0 + \int_0^t \alpha_s dS_s\right)_{t\in[0,T]}$ nach Definition von α ein Supermartingal bzgl. allen $Q \in \mathcal{M}^P$ darstellt.

(ii) Sei $P_1 \in \mathcal{P}, C = (C_t)_{t\in[0,T]}$ mit $C_t := \int_0^t c_s K(ds)$ ein nicht fallender, rechtsstetiger, adaptierter Prozess und es gelte die folgende Ungleichung

$$\sup_{Q\in\mathcal{M}^{P_1}} \mathbb{E}_{P_1}\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P_1} K(dt)\right] \le x_0.$$

Der Prozess cZ^{Q,P_1} ist also nach Voraussetzung für jedes $Q \in \mathcal{M}^{P_1}$ integrierbar bzgl. $P_1 \times K$ und wir erhalten nach Fubini für ein beliebiges $P_2 \in \mathcal{P}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P_1}\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P_1} K(dt)\right] &= \int_0^T \mathbb{E}_{P_1}\left[c_t Z_t^{Q,P_1}\right] K(dt) \\
&= \int_0^T \underbrace{\mathbb{E}_{P_2}\left[Z_T^{P_1,P_2} c_t Z_t^{Q,P_1}\right]}_{=\mathbb{E}_{P_2}\left[\mathbb{E}_{P_2}\left[Z_T^{P_1,P_2} c_t Z_t^{Q,P_1} \middle| \mathcal{F}_t^L\right]\right]} K(dt)
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^T \mathbb{E}_{P_2}\left[c_t Z_t^{Q,P_1} \mathbb{E}_{P_2}\left[Z_T^{P_1,P_2}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]\right] K(dt)$$
$$= \mathbb{E}_{P_2}\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P_1} Z_t^{P_1,P_2} K(dt)\right]. \tag{2.6}$$

Mit Lemma 2.19 (ii) und (iii) gilt

$$x_0 \geq \sup_{Q\in\mathcal{M}^{P_1}} \mathbb{E}_{P_1}\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P_1} K(dt)\right] \overset{(2.6)}{=} \sup_{Q\in\mathcal{M}^{P_1}} \mathbb{E}_{P_2}\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P_1} Z_t^{P_1,P_2} K(dt)\right]$$
$$= \sup_{Q\in\mathcal{M}^{P_2}} \mathbb{E}_{P_2}\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P_2} K(dt)\right].$$

Findet der Investor bzgl. seiner subjektiven Einschätzung P_1 eine Superhedgingstrategie für einen Konsumprozess, so findet er auch bzgl. jeder anderen Einschätzung P_2 eine Superhedgingstrategie bzgl. desselben Konsumprozesses. Dies bedeutet, dass die Menge $\mathcal{C}(x_0)$ für alle $P \in \mathcal{P}$ gleich ist. □

Lemma 2.21

Sei $(P,Q) \in \mathcal{M}$ und $cZ^{Q,P}$ integrierbar auf $\Omega \times [0,T]$ bzgl. $P \times K$. Dann gilt

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right] = \mathbb{E}_Q\left[\int_0^T c_t K(dt)\right].$$

Beweis:

Wir erhalten

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right] = \int_0^T \mathbb{E}_P\left[c_t Z_t^{Q,P}\right] K(dt) = \int_0^T \mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_P\left[c_t Z_T^{Q,P}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]\right] K(dt)$$
$$= \int_0^T \mathbb{E}_Q[c_t] K(dt) = \mathbb{E}_Q\left[\int_0^T c_t K(dt)\right].$$

□

Speziell angewendet auf Konsumratenprozesse erhalten wir die anschließende Bemerkung.

Bemerkung 2.22 (Spezialfall: Konsumratenprozess)

(i) Wenn $c \in \mathcal{C}(x_0)$ gilt, erhalten wir nach Proposition 2.20 (i) die Ungleichung $\mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right] \leq x_0$ für alle $Q \in \mathcal{M}^P$ und damit nach Lemma 2.21

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right] = \mathbb{E}_Q\left[\int_0^T c_t K(dt)\right].$$

(ii) Seien $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ und $c \in \mathcal{C}(x_0)$. Mit (2.6) folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{P_2}\left[Z_T^{P_1,P_2}\int_0^T c_t Z_t^{Q,P_1}K(dt)\right] &= \mathbb{E}_{P_1}\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P_1}K(dt)\right] \\ &= \mathbb{E}_{P_2}\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P_1}Z_t^{P_1,P_2}K(dt)\right].\end{aligned}$$

Damit können wir nun das duale Optimierungsproblem aufstellen. Für beliebiges $(P,Q) \in \mathcal{M}, y \in (0,\infty)$ und $c \in \mathcal{C}(x_0)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right] &\leq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right] + y\left(x_0 - \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P}K(dt)\right]\right) \\ &= \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \left(U(c_t) - yc_t Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0 y \\ &\leq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0 y. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Nach der Verifikation der anschließenden, dualen Problemformulierung im kommenden Unterabschnitt werden wir dann in der Lage sein, im letzten Abschnitt eine explizite Lösung des primalen Optimierungsproblems in Abhängigkeit der dualen Lösung anzugeben.

Definition 2.23

Das duale Optimierungsproblem ist gegeben durch

$$\begin{cases} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] \to \min \\ (P,Q) \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit $v(y)$ den dualen Optimalwert und mit $v_P(y)$ den dualen Optimalwert für ein festes Maß $P \in \mathcal{P}$, d. h.

$$\begin{aligned} v(y) &:= \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] \\ \text{und} \quad v_P(y) &:= \inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right]. \end{aligned}$$

Zudem setzen wir für alle $y \in (-\infty, 0]$ die Funktionen $v(y) := +\infty$ und $v_P(y) := +\infty$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

Bemerkung 2.24

Nach Lemma A.4 [Karatzas, Žitković] erhalten wir einerseits mit Proposition 2.36 die Gültigkeit von

$$v(y) \leq v_P(y) < \infty \quad \forall y \in (0,\infty), \forall P \in \mathcal{P},$$

und andererseits für die Abschätzung nach unten

$$\begin{aligned} v(y) &= \int_0^T K(dt) \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)\frac{K(dt)}{\int_0^T K(dt)}\right] \\ &\geq \int_0^T K(dt) \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} V\left(\frac{1}{\int_0^T K(dt)}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T yZ_t^{Q,P}K(dt)\right]\right) \\ &\geq V(y)\int_0^T K(dt) > -\infty \quad \forall y\in(0,\infty), \end{aligned}$$

d. h. zusammengefasst für alle $y\in(0,\infty)$ und alle $P\in\mathcal{P}$

$$v(y)<\infty, \quad v_P(y)<\infty, \quad v(y)>-\infty, \quad v_P(y)>-\infty.$$

Wir definieren die Bedeutung der Maße $Q_P, P^\star, Q^\star, Q_0$ sowie die Bezeichnungen der zugehörigen Girsanov-Parameter und betonen dabei, dass die jeweiligen Maße vom Lagrangemultiplikator $y\in(0,\infty)$ abhängen können. Daher wird im Folgenden immer auf den zugehörigen Lagrangemultiplikator verwiesen.

Definition 2.25
Die im Anschluss vorgestellten Lösungen $Q_P, Q^\star, Q_0$ werden im Folgenden kurz als ungünstigste Martingalmaße, $P^\star$ als ungünstigstes, subjektives Maß, bezeichnet. Dasselbe gilt für die Parameter (ζ,η), die diese Maße festlegen.

- Das Maß $Q_P\in\mathcal{M}^P$ beschreibt bzgl. einem festen $P\in\mathcal{P}$ das Martingalmaß, für das der Optimalwert $v_P(y)$ angenommen wird, d. h.

  $$v_P(y)=\inf_{Q\in\mathcal{M}^P}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right]=\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q_P,P}\right)K(dt)\right].$$

  Die zugehörigen Parameter werden mit (ζ_{Q_P},η_{Q_P}) bezeichnet.

- Unter $P^\star\in\mathcal{P}$ verstehen wir das Maß aus der Menge $\mathcal{P}$ mit

  $$\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right]=\inf_{Q\in\mathcal{M}^{P^\star}}\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P^\star}\right)K(dt)\right],$$

  d. h. $v(y)=v_{P^\star}(y)$. Die zugehörigen Parameter werden mit $(\zeta_{P^\star},\eta_{P^\star})$ bezeichnet. Mit dem zuvor eingeführten Maß $Q_P\in\mathcal{M}^P$ ist die Definition von $P^\star\in\mathcal{P}$ gleichbedeutend zu der Aussage, dass $P^\star\in\mathcal{P}$ die folgende Gleichung erfüllt:

  $$v(y)=\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q_{P^\star},P^\star}\right)K(dt)\right].$$

- Mit $Q^\star \in \mathcal{M}^{P^\star}$ bezeichnen wir das Martingalmaß, welches den dualen Optimalwert $v_{P^\star}(y)$ bzgl. $P^\star \in \mathcal{P}$ erreicht, d. h. $Q^\star := Q_{P^\star}$. Die zugehörigen Parameter lauten $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}) := (\zeta_{Q_{P^\star}}, \eta_{Q_{P^\star}})$.

- Unter Q_0 verstehen wir das Martingalmaß aus der Menge $\mathcal{M}^{P_0}$, welches bei festem Maß $P \in \mathcal{P}$ den dualen Zielfunktionswert bzgl. allen Maßen $Q \in \mathcal{M}^{P_0}$ minimiert, d. h.

$$v_P(y) = \inf_{Q \in \mathcal{M}^{P_0}} \mathbb{E}_P \left[\int_0^T V\left(y \frac{Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P,P_0}} \right) K(dt) \right] = \mathbb{E}_P \left[\int_0^T V\left(y \frac{Z_t^{Q_0,P_0}}{Z_t^{P,P_0}} \right) K(dt) \right].$$

  Die zugehörigen Parameter lauten $(\zeta_{Q_0}, \eta_{Q_0})$.

Bemerkung 2.26
Die Girsanov-Parameter ζ und η hängen grundsätzlich von zwei Maßen ab, die wir als Indizes an diese Parameter anfügen. Bei der Notation verwenden wir aus zwei Gründen nur einen tiefgestellten Buchstaben:

(i) der zweite Buchstabe ist P_0, d. h. für alle $P \in \mathcal{P}$ gilt $\zeta_P := \zeta_{P,P_0}$, für alle $Q \in \mathcal{M}^{P_0}$ gilt $\zeta_Q := \zeta_{Q,P_0}$, analog für η.

(ii) der Parameter beschreibt ein ungünstigstes Maß, d. h. $\zeta_{Q_P} := \zeta_{Q_P,P}$ oder $\zeta_{Q^\star} := \zeta_{Q^\star,P^\star}$, analog für η.

Lemma 2.27
Sei $(P,Q) \in \mathcal{M}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}_P \left[\int_0^T U\left(I\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) \right) K(dt) \right] = \mathbb{E}_P \left[\int_0^T V\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) K(dt) \right] + x_0 y_{Q,P}$$

mit $y_{Q,P}$ als Lösung von $\mathbb{E}_P \left[\int_0^T I\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) Z_t^{Q,P} K(dt) \right] = x_0$.

Beweis:
Nach Definition von V gilt $V(y) = U(I(y)) - yI(y)$ und somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P \left[\int_0^T V\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) K(dt) \right] + x_0 y_{Q,P} \;&=\; \mathbb{E}_P \left[\int_0^T U\left(I\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) \right) K(dt) \right] \\
&\quad - y_{Q,P} \underbrace{\mathbb{E}_P \left[\int_0^T Z_t^{Q,P} I\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) K(dt) \right]}_{=x_0} + x_0 y_{Q,P} \\
&=\; \mathbb{E}_P \left[\int_0^T U\left(I\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) \right) K(dt) \right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Sei $y^\star$ die Minimumstelle von $v(y) + x_0 y$ und $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ die duale Lösung bzgl. $y^\star$. Mit Theorem 3.1 (ii) und (iv) sehen wir später, dass $y^\star = y_{Q^\star, P^\star}$ gilt.

Proposition 2.28
Sei $\inf_{y>0}(v(y) + x_0 y) = v(y^\star) + x_0 y^\star$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ löst das duale Problem bzgl. $y^\star$.

(ii) $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ löst

$$\begin{cases} \mathbb{E}_P \left[\int_0^T U\left(I\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) \right) K(dt) \right] \to \min \\ (P, Q) \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

Beweis:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Es gelte $\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P \left[\int_0^T V\left(y^\star Z_t^{Q,P} \right) K(dt) \right] = \mathbb{E}_{P^\star} \left[\int_0^T V\left(y^\star Z_t^{Q^\star, P^\star} \right) K(dt) \right]$ und $\inf_{y>0}(v(y) + x_0 y) = v(y^\star) + x_0 y^\star$, d. h.

$$\begin{aligned} \inf_{y>0}(v(y) + x_0 y) &= \inf_{y>0} \left(\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P \left[\int_0^T V\left(y Z_t^{Q,P} \right) K(dt) \right] + x_0 y \right) \\ &= \mathbb{E}_{P^\star} \left[\int_0^T V\left(y^\star Z_t^{Q^\star, P^\star} \right) K(dt) \right] + x_0 y^\star. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Damit erhalten wir nach Definition von $y^\star$ und Lemma 2.27

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{P^\star} \left[\int_0^T U\left(I\left(y_{Q^\star,P^\star} Z_t^{Q^\star,P^\star} \right) \right) K(dt) \right] \\ = \; & \mathbb{E}_{P^\star} \left[\int_0^T V\left(y_{Q^\star,P^\star} Z_t^{Q^\star,P^\star} \right) K(dt) \right] + x_0 y_{Q^\star,P^\star} \\ \overset{(2.8)}{=} \; & \inf_{y>0} \left(\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P \left[\int_0^T V\left(y Z_t^{Q,P} \right) K(dt) \right] + x_0 y \right) \\ = \; & \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \inf_{y>0} \left(\mathbb{E}_P \left[\int_0^T V\left(y Z_t^{Q,P} \right) K(dt) \right] + x_0 y \right) \\ = \; & \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \left(\mathbb{E}_P \left[\int_0^T V\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) K(dt) \right] + x_0 y_{Q,P} \right) \\ = \; & \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P \left[\int_0^T U\left(I\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) \right) K(dt) \right]. \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Um Verwechslungen mit der Notation der dualen Lösung zu vermeiden, bezeichnen wir mit $(P', Q') \in \mathcal{M}$ die optimale Lösung von (ii), d. h. es gilt

$$\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P \left[\int_0^T U\left(I\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P} \right) \right) K(dt) \right] = \mathbb{E}_{P'} \left[\int_0^T U\left(I\left(y_{Q',P'} Z_t^{Q',P'} \right) \right) K(dt) \right].$$

Zu zeigen ist

- $\inf_{y>0}(v(y)+x_0y) = v(y_{Q',P'}) + x_0y_{Q',P'}$ und
- $\mathbb{E}_{P'}\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'}Z_t^{Q',P'}\right)K(dt)\right] = \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'}Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right].$

Mit Lemma 2.27 erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{P'}\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'}Z_t^{Q',P'}\right)K(dt)\right] + x_0y_{Q',P'} \\
= \;& \mathbb{E}_{P'}\left[\int_0^T U\left(I\left(y_{Q',P'}Z_t^{Q',P'}\right)\right)K(dt)\right] \\
= \;& \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U\left(I\left(y_{Q,P}Z_t^{Q,P}\right)\right)K(dt)\right] \\
= \;& \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q,P}Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0y_{Q,P}\right). \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Da einerseits

$$\begin{aligned}
(2.9) \;&=\; \mathbb{E}_{P'}\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'}Z_t^{Q',P'}\right)K(dt)\right] + x_0y_{Q',P'} \\
&\geq\; \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'}Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0y_{Q',P'}\right)
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
(2.9) \;&=\; \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\inf_{y>0}\left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0y\right) \\
&=\; \inf_{y>0}\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0y\right) \\
&\leq\; \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'}Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0y_{Q',P'}\right)
\end{aligned}$$

gilt, erhalten wir

$$(2.9) = \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'}Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0y_{Q',P'}\right) \qquad (2.10)$$

und somit die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}
\inf_{y>0}(v(y)+x_0y) \;&=\; \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\inf_{y>0}\left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0y\right) \\
&=\; \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q,P}Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0y_{Q,P}\right) \\
&\overset{(2.10)}{=}\; \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}}\left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'}Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] + x_0y_{Q',P'}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'} Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] + x_0 y_{Q',P'} \\
&= v(y_{Q',P'}) + x_0 y_{Q',P'}.
\end{aligned}
$$

Die zweite Aussage erhalten wir durch

$$
\begin{aligned}
&\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'} Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] + x_0 y_{Q',P'} \\
\overset{(2.10)}{=}\ &\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q,P} Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] + x_0 y_{Q,P}\right) \\
\overset{(2.9)}{=}\ &\mathbb{E}_{P'}\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'} Z_t^{Q',P'}\right) K(dt)\right] + x_0 y_{Q',P'},
\end{aligned}
$$

d. h.

$$
\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'} Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] = \mathbb{E}_{P'}\left[\int_0^T V\left(y_{Q',P'} Z_t^{Q',P'}\right) K(dt)\right].
$$

□

Anhand dieser letzten Aussage können wir später mit Hilfe von Theorem 2.40 sehr schön die Bedeutung des Adjektivs „ungünstig“ interpretieren, siehe Bemerkung 2.41.

2.2.3 Zusammenhang von primalem und dualem Optimalwert

Für alle $P \in \mathcal{P}, y \in (0,\infty)$ und $\epsilon \in (0,\infty)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
v(y+\epsilon) &= \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left((y+\epsilon) Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] \\
&\leq \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] = v(y),
\end{aligned}
$$

d. h. aufgrund der monoton fallenden Funktion V sind auch die Optimalwerte v_P und v monoton fallend.

Mit dem anschließenden Theorem gelingt es uns, in Theorem 2.32 die Dualitätsbeziehungen zu verifizieren, welche notwendig sind, um einen Zusammenhang zwischen einer Lösung des primalen und dualen Problems herzustellen.

Theorem 2.29
Es gilt für alle $x_0 \in (0,\infty)$

$$
u(x_0) = \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t) K(dt)\right] = \inf_{P\in\mathcal{P}} \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t) K(dt)\right].
$$

Beweis:
Sei $x_0 \in (0,\infty)$ beliebig aber fest und $\epsilon \in (0,1)$ so, dass $\tilde{\epsilon} := \epsilon \int_0^T K(dt) \in (0,1)$. Dann gilt

$$u(x_0+1) \geq u(x_0+\tilde{\epsilon}) \geq \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U(c_t+\epsilon)K(dt)\Big], \tag{2.11}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Tatsache folgt, dass für beliebige $P \in \mathcal{P}$ und für alle $c \in \mathcal{C}(x_0)$

$$\begin{aligned}
&\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T (c_t+\epsilon) Z_t^{Q,P} K(dt)\Big] \\
= &\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \Big(\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\Big] + \epsilon \underbrace{\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T Z_t^{Q,P} K(dt)\Big]}_{\leq \int_0^T K(dt)}\Big) \\
\leq &\underbrace{\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\Big]}_{\leq x_0} + \tilde{\epsilon} \\
\leq &\; x_0 + \tilde{\epsilon}
\end{aligned}$$

ist und daher für die Summe $c+\epsilon \in \mathcal{C}(x_0+\tilde{\epsilon})$ gilt. Des Weiteren ist $U(\cdot+\epsilon)$ nach unten beschränkt und deswegen ist

- $Z_T^{P,P_0} \mapsto \mathbb{E}_{P_0}\left[Z_T^{P,P_0}\int_0^T U(c_t+\epsilon)K(dt)\right]$ ein schwach unten halbstetiges, affines Funktional; nach Lemma 3.2 [Schied,Wu] ist $\left\{Z_T^{P,P_0} : P\in\mathcal{P}\right\}$ schwach kompakt und konvex;
- $c \mapsto \mathbb{E}_{P_0}\left[Z_T^{P,P_0}\int_0^T U(c_t+\epsilon)K(dt)\right]$ ein konkaves Funktional; des Weiteren ist $\mathcal{C}(x_0)$ konvex, denn für $0<\kappa<1$ und $c^0, c^1 \in \mathcal{C}(x_0)$ erhalten wir mit Proposition 2.20 für beliebiges $P \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
&\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \left(\kappa c_t^0 + (1-\kappa)c_t^1\right) Z_t^{Q,P} K(dt)\Big] \\
= &\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \Big(\kappa\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T c_t^0 Z_t^{Q,P} K(dt)\Big] + (1-\kappa)\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T c_t^1 Z_t^{Q,P} K(dt)\Big]\Big) \\
\leq &\; \kappa \sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T c_t^0 Z_t^{Q,P} K(dt)\Big] + (1-\kappa) \sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T c_t^1 Z_t^{Q,P} K(dt)\Big] \\
\leq &\; \kappa x_0 + (1-\kappa)x_0 = x_0.
\end{aligned}$$

Somit sind die Voraussetzungen von Theorem 7 [Aubin, Ekeland] erfüllt und wir erhalten wir folgende Gleichung:

$$\inf_{P\in\mathcal{P}} \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}_{P_0}\Big[Z_T^{P,P_0}\int_0^T U(c_t+\epsilon)K(dt)\Big] \quad = \quad \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{P_0}\Big[Z_T^{P,P_0}\int_0^T U(c_t+\epsilon)K(dt)\Big]$$

$$\overset{(2.11)}{\leq} \quad u(x_0 + \tilde{\epsilon}).$$

Mit Lemma 36.1 [Rockafellar] und der Monotonie von U erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x_0+\tilde{\epsilon}) &\geq \inf_{P\in\mathcal{P}} \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}_{P_0}\left[Z_T^{P,P_0}\int_0^T U(c_t+\epsilon)K(dt)\right] \\ &\geq \inf_{P\in\mathcal{P}} \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}_{P_0}\left[Z_T^{P,P_0}\int_0^T U(c_t)K(dt)\right] \\ &\geq \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{P_0}\left[Z_T^{P,P_0}\int_0^T U(c_t)K(dt)\right] = u(x_0). \end{aligned}$$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt $\tilde{\epsilon} \to 0$ und aufgrund der Stetigkeit von u (siehe Lemma 2.30 (iii)) ergibt sich die Behauptung. □

Lemma 2.30 (Eigenschaften des primalen Optimalwertes)
Für jedes $y \in (0,\infty)$ existiere eine duale Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$. Dann gilt für alle $x_0 \in (0,\infty)$ und $P \in \mathcal{P}$

(i) $|u_P(x_0)| < \infty$ und $|u(x_0)| < \infty$.

(ii) $u(x_0)$ und $u_P(x_0)$ sind streng konkav und monoton wachsend.

(iii) $u_P(x_0)$ und $u(x_0)$ sind stetig.

Beweis:

(i) Sei $P \in \mathcal{P}$ beliebig. Da jede konkave Funktion als Infimum von linearen, sie umschließenden Geraden geschrieben werden kann und jede Gerade auf $(0,\infty)$ nur endliche Werte annimmt, können wir nach (ii) $u_P(x_0)$ an jeder Stelle als Infimum linearer Funktionen schreiben und nach oben durch eine Gerade abschätzen. Aufgrund der Annahme 2.10 (ii) ist diese Gerade auch nicht $\equiv \infty$, woraus die Endlichkeit der Gerade für alle $x_0 \in (0,\infty)$ und somit auch die Endlichkeit von $u_P(x_0)$ für alle $x_0 \in (0,\infty)$ folgt. Für die Abschätzung nach unten betrachten wir für beliebiges $x_0 > 0$ den Konsumratenprozess $c_t := \frac{x_0}{\int_0^T K(dt)} \quad \forall t \in [0,T]$. Dann gilt $c \in \mathcal{C}(x_0)$ und damit

$$u_P(x_0) \geq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U\left(\frac{x_0}{\int_0^T K(dt)}\right)K(dt)\right] = U\left(\frac{x_0}{\int_0^T K(dt)}\right)\int_0^T K(dt) > -\infty,$$

d. h. insgesamt $|u_P(x_0)| < \infty$ für alle $x_0 \in (0,\infty)$ und alle $P \in \mathcal{P}$. Die zweite Aussage folgt aus $\inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P[\int_0^T U(c_t)K(dt)] \leq \mathbb{E}_P[\int_0^T U(c_t)K(dt)] \quad \forall P \in \mathcal{P}, \forall c \in \mathcal{C}(x_0)$ und der daraus resultierenden Ungleichung

$$u(x_0) \quad \leq \quad \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right] = u_P(x_0) < \infty \quad \forall x_0 \in (0,\infty) \text{ und } P \in \mathcal{P} \text{ beliebig.}$$

Die andere Ungleichung ergibt sich analog zum ersten Fall, wiederum mit $c_t := \frac{x_0}{\int_0^T K(dt)}$ $\forall t \in [0,T]$.

(ii) Wir zeigen zunächst die folgenden beiden Aussagen:

- Mit $\kappa \in (0,1)$ und $x_1, x_2 > 0$ gilt $\kappa\mathcal{C}(x_1) + (1-\kappa)\mathcal{C}(x_2) \subseteq \mathcal{C}(\kappa x_1 + (1-\kappa)x_2)$.
- $u(x_0)$ ist konkav und monoton wachsend.

Für beliebiges $c^1 \in \mathcal{C}(x_1)$ und $c^2 \in \mathcal{C}(x_2)$ ist zu zeigen, dass $\kappa c^1 + (1-\kappa)c^2 \in \mathcal{C}(\kappa x_1 + (1-\kappa)x_2)$. Nach Proposition 2.20 ist dies äquivalent zu der Aussage $\mathbb{E}_P\left[\int_0^T (\kappa c_t^1 + (1-\kappa)c_t^2) Z_t^{Q,P} K(dt)\right] \leq \kappa x_1 + (1-\kappa)x_2 \quad \forall Q \in \mathcal{M}^P$. Es gilt für jedes $P \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
&\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \left(\kappa c_t^1 + (1-\kappa)c_t^2\right) Z_t^{Q,P} K(dt)\right] \\
\leq\ & \kappa \underbrace{\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t^1 Z_t^{Q,P} K(dt)\right]}_{\leq x_1} + (1-\kappa) \underbrace{\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t^2 Z_t^{Q,P} K(dt)\right]}_{\leq x_2} \\
\leq\ & \kappa x_1 + (1-\kappa)x_2.
\end{aligned}$$

Damit können wir nun die Konkavität zeigen. Wir erhalten mit $\kappa \in (0,1)$ und $x_1, x_2 > 0$

$$\begin{aligned}
& u(\kappa x_1 + (1-\kappa)x_2) \\
=\ & \sup_{c\in\mathcal{C}(\kappa x_1 + (1-\kappa)x_2)} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t) K(dt)\right] \\
\geq\ & \sup_{(c^1,c^2)\in\mathcal{C}(x_1)\times\mathcal{C}(x_2)} \inf_{P\in\mathcal{P}} \underbrace{\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U\left(\kappa c_t^1 + (1-\kappa)c_t^2\right) K(dt)\right]}_{\geq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \left(\kappa U(c_t^1) + (1-\kappa)U(c_t^2)\right) K(dt)\right]} \\
\geq\ & \sup_{(c^1,c^2)\in\mathcal{C}(x_1)\times\mathcal{C}(x_2)} \underbrace{\inf_{P\in\mathcal{P}} \left(\kappa \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U\left(c_t^1\right) K(dt)\right] + (1-\kappa)\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U\left(c_t^2\right) K(dt)\right]\right)}_{\geq \kappa \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U\left(c_t^1\right) K(dt)\right] + (1-\kappa)\inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U\left(c_t^2\right) K(dt)\right]} \\
\geq\ & \kappa \underbrace{\sup_{c^1\in\mathcal{C}(x_1)} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t^1) K(dt)\right]}_{=u(x_1)} + (1-\kappa) \underbrace{\sup_{c^2\in\mathcal{C}(x_2)} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t^2) K(dt)\right]}_{=u(x_2)} \\
=\ & \kappa u(x_1) + (1-\kappa)u(x_2).
\end{aligned}$$

Dass $u(x_0)$ monoton wachsend ist, folgt mit Proposition 2.20 aus der Tatsache, dass für alle $\epsilon > 0$ und beliebigem $P \in \mathcal{P}$ gilt

$$c \in \mathcal{C}(x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right] \leq x_0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\Big] \leq x_0+\epsilon \\ \Leftrightarrow \quad & c\in\mathcal{C}(x_0+\epsilon). \end{aligned}$$

Zeigen wir nun die strenge Konkavität. Mit den bisherigen Annahmen folgt analog zu Lemma 4.1 [Schied, Wu] für jedes $x_0\in(0,\infty)$ die Existenz eines Maßes $\tilde{P}\in\mathcal{P}$ mit

$$\inf_{P\in\mathcal{P}} \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U(c_t)K(dt)\Big] = \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T U(c_t)K(dt)\Big]. \tag{2.12}$$

Für $0<x_1<x_2$ seien $c^1\in\mathcal{C}(x_1)$ und $c^2\in\mathcal{C}(x_2)$ die primalen Lösungen des nicht robusten Problems bzgl. $\tilde{P}$ mit Anfangskapital x_1 bzw. x_2 und $\tilde{P}\in\mathcal{P}$ als Lösung von (2.12) bzgl. $\kappa x_1+(1-\kappa)x_2$. Wir zeigen zunächst, dass die beiden Prozesse c^1 und c^2 nicht $\tilde{P}\times K$ fast sicher gleich sind, d. h. es existiert eine Nichtnullmenge $A\subseteq\Omega\times[0,T]$, auf der $c^1\neq c^2$ richtig ist.

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} &\sup_{c\in\mathcal{C}(x_i)} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T U(c_t)K(dt)\Big] = \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T U\left(c_t^i\right)K(dt)\Big], \quad i=1,2 \quad \text{und} \\ &\sup_{Q\in\mathcal{M}^{\tilde{P}}} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T c_t^i Z_t^{Q,\tilde{P}} K(dt)\Big] = x_i, \quad i=1,2. \end{aligned}$$

Die Gültigkeit der zweiten Gleichung erhalten wir über Widerspruch zur Optimalität:

Angenommen, es gelte für $\kappa\in(0,1)$, $i=1,2$

$$\sup_{Q\in\mathcal{M}^{\tilde{P}}} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T c_t^i Z_t^{Q,\tilde{P}} K(dt)\Big] = \kappa x_i < x_i.$$

Mit $\epsilon := \frac{(1-\kappa)x_i}{\int_0^T K(dt)}$ folgt dann

$$\begin{aligned} & \sup_{Q\in\mathcal{M}^{\tilde{P}}} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T \left(c_t^i+\epsilon\right) Z_t^{Q,\tilde{P}} K(dt)\Big] \\ = \quad & \sup_{Q\in\mathcal{M}^{\tilde{P}}} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T c_t^i Z_t^{Q,\tilde{P}} K(dt)\Big] + \frac{(1-\kappa)x_i}{\int_0^T K(dt)} \int_0^T K(dt) \\ = \quad & \kappa x_i + (1-\kappa)x_i = x_i, \end{aligned}$$

d. h. $c^i+\epsilon\in\mathcal{C}(x_i)$, $c^i+\epsilon > c^i$ $\tilde{P}\times K$ fast sicher und daher

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T U\left(c_t^i\right)K(dt)\Big] < \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T U\left(c_t^i+\epsilon\right)K(dt)\Big],$$

also ein Widerspruch zur Optimalität von c^i.

Für $0<x_1<x_2$ nehmen wir an, es gelte $c^1=c^2$ $\tilde{P}\times K$ fast sicher. Dann ergibt sich

$$\sup_{Q\in\mathcal{M}^{\tilde{P}}} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T c_t^1 Z_t^{Q,\tilde{P}} K(dt)\Big] \quad = \quad x_1 < x_2 = \sup_{Q\in\mathcal{M}^{\tilde{P}}} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T c_t^2 Z_t^{Q,\tilde{P}} K(dt)\Big]$$

$$= \sup_{Q \in \mathcal{M}^{\tilde{P}}} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T c_t^1 Z_t^{Q,\tilde{P}} K(dt)\Big].$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch, d. h. es muss eine Nichtnullmenge $A \subset \Omega \times [0,T]$ geben mit $c_t^1(\omega) \neq c_t^2(\omega)$ für alle $(t,\omega) \in A$. Nun zeigen wir die strenge Konkavität wie folgt

$$\begin{aligned}
& u\left(\kappa x_1 + (1-\kappa)x_2\right) \\
= & \inf_{P \in \mathcal{P}} \sup_{c \in \mathcal{C}(\kappa x_1 + (1-\kappa)x_2)} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U(c_t) K(dt)\Big] \\
= & \sup_{c \in \mathcal{C}(\kappa x_1 + (1-\kappa)x_2)} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T U(c_t) K(dt)\Big] \geq \mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T U\left(\kappa c_t^1 + (1-\kappa)c_t^2\right) K(dt)\Big] \\
= & \int_A U\left(\kappa c_t^1 + (1-\kappa)c_t^2\right)\Big(d\tilde{P} \times K(dt)\Big) + \int_{\{\Omega\times[0,T]\}\setminus A} U\left(\kappa c_t^1 + (1-\kappa)c_t^2\right)\Big(d\tilde{P} \times K(dt)\Big) \\
> & \kappa \int_{\Omega\times[0,T]} U\left(c_t^1\right)\Big(d\tilde{P} \times K(dt)\Big) + (1-\kappa)\int_{\Omega\times[0,T]} U\left(c_t^2\right)\Big(d\tilde{P} \times K(dt)\Big) \\
= & \kappa \underbrace{\mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T U\left(c_t^1\right) K(dt)\Big]}_{=\sup_{c\in\mathcal{C}(x_1)} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right]} + (1-\kappa) \underbrace{\mathbb{E}_{\tilde{P}}\Big[\int_0^T U(c_t^2)K(dt)\Big]}_{=\sup_{c\in\mathcal{C}(x_2)} \mathbb{E}_{\tilde{P}}\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right]} \\
\geq & \kappa u(x_1) + (1-\kappa)u(x_2),
\end{aligned}$$

da $\tilde{P} \in \mathcal{P}$ gilt.

(iii) Beide Funktionen $u_P(x_0)$ und $u(x_0)$ nehmen für alle $x_0 \in (0,\infty)$ nach (i) Werte aus $(-\infty,\infty)$ an und $-u_P(x_0)$ als auch $-u(x_0)$ sind nach (ii) konvexe Funktionen auf $(0,\infty)$ mit $-u_P(x_0) < \infty$ sowie $-u(x_0) < \infty$ für alle $P \in \mathcal{P}$. Daraus folgt die Stetigkeit von $u_P(x_0)$ und $u(x_0)$ auf $(0,\infty)$ für alle $P \in \mathcal{P}$. □

Lemma 2.31 (Eigenschaften des dualen Optimalwertes)
Für jedes $y \in (0,\infty)$ existiere eine duale Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$. Dann gilt für alle $y \in (0,\infty)$ und $P \in \mathcal{P}$

(i) $|v_P(y)| < \infty$ und $|v(y)| < \infty$.

(ii) $v(y)$ und $v_P(y)$ sind streng konvex und monoton fallend.

(iii) $v_P(y)$ und $v(y)$ sind stetig.

Beweis:

(i) Die Behauptung ergibt sich direkt aus Bemerkung 2.24.

(ii) Für den Beweis verwenden wir die folgende, äquivalente Formulierung des dualen Problems:

$$v(y) = \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}_0} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P,P_0}}\right)K(dt)\right]$$

mit $\mathcal{M}_0 := \left\{(P,Q) : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{M}^{P_0}\right\}$. Seien $y_1, y_2 \in (0,\infty)$ beliebig aber fest und $(P_1,Q_1) := \left(P^{\star,(1)}, Q_0^{(1)}\right) \in \mathcal{M}_0$ eine duale Lösung bzgl. y_1, $(P_2,Q_2) := \left(P^{\star,(2)}, Q_0^{(2)}\right) \in \mathcal{M}_0$ eine duale Lösung bzgl. y_2. Es gilt

$$\kappa y_1 Z^{Q_1,P_0} + (1-\kappa)y_2 Z^{Q_2,P_0} \in \left\{\left(\kappa y_1 + (1-\kappa)y_2\right) Z^{Q,P_0} : Q \in \mathcal{M}^{P_0}\right\}, \tag{2.13}$$

denn mit $Q := \frac{\kappa y_1}{\kappa y_1+(1-\kappa)y_2}Q_1 + \frac{(1-\kappa)y_2}{\kappa y_1+(1-\kappa)y_2}Q_2$ folgt aufgrund der Konvexität der Martingalmaßmenge einerseits $Q \in \mathcal{M}^{P_0}$ und andererseits

$$\begin{aligned}
&\left(\kappa y_1 + (1-\kappa)y_2\right) Z^{Q,P_0}\\
=\;& \left(\kappa y_1 + (1-\kappa)y_2\right)\left(\frac{\kappa y_1}{\kappa y_1+(1-\kappa)y_2}Z^{Q_1,P_0} + \frac{(1-\kappa)y_2}{\kappa y_1+(1-\kappa)y_2}Z^{Q_2,P_0}\right)\\
=\;& \kappa y_1 Z^{Q_1,P_0} + (1-\kappa)y_2 Z^{Q_2,P_0}.
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (4.4) aus [Schied] erhalten wir mit $\tilde{P} := \kappa P_1 + (1-\kappa)P_2 \in \mathcal{P}$ und Lemma A.1 [Karatzas, Žitković]

$$\begin{aligned}
&v\left(\kappa y_1 + (1-\kappa)y_2\right)\\
=\;& \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}_0} \mathbb{E}_{P_0}\left[\int_0^T Z_t^{P,P_0} V\left(\left(\kappa y_1 + (1-\kappa)y_2\right)\frac{Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P,P_0}}\right)K(dt)\right]\\
\leq\;& \inf_{Q\in\mathcal{M}^{P_0}} \mathbb{E}_{P_0}\left[\int_0^T Z_t^{\tilde{P},P_0} V\left(\frac{\left(\kappa y_1 + (1-\kappa)y_2\right)Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{\tilde{P},P_0}}\right)K(dt)\right]\\
\overset{(2.13)}{\leq}\;& \mathbb{E}_{P_0}\Bigg[\int_0^T \underbrace{Z_t^{\tilde{P},P_0} V\left(\frac{\kappa y_1 Z_t^{Q_1,P_0} + (1-\kappa)y_2 Z_t^{Q_2,P_0}}{Z_t^{\tilde{P},P_0}}\right)}_{\leq \kappa Z_t^{P_1,P_0} V\left(\frac{y_1 Z_t^{Q_1,P_0}}{Z_t^{P_1,P_0}}\right) + (1-\kappa) Z_t^{P_2,P_0} V\left(\frac{y_2 Z_t^{Q_2,P_0}}{Z_t^{P_2,P_0}}\right)} K(dt)\Bigg]\\
\leq\;& \mathbb{E}_{P_0}\left[\int_0^T \kappa Z_t^{P_1,P_0} V\left(y_1 Z_t^{Q_1,P_1}\right) + (1-\kappa) Z_t^{P_2,P_0} V\left(y_2 Z_t^{Q_2,P_2}\right) K(dt)\right]\\
=\;& \kappa \underbrace{\mathbb{E}_{P_1}\left[\int_0^T V\left(y_1 Z_t^{Q_1,P_1}\right)K(dt)\right]}_{=v(y_1)} + (1-\kappa)\underbrace{\mathbb{E}_{P_2}\left[\int_0^T V\left(y_2 Z_t^{Q_2,P_2}\right)K(dt)\right]}_{=v(y_2)}\\
=\;& \kappa v(y_1) + (1-\kappa)v(y_2).
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun die strenge Konvexität über Widerspruch. Nach Bemerkung 2.24 ist $v(y) < \infty$ für alle $y \in (0,\infty)$. Damit existiert für jedes $y \in (0,\infty)$ nach Theorem 3.2 ein Maß $P^\star \in \mathcal{P}$ mit $v_{P^\star}(y) = v(y)$. Angenommen, $v(y)$ ist nicht streng konvex, d. h. es existieren

$0 < y_1 < y_2 : v(y_1) = v(y_2)$. Sei wie zuvor $(P_1, Q_1) \in \mathcal{M}_0$ eine Lösung des dualen Problems bzgl. y_1. Mit $Q \in \mathcal{M}^{P_0}$ beliebig definieren wir $\tilde{Q} := \frac{y_1}{y_2} Q_1 + \left(1 - \frac{y_1}{y_2}\right) Q \in \mathcal{M}^{P_0}$ und es gilt

$$y_2 Z^{\tilde{Q},P_0} \in \left\{ y_2 Z^{Q,P_0} : Q \in \mathcal{M}^{P_0} \right\}. \tag{2.14}$$

Des Weiteren erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} y_2 Z^{\tilde{Q},P_0} &= y_2 \left(\frac{y_1}{y_2} Z^{Q_1,P_0} + \left(1 - \frac{y_1}{y_2}\right) Z^{Q,P_0} \right) \\ &= y_1 Z^{Q_1,P_0} + (y_2 - y_1) Z^{Q,P_0} > y_1 Z^{Q_1,P_0} \quad P_0 \times K \text{ fast sicher,} \end{aligned} \tag{2.15}$$

da $y_2 > y_1$ und $Z^{Q,P_0} > 0$ ist. Damit folgt aufgrund der strengen Konvexität von V

$$\begin{aligned} v(y_2) &= \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}_0} \mathbb{E}_{P_0} \left[\int_0^T Z_t^{P,P_0} V\left(y_2 \frac{Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P,P_0}} \right) K(dt) \right] \\ &\leq \inf_{Q\in\mathcal{M}^{P_0}} \mathbb{E}_{P_0} \left[\int_0^T Z_t^{P_1,P_0} V\left(\frac{y_2 Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P_1,P_0}} \right) K(dt) \right] \\ &\overset{(2.14)}{\leq} \mathbb{E}_{P_0} \left[\int_0^T Z_t^{P_1,P_0} V\left(y_2 \frac{Z_t^{\tilde{Q},P_0}}{Z_t^{P_1,P_0}} \right) K(dt) \right] \\ &\overset{(2.15)}{<} \mathbb{E}_{P_0} \left[\int_0^T Z_t^{P_1,P_0} V\left(y_1 \frac{Z_t^{Q_1,P_0}}{Z_t^{P_1,P_0}} \right) K(dt) \right] \\ &= v(y_1) = v(y_2) \quad \text{nach Annahme,} \end{aligned}$$

d. h. $v(y_2) < v(y_2)$, also ein Widerspruch. Damit ist $v(y)$ auf $(0, \infty)$ streng konvex.

(iii) Beide Funktionen $v_P(y)$ und $v(y)$ nehmen für alle $y \in (0, \infty)$ nach (i) endliche Werte an. Da $v_P(y)$ und $v(y)$ nach (ii) konvexe Funktionen auf $(0, \infty)$ sind, folgt die Stetigkeit von $v_P(y)$ und $v(y)$ auf $(0, \infty)$. □

Kommen wir nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts. Hier gelingt es uns, die gewünschten Dualitätsbeziehungen zwischen primalem und dualem Optimalwert zu beweisen, ohne den dualen Bereich vergrößern zu müssen. Mit diesen Beziehungen sind wir in der Lage, den optimalen Konsumprozess in Theorem 2.40 explizit anzugeben.

Theorem 2.32 (Dualitätstheorem)
Für alle $x_0 \in (0,\infty)$, $y \in (0,\infty)$ und $P \in \mathcal{P}$ gelten die folgenden Aussagen:

(i) $v_P(y) = \sup_{x_0>0}(u_P(x_0) - x_0 y)$.

(ii) $u_P(x_0) = \inf_{y>0}(v_P(y) + x_0 y)$.

(iii) $u(x_0) = \inf_{y>0}(v(y) + x_0 y)$.

(iv) $v(y) = \sup_{x_0>0}(u(x_0) - x_0 y)$.

Für den Beweis benötigen wir eine Reihe von Hilfsaussagen. Die Wichtigste unter ihnen ist Proposition 2.36. Dazu benötigen wir den Begriff der Fatou Konvergenz. Ebenso die in [Karatzas, Žitković] eingeführte Menge $\mathcal{D}$ spielt hier eine zentrale Rolle.

Definition 2.33
Sei $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht negativer, $\mathcal{F}^L$ adaptierter Prozesse mit RCLL Pfaden. Dann konvergiert die Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Fatou Sinne gegen einen $\mathcal{F}^L$ adaptierten Prozess X mit RCLL Pfaden, wenn es eine abzählbare, dichte Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq [0,T]$ gibt, sodass gilt

$$X_t = \underline{\lim}_{s\downarrow t, s\in\mathcal{T}} \underline{\lim}_{n\to\infty} X_s^n = \overline{\lim}_{s\downarrow t, s\in\mathcal{T}} \overline{\lim}_{n\to\infty} X_s^n \quad \text{fast sicher und für jedes } t \in [0,T].$$

Im Fall $t = T$ muss $X_T = \lim_{n\to\infty} X_T^n$ fast sicher gelten.

Wir führen die folgenden Mengen ein:

- $\mathcal{M}^S =$ die Menge aller P_0 äquivalenten Supermartingalmaße,
- $\mathcal{D} =$ der $\sigma((\mathcal{L}^\infty)^*, \mathcal{L}^\infty)$ Abschluss von $\mathcal{M}^S$ in $(\mathcal{L}^\infty)^*$ (der topologisch duale Raum von $\mathcal{L}^\infty$).

Weitere Details sowie Eigenschaften dieser Mengen sind der Arbeit von [Karatzas, Žitković] zu entnehmen. Mit $\mathcal{Y}$ definieren wir die Menge der zugehörigen Dichteprozesse Z und Y, d. h.

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{M}^P} := \left\{Z^{Q,P} : Q \in \mathcal{M}^P\right\}, \quad \mathcal{Y}^{\mathcal{M}^S} := \left\{Y^{Q,P_0} : Q \in \mathcal{M}^S\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{Y}^{\mathcal{D}} := \left\{Y^{R,P_0} : R \in \mathcal{D}\right\}.$$

Es gelten die Inklusionen $\mathcal{Y}^{\mathcal{M}^P} \subseteq \mathcal{Y}^{\mathcal{M}^S} \subseteq \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$.

Lemma 2.34
Es gilt für $P \in \mathcal{P}$ beliebig und $c \in \mathcal{C}(x_0)$

$$\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_s Z_s^{Q,P} K(ds)\right] = \sup_{R\in\mathcal{D}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_s \frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}} K(ds)\right].$$

Beweis:
Wir beweisen über Widerspruch. Aus Lemma 1.2 [Kirch] folgt mit $C_T := \int_0^T c_s K(ds)$

$$\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_s Z_s^{Q,P} K(ds)\right] = \sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[C_T Z_T^{Q,P}\right] \leq x_0 \quad \Leftrightarrow \quad c \in \mathcal{C}(x_0)$$

und nach Proposition 2.13 [Karatzas, Žitković]

$$\sup_{R\in\mathcal{D}} \mathbb{E}_{P_0}\left[\int_0^T c_s Y_s^{R,P_0} K(ds)\right] \leq x_0 \quad \Leftrightarrow \quad c \in \mathcal{C}(x_0),$$

was mit $P \in \mathcal{P}$ beliebig, äquivalent ist zu

$$\sup_{R\in\mathcal{D}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_s \frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}} K(ds)\right] \leq x_0 \quad \Leftrightarrow \quad c \in \mathcal{C}(x_0).$$

Sei $P \in \mathcal{P}$ und $x_0 > 0$ beliebig aber fest. Angenommen, es existiert ein $c \in \mathcal{C}(x_0)$ mit

$$\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_s Z_s^{Q,P} K(ds)\right] < \sup_{R\in\mathcal{D}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_s \frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}} K(ds)\right], \tag{2.16}$$

dann ist $\sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_s Z_s^{Q,P} K(ds)\right] = \kappa x_0$ für ein $\kappa \in (0,1]$ und somit $c \in \mathcal{C}(\kappa x_0)$ nach [Kirch]. Aufgrund unserer Annahme gilt andererseits nach [Karatzas, Žitković] $\kappa x_0 < \sup_{R\in\mathcal{D}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_s \frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}} K(ds)\right]$, also $c \notin \mathcal{C}(\kappa x_0)$. Da sich somit beide Aussagen widersprechen, muss die Annahme (2.16) falsch gewesen sein. □

Lemma 2.35

(i) Sei $Y^{R,P_0} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ beliebig gegeben. Dann existiert für jedes $P \in \mathcal{P}$ eine Folge $\left(\frac{Z^{Q_n,P}}{Z^{P_0,P}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{M}^{P_0}}$ mit $\frac{Z^{Q_n,P}}{Z^{P_0,P}} \to Y^{R,P_0}$ $P_0 \times K$ fast sicher.

(ii) Sei $\left(\frac{Z^{Q_n,P}}{Z^{P_0,P}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{M}^{P_0}}$ mit $\frac{Z^{Q_n,P}}{Z^{P_0,P}} \to Y^{R,P_0} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ $P_0 \times K$ fast sicher für $n \to \infty$. Dann gilt mit $k \geq 1$ für $V^k(y) := \sup_{0<x\leq k} (U(x) - xy)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V^k\left(yZ_s^{Q_n,P}\right) K(ds)\right] = \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V^k\left(y\frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right]$$

für alle $P \in \mathcal{P}$ und $y \in (0,\infty)$.

Beweis:

(i) Sei Y^{R,P_0} ein Prozess aus $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$. Wegen Lemma 2.34 ist $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ die kleinste Fatou abgeschlossene und fork konvexe (zugehörige Definition, siehe [Karatzas, Žitković]) Menge, die $\mathcal{Y}^{\mathcal{M}^S}$ enthält (siehe Theoreme 2.9 und 2.10 sowie Gleichung (2.10) von [Karatzas, Žitković]). Nach Korollar 2.11 [Karatzas, Žitković] existiert für alle Y^{R,P_0} eine Folge von Martingalprozessen aus $\mathcal{Y}^{\mathcal{M}^S}$, welche im Fatou Sinne gegen Y^{R,P_0} konvergieren. Da es sich um Martingalprozesse handelt, folgern wir, dass diese Prozesse in $\mathcal{Y}^{\mathcal{M}^{P_0}}$ liegen, d. h.

$$\frac{Z^{Q_n,P}}{Z^{P_0,P}} \xrightarrow{\text{Fatou}} Y^{R,P_0} \quad \text{mit} \quad Z^{Q_n,P} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{M}^P}.$$

Des Weiteren ist $\frac{Z^{Q_n,P}}{Z^{P_0,P}}$ auch eine Folge aus $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ und wir nehmen analog zu [Karatzas, Žitković] Seite 1834 an, dass die Folge wegen des Komlós Theorems $P_0 \times K$ fast sicher konvergiert mit K als normalisiertem Lebesgue Maß, da $\mathcal{M}^P$ und damit auch $\mathcal{Y}^{\mathcal{M}^P}$ konvex sind und wir zu einer Konvexkombination übergehen können. Somit ergibt sich

$$\frac{Z^{Q_n,P}}{Z^{P_0,P}} \longrightarrow Y^{R,P_0} \quad P_0 \times K \text{ fast sicher.}$$

(ii) Sei $P \in \mathcal{P}$, $y \in (0,\infty)$ beliebig aber fest. Da V^k nach oben durch $U(k)$ beschränkt ist, folgt die Behauptung analog zum Beweis von Proposition 3.2 [Kramkov, Schachermayer] (1999) aus Lemma A.1 [Karatzas, Žitković] mit der gleichgradige Integrierbarkeit von $\left\{V^k\left(yZ^{Q_n,P}\right) : Q_n \in \mathcal{M}^P\right\}$. □

Proposition 2.36

Es gilt für alle $P \in \mathcal{P}$ und alle $y \in (0,\infty)$

$$\inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_s^{Q,P}\right) K(ds)\right] = \inf_{R\in\mathcal{D}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right].$$

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$ beliebig aber fest. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $V^n(y) := \sup_{0<x\leq n}(U(x) - xy), \quad y \in (0,\infty)$ konvex und monoton wachsend gegen V für $n \to \infty$. Wir wählen für den Rest des Beweises ein $P \in \mathcal{P}$ und ein $y \in (0,\infty)$ beliebig aber fest. Da nach Lemma A.4 [Karatzas, Žitković]

$$\inf_{R\in\mathcal{D}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] < \infty$$

gilt, existiert nach Proposition A.2 [Karatzas, Žitković] eine Lösung $R^\star \in \mathcal{D}$:

$$\inf_{R\in\mathcal{D}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] = \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] < \infty. \tag{2.17}$$

Analog zum Beweis von Lemma A.4 [Karatzas, Žitković] folgt für $\kappa \in (0,1)$:

$$\inf_{R\in\mathcal{D}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(\kappa y \frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] \leq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(\kappa y \frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] < \infty.$$

Für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ finden wir also eine Zahl $n(k) \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V^{n(k)}\left(\frac{y}{2^k}\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] \geq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(\frac{y}{2^k}\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] - \frac{\epsilon}{2^k}. \tag{2.18}$$

Wir führen die Funktionen

$$W^0 := V^{n(1)}, \ldots, W^k := V^{n(k+1)} - V^{n(k)}, \ldots$$

ein, welche für $k \geq 1$ konvex und monoton fallend sind. Da $W^k \leq V - V^{n(k)}$ für alle $k \geq 1$ ist, erhalten wir aus (2.18) die Ungleichung

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^T W^k\left(\frac{y}{2^k}\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] \leq \frac{\epsilon}{2^k}, \quad k \geq 1. \tag{2.19}$$

Nach Lemma 2.35 (i) existiert eine Folge $(Z^{Q_n,P}) \in \mathcal{Y}^{\mathcal{M}^P}$ mit $Z^{Q_n,P} \to \frac{Y^{R^\star,P_0}}{Z^{P,P_0}}$ $P \times K$ fast sicher, wobei $Y^{R^\star,P_0} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$, nach Definition von $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ und $R^\star \in \mathcal{D}$. Mit Lemma 2.35 (ii) folgt

$$\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T V^k\left(yZ_s^{Q_n,P}\right) K(ds)\Big] \to \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V^k\left(y\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] \quad \text{für } n \to \infty,$$

d. h. wir können eine Folge $(Z^{Q_n,P})_{n\in\mathbb{N}}$ so konstruieren, dass für $n \geq k \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T W^k\left(\frac{y}{2^k}Z_s^{Q_n,P}\right) K(ds)\Big] \leq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T W^k\left(\frac{y}{2^k}\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] + \frac{\epsilon}{2^k}. \tag{2.20}$$

Wir definieren für alle $s \in [0,T]$ die Folge $y\tilde{Z}_s^{Q,P} := \sum_{k=1}^\infty \frac{y}{2^k} Z_s^{Q_k,P}$ und nach Bemerkung 2.17 gilt $Q \in \mathcal{M}^P$ und $\tilde{Z}^{Q,P} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{M}^P}$. Man erhält für $k \geq 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T W^k\left(y\tilde{Z}_s^{Q,P}\right) K(ds)\Big] &\overset{W^k \searrow}{\leq} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T W^k\left(\sum_{i=1}^\infty \frac{y}{2^{i+k}} Z_s^{Q_{k+i},P}\right) K(ds)\right] \\
&\overset{W^k \text{ konvex}}{\leq} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i}\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T W^k\left(\frac{y}{2^k}Z_s^{Q_{k+i},P}\right) K(ds)\Big] \\
&\overset{(2.20)}{\leq} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T W^k\left(\frac{y}{2^k}\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right) K(ds)\right] + \frac{\epsilon}{2^k}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Damit folgt schlussendlich

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\tilde{Z}_s^{Q,P}\right)K(ds)\right] \\
= &\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T W^k\left(y\tilde{Z}_s^{Q,P}\right)K(ds)\right] \overset{(2.21)}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T W^k\left(\frac{y}{2^k}\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right)K(ds)\right]+2\epsilon \\
= &\underbrace{\mathbb{E}_P\left[\int_0^T W^0\left(y\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right)K(ds)\right]}_{\leq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right)K(ds)\right]} + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\mathbb{E}_P\left[\int_0^T W^k\left(\frac{y}{2^k}\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right)K(ds)\right]}_{\overset{(2.19)}{\leq}\frac{\epsilon}{2^k}}+2\epsilon \\
\leq &\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R^\star,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right)K(ds)\right]+3\epsilon \overset{(2.17)}{=} \inf_{R\in\mathcal{D}}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right)K(ds)\right]+3\epsilon,
\end{aligned}$$

d. h. wir erhalten für alle $\epsilon > 0$ mit $\tilde{Z}^{Q,P} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{M}^P}$ sowie beliebigem $P \in \mathcal{P}$ und $y \in (0,\infty)$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\inf_{Q\in\mathcal{M}^P}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_s^{Q,P}\right)K(ds)\right] &\leq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\tilde{Z}_s^{Q,P}\right)K(ds)\right] \\
&\leq \inf_{R\in\mathcal{D}}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right)K(ds)\right]+3\epsilon
\end{aligned}$$

und da immer die Ungleichung

$$\inf_{Q\in\mathcal{M}^P}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_s^{Q,P}\right)K(ds)\right] \geq \inf_{R\in\mathcal{D}}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right)K(ds)\right]$$

gilt, folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
\inf_{R\in\mathcal{D}}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right)K(ds)\right] &\leq \inf_{Q\in\mathcal{M}^P}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_s^{Q,P}\right)K(ds)\right] \\
&\leq \inf_{R\in\mathcal{D}}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_s^{R,P_0}}{Z_s^{P,P_0}}\right)K(ds)\right]+3\epsilon.
\end{aligned}$$

Mit $\epsilon \to 0$ ergibt sich die Behauptung. □

Beweis von Theorem 2.32:

(i) Sei $P \in \mathcal{P}, y \in (0,\infty)$ beliebig aber fest. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{S}_n$ die Menge aller nicht negativer, progressiv messbarer Prozesse $c : [0,T]\times\Omega \to [0,n]$. Die Mengen $\mathcal{S}_n$ können als abgeschlossene Teilmengen von Kugeln in $\mathcal{L}^\infty(P\times K)$ angesehen werden. Dank der Konkavität von $U(\cdot)$, der Kompaktheit von $\mathcal{S}_n$ (nach Alaoglus Theorem) sowie der

Konvexität von $\mathcal{M}^P$ für beliebige $P \in \mathcal{P}$ wenden wir Theorem A.16 mit $A_1 := \mathcal{S}_n$ und $A_2 := \mathcal{M}^P$ an und erhalten für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \sup_{c\in\mathcal{S}_n} \inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \left(U(c_t) - yZ_t^{Q,P}c_t\right) K(dt)\right] \\ = & \inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \sup_{c\in\mathcal{S}_n} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \left(U(c_t) - yZ_t^{Q,P}c_t\right) K(dt)\right]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Nach Proposition 2.20 gilt

$$\bigcup_{x_0>0} \mathcal{C}(x_0) = \bigcup_{x_0>0} \mathcal{C}'(x_0) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{C}'(x_0) := \left\{c \in \mathcal{C}(x_0) : \sup_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right] = x_0\right\}.$$

Durch punktweise Approximation der Elemente aus der Menge $\bigcup_{x_0>0} \mathcal{C}'(x_0)$ über Elemente der Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \sup_{c\in\mathcal{S}_n} \inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \left(U(c_t) - yZ_t^{Q,P}c_t\right) K(dt)\right] \\ = & \sup_{x_0>0} \sup_{c\in\mathcal{C}'(x_0)} \underbrace{\inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right] - y\mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P} K(dt)\right]\right)}_{=\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right] - y\sup_{Q\in\mathcal{M}^P}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t Z_t^{Q,P}K(dt)\right]} \\ = & \sup_{x_0>0} \sup_{c\in\mathcal{C}'(x_0)} \left(\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right] - yx_0\right) \\ = & \sup_{x_0>0} \left(\underbrace{\sup_{c\in\mathcal{C}'(x_0)} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right]}_{=u_P(x_0)} - yx_0\right) \\ = & \sup_{x_0>0} (u_P(x_0) - x_0 y) \quad \text{für alle } y \in (0,\infty), \end{aligned} \tag{2.23}$$

wobei die vorletzte Gleichung wegen

$$u_P(x_0) := \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right] = \sup_{c\in\mathcal{C}'(x_0)} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right]$$

gilt. Wir definieren wie zuvor

$$V^n(y) := \sup_{0<x\le n} (U(x) - xy)$$

und erhalten über punktweise Maximierung

$$\inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \sup_{c\in\mathcal{S}_n} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \left(U(c_t) - yZ_t^{Q,P}c_t\right) K(dt)\right] = \inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V^n\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right]$$

$$=: \quad v_P^n(y). \tag{2.24}$$

Mit (2.22) - (2.24) schließen wir die Gültigkeit von $\lim_{n\to\infty} v_P^n(y) = \sup_{x_0>0}(u_P(x_0) - x_0 y)$, denn

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} v_P^n(y) &\overset{(2.24)}{=} \lim_{n\to\infty} \inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \sup_{c\in\mathcal{S}_n} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \left(U(c_t) - yZ_t^{Q,P} c_t\right) K(dt)\right] \\
&\overset{(2.22)}{=} \lim_{n\to\infty} \sup_{c\in\mathcal{S}_n} \inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \left(U(c_t) - yZ_t^{Q,P} c_t\right) K(dt)\right] \\
&\overset{(2.23)}{=} \sup_{x_0>0} (u_P(x_0) - x_0 y).
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass für ein beliebiges $y \in (0,\infty)$ und $P \in \mathcal{P}$ die Ungleichung $\lim_{n\to\infty} v_P^n(y) \geq v_P(y)$ gilt, da $v_P^n(y) \leq v_P(y) \quad \forall y \in (0,\infty), \forall P \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Sei $Y^{R_n,P_0} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ eine minimierende Folge für $v_P^n(y)$ mit $P \in \mathcal{P}$ beliebig, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} v_P^n(y) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V^n\left(y\frac{Y_t^{R_n,P_0}}{Z_t^{P,P_0}}\right) K(dt)\right].$$

Da $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ abgeschlossen bzgl. der Fatou Konvergenz ist, existiert ein $Y^{\tilde{R},P_0} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ mit $Y^{R_n,P_0} \overset{\text{Fatou}}{\to} Y^{\tilde{R},P_0}$ und analog zu [Karatzas, Žitković] nehmen wir auch die $P \times K$ fast sichere Konvergenz an. Wir erhalten für alle $y \in (0,\infty)$ mit Proposition 2.36, Lemma A.1 [Karatzas, Žitković] (siehe auch Seite 1851 [Karatzas, Žitković]) die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} v_P^n(y) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V^n\left(y\frac{Y_t^{R_n,P_0}}{Z_t^{P,P_0}}\right) K(dt)\right] \geq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_t^{\tilde{R},P_0}}{Z_t^{P,P_0}}\right) K(dt)\right] \\
&\geq \inf_{R\in\mathcal{D}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_t^{R,P_0}}{Z_t^{P,P_0}}\right) K(dt)\right] = \inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] \\
&= v_P(y).
\end{aligned}$$

(ii) Sei $P \in \mathcal{P}$ beliebig aber fest. Nach (i) gilt $v_P(y) = \sup_{x_0>0}(u_P(x_0) - x_0 y)$ und mit der Definition der Legendre Fenchel Transformierten $u_P^\star$ (siehe Definition A.5 [Föllmer, Schied]) von $-u_P(-x_0)$ erhalten wir wegen $u_P(x_0) = -\infty$ für alle $x_0 \notin (0,\infty)$

$$\begin{aligned}
u_P^\star(y) &:= \sup_{x_0\in\mathbb{R}} (yx_0 + u_P(-x_0)) = \sup_{x_0\in\mathbb{R}} (-yx_0 + u_P(x_0)) \\
&= \sup_{x_0>0} (u_P(x_0) - x_0 y) = v_P(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.30 ist $|u_P(x_0)| < \infty$, u_P konkav sowie stetig und somit folgt aus Proposition A.6 [Föllmer, Schied] oder Theorem 12.2 [Rockafellar] für $-u_P(-x_0)$ mit $-x_0 \in (0,\infty)$ die Gleichung $-u_P(-x_0) = \sup_{y\in\mathbb{R}}(x_0 y - u_P^\star(y))$, d. h. wegen $v_P(y) := +\infty$ für alle $y \notin (0,\infty)$ gilt

$$-u_P(-x_0) = -\inf_{y\in\mathbb{R}} (-x_0 y + u_P^\star(y)) = -\inf_{y\in\mathbb{R}} (-x_0 y + v_P(y)) \quad \forall -x_0 \in (0,\infty)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_P(x_0) = \inf_{y\in\mathbb{R}}(v_P(y) + x_0 y) = \inf_{y>0}(v_P(y) + x_0 y) \quad \forall x_0 \in (0,\infty).$$

(iii) Mit Theorem 2.29 erhalten wir diese Aussage wie folgt

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \inf_{P\in\mathcal{P}} \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U(c_t)K(dt)\Big] = \inf_{P\in\mathcal{P}} u_P(x_0) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \inf_{P\in\mathcal{P}} \inf_{y>0} \big(v_P(y) + x_0 y\big) = \inf_{y>0} \big(\inf_{P\in\mathcal{P}} v_P(y) + x_0 y\big) \\ &= \inf_{y>0} \big(v(y) + x_0 y\big). \end{aligned}$$

(iv) Nach (iii) und der Definition der Legendre Fenchel Transformierten gilt

$$\begin{aligned} & u(x_0) = \inf_{y>0}(v(y) + x_0 y) = \inf_{y\in\mathbb{R}}(v(y) + x_0 y) \\ \Rightarrow \quad & -u(-x_0) = -\inf_{y\in\mathbb{R}}(v(y) - x_0 y) = \sup_{y\in\mathbb{R}}(x_0 y - v(y)) =: v^\star(x_0), \end{aligned}$$

d. h. es ergibt sich die Gleichung $v^\star(x_0) = -u(-x_0)$. Nach Bemerkung 2.24 ist $|v(y)| < \infty$ für alle $y \in (0,\infty)$, v konvex und stetig und es gilt analog wie in (ii)

$$\begin{aligned} v(y) &= \sup_{x_0\in\mathbb{R}} (x_0 y - v^\star(x_0)) = \sup_{x_0\in\mathbb{R}} (x_0 y + u(-x_0)) = \sup_{x_0\in\mathbb{R}} (-x_0 y + u(x_0)) \\ &= \sup_{x_0>0} (u(x_0) - x_0 y). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.37

Für jedes $y \in (0,\infty)$ existiere eine duale Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$. Dann gelten für alle $x_0 \in (0,\infty)$, $y \in (0,\infty)$ und $P \in \mathcal{P}$ die folgenden Aussagen:

(i) $u_P(x_0), u(x_0), v_P(y), v(y)$ sind stetig differenzierbar.

(ii) $\lim_{x_0\to\infty} \frac{u(x_0)}{x_0} = 0$ und $\lim_{x_0\to\infty} \frac{u_P(x_0)}{x_0} = 0$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

(iii) $u'(0+) = \infty,\ u'(\infty-) = 0,\ v'(0+) = -\infty,\ v'(\infty-) = 0.$

(iv) $\exists\, y^\star > 0 :\ v(y^\star) + x_0 y^\star = u(x_0)$ für alle $x_0 \in (0,\infty)$.

Beweis:

(i) Nach Lemma 2.30 gilt $-u_P(x_0) < \infty$ für alle $x_0 \in (0,\infty)$ und für alle $P \in \mathcal{P}$ sowie $-u(x_0) < \infty$ für alle $x_0 \in (0,\infty)$. Des Weiteren sind $-u_P(x_0)$ und $-u(x_0)$ streng konvex, nach Definition A.3 [Föllmer, Schied] also ordentliche, konvexe Funktionen. Nach [Rockafellar] ist eine ordentliche, konvexe Funktion genau dann abgeschlossen, wenn sie unten halbstetig

ist. Damit folgt die Abgeschlossenheit von $-u_P(x_0)$ und $-u(x_0)$. Mit Theorem 2.32 folgt die stetige Differenzierbarkeit von $v_P(y)$ und $v(y)$ für alle $y \in (0,\infty)$ aus Theorem 26.3 [Rockafellar]. Dass $u_P(x_0)$ und $u(x_0)$ für alle $x_0 \in (0,\infty)$ stetig differenzierbar sind, folgt analog zu den obigen Ausführungen mit Lemma 2.31, Theorem 2.32 und Theorem 26.3 [Rockafellar].

(ii) Nach (2.7) gilt zusammen mit $u(x_0) > -\infty$

$$u(x_0) \leq v(y) + x_0 y \quad \forall x_0 \in (0,\infty), \forall y \in (0,\infty).$$

Damit erhalten wir mit der Endlichkeit von $v(y)$

$$\overline{\lim_{x_0\to\infty}} \frac{u(x_0)}{x_0} \leq \left(\overline{\lim_{x_0\to\infty}} \frac{v(y)}{x_0} \right) + y = y \quad \forall y \in (0,\infty).$$

Da für x_0 groß genug auch $u(x_0) > 0$ ist, folgt hieraus die erste Behauptung. Die zweite ergibt sich analog mit $v_P(y) < \infty$ für alle $y \in (0,\infty)$, $P \in \mathcal{P}$.

(iii) Da $u(x_0)$ streng konkav auf $(0,\infty)$ ist, gilt $\lim_{x_0\to\infty} \frac{u(x_0)}{x_0} = 0 \overset{\text{l'Hospital}}{\Leftrightarrow} u'(\infty-) = 0$. Des Weiteren folgt analog zu [Wittmüß] wie in Lemma A.7 [Karatzas,Žitković] die Gültigkeit von $v'(\infty-) = 0$. Aufgrund allgemeiner Dualitätsbeziehungen folgt hieraus die Gültigkeit von $v'(0+) = -\infty$ und $u'(0+) = \infty$.

(iv) Nach Theorem 2.32 (iii) gilt $u(x_0) = \inf_{y>0}(v(y) + x_0 y)$ für alle $x_0 \in (0,\infty)$. Zu zeigen ist, dass das Infimum für ein $y^\star > 0$ angenommen wird. Da $v(y) + x_0 y$ streng konvex ist, genügt es, die erste Ableitung zu betrachten und wir erhalten aufgrund der Differenzierbarkeit von $v(y)$ nach (i)

$$\frac{\partial}{\partial y}(v(y) + x_0 y) = v'(y) + x_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'(y) = -x_0.$$

Da $x_0 > 0$, nach (iii) $v'(y) \in [-\infty, 0]$ für $y \in (0,\infty)$ gilt und v' nach (i) stetig ist, folgt die Behauptung mit dem Zwischenwertsatz. □

2.3 Die Darstellung eines optimalen Konsumprozesses

Wir verwenden nun die Beziehung zwischen dualem und primalem Optimalwert, um in Theorem 2.40 eine explizite Darstellung eines optimalen Konsumratenprozesses anzugeben. Zunächst beweisen wir die folgende Existenzaussage.

Theorem 2.38
Es existiert für jedes $x_0 > 0$ eine optimale Lösung $c^\star \in \mathcal{C}(x_0)$ des primalen Problems, d. h.

$$\inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U(c_t^\star)K(dt)\Big] = u(x_0).$$

Beweis:
Sei $x_0 \in (0,\infty)$ beliebig aber fest und $(c^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}(x_0)$ eine maximierende Folge, d. h. $\lim_{n\to\infty}\inf_{P\in\mathcal{P}}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t^n)K(dt)\right] = \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)}\inf_{P\in\mathcal{P}}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right]$. Wir wählen eine Folge $(\tilde{c}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{c}^n \in conv(c^n, c^{n+1}, \ldots)$, die $P\times K$ fast sicher gegen ein $c^\star \in \mathcal{C}(x_0)$ konvergiert. Die Existenz von $c^\star$ in der Menge $\mathcal{C}(x_0)$ ist nach Proposition 2.20 genau dann garantiert, wenn $\mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t^\star Z_t^{Q,P}K(dt)\right] \le x_0$ ist für alle $Q \in \mathcal{M}^P$. Mit dem Lemma von Fatou gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T c_t^\star Z_t^{Q,P}K(dt)\right] &= \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \varliminf_{n\to\infty} \tilde{c}_t^n Z_t^{Q,P}K(dt)\right] \le \varliminf_{n\to\infty}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T \tilde{c}_t^n Z_t^{Q,P}K(dt)\right]\\ &\le x_0 \quad \forall Q\in\mathcal{M}^P,\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Konvexität der Menge $\mathcal{C}(x_0)$ folgt (siehe Beweis Theorem 2.29). Damit ist $c^\star \in \mathcal{C}(x_0)$, d. h. die Menge $\mathcal{C}(x_0)$ ist abgeschlossen bzgl. der $P\times K$ fast sicheren Konvergenz.

Wir zeigen die gleichmäßige Integrierbarkeit von $U^+(\tilde{c}_t^n)$ bzgl. $P\times K$ $\forall P\in\mathcal{P}$ über Widerspruch. Nehmen wir an, dass $(U^+(\tilde{c}_t^n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig integrierbar ist für ein $P\in\mathcal{P}$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, eine Teilfolge $\tilde{\tilde{c}}_t^n$ sowie eine Partition $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega\times[0,T]$ mit

$$\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U^+\left(\tilde{\tilde{c}}_t^n\right)\mathbb{1}_{A_n}K(dt)\Big] \ge \epsilon \quad \text{für } n\ge 1. \tag{2.25}$$

Mit $x_U = \inf\{x>0 : U(x)\ge 0\}$ definieren wir einen Prozess $\bar{c}^n = (\bar{c}_t^n)_{t\in[0,T]}$ über $\bar{c}_t^n := x_U + \sum_{k=1}^n \tilde{\tilde{c}}_t^k$. Wir haben für jedes $Q\in\mathcal{M}^P$

$$\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T Z_t^{Q,P}\bar{c}_t^n K(dt)\Big] \le \int_0^T x_U K(dt) + nx_0.$$

Damit gilt $\bar{c}^n \in \mathcal{C}\left(\int_0^T x_U K(dt) + nx_0\right)$ und wir erhalten nach Definition von x_U

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U(\bar{c}_t^n)K(dt)\Big] &= \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U^+\Big(x_U + \sum_{k=1}^n \tilde{\tilde{c}}_t^k\Big)K(dt)\Big]\\ &\overset{\tilde{\tilde{c}}_t^k\ge 0}{\ge} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U^+\Big(x_U + \sum_{k=1}^n \tilde{\tilde{c}}_t^k\mathbb{1}_{A_k}\Big)K(dt)\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \quad \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \sum_{k=1}^n U^+\Big(x_U + \tilde{\tilde{c}}_t^k\Big)\mathbb{1}_{A_k} K(dt)\Big] \\ &\geq \quad \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U^+\Big(\tilde{\tilde{c}}_t^k\Big)\mathbb{1}_{A_k} K(dt)\Big] \overset{(2.25)}{\geq} \epsilon n \end{aligned} \tag{2.26}$$

für dieses $P \in \mathcal{P}$. Nun folgt für dieses $P \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \lim_{x_0\to\infty} \frac{u_P(x_0)}{x_0} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sup_{c\in\mathcal{C}\left(\int_0^T x_U K(dt)+nx_0\right)} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right]}{\int_0^T x_U K(dt) + nx_0} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(\bar{c}_t^n)K(dt)\right]}{\int_0^T x_U K(dt) + nx_0} \overset{(2.26)}{\geq} \lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon n}{\int_0^T x_U K(dt) + nx_0} > 0, \end{aligned}$$

was einen Widerspruch zur Aussage $\lim_{x_0\to\infty} \frac{u_P(x_0)}{x_0} = 0$ aus Lemma 2.37 (ii) darstellt.

Aufgrund der gleichmäßigen Integrierbarkeit bzgl. allen $P \in \mathcal{P}$ gilt für $\tilde{c}^n \to c^\star \;\; P\times K$ fast sicher und mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U\left(c_t^\star\right) K(dt)\Big] &= \underbrace{\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \lim_{n\to\infty} U^+\left(\tilde{c}_t^n\right) K(dt)\Big]}_{=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U^+(\tilde{c}_t^n)K(dt)\right]} - \underbrace{\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \lim_{n\to\infty} U^-\left(\tilde{c}_t^n\right) K(dt)\Big]}_{\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T U^-(\tilde{c}_t^n)K(dt)\right]} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U^+\left(\tilde{c}_t^n\right) K(dt)\Big] + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T -U^-\left(\tilde{c}_t^n\right) K(dt)\Big] \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U\left(\tilde{c}_t^n\right) K(dt)\Big], \end{aligned}$$

d. h. die Abbildung $c \mapsto \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right]$ ist oben halbstetig bzgl. der $P \times K$ fast sicheren Konvergenz. Wegen der Konkavität von $c \mapsto \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t)K(dt)\right]$ ist $\tilde{c}^n$ ebenfalls eine maximierende Folge und wir erhalten zusammen mit der oberen Halbstetigkeit

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \sup_{c\in\mathcal{C}(x_0)} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U(c_t)K(dt)\Big] = \lim_{n\to\infty} \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U\left(\tilde{c}_t^n\right) K(dt)\Big] \\ &\leq \inf_{P\in\mathcal{P}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U\left(\tilde{c}_t^n\right) K(dt)\Big] \leq \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T U\left(c_t^\star\right) K(dt)\Big]. \end{aligned}$$

Damit ist $c^\star \in \mathcal{C}(x_0)$ die optimale Lösung. □

Bevor wir zur Hauptaussage des zweiten Kapitels kommen, formulieren wir noch das folgende Lemma, mit dem wir die Zulässigkeit der optimalen primalen Lösung erhalten.

Lemma 2.39
Für jedes $y \in (0,\infty)$ und jedes $P \in \mathcal{P}$ existiere eine Minimumstelle $Q_P \in \mathcal{M}^P$ von $Q \mapsto \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right]$. Dann gilt für jedes $y \in (0,\infty)$ und jedes $P \in \mathcal{P}$

$$\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \left(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\right) I\left(yZ_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\Big] \leq 0 \quad \forall Q \in \mathcal{M}^P.$$

Beweis:
Sei $y \in (0,\infty)$, $P \in \mathcal{P}$ beliebig aber fest, $\kappa \in (0,1)$ und $Q^\kappa := (1-\kappa)Q_P + \kappa Q$ mit $Q \in \mathcal{M}^P$. Dann erhalten wir aus

$$\begin{aligned} v_P(y) &= \inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big] = \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\Big] \\ &\leq \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q^\kappa,P}\right) K(dt)\Big] \quad \forall Q \in \mathcal{M}^P \end{aligned}$$

die folgende Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q^\kappa,P}\right) - V\left(yZ_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\Big] \\ &\leq \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T y\left(Z_t^{Q_P,P} - Z_t^{Q^\kappa,P}\right) I\left(yZ_t^{Q^\kappa,P}\right) K(dt)\Big] \\ &= \kappa y \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \left(Z_t^{Q_P,P} - Z_t^{Q,P}\right) I\left(yZ_t^{Q^\kappa,P}\right) K(dt)\Big], \end{aligned} \tag{2.27}$$

wobei die zweite Ungleichung aus der Konvexität, Monotonie und Differenzierbarkeit von V folgt und die anschließende Gleichung wegen

$$Z^{Q_P,P} - Z^{Q^\kappa,P} = Z^{Q_P,P} - (1-\kappa)Z^{Q_P,P} - \kappa Z^{Q,P} = \kappa\left(Z^{Q_P,P} - Z^{Q,P}\right)$$

gilt. Da mit $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$\left(\left(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\right) I\left(yZ_t^{Q^\kappa,P}\right)\right)^- \leq Z_t^{Q_P,P} I\left(yZ_t^{Q^\kappa,P}\right) \leq Z_t^{Q_P,P} I\left(y(1-\kappa)Z_t^{Q_P,P}\right)$$

ist, können wir mit den gleichen Argumenten wie in Lemma A.4 [Karatzas, Žitković] zeigen, dass der letzte Ausdruck durch einen $P \times K$ integrierbaren Prozess dominiert wird. Es folgt mit Satz 15.6 [Bauer]

$$\begin{aligned} &\lim_{\kappa\to 0} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \left(\left(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\right) I\left(yZ_t^{Q^\kappa,P}\right)\right)^- K(dt)\Big] \\ = \;& \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \lim_{\kappa\to 0}\left(\left(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\right) I\left(yZ_t^{Q^\kappa,P}\right)\right)^- K(dt)\Big] \end{aligned} \tag{2.28}$$

und mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} & \lim_{\kappa\to 0} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \Big(\Big(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\Big) I\Big(yZ_t^{Q^\kappa,P}\Big)\Big)^+ K(dt)\Big] \\ \geq\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \underline{\lim_{\kappa\to 0}} \Big(\Big(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\Big) I\Big(yZ_t^{Q^\kappa,P}\Big)\Big)^+ K(dt)\Big]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Indem wir (2.27) durch $-\kappa y$ dividieren und auf beiden Seiten den Limes für $\kappa \to 0$ betrachten, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \ \geq\ & \underbrace{\lim_{\kappa\to 0} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \Big(\Big(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\Big) I\Big(yZ_t^{Q^\kappa,P}\Big)\Big)^+ K(dt)\Big]}_{\overset{(2.29)}{\geq} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \Big(\Big(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\Big) I\Big(yZ_t^{Q_P,P}\Big)\Big)^+ K(dt)\Big]} \\ & \underbrace{- \lim_{\kappa\to 0} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \Big(\Big(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\Big) I\Big(yZ_t^{Q^\kappa,P}\Big)\Big)^- K(dt)\Big]}_{\overset{(2.28)}{=} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \Big(\Big(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\Big) I\Big(yZ_t^{Q_P,P}\Big)\Big)^- K(dt)\Big]} \\ \geq\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \Big(\Big(Z_t^{Q,P} - Z_t^{Q_P,P}\Big) I\Big(yZ_t^{Q_P,P}\Big)\Big) K(dt)\Big]. \end{aligned}$$

□

Wir schließen dieses Kapitel mit der folgenden Hauptaussage, dem optimalen Konsumprozess. Diesen können wir nun in Abhängigkeit der dualen Lösung beschreiben, falls diese existiert.

Theorem 2.40 (Darstellung eines optimalen Konsumprozesses)
Für $y^\star \in (0,\infty)$ als Lösung von $v(y^\star)+x_0y^\star = u(x_0)$ existiere eine duale Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$. Dann ist ein optimaler Konsumratenprozess gegeben durch

$$c^\star = I\Big(y^\star Z^{Q^\star,P^\star}\Big) \quad P^\star \times K \text{ fast sicher.}$$

Beweis:
Für $x_0 \in (0,\infty)$ sei $y^\star \in (0,\infty)$ die Lösung der Gleichung $v(y^\star)+x_0y^\star = u(x_0)$ und $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ sei eine duale Lösung bzgl. $y^\star$. Mit $c^\star \in \mathcal{C}(x_0)$ als optimale Lösung des primalen Problems $u(x_0)$ ist zu zeigen, dass gilt

$$c^\star = I\Big(y^\star Z^{Q^\star,P^\star}\Big) \quad P^\star \times K \quad \text{fast sicher.}$$

Da

$$V(y) = \sup_{x>0}(U(x) - xy) \geq U(x) - xy \quad \forall (x,y) \in (0,\infty)^2$$

ist und somit auch für $y := y^\star Z^{Q^\star,P^\star}, x := c^\star > 0$ die Ungleichung

$$V\left(y^\star Z^{Q^\star,P^\star}\right) \geq U(c^\star) - y^\star Z^{Q^\star,P^\star} c^\star \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq V\left(y^\star Z^{Q^\star,P^\star}\right) + y^\star Z^{Q^\star,P^\star} c^\star - U(c^\star)$$

$P^\star \times K$ fast sicher gilt, erhalten wir nach Definition von $P^\star, Q^\star$ und $c^\star$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T \left(V\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) + y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star} c_t^\star - U\left(c_t^\star\right)\right) K(dt)\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T V\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt)\right]}_{=v(y^\star)} + \underbrace{\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T c_t^\star Z_t^{Q^\star,P^\star} K(dt)\right] y^\star}_{\leq x_0 y^\star} \\ &\quad \underbrace{-\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T U\left(c_t^\star\right) K(dt)\right]}_{\leq -\inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T U(c_t^\star)K(dt)\right] = -u(x_0)} \\ &\leq v(y^\star) + x_0 y^\star - u(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$V\left(y^\star Z^{Q^\star,P^\star}\right) + y^\star Z^{Q^\star,P^\star} c^\star - U\left(c^\star\right) = 0 \quad P^\star \times K \text{ fast sicher.} \tag{2.30}$$

Sei $N \subset [0,T]\times\Omega$ die Nullmenge, auf der (2.30) nicht erfüllt ist. Nach Definition von $V(y)$ muss dann für festes $(t,\omega) \in \{[0,T]\times\Omega\}\setminus N$ die optimale Lösung $c^\star \in \mathcal{C}(x_0)$ eine Maximumstelle der Abbildung $c \mapsto U(c) - y^\star Z^{Q^\star,P^\star} c$ sein, d. h. aufgrund der strengen Konkavität von U genügt es, die erste Ableitung zu betrachten für alle $(t,\omega) \in \{[0,T]\times\Omega\}\setminus N$ und wir erhalten $c^\star = I\left(y^\star Z^{Q^\star,P^\star}\right) \quad P^\star \times K$ fast sicher.

Nach Theorem 3.1 (ii) und (iv) gilt dann für $y^\star$

$$\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) Z_t^{Q^\star,P^\star} K(dt)\right] = x_0. \tag{2.31}$$

Mit Lemma 2.39 folgt die Zulässigkeit von der optimalen Lösung:

$$\begin{aligned} \sup_{Q\in\mathcal{M}^{P^\star}} \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) Z_t^{Q,P^\star} K(dt)\right] &\leq \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T Z_t^{Q^\star,P^\star} I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt)\right] \\ &\overset{(2.31)}{=} x_0. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Behauptung $I\left(y^\star Z^{Q^\star,P^\star}\right) \in \mathcal{C}(x_0)$ gezeigt. □

Bemerkung 2.41

Interpretieren wir jedes mögliche Paar $(P,Q) \in \mathcal{M}$ als einen nicht robusten, vollständigen Markt, so erkennen wir nun mit Proposition 2.28 und Theorem 2.40, dass die duale Lösung $(P^\star, Q^\star)$ den maximal erwarteten Konsumnutzen unter allen zugelassenen Märkten $(P,Q) \in \mathcal{M}$ minimiert, d. h. das ungünstigste Paar darstellt.

Kapitel 3

Existenz und Berechnung der dualen Lösungen

Im letzten Kapitel haben wir unter Vorwegnahme der Theoreme 3.1 und 3.2 sowie der Voraussetzung, dass für $y^\star \in (0,\infty)$ eine duale Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ existiert, einen optimalen Konsumratenprozess $c^\star$ angegeben. In diesem Kapitel betrachten wir ausschließlich die drei dualen Einflussgrößen und gehen dabei genauer auf die Existenz und Darstellung des ungünstigsten, äquivalenten Martingalmaßes ein. Aufgrund der Struktur der Menge $\mathcal{M}^{P^\star}$ ist die Existenz von $Q^\star \in \mathcal{M}^{P^\star}$ nicht gesichert. Bei einigen Beweisideen dienten die Arbeiten von [Wittmüß] und [Jeanblanc et al] als Vorlage.

In **Abschnitt 3.1** geben wir an, wie der optimale Lagrangemultiplikator berechnet wird. Der **Abschnitt 3.2** beschäftigt sich mit der Existenz einer dualen Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ bzgl. $y \in (0,\infty)$. Im letzten **Abschnitt 3.3** untersuchen wir für die populärsten Fälle von Nutzenfunktionen die Existenz eines ungünstigsten, äquivalenten Martingalmaßes und gehen dabei näher auf die Berechnung und Darstellung eines ungünstigsten, dualen Paares $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ ein.

3.1 Die Berechnung des optimalen Lagrangemultiplikators

Die Existenz des optimalen Lagrangemultiplikators wurde bereits in Lemma 2.37 diskutiert und bei der Darstellung der optimalen Lösung $c^\star \in \mathcal{C}(x_0)$ in Theorem 2.40 verwendet. Wir können daher direkt zur Berechnung des optimalen Lagrangemultiplikators kommen. Eine interessante Interpretation im folgenden Theorem lässt Aussage (iv) zu, die besagt, dass bzgl. dem optimalen Lagrangemultiplikator die Kaptialrestriktion der optimalen primalen Lösung mit Gleichheit erfüllt ist.

Theorem 3.1
Für jedes $y \in (0,\infty)$ existiere eine duale Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $y^\star = u'(x_0)$.

(ii) $\inf_{y>0}(v(y) + x_0 y) = v(y^\star) + x_0 y^\star$.

(iii) $-v'(y^\star) = x_0$.

(iv) $\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) Z_t^{Q^\star,P^\star} K(dt)\right] = x_0$.

Beweis:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Die Funktionen u und v sind stetig differenzierbar auf $(0,\infty)$, d. h. $y^\star = u'(x_0)$ ist wohldefiniert. Des Weiteren ist $u'(x_0)$ streng monoton fallend, also existiert $I_u := (u')^{-1} > 0$ auf $(0,\infty)$ und somit gilt

$$v(y) = \sup_{x_0>0}(u(x_0) - x_0 y) = u\left(I_u(y)\right) - y I_u(y). \tag{3.1}$$

Um zu zeigen, dass $u'(x_0)$ eine Minimumstelle von $v(y)+x_0 y$ ist, müssen wir wegen der strengen Konvexität von v nur zeigen, dass $v'(u'(x_0)) + x_0 = 0$. Dies gilt, da

$$\begin{aligned} & v'(u'(x_0)) + x_0 \\ = \;& \frac{\partial}{\partial y} v(y)_{|y=u'(x_0)} + x_0 \overset{(3.1)}{=} \left(u'(I_u(y))\frac{\partial}{\partial y} I_u(y) - I_u(y) - y\frac{\partial}{\partial y} I_u(y)\right)_{|y=u'(x_0)} + x_0 \\ = \;& -I_u(u'(x_0)) + x_0 = -x_0 + x_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Zu zeigen ist, dass die Minimumstelle von $v(y) + x_0 y$ gegeben ist durch $u'(x_0)$, d. h. wegen der strengen Konvexität von $v(y)$ haben wir eine Minimumstelle $y^\star$ gefunden, wenn $v'(y^\star) + x_0 = 0$. Nach (3.2) erfüllt $u'(x_0)$ diese Gleichung, ist also die eindeutige Minimumstelle.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Es gilt aufgrund der Konvexität von v

$$\begin{aligned} y^\star = u'(x_0) \quad &\overset{\text{(ii)}}{\Leftrightarrow} \quad y^\star \text{ ist Minimumstelle von } v(y) + x_0 y \quad \Leftrightarrow \quad v'(y^\star) + x_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -v'(y^\star) = x_0. \end{aligned}$$

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ Nach Voraussetzung des Theorems existiert $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ als Lösung der Gleichung

$$v(y^\star) = \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T V\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt)\right].$$

Analog zu [Burgert, Rüschendorf] ist die Ableitung von v an der Stelle $y^\star$ gegeben durch

$$\begin{aligned} v'(y^\star) &= \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T V'\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) Z_t^{Q^\star,P^\star} K(dt)\right] \\ &\overset{V'=-I}{=} -\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) Z_t^{Q^\star,P^\star} K(dt)\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

und mit (iii)

$$-v'(y^\star) = x_0 \quad \overset{(3.3)}{\Leftrightarrow} \quad \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) Z_t^{Q^\star,P^\star} K(dt)\right] = x_0.$$

□

3.2 Die Existenz der dualen Lösungen

Mit den Eigenschaften der eingeführten Menge $\mathcal{P}$ können wir die Existenz eines ungünstigsten subjektiven Maßes $P^\star \in \mathcal{P}$ für alle $y \in (0,\infty)$ nachweisen.

Theorem 3.2
Es existiert für alle $y \in (0,\infty)$ ein $P^\star \in \mathcal{P}$ mit

$$\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] = \inf_{Q\in\mathcal{M}^{P^\star}} \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P^\star}\right) K(dt)\right].$$

Beweis:
Sei $y \in (0,\infty)$ beliebig aber fest. Nach Bemerkung 2.24 gilt $v(y) < \infty$ für alle $y \in (0,\infty)$. Wir verwenden die folgende, gleichwertige Darstellung der dualen Zielfunktion (siehe z. B. [Burgert, Rüschendorf])

$$v(y) = \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] = \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}_0} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P,P_0}}\right) K(dt)\right]$$

mit $\mathcal{M}_0 := \left\{(P,Q) : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{M}^{P_0}\right\}$ und wählen eine Folge $\left(Z^{Q_n,P_0}, Z^{P_n,P_0}\right) \in \mathcal{Y}^{\mathcal{M}} := \left\{\left(Z^{Q,P_0}, Z^{P,P_0}\right) : Z^{Q,P_0} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{M}^{P_0}}, Z^{P,P_0} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{P}}\right\}, \mathcal{Y}^{\mathcal{P}} := \left\{Z^{P,P_0} : P \in \mathcal{P}\right\}$ aus, für die gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{P_0}\left[Z_T^{P_n,P_0}\int_0^T V\left(y\frac{Z_t^{Q_n,P_0}}{Z_t^{P_n,P_0}}\right) K(dt)\right] &= v(y) \\ &= \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}_0} \mathbb{E}_{P_0}\left[Z_T^{P,P_0}\int_0^T V\left(y\frac{Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P,P_0}}\right) K(dt)\right]. \end{aligned}$$

Wir konstruieren uns aus $\left(Z^{P_n,P_0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fast sicher konvergente Folge $\left(\tilde{Z}^{P_n,P_0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\tilde{Z}^{P_n,P_0} \in conv\left\{Z^{P_n,P_0}, Z^{P_{n+1},P_0}, \ldots\right\} : \tilde{Z}^{P_n,P_0} \to Z^{P^\star,P_0} \quad \text{fast sicher.}$$

Um bzgl. $t < T$ eine fast sichere Konvergenz zu erhalten, verwenden wir Lemma 5.2 [Föllmer, Kramkov] und wählen aus $conv\left\{\tilde{Z}^{P_n,P_0}, \tilde{Z}^{P_{n+1},P_0}, \ldots\right\}$ eine Folge $\tilde{\tilde{Z}}^{P_n,P_0}$, die im Fatou Sinne konvergiert. Aufgrund der schwachen Kompaktheit der Menge $\mathcal{P}$ und der Diffusität von K können wir analog zu Lemma 3.5 [Wittmüß] über Proposition 2.6 [Karatzas, Žitković] behaupten, dass $\tilde{\tilde{Z}}^{P_n,P_0}$ auch $P_0 \times K$ fast sicher gegen denselben Prozess $Z^{P^\star,P_0}$ konvergiert. Da $\mathcal{P}$ nach Voraussetzung abgeschlossen bzgl. der $\mathcal{L}^0(P_0)$ Konvergenz ist, folgt $P^\star \in \mathcal{P}$. Nach Definition von $\mathcal{D}$ finden wir ein Maß $R^\star \in \mathcal{D}$: $Z^{Q_n,P_0} \to Y^{R^\star,P_0}$ $P_0 \times K$ fast sicher.

Kommen wir nun zur Eigenschaft des ungünstigsten, subjektiven Maßes. Die Konvexität der Abbildung $(x,y) \mapsto xV\left(\frac{y}{x}\right)$ wurde bereits in [Schied, Wu] nachgewiesen. Wegen Lemma A.1 [Karatzas, Žitković] können wir analog zu Lemma 3.4 [Wittmüß] die gleichmäßige Integrierbarkeit von $\left\{Z^{P,P_0}V^-(y\frac{Z^{Q,P_0}}{Z^{P,P_0}}), P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{M}^{P_0}\right\}$ bzgl. $P_0 \times K$ folgern und mit dem Lemma von Fatou wie in Lemma 3.7 [Schied, Wu] die untere Halbstetigkeit der Abbildung

$$\left(Z^{Q,P_0}, Z^{P,P_0}\right) \mapsto \mathbb{E}_{P_0}\left[Z_T^{P,P_0}\int_0^T V\left(y\frac{Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P,P_0}}\right)K(dt)\right]$$

bzgl. der $P_0 \times K$ fast sicheren Konvergenz nachweisen. Damit erhalten wir die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{P_0}\left[Z_T^{P^\star,P_0}\int_0^T V\left(y\frac{Y_t^{R^\star,P_0}}{Z_t^{P^\star,P_0}}\right)K(dt)\right] &\leq \varliminf_{n\to\infty}\mathbb{E}_{P_0}\left[Z_T^{P_n,P_0}\int_0^T V\left(y\frac{Z_t^{Q_n,P_0}}{Z_t^{P_n,P_0}}\right)K(dt)\right] \\ &= v(y). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Mit Proposition 2.36 folgt für jedes $y \in (0,\infty)$

$$\begin{aligned} v_{P^\star}(y) &= \inf_{Q\in\mathcal{M}^{P^\star}}\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T V\left(yZ_s^{Q,P^\star}\right)K(ds)\right] = \inf_{R\in\mathcal{D}}\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_t^{R,P_0}}{Z_t^{P^\star,P_0}}\right)K(dt)\right] \\ &\leq \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T V\left(y\frac{Y_t^{R^\star,P_0}}{Z_t^{P^\star,P_0}}\right)K(dt)\right] \overset{(3.4)}{\leq} v(y). \end{aligned}$$

□

Für das ungünstigste Martingalmaß $Q^\star \in \mathcal{M}^{P^\star}$ gibt es im Allgemeinen keine Existenzaussage bzgl. der Menge der lokalen Martingalmaße $\mathcal{M}^{P^\star}$. Dazu muss entweder diese Menge erst vergrößert oder das Sprungverhalten der Aktie eingeschränkt werden, siehe [Karatzas, Žitković], [Bellini, Frittelli] oder [Biagini, Frittelli].

3.3 Die Berechnung der dualen Lösungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Existenz des Maßes $Q_P \in \mathcal{M}^P$ bei gegebenem $P \in \mathcal{P}$ unter Verwendung der logarithmischen und der Power Nutzenfunktion. Wir geben eine explizite Darstellung der jeweiligen Dichteprozesse an, auch für die in der Literatur häufig verwendete Exponentialfunktion, die nach unserer Definition keine Nutzenfunktion ist. Bei diesen Funktionen sind die ungünstigsten Maße unabhängig vom Lagrangemultiplikator $y \in (0,\infty),$ da dieser als konstanter Faktor bzw. Summand aus der dualen Zielfunktion herausgezogen werden kann (siehe Beispiel 2.1.8 [Gundel] (2006)).

Die Parameter $(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P})$ sind Funktionen, die von $(\omega, s) \in \Omega \times [0,T]$ und der Sprunghöhe $x \in \mathbb{R}_0$ abhängen können. Aus Gründen der Lesbarkeit nennen wir nur die im jeweiligen Zusammenhang benötigten Parameter.

Die in diesem Abschnitt betrachtete Radon-Nikodym Ableitung von $Q \in \mathcal{M}^P$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Z_T^{Q,P} &= \exp\Bigg(\int_0^T \zeta_{Q,P}(s)\sigma \, dW_s^P - \frac{1}{2}\int_0^T \zeta_{Q,P}^2(s)\sigma^2 ds \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \ln \eta_{Q,P}(x,s)\delta(dx,ds) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\eta_{Q,P}(x,s) - 1\Big)\nu_P(dx)ds\Bigg), \end{aligned}$$

vergleiche Proposition 2.6.

Annahme 3.3
Für jedes duale Problem in den Abschnitten 3.3.1 - 3.3.3 existiere ein Maß Q mit $\mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] < \infty$. ◇

3.3.1 Power Nutzenfunktion

Wir betrachten den Optimalwert

$$v_P(y) = \inf_{Q \in \mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right]$$

und untersuchen, unter welchen Bedingungen das Infimum für ein $Q \in \mathcal{M}^P$ angenommen wird. Dabei besteht die Hauptaufgabe darin, das obige stochastische Optimierungsproblem auf ein konvexes Optimierungsproblem zu reduzieren, mit dessen Hilfe wir dann Kandidaten für die optimale Lösung erhalten. Wir untersuchen dieses Problem für die Nutzenfunktion $U(x) = \frac{1}{1-\gamma}x^{1-\gamma}$ mit $\gamma \in (0,1)$. Die konvex konjugierte Funktion V ist gegeben durch $V(y) = \frac{\gamma}{1-\gamma}y^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{1-\gamma}f(y)$ mit $f(y) := y^q$, $q := 1 - \frac{1}{\gamma}$. Aufgrund der strengen Konvexität von f auf $(0,\infty)$ ist das ungünstigste Martingalmaß $Q_P \in \mathcal{M}^P$ im Falle der Existenz eindeutig (siehe Theorem 3.7).

Mit der eingeführten Abbildung f können wir die duale Zielfunktion wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\Big] &= \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T y^{1-\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(Z_t^{Q,P}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}K(dt)\Big]\\ &= \frac{\gamma}{1-\gamma}y^{1-\frac{1}{\gamma}}\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\Big].\end{aligned}$$

Für die anschließenden Betrachtungen benötigen wir die folgende Menge.

Definition 3.4
Wir definieren die Teilmenge $\bar{\mathcal{M}}^P$ von $\mathcal{M}^P$ durch

$$\bar{\mathcal{M}}^P := \Big\{Q \in \mathcal{M}^P : (\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}) \text{ sind beide deterministisch und zeitunabhängig}\Big\}.$$

Die Minimierung des Funktionals $\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\Big]$ bzgl. allen Maßen $Q \in \mathcal{M}^P$ ist nach Proposition 2.15 gleichbedeutend zur Minimierung bzgl. den entsprechenden Parametern $\zeta_{Q,P}$ und $\eta_{Q,P}$, d. h. mit

$$\begin{aligned}&\Theta := \Big\{(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}) : Q = Q(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}) \in \mathcal{M}^P\Big\}\\ \text{und}\quad &\bar{\Theta} := \Big\{(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) : Q = Q(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \in \bar{\mathcal{M}}^P\Big\}\end{aligned}$$

gilt

$$\inf_{Q\in\mathcal{M}^P}\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\Big] = \inf_{(\zeta_{Q,P},\eta_{Q,P})\in\Theta}\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\Big].$$

Betrachten wir für $(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}) \in \Theta$ das nicht negative, lokale Martingal

$$\begin{aligned}&\Big(\exp\Big(\int_0^t \sigma\zeta_{Q,P}(s)dW_s^P - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\zeta_{Q,P}^2(s)ds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{Q,P}(x,s)\delta(dx,ds)\\ &-\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}(\eta_{Q,P}(x,s)-1)\nu_P(dx)ds\Big)\Big)_{t\in[0,T]},\end{aligned} \tag{3.5}$$

so gilt aufgrund der Supermartingaleigenschaft

$$Z_t^{Q,P} := \mathbb{E}_Q\left[Z_T^{Q,P}\middle|\mathcal{F}_t^L\right] \le (3.5) \quad \text{für alle } (t,\omega) \in [0,T]\times\Omega$$

und da f streng monoton fallend ist, erhalten wir die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big] \\
\geq\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \Big(\exp\Big(\int_0^t \sigma\zeta_{Q,P}(s)dW_s^P - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\zeta_{Q,P}^2(s)ds \\
& + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} \ln\eta_{Q,P}(x,s)\delta(dx,ds) - \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}(\eta_{Q,P}(x,s)-1)\nu_P(dx)ds\Big)\Big)^q K(dt)\Big] \\
=\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \exp\Big(\int_0^t \sigma q\zeta_{Q,P}(s)\,dW_s^P - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 q^2\zeta_{Q,P}^2(s)ds \\
& + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} \ln\eta_{Q,P}^q(x,s)\delta(dx,ds) - \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\left(\eta_{Q,P}^q(x,s)-1\right)\nu_P(dx)ds\Big) \\
& \exp\Big(\int_0^t k\left(\zeta_{Q,P}(s),\eta_{Q,P}(s)\right)ds\Big)K(dt)\Big] \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

mit

$$
k\left(\zeta_{Q,P},\eta_{Q,P}\right) := \Big(\frac{q(q-1)\sigma^2\zeta_{Q,P}^2}{2} + \int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q,P}^q(x) - 1 - q(\eta_{Q,P}(x)-1)\Big)\nu_P(dx)\Big).
$$

Da auch

$$
\begin{aligned}
& \Big(\exp\Big(\int_0^t \sigma q\zeta_{Q,P}(s)\,dW_s^P - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 q^2\zeta_{Q,P}^2(s)ds \\
& + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} \ln\eta_{Q,P}^q(x,s)\delta(dx,ds) - \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\left(\eta_{Q,P}^q(x,s)-1\right)\nu_P(dx)ds\Big)\Big)_{t\in[0,T]} \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

ein nicht negatives, lokales Martingal ist, gilt auch hier mit

$$
\begin{aligned}
Z_T^{R,P} := & \exp\Big(\int_0^T \sigma q\zeta_{Q,P}(s)\,dW_s^P - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2 q^2\zeta_{Q,P}^2(s)ds \\
& + \int_0^T\int_{\mathbb{R}_0} \ln\eta_{Q,P}^q(x,s)\delta(dx,ds) - \int_0^T\int_{\mathbb{R}_0}\left(\eta_{Q,P}^q(x,s)-1\right)\nu_P(dx)ds\Big)
\end{aligned}
$$

aufgrund der Supermartingaleigenschaft $\mathbb{E}_P\left[Z_T^{R,P}\middle|\mathcal{F}_t^L\right] \leq$ (3.7) für alle $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
(3.6) \geq\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \mathbb{E}_P\left[Z_T^{R,P}\middle|\mathcal{F}_t^L\right]\exp\Big(\int_0^t k\left(\zeta_{Q,P}(s),\eta_{Q,P}(s)\right)ds\Big)K(dt)\Big] \\
=\ & \int_0^T \mathbb{E}_P\Big[\mathbb{E}_P\Big[Z_T^{R,P}\exp\Big(\int_0^t k\left(\zeta_{Q,P}(s),\eta_{Q,P}(s)\right)ds\Big)\Big|\mathcal{F}_t^L\Big]\Big]K(dt) \\
=\ & \mathbb{E}_R\Big[\int_0^T \exp\Big(\int_0^t k\left(\zeta_{Q,P}(s),\eta_{Q,P}(s)\right)ds\Big)K(dt)\Big] \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

für alle $(\zeta_{Q,P},\eta_{Q,P})\in\Theta$.

Die Funktion $k(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P})$ ist in $\zeta_{Q,P}$ und $\eta_{Q,P}$ nicht negativ und streng konvex. Um nun (3.8) leichter berechnen zu können, machen wir die folgenden Überlegungen: für jedes Maß $Q \in \mathcal{M}^P$ erfüllen die zugehörigen Girsanov-Parameter $\zeta_{Q,P}$ und $\eta_{Q,P}$ die beiden Bedingungen

- $\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \Big| x(\eta_{Q,P}(x,t) - 1) \Big| \nu_P(dx)dt < \infty \quad P$ fast sicher und (3.9)
- $\mu_P + \int_{|x|>1} x\nu_P(dx) + \sigma^2 \zeta_{Q,P} + \int_{\mathbb{R}_0} x(\eta_{Q,P}(x) - 1)\nu_P(dx) = 0$
  $P \times \lambda$ fast sicher auf $\Omega \times [0,T]$. (3.10)

Sei $N_0 \subset \Omega$ eine Nullmenge bzgl. der (3.9) nicht gilt und $N_1 \times N_2 \subset \Omega \times [0,T]$ eine Nullmenge, auf der (3.10) nicht erfüllt ist. Dann gelten die Gleichungen (3.9) und (3.10) für alle $(\omega, t) \in \{\Omega \backslash \{N_0 \cup N_1\}\} \times \{[0,T] \backslash N_2\}$.

Da

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_R\Big[\int_0^T \exp\left(\int_0^t k\left(\zeta_{Q,P}(s,\omega), \eta_{Q,P}(s,\omega)\right) ds \right) K(dt) \Big] \\ = & \int_{\Omega \backslash \{N_0 \cup N_1\}} \int_0^T \exp\left(\int_0^t k(\zeta_{Q,P}(s,\omega), \eta_{Q,P}(s,\omega)) ds \right) K(dt) dR \end{aligned}$$

ist, finden wir aus der Menge $\Omega \backslash \{N_0 \cup N_1\}$ ein $\bar{\omega}$ mit

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_R\Big[\int_0^T \exp\left(\int_0^t k(\zeta_{Q,P}(s,\omega), \eta_{Q,P}(s,\omega)) ds \right) K(dt) \Big] \\ \geq & \int_0^T \exp\left(\int_0^t k\left(\zeta_{Q,P}(s,\bar{\omega}), \eta_{Q,P}(s,\bar{\omega})\right) ds \right) K(dt). \end{aligned}$$

Nach der obigen Überlegung sind (3.9) und (3.10) für dieses $\bar{\omega} \in \Omega \backslash \{N_0 \cup N_1\}$ erfüllt und wegen

$$\begin{aligned} & \int_0^T \exp\left(\int_0^t k\left(\zeta_{Q,P}(s,\bar{\omega}), \eta_{Q,P}(s,\bar{\omega})\right) ds \right) K(dt) \\ = & \int_0^T \exp\left(\int_{[0,t] \backslash N_2} k(\zeta_{Q,P}(s,\bar{\omega}), \eta_{Q,P}(s,\bar{\omega})) ds \right) K(dt) \end{aligned}$$

gibt es aus der Menge $[0,T] \backslash N_2$ ein $\bar{s}$ so, dass $(\bar{s}, \bar{\omega})$ der Gleichung (3.10) genügt mit

$$\begin{aligned} & \int_0^T \exp\left(\int_{[0,t] \backslash N_2} k\left(\zeta_{Q,P}(s,\bar{\omega}), \eta_{Q,P}(s,\bar{\omega})\right) ds \right) K(dt) \\ \geq & \int_0^T \exp\left(\int_{[0,t] \backslash N_2} k\left(\zeta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega}), \eta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega})\right) ds \right) K(dt) \\ = & \int_0^T \exp\Big(tk(\zeta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega}), \eta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega})) \Big) K(dt). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Durch Festhalten eines geeigneten Paares $(\bar{s}, \bar{\omega}) \in [0,T] \times \Omega$ können wir den dualen Zielfunktionswert jedes $(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}) := (\zeta_{Q,P}(s,\omega), \eta_{Q,P}(s,\omega)) \in \Theta$ durch den dualen Zielfunktionswert des zugehörigen Paares $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) := (\zeta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega}), \eta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega})) \in \bar{\Theta}$ nach unten abschätzen.

Bemerkung 3.5
Wenn wir deterministische und zeitunabhängige Parameter aus der Menge $\bar{\Theta}$ betrachten, so lassen sich (3.5) und (3.7) nach Proposition 9.8 [Cont, Tankov] als Exponentialfunktion eines reellwertigen Lévy Prozesses schreiben. Da insbesondere für deterministische und zeitunabhängige Parameter (3.5) und (3.7) lokale Martingale sind, erhalten wir die Martingaleigenschaft beider mit Lemma 4.4 [Kallsen], sodass in diesem Falle für die obige Abschätzung der dualen Zielfunktion gilt

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] \;=\; \int_0^T \exp\left(tk\left(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}\right)\right) K(dt).$$

Die folgende Proposition gibt nun an, wann wir mit deterministischen und zeitunabhängigen Parametern ein Martingalmaß aus der Menge $\bar{\mathcal{M}}^P$ konstruieren können. Unter der dort eingeführten Menge Ξ verstehen wir die Menge aller Funktionen mit einem strikt positiven Wertebereich auf $\mathbb{R}_0$.

Proposition 3.6 (deterministische und zeitunabhängige Parameter)
Sei $\bar{\zeta}_{Q,P} \in \mathbb{R}$, $\bar{\eta}_{Q,P} : \mathbb{R}_0 \to (0,\infty)$ eine messbare Funktion mit $\bar{\eta}_{Q,P} > 0$ ν_P fast sicher und es gelte

- $k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) < \infty$

sowie

- $\int_{\mathbb{R}_0} \left|x(\bar{\eta}_{Q,P}(x) - 1)\right| \nu_P(dx) < \infty$,
- $\left(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}\right) \in \mathbb{R} \times \Xi$ erfüllen die Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10).

Dann sind $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})$ die Girsanov-Parameter eines Maßes $Q := Q(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \in \bar{\mathcal{M}}^P$ und $\mathbb{E}_P\left[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right]$ ist endlich.

Beweis:
Da nach Voraussetzung $k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) < \infty$ ist und beide Summanden von $k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})$ positiv sind, ist somit die Funktion $\bar{\eta}_{Q,P}^q - 1 - q\left(\bar{\eta}_{Q,P} - 1\right)$ integrierbar bzgl. ν_P, was nach Proposition II 1.28 [Jacod, Shiryaev] äquivalent zur Integrierbarkeit bzgl. δ und damit auch $\delta - \nu_P$ ist. Mit Lemma B.1 [Jeanblanc et al] und Theorem II.1.33 [Jacod, Shiryaev] folgt analog zum Beweis von Proposition A.5 [Esche, Schweizer] die Integrierbarkeit von $\bar{\eta}_{Q,P}(x) - 1$ bzgl. $\delta - \nu_P$. Da $\bar{\zeta}_{Q,P}$ als deterministischer und zeitunabhängiger Parameter integrierbar bzgl. dem stetigen Martingalanteil des Lévy Prozesses ist, sind die Voraussetzungen von Proposition 7 [Esche, Schweizer] erfüllt und wir folgern, dass $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})$ die Girsanov-Parameter eines Maßes $Q := Q(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})$ sind.

Da mit $k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) < \infty$ auch die Ungleichung $\int_0^T \exp(tk(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}))K(dt) < \infty$ gilt, erhalten wir mit Bemerkung 3.5

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_0^T \exp\Big(tk(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})\Big)K(dt) \\
&= \mathbb{E}_R\Big[\int_0^T \exp\Big(\int_0^t k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})ds\Big)K(dt)\Big] \\
&= \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T Z_t^{R,P} \exp\Big(\int_0^t k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})ds\Big)K(dt)\Big] \\
&= \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\Big]
\end{aligned}$$

d. h. $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \in \bar{\Theta}$ und der zugehörige duale Zielfunktionswert ist endlich. □

Mit Proposition 3.6 haben wir jedes Element der Menge $\bar{\Theta}$ über zwei Ungleichungen und die Market-Price-of-Risk-Gleichung charakterisiert, also ist $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \in \bar{\Theta}$ genau dann, wenn die Bedingungen von Proposition 3.6 erfüllt sind.

Theorem 3.7

(i) Für jedes $Q \in \mathcal{M}^P$ existiert ein $\bar{Q} \in \bar{\mathcal{M}}^P$ mit

$$\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{\bar{Q},P}\right)K(dt)\Big] \leq \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\Big]$$

d. h. $$\inf_{Q\in\mathcal{M}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] = \inf_{Q\in\bar{\mathcal{M}}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right].$$

(ii) Wenn eine Minimumstelle von $Q \mapsto \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\Big]$ in $\mathcal{M}^P$ existiert, dann existiert eine eindeutige Minimumstelle in $\bar{\mathcal{M}}^P$.

Beweis:

(i) Es sei $Q := Q\left(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}\right)$. Wie in (3.11) zu sehen ist, existiert für alle $(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}) \in \Theta$ ein $(\bar{s}, \bar{\omega}) \in [0,T] \times \Omega$ so, dass mit $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) := (\zeta_{Q,P}(\bar{s}, \bar{\omega}), \eta_{Q,P}(\bar{s}, \bar{\omega}))$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\Big] \\
\geq\ &\mathbb{E}_R\Big[\int_0^T \exp\Big(\int_0^t k\left(\zeta_{Q,P}(s,\omega), \eta_{Q,P}(s,\omega)\right)ds\Big)K(dt)\Big] \\
\geq\ &\int_0^T \exp\Big(tk\left(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}\right)\Big)K(dt).
\end{aligned}$$

Da nur die $Q \in \mathcal{M}^P$ mit einem endlichen, dualen Zielfunktionswert als optimale Lösungen in Frage kommen, gilt

$$\int_0^T \exp\Big(tk(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})\Big) K(dt) < \infty \quad \Rightarrow \quad k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) < \infty.$$

Wir erhalten analog zum Beweis von Proposition 3.6 mit $\bar{Q} := Q\left(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}\right)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{\bar{Q},P}\right) K(dt)\Big] &= \int_0^T \exp\Big(tk(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})\Big) K(dt) \\ &\leq \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big]. \end{aligned}$$

(ii) Sei $Q_P \in \mathcal{M}^P$ mit $\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\Big] \leq \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big] \ \forall Q \in \mathcal{M}^P$. Dann gilt aufgrund der strengen Konvexität von f und $\kappa \in (0,1)$ für alle $Q \in \mathcal{M}^P, Q \neq Q_P$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\Big] \\ \leq\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(\kappa Z_t^{Q_P,P} + (1-\kappa) Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big] \\ <\ & \kappa \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\Big] + (1-\kappa)\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big] \\ =\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big] \\ & + \kappa\Bigg(\underbrace{\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\Big] - \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big]}_{\leq 0}\Bigg) \\ \leq\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big], \end{aligned}$$

d. h. die Minimumstelle ist eindeutig. Da wir nach der ersten Aussage immer ein mindestens gleichwertiges deterministisches und zeitunabhängiges Paar $\left(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}\right)$ finden können, dessen dualer Zielfunktionswert besser ist, muss aufgrund der Eindeutigkeit dieses Maß Q_P deterministische und zeitunabhängige Parameter $(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P})$ besitzen und somit in der Menge $\bar{\mathcal{M}}^P$ liegen. □

In Theorem 3.7 haben wir gezeigt, dass wir uns bei der Suche nach dem ungünstigsten Martingalmaß auf den Bereich $\bar{\Theta} \subset \Theta$ der deterministischen und zeitunabhängigen Parameter beschränken können. Daher betrachten wir das konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{cases} k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \to \min \\ (\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \in \bar{\Theta}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Bemerkung 3.8
Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $k\left(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}\right) < \infty$ ist. Ansonsten würde gelten:

$$\begin{aligned}\infty &= \int_0^T \exp\left(tk\left(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}\right) K(dt)\right) = \inf_{(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \in \bar{\Theta}} \int_0^T \exp\left(tk\left(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}\right)\right) K(dt) \\ &\leq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] \quad \forall Q \in \mathcal{M}^P.\end{aligned}$$

Dies wäre ein Widerspruch zu Annahme 3.3.

Proposition 3.9

(i) Wenn $Q_P \in \mathcal{M}^P$ als Minimumstelle von $Q \mapsto \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right]$ existiert, dann lösen die zugehörigen Girsanov-Parameter das konvexe Optimierungsproblem (3.12).

(ii) Wenn $(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P})$ das Problem (3.12) löst, dann existiert ein ungünstigstes Maß $Q_P \in \mathcal{M}^P$ und hat $(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P})$ als Girsanov-Parameter, d. h. $Q_P = Q(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P})$.

Beweis:

(i) Für $Q_P \in \mathcal{M}^P$ können wir nach Theorem 3.7 (ii) aufgrund der Eindeutigkeit annehmen, dass $Q_P \in \bar{\mathcal{M}}^P$ ist. Nach Proposition 3.6 sind $(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P})$ Girsanov-Parameter und für das Problem (3.12) ein zulässiges Paar. Nehmen wir an, es existiere ein für (3.12) zulässiges Paar $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})$ mit

$$k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) < k(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}) < \infty.$$

Dieses deterministische und zeitunabhängige Paar $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})$ definiert nach Proposition 3.6 ein Maß Q aus der Menge $\bar{\mathcal{M}}^P$ und es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P\left[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] &= \int_0^T \exp\left(tk\left(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}\right)\right) K(dt) \\ &< \int_0^T \exp\left(tk\left(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}\right)\right) K(dt) \\ &= \mathbb{E}_P\left[\int_0^T f\left(Z_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\right].\end{aligned}$$

Dies stellt einen Widerspruch zur Definition von Q_P dar.

(ii) Nach Bemerkung 3.8 und Proposition 3.6 ist $\left(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}\right)$ ein Girsanov-Paar und definiert ein Maß $Q_P := Q\left(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}\right) \in \bar{\mathcal{M}}^P$, für das gilt

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^T f\left(Z_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\right] = \int_0^T \exp\left(tk\left(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}\right)\right) K(dt).$$

Angenommen, es gebe ein $Q = Q(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}) \in \mathcal{M}^P$ mit

$$\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big] < \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\Big]. \tag{3.13}$$

Nach Theorem 3.7 (ii) können wir annehmen, dass $Q \in \bar{\mathcal{M}}^P$ ist mit $\left(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}\right)$ als Girsanov-Parameter, welche ein für (3.12) zulässiges Paar darstellen. Damit gilt

$$\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\Big] = \int_0^T \exp\Big(tk\left(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}\right)\Big) K(dt).$$

Aus (3.13) ergibt sich

$$k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) < k(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}),$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. □

Damit genügt es, die Existenz und Darstellung einer Lösung des konvexen Optimierungsproblems zu untersuchen.

Das konvexe Optimierungsproblem

Da wir in diesem Abschnitt ausschließlich zeitunabhängige und deterministische Parameter betrachten, lassen wir den Querstrich weg und schreiben $(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P})$ statt $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})$. Um eine Lösung $(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P})$ von (3.12) zu erhalten, betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} k(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}) \to \min \\ \mu_P + \int_{|x|>1} x\nu_P(dx) + \sigma^2\zeta_{Q,P} + \int_{\mathbb{R}_0} x(\eta_{Q,P}(x) - 1)\nu_P(dx) \le 0 \\ \mu_P + \int_{|x|>1} x\nu_P(dx) + \sigma^2\zeta_{Q,P} + \int_{\mathbb{R}_0} x(\eta_{Q,P}(x) - 1)\nu_P(dx) \ge 0 \\ \zeta_{Q,P} \in \mathbb{R},\ \eta_{Q,P} \in \Xi \end{cases}$$

mit

$$k(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}) = \frac{q(q-1)}{2}\sigma^2\zeta_{Q,P}^2 + \int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q,P}^q(x) - 1 - q(\eta_{Q,P}(x) - 1)\Big)\nu_P(dx).$$

Verwenden wir für die erste Nebenbedingung den Lagrangemultiplikator $y_1 \ge 0$ und für die zweite den Lagrangemultiplikator $y_2 \ge 0$, so erhalten wir mit $\tilde{y} := y_2 - y_1 \in \mathbb{R}$ als Lagrangefunktion $L : \mathbb{R} \times \Xi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L\left(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}, \tilde{y}\right) \;:=\; & \frac{q(q-1)\sigma^2\zeta_{Q,P}^2}{2} + \int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q,P}^q(x) - 1 - q(\eta_{Q,P}(x) - 1)\Big)\nu_P(dx) \\ & + \tilde{y}\Big(\mu_P + \int_{|x|>1} x\nu_P(dx) + \sigma^2\zeta_{Q,P} + \int_{\mathbb{R}_0} x(\eta_{Q,P}(x) - 1)\nu_P(dx)\Big). \end{aligned}$$

Direktes Differenzieren der Lagrangefunktion nach $\zeta_{Q,P}$ und anschließendes Nullsetzen ergibt $\tilde{y} = -q(q-1)\zeta_{Q,P}$.

Da die Abbildung

$$\eta_{Q,P} \mapsto L\left(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}, \tilde{y}\right)$$

konvex in $\eta_{Q,P} > 0$ ist, fordern wir

$$\frac{d}{dt} L(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P} + tF, \tilde{y})_{|t=0} = 0$$

für alle F. Damit erhalten wir $\eta_{Q,P}(x) = (1 + (q-1)\zeta_{Q,P}x)^{\frac{1}{q-1}}$ und wir führen daher die Bedingung $\mathcal{C}_q$ ein:

$\mathcal{C}_q$: es sei $\sigma > 0$ und es existiert ein $\zeta_{Q,P}$ mit

(i) $1 + (q-1)\zeta_{Q,P}x > 0 \quad \nu_P$ fast sicher,

(ii) $\zeta_{Q,P}$ löst die Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) mit $\eta_{Q,P}(x) = (1 + (q-1)\zeta_{Q,P}x)^{\frac{1}{q-1}}$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}_0} \left| x \left((1 + (q-1)\zeta_{Q,P}x)^{\frac{1}{q-1}} - 1 \right) \right| \nu_P(dx) < \infty$

und

$\mathcal{C}_q$: es sei $\sigma = 0$ und es existiert ein $\zeta_{Q,P}$ mit

(i) $1 - \frac{\zeta_{Q,P}}{q} x > 0 \quad \nu_P$ fast sicher,

(ii) $\zeta_{Q,P}$ löst die Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) mit $\eta_{Q,P}(x) = \left(1 - \frac{\zeta_{Q,P}}{q} x\right)^{\frac{1}{q-1}}$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}_0} \left| x \left(\left(1 - \frac{\zeta_{Q,P}}{q} x\right)^{\frac{1}{q-1}} - 1 \right) \right| \nu_P(dx) < \infty.$

Eine Lösung $\zeta_{Q,P}$ muss es nicht immer geben. Wir sagen in Lemma 3.11, unter welchen Bedingungen sie existiert, wenn für den Lévy Prozess alle Sprunghöhen $x \in \mathbb{R}_0$ zugelassen sind.

Bemerkung 3.10

- Nach Annahme 2.8 gilt $\mu_P + \int_{|x|>1} x \nu_P(dx) > 0$.
- $\int_{-1}^{0} x \left(\frac{1}{(1+x)^\gamma} - 1 \right) \nu_P(dx) < 0$ und $\int_{0}^{\infty} x \left(\frac{1}{(1+x)^\gamma} - 1 \right) \nu_P(dx) < 0, \quad \gamma \in (0,1)$.

Wir betrachten die im Folgenden sehr nützliche Ungleichung

$$\mathcal{U}: \qquad \mu_P + \int_{|x|>1} x \nu_P(dx) \leq \left| -\sigma^2 \gamma + \int_{\mathbb{R}_0} x \left(\frac{1}{(1+x)^\gamma} - 1 \right) \nu_P(dx) \right|.$$

Lemma 3.11
Sei $\sigma > 0$. Dann gilt

(i) Für $x \in \mathbb{R}_0$ ist der maximal zulässige Bereich von $\zeta_{Q,P}$ für $\eta_{Q,P}(x) = \left(1 - \frac{\zeta_{Q,P}}{\gamma}x\right)^{-\gamma} > 0$ mit $\gamma \in (0,1)$ gegeben durch das Intervall $[-\gamma, 0]$.

(ii) Die Minimumstelle der Abbildung

$$\zeta_{Q,P} \mapsto \sigma^2\zeta_{Q,P} + \int_{\mathbb{R}_0} x\left(\left(1 - \frac{\zeta_{Q,P}}{\gamma}x\right)^{-\gamma} - 1\right)\nu_P(dx) \tag{3.14}$$

ist gegeben durch $-\gamma$.

(iii) Wenn die Ungleichung $\mathcal{U}$ gilt, dann existiert eine Lösung $\zeta_{Q,P}$ der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10).

Sei $\sigma = 0$. Dann gilt

(iv) Für $x \in \mathbb{R}_0$ ist der maximal zulässige Bereich von $\zeta_{Q,P}$ für $\eta_{Q,P}(x) = \left(1 - \frac{\zeta_{Q,P}}{q}x\right)^{\frac{1}{q-1}} > 0$ mit $\gamma \in (0,1)$ gegeben durch das Intervall $[0, -q]$.

(v) Die Minimumstelle der Abbildung

$$\zeta_{Q,P} \mapsto \int_{\mathbb{R}_0} x\left(\left(1 - \frac{\zeta_{Q,P}}{q}x\right)^{-\gamma} - 1\right)\nu_P(dx)$$

ist gegeben durch $-q$.

(vi) Wenn die Ungleichung $\mathcal{U}$ gilt, dann existiert eine Lösung $\zeta_{Q,P}$ der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10).

Beweis:
Wir beweisen die Aussagen (i) - (iii), da sich der Fall $\sigma = 0$ direkt aus den ersten drei Aussagen ergibt, indem wir $\zeta_{Q,P}$ durch $-\frac{1}{q(q-1)}\zeta_{Q,P}$ ersetzen.

(i) Damit $\eta_{Q,P}(x) = \left(1 - \frac{\zeta_{Q,P}}{\gamma}x\right)^{-\gamma} > 0$ ist, muss $\gamma > \zeta_{Q,P}x \quad \forall x \in (-1,\infty)\backslash\{0\}$ gelten.

- Sei $x \in (-1,0)$, dann gilt $\gamma > \zeta_{Q,P}x$ wenn $\zeta_{Q,P} \in [-\gamma, 0] \cup [0,\infty)$.
- Sei $x \in (0,\infty)$, dann gilt $\gamma > \zeta_{Q,P}x$ wenn $\zeta_{Q,P} \in (-\infty, 0]$.

Insgesamt erhalten wir für $x \in \mathbb{R}_0$: $\zeta_{Q,P} \in [-\gamma,\infty) \cap (-\infty, 0] = [-\gamma, 0]$.

(ii) Es gilt für $\zeta_{Q,P} := -\gamma\kappa, \ \kappa \in [0,1]$:

- $x \in (-1,0)$:

$$\kappa \leq 1 \ \Leftrightarrow \ x\kappa \geq x \quad \Leftrightarrow \quad (1+\kappa x)^\gamma \geq (1+x)^\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(1+\kappa x)^\gamma} - 1 \leq \frac{1}{(1+x)^\gamma} - 1$$
$$\Leftrightarrow \ x\left(\frac{1}{(1+\kappa x)^\gamma} - 1\right) \geq x\left(\frac{1}{(1+x)^\gamma} - 1\right).$$

- $x \in (0,\infty)$:

$$\kappa \leq 1 \ \Leftrightarrow \ x\kappa \leq x \quad \Leftrightarrow \quad (1+\kappa x)^\gamma \leq (1+x)^\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(1+\kappa x)^\gamma} - 1 \geq \frac{1}{(1+x)^\gamma} - 1$$
$$\Leftrightarrow \ x\left(\frac{1}{(1+\kappa x)^\gamma} - 1\right) \geq x\left(\frac{1}{(1+x)^\gamma} - 1\right).$$

Damit gilt für alle $\zeta_{Q,P} = -\gamma\kappa$ mit $\kappa \in [0,1]$, da $\sigma^2\zeta_{Q,P} = -\sigma^2\kappa\gamma \geq -\sigma^2\gamma$,

$$\sigma^2\zeta_{Q,P} + \int_{\mathbb{R}_0} x\left(\left(1 - \frac{\zeta_{Q,P}}{\gamma}x\right)^{-\gamma} - 1\right)\nu_P(dx) \geq -\sigma^2\gamma + \int_{\mathbb{R}_0} x\left(\frac{1}{(1+x)^\gamma} - 1\right)\nu_P(dx),$$

d. h. $-\gamma$ ist die Minimumstelle.

(iii) Da für die Power Nutzenfunktion die Wahl des Girsanov-Parameters $\zeta_{Q,P}$ eingeschränkt ist, erhalten wir genau dann ein $\zeta_{Q,P} \in [-\gamma, 0]$ als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung, wenn die Minimumstelle von (3.14) betragsmäßig größer ist als $\mu_P + \int_{|x|>1} x\nu_P(dx)$. Dies ist wegen $\mathcal{U}$ erfüllt. □

Bemerkung 3.12

Der in Lemma 3.11 angegebene, maximal zulässige Bereich bezieht sich auf eine Aktie mit Sprunghöhen in $(-1,\infty)\backslash\{0\}$. Werden die zugelassenen Sprunghöhen auf eine kleinere Teilmenge eingeschränkt, so vergrößert sich der zulässige Bereich von $\zeta_{Q,P}$, siehe Beispiel 5.2.

Theorem 3.13

Wenn $\mathcal{C}_q$ erfüllt ist, dann existiert eine Lösung $(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P})$ des konvexen Optimierungsproblems (3.12) und diese Lösung definiert für alle $y \in (0,\infty)$ eine duale Lösung $Q_P \in \bar{\mathcal{M}}^P$.

Beweis:

Für $\sigma > 0$ sei $\eta_{Q_P}(x) := (1 + (q-1)\zeta_{Q_P}x)^{\frac{1}{q-1}}$, für $\sigma = 0$ sei $\eta_{Q_P}(x) := \left(1 - \frac{\zeta_{Q_P}}{q}x\right)^{\frac{1}{q-1}}$. Wenn $\mathcal{C}_q$ erfüllt ist, dann existiert bzgl. η_{Q_P} eine Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) und das Paar $(\zeta_{Q_P}.\eta_{Q_P})$ löst (3.12). Mit Proposition 3.9 folgt dann die Behauptung. □

Bemerkung 3.14

- Da ζ_{Q_P} von dem Maß $P \in \mathcal{P}$ abhängt, muss man ζ_{Q_P} für jedes $P \in \mathcal{P}$ wieder neu als Lösung von (3.10) bzgl. η_{Q_P} berechnen.

- Wenn wir unter den Voraussetzungen von Theorem 3.13 ein ungünstigstes Maß $Q_P \in \mathcal{M}^P$ erhalten haben, ergeben sich die Girsanov-Parameter von $P^\star \in \mathcal{P}$ über $\arg\inf_{P\in\mathcal{P}} k\left(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P}\right)$, da

$$\begin{aligned}
\arg \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] &= \arg \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q_P,P}\right) K(dt)\right] \\
&= \arg \inf_{P\in\mathcal{P}} \int_0^T \exp\Big(tk\left(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P}\right)\Big) K(dt) \\
&= \arg \inf_{P\in\mathcal{P}} k\left(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P}\right).
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.15

- Die Aussage von Theorem 3.13 gibt es in einer ähnlichen Form in der Arbeit von [Jeanblanc et al] für das Einpunktmaß $K(dt) := \delta_T(dt)$ und $\sigma > 0$.

- Wir erhalten die ungünstigsten Girsanov-Parameter ζ_{Q_0} und η_{Q_0} des Maßes $Q_0 \in \bar{\mathcal{M}}^{P_0}$ als Minimumstelle von $Q \mapsto \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(y\frac{Z_t^{Q,P_0}}{Z_t^{P,P_0}}\right) K(dt)\right]$ über die Gleichungen

$$\zeta_{Q_0} := \zeta_{Q_P} + \zeta_P \quad \text{sowie} \quad \eta_{Q_0} := \eta_{Q_P} \cdot \eta_P.$$

- Lässt man die strikte Positivität von η_{Q_P} außer Acht, so erhält man signierte Maße, die im Allgemeinen nicht durch ein stochastisches Exponential beschrieben werden können. Die Idee der Reduktion, die wir von [Jeanblanc et al] übernommen und verallgemeinert haben, funktioniert dann nicht mehr. Eine duale Lösung für den Fall $K(dt) = \delta_T(dt)$ und $q > 1$ konnte aber durch [Bender, Niethammer] mit Hilfe einer Verifikationstechnik angegeben werden. Alle anderen Voraussetzungen für die Existenz dieser dualen Lösung blieben jedoch auch dort relevant. Aufgrund der unterschiedlichen Aktienmodellierung sehen die entsprechenden (Un-)Gleichungen in $\mathcal{C}_q$ zwar anders aus, dennoch erhält man aus ihnen die von [Bender, Niethammer] formulierten Bedingungen mit den in Lemma 4.2 [Kallsen] angegebenen Transformationen.

- In den Beispielen 5.2 und 5.3 wurden für die Nutzenfunktion $U(x) = 2\sqrt{x}$ die ungünstigsten Maße $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ berechnet.

Damit können wir nun die Lösung des primalen Problems für die Power Nutzenfunktion angeben.

Theorem 3.16
Es gelte $\mathcal{C}_q$ bzgl. $P^\star$. Dann existiert eine duale Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ bzgl. $y^\star$ mit $v(y^\star) + x_0 y^\star = u(x_0)$ und eine primale Lösung ist gegeben durch

- $u(x_0) = \frac{1}{1-\gamma}(y^\star)^q \int_0^T \exp\left(tk\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right)\right) K(dt)$,
- $y^\star = (x_0)^{-\gamma} \left(\int_0^T \exp\left(tk\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right)\right) K(dt)\right)^\gamma$,
- $c_s^\star = \frac{x_0}{\int_0^T \exp\left(tk\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right)\right) K(dt)} \left(Z_s^{Q^\star, P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad \forall s \in [0,T]$

mit $Z^{Q^\star, P^\star}$ gegeben durch (3.5) bzgl. $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})$.

Beweis:
Der Lagrangemultiplikator ist die Lösung von

$$\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_0^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star, P^\star}\right) K(dt)\right] = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad I\left(y^\star\right) \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_0^T I\left(Z_t^{Q^\star, P^\star}\right) K(dt)\right] = x_0$$
$$\Leftrightarrow \quad I\left(y^\star\right) \int_0^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(Z_t^{Q^\star, P^\star}\right)\right] K(dt) = x_0. \qquad (3.15)$$

Es gilt

$$\mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(Z_t^{Q^\star, P^\star}\right)\right] = \mathbb{E}_{P^\star}\left[\left(Z_t^{Q^\star, P^\star}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] = \mathbb{E}_R\left[\exp\left(tk\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right)\right)\right]$$

und somit erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
(3.15) \quad &\Leftrightarrow \quad I\left(y^\star\right) \mathbb{E}_R\left[\int_0^T \exp\left(tk\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right)\right) K(dt)\right] = x_0 \\
&\Leftrightarrow \quad I\left(y^\star\right) = \frac{x_0}{\int_0^T \exp\left(tk(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})\right) K(dt)} \\
&\Leftrightarrow \quad y^\star = \left(\frac{x_0}{\int_0^T \exp\left(tk(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})\right) K(dt)}\right)^{-\gamma}.
\end{aligned}$$

Da die Berechnung der dualen Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ unabhängig vom Lagrangemultiplikator ist, existiert aufgrund der Voraussetzung für alle $y \in (0, \infty)$ eine duale Lösung von $v(y)$ mit $v_{P^\star}(y) = v(y)$ für alle $y \in (0, \infty)$.

Nach Theorem 2.40 ist für $x_0 \in (0, \infty)$ (beliebig aber fest) der optimale Lagrangemultiplikator $y^\star$ durch $v(y^\star) + x_0 y^\star = \inf_{y>0}(v(y) + x_0 y)$ gegeben, woraus nach Theorem 2.32 folgt

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \inf_{y>0}(v(y)+x_0y) = v(y^\star)+x_0y^\star = v_{P^\star}(y^\star)+x_0y^\star \geq \inf_{y>0}(v_{P^\star}(y)+x_0y) = u_{P^\star}(x_0) \\ &\geq \inf_{P\in\mathcal{P}} u_P(x_0) = u(x_0), \end{aligned}$$

d. h. $v_{P^\star}(y^\star)+x_0y^\star = \inf_{y>0}(v_{P^\star}(y)+x_0y) = u(x_0)$. Für den primalen Zielfunktionswert erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T U\left(I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)\right)K(dt)\right] = \frac{1}{1-\gamma}\,(y^\star)^q\,\mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T \left(Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)^q K(dt)\right] \\ &= \frac{1}{1-\gamma}\,(y^\star)^q \int_0^T \exp\Big(tk(\zeta_{Q^\star},\eta_{Q^\star})\Big)K(dt). \end{aligned}$$

□

In den beiden folgenden Beispielen illustrieren wir die Berechnung des Maßes $P^\star \in \mathcal{P}$ (gemäß Bemerkung 3.14), wenn das ungünstigste Martingalmaß $Q_P \in \mathcal{M}^P$ gegeben ist.

Beispiel 3.17

Wir betrachten bzgl. einer Power Nutzenfunktion unsere primale Problemstellung der robusten Konsumnutzenmaximierung für einen **Black-Scholes Markt.** Der Aktienkurs unter P_0 ist gegeben durch das Tripel $\left(\mu_{P_0},\sigma^2,0\right),\sigma>0,$ d. h.

$$dS_t = S_t(\mu_{P_0}dt+\sigma dW_t),\ S_0>0.$$

Aufgrund der fehlenden Sprünge folgt $\nu_0(dx)=0$. Mit $\sigma W_t^P = \sigma W_t - \sigma^2\zeta_P t$ lässt sich der Aktienkurs unter $P\in\mathcal{P}$ schreiben als

$$dS_t = S_t\left(\left(\mu_{P_0}+\sigma^2\zeta_P\right)dt+\sigma dW_t^P\right).$$

Jedes Maß $P\in\mathcal{P}$ soll den Drift der Aktie um den Faktor $\rho\in A\subset(0,\infty),\ A$ abgeschlossen, verändern, d. h. es gilt $\mu_{P_0}+\sigma^2\zeta_P = \rho\mu_{P_0} \Leftrightarrow \zeta_P = \frac{(\rho-1)\mu_{P_0}}{\sigma^2}$. Damit lässt sich die Menge $\mathcal{P}$ wie folgt beschreiben:

$$\mathcal{P} := \left\{P : Z_T^{P,P_0} = \exp\left(\frac{(\rho-1)\mu_{P_0}}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{(\rho-1)\mu_{P_0}}{\sigma}\right)^2 T\right), \rho\in A\right\}.$$

Dieser hier betrachtete Black-Scholes Markt ist vollständig. Es existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß $Q_P\in\bar{\mathcal{M}}^P$, dessen Radon-Nikodym Ableitung gegeben ist durch

$$Z_T^{Q_P,P} = \exp\left(\zeta_{Q_P}\sigma W_T^P - \frac{1}{2}\zeta_{Q_P}^2\sigma^2 T\right) = \exp\left(\frac{\mu_{P_0}\rho}{\sigma}W_T^P - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{P_0}\rho}{\sigma}\right)^2 T\right) \quad \text{mit}$$

$\zeta_{Q_P} = -\frac{\mu_{P_0}\rho}{\sigma^2}$ als eindeutige Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung.

Das duale Optimierungsproblem vereinfacht sich auf

$$\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] \;=\; \inf_{\rho\in A}\int_0^T \exp\left(t\frac{q(q-1)\sigma^2\zeta_{Q_P}^2}{2}\right) K(dt),$$

d. h. die Minimierung von $\frac{q(q-1)\sigma^2}{2}\left(\frac{\mu_{P_0}\rho}{\sigma^2}\right)^2$ bzgl. allen $\rho\in A$. Da $\frac{q(q-1)}{2\sigma^4}\mu_{P_0}^2 > 0$ gilt, ist $\rho^\star = \min\{\rho : \rho\in A\}$ die Lösung des obigen Problems und es gilt für

- das ungünstigste, subjektive Maß $P^\star\in\mathcal{P}$:

$$Z_T^{P^\star,P_0} = \exp\left(\frac{(\rho^\star-1)\mu_{P_0}}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{(\rho^\star-1)\mu_{P_0}}{\sigma}\right)^2 T\right) \quad \text{mit} \quad \zeta_{P^\star} = \frac{(\rho^\star-1)\mu_{P_0}}{\sigma^2},$$

- das ungünstigste, $P^\star$ äquivalente Martingalmaß $Q^\star\in\bar{\mathcal{M}}^{P^\star}$:

$$Z_T^{Q^\star,P^\star} = \exp\left(\frac{\mu_{P_0}\rho^\star}{\sigma}W_T^{P^\star} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{P_0}\rho^\star}{\sigma}\right)^2 T\right) \quad \text{mit} \quad \zeta_{Q^\star} = -\frac{\mu_{P_0}\rho^\star}{\sigma^2}.$$

◇

Bemerkung 3.18
Die Motivation, über die Menge $\mathcal{P}$ den Drift der Aktie zu beeinflussen, entstammt aus der Arbeit von [Gundel] (2005).

Beispiel 3.19
Wir betrachten bzgl. einer Power Nutzenfunktion unsere primale Problemstellung der robusten Konsumnutzenmaximierung für einen **Poisson Sprungmarkt.** Der Aktienkurs unter P_0 ist gegeben durch das Tripel $\left(\mu_{P_0}, 0, \lambda_{P_0}\mathbb{1}_{\{x=1\}}\right)$ mit $\delta(x,[0,t]) = N_t\mathbb{1}_{\{x=1\}}$, d. h.

$$dS_t = S_{t-}(\mu_{P_0}dt + d(N_t - \lambda_{P_0}t)),\ S_0 > 0,$$

wobei N den Poisson Prozess beschreibt und $\lambda_{P_0} > \mu_{P_0} > 0$ die zugehörige Sprungintensität unter P_0. Bzgl. jedem $P\in\mathcal{P}$ soll sich die erwartete Anzahl an Sprüngen im Zeitintervall $[0,1]$ auf $\lambda_P = \eta_P(1)\lambda_{P_0}$ ändern. Wiederum soll diese Änderung so erfolgen, dass sich der Drift der Aktie in $\rho\mu_{P_0}$ ändert, $\rho\in A\subset(0,\infty)$ mit A abgeschlossen, d. h. unter P besitzt die Aktie S die Darstellung

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-}((\mu_{P_0} + \lambda_P - \lambda_{P_0})dt + d(N_t - \lambda_P t)) \\ &= S_{t-}(\mu_{P_0}\rho dt + d(N_t - \lambda_P t)) \end{aligned}$$

und somit gilt $\eta_P(1) = 1 + \frac{\mu_{P_0}}{\lambda_{P_0}}(\rho - 1)$ und $\lambda_P = \lambda_{P_0} + \mu_{P_0}(\rho - 1)$. Damit lässt sich die Menge $\mathcal{P}$ wie folgt beschreiben:

$$\mathcal{P} := \left\{ P : Z_T^{P,P_0} = \left(1 + \frac{\mu_{P_0}(\rho-1)}{\lambda_{P_0}}\right)^{N_T} \exp\Big(- \mu_{P_0} T(\rho - 1)\Big), \rho \in A \right\}.$$

Auch dieser Markt ist vollständig. Es gilt mit $\lambda_{Q_P} = \nu_{Q_P}(1) = \eta_{Q_P}(1)\nu_P(1) = \eta_{Q_P}(1)\lambda_P$

$$dS_t = S_{t-}(\mu_{P_0}\rho dt + d(N_t - \lambda_P t)) = S_{t-}((\mu_{P_0}\rho - \lambda_P + \lambda_{Q_P})dt + d(N_t - \lambda_{Q_P} t))$$

und mit der Market-Price-of-Risk-Gleichung $\mu_{P_0}\rho - \lambda_P + \lambda_{Q_P} = 0$ erhalten wir für den Girsanov-Parameter $\eta_{Q_P}(1) = \frac{\lambda_{Q_P}}{\lambda_P} = 1 - \frac{\mu_{P_0}\rho}{\lambda_{P_0} + \mu_{P_0}(\rho-1)}$. Die Radon-Nikodym Ableitung des Maßes $Q_P \in \mathcal{M}^P$ ist gegeben durch

$$Z_T^{Q_P,P} = \left(1 - \frac{\mu_{P_0}\rho}{\lambda_{P_0} + \mu_{P_0}(\rho-1)}\right)^{N_T} \exp\Big(\mu_{P_0} T\rho\Big).$$

Das duale Optimierungsproblem vereinfacht sich auf

$$\begin{aligned} & \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T f\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] \\ = \; & \inf_{\rho\in A} \int_0^T \exp\left(t\left(\eta_{Q_P}^q(1) - 1 - q\left(\eta_{Q_P}(1) - 1\right)\lambda_P \frac{\nu_{P_0}(1)}{\lambda_{P_0}}\right)\right) K(dt), \end{aligned}$$

d. h. die Minimierung von $\left(\left(1 - \frac{\mu_{P_0}\rho}{\lambda_{P_0}+\mu_{P_0}(\rho-1)}\right)^q - 1 + q\frac{\mu_{P_0}\rho}{\lambda_{P_0}+\mu_{P_0}(\rho-1)}\right)\lambda_P$ bzgl. allen $\rho \in A$. Dieser Ausdruck lässt sich wie folgt strukturieren:

$$\begin{aligned} & \left(\left(1 - \frac{\mu_{P_0}\rho}{\lambda_{P_0} + \mu_{P_0}(\rho-1)}\right)^q - 1 + q\frac{\mu_{P_0}\rho}{\lambda_{P_0} + \mu_{P_0}(\rho-1)}\right)(\lambda_{P_0} + \mu_{P_0}(\rho-1)) \\ = \; & \frac{(\lambda_{P_0} - \mu_{P_0})^q}{(\lambda_{P_0} + \mu_{P_0}(\rho-1))^{q-1}} - \lambda_{P_0} - \mu_{P_0}(\rho-1) + q\mu_{P_0}\rho \\ = \; & (\lambda_{P_0} - \mu_{P_0})^{1-\frac{1}{\gamma}}(\lambda_{P_0} - \mu_{P_0} + \mu_{P_0}\rho)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{1}{\gamma}\mu_{P_0}\rho + \mu_{P_0}. \end{aligned}$$

Da $\lambda_{P_0} - \mu_{P_0} > 0$ ist, handelt es sich oben um eine in ρ streng konvexe Funktion, deren globales Minimum gegeben ist durch $\rho = 0$, denn es gilt mit $h(\rho) := (\lambda_{P_0} - \mu_{P_0})^{1-\frac{1}{\gamma}}(\lambda_{P_0} - \mu_{P_0} + \mu_{P_0}\rho)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{1}{\gamma}\mu_{P_0}\rho + \mu_{P_0}$

$$\begin{aligned} h'(\rho) \;&=\; (\lambda_{P_0} - \mu_{P_0})^{1-\frac{1}{\gamma}}\frac{1}{\gamma}(\lambda_{P_0} - \mu_{P_0} + \mu_{P_0}\rho)^{\frac{1}{\gamma}-1}\mu_{P_0} - \frac{1}{\gamma}\mu_{P_0} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; (\lambda_{P_0} - \mu_{P_0})^{1-\frac{1}{\gamma}}(\lambda_{P_0} - \mu_{P_0} + \mu_{P_0}\rho)^{\frac{1}{\gamma}-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow\; (\lambda_{P_0} - \mu_{P_0} + \mu_{P_0}\rho)^{\frac{1}{\gamma}-1} = (\lambda_{P_0} - \mu_{P_0})^{\frac{1}{\gamma}-1} \\ &\Leftrightarrow\; \mu_{P_0}\rho = 0. \end{aligned}$$

Zudem gilt $h''(0) = (\lambda_{P_0} - \mu_{P_0})^{1-\frac{1}{\gamma}}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)(\lambda_{P_0} - \mu_{P_0} + \mu_{P_0}\rho)^{\frac{1}{\gamma}-2}\mu_{P_0}^2 > 0$. Da A „rechts“ der Null liegt, ist das minimierende $\rho^\star = \min\{\rho : \rho \in A\}$ und wir erhalten für

- das ungünstigste, subjektive Maß $P^\star \in \mathcal{P}$:

$$Z_T^{P^\star,P_0} = \left(1 + \frac{\mu_{P_0}}{\lambda_{P_0}}(\rho^\star - 1)\right)^{N_T} \exp\Big(-\mu_{P_0} T(\rho^\star - 1)\Big) \quad \text{mit} \quad \eta_{P^\star}(1) = 1 + \frac{\mu_{P_0}(\rho^\star - 1)}{\lambda_{P_0}},$$

- das ungünstigste, $P^\star$ äquivalente Martingalmaß $Q^\star \in \bar{\mathcal{M}}^{P^\star}$:

$$Z_T^{Q^\star,P^\star} = \left(1 - \frac{\mu_{P_0}\rho^\star}{\lambda_{P_0} + \mu_{P_0}(\rho^\star - 1)}\right)^{N_T} \exp\Big(\mu_{P_0} T \rho^\star\Big) \quad \text{mit} \quad \eta_{Q^\star}(1) = \frac{\lambda_{P_0} - \mu_{P_0}}{\lambda_{P_0} + \mu_{P_0}(\rho^\star - 1)}.$$

$\diamond$

3.3.2 Logarithmische Nutzenfunktion

Wir gehen in diesem Abschnitt auf das konvexe Optimierungsproblem ein, welches wir für eine Teilmenge $\mathcal{M}_{\subseteq}^P \subseteq \mathcal{M}^P$ von Martingalmaßen herleiten und dass die in der Literatur (z. B. [Goll, Kallsen], [Goll, Rüschendorf], [Kallsen]) angegebenen, ungünstigsten Girsanov-Parameter liefert.

Wir untersuchen die Nutzenfunktion $U(x) = \ln x$ mit der konvex konjugierten Funktion

$$V(y) = U(I(y)) - yI(y) = -\ln y - 1, \qquad I(y) = \frac{1}{y}$$

und erhalten für den dualen Optimalwert bzgl. $\mathcal{M}_{\subseteq}^P$ die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} v_P(y) &:= \inf_{Q \in \mathcal{M}_{\subseteq}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] \\ &= \inf_{Q \in \mathcal{M}_{\subseteq}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \left(-\ln(yZ_t^{Q,P}) - 1\right) K(dt)\right] \\ &= \inf_{Q \in \mathcal{M}_{\subseteq}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T -\ln Z_t^{Q,P} K(dt)\right] - \ln y \int_0^T K(dt) - \int_0^T K(dt). \end{aligned}$$

Um nun die duale Zielfunktion weiter zu vereinfachen, gehen wir genauer auf die Menge $\mathcal{M}_{\subseteq}^P$ ein. Dazu betrachten wir die Klasse $\Theta_{\subseteq}$ von Parametern, welche die Maße $Q \in \mathcal{M}_{\subseteq}^P \subseteq \mathcal{M}^P$ repräsentieren. Wir nehmen nur solche Parameter aus der Menge Θ (siehe Abschnitt 3.3.1) in die Teilmenge $\Theta_{\subseteq}$ auf, für die gilt:

(i) $\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \big|\ln \eta_{Q,P}(x,s)\big| \nu_P(dx)ds < \infty$ und

(ii) $\mathbb{E}_P\left[\int_0^T \int_0^t -\sigma\zeta_{Q,P}(s) dW_s^P - \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \ln \eta_{Q,P}(x,s)(\delta - \nu_Q)(dx,ds)K(dt)\right] = 0.$

Für diese Menge an Parametern bzw. Martingalmaßen erhalten wir analog zur Power Nutzenfunktion aufgrund der Supermartingaleigenschaft

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T -\ln Z_t^{Q,P} K(dt)\Big] \\
\geq\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \Big(\int_0^t -\sigma\zeta_{Q,P}(s)dW_s^P + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\zeta_{Q,P}^2(s)ds - \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} \ln\eta_{Q,P}(x,s)\delta(dx,ds) \\
& + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} \Big(\eta_{Q,P}(x,s)-1\Big)\nu_P(dx)ds\Big)K(dt)\Big] \\
=\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T \Big(\int_0^t -\sigma\zeta_{Q,P}(s)dW_s^P - \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} \ln\eta_{Q,P}(x,s)(\delta-\nu_P)(dx,ds) \\
& + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q,P}^2(s)ds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} \Big(\eta_{Q,P}(x,s)-1-\ln\eta_{Q,P}(x,s)\Big)\nu_P(dx)ds\Big)K(dt)\Big] \\
=\ & \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T\int_0^t k(\zeta_{Q,P}(s),\eta_{Q,P}(s))dsK(dt)\Big]
\end{aligned}$$

mit

$$k(\zeta_{Q,P},\eta_{Q,P}) := \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q,P}^2 + \int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q,P}(x)-1-\ln\eta_{Q,P}(x)\Big)\nu_P(dx).$$

Wie im Fall der Power Nutzenfunktion ergibt sich die Existenz eines Paares $(\bar{s},\bar{\omega})\in[0,T]\times\Omega$, für das die anschließenden Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T\int_0^t k(\zeta_{Q,P}(s,\omega),\eta_{Q,P}(s,\omega))dsK(dt)\Big] &\geq \int_0^T\int_0^t k(\zeta_{Q,P}(s,\bar{\omega}),\eta_{Q,P}(s,\bar{\omega}))dsK(dt) \\
&\geq \int_0^T tk(\zeta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega}),\eta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega}))K(dt) \\
&= \int_0^T tk(\bar{\zeta}_{Q,P},\bar{\eta}_{Q,P})K(dt)
\end{aligned}$$

mit $\bar{\zeta}_{Q,P} := \zeta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega})$ und $\bar{\eta}_{Q,P} := \eta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega})$.

Bemerkung 3.20

- Analog zu Bemerkung 3.5 gilt auch hier wegen Lemma 4.4 [Kallsen] für den Fall, dass wir konstante Parameter betrachten, die Gültigkeit von $\mathbb{E}_P\Big[\int_0^T -\ln Z_t^{Q,P}K(dt)\Big] = \int_0^T tk(\bar{\zeta}_{Q,P},\bar{\eta}_{Q,P})K(dt)$
- Da $0\leq\big(1-\sqrt{\bar{\eta}_{Q,P}}\big)^2 \leq \bar{\eta}_{Q,P}-1-\ln\bar{\eta}_{Q,P}$ für alle $\bar{\eta}_{Q,P}\in\Xi$ gilt, ist Proposition 3.6 auch für die logarithmische Nutzenfunktion gültig. Damit sind alle Parameter $\big(\bar{\zeta}_{Q,P},\bar{\eta}_{Q,P}\big)\in\bar{\Theta}_{\subseteq}$ mit $k(\bar{\zeta}_{Q,P},\bar{\eta}_{Q,P})<\infty$ Girsanov-Parameter und der zugehörige duale Zielfunktionswert ist endlich.

Theorem 3.21

(i) Für jedes $Q \in \mathcal{M}_{\subseteq}^P$ existiert ein $\bar{Q} \in \bar{\mathcal{M}}_{\subseteq}^P$ mit

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^T -\ln\left(Z_t^{\bar{Q},P}\right) K(dt)\right] \leq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T -\ln\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right]$$

d. h. $$\inf_{Q\in\mathcal{M}_{\subseteq}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T -\ln\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] = \inf_{Q\in\bar{\mathcal{M}}_{\subseteq}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T -\ln\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right].$$

(ii) Wenn eine Minimumstelle von $Q \mapsto \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right]$ in $\mathcal{M}_{\subseteq}^P$ existiert, dann existiert eine eindeutige Minimumstelle in $\bar{\mathcal{M}}_{\subseteq}^P$.

Beweis:
Wegen Bemerkung 3.20 analog zu Theorem 3.7. □

Damit lautet das zu betrachtende, konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{cases} k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \to \min \\ (\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \in \bar{\Theta}_{\subseteq}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Nach Annahme 3.3 gilt für die Zielfunktion der optimalen Lösung $(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P})$ von (3.16) die Ungleichung $k(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}) < \infty$.

Bemerkung 3.22

- Man erhält das konvexe Optimierungsproblem für die logarithmische Nutzenfunktion nicht als Spezialfall des konvexen Optimierungsproblems für die Power Nutzenfunktion mit $\gamma = 1$.
- Der in Proposition 3.9 geführte Beweis bzgl. dem Zusammenhang zwischen dem dualen und dem konvexen Optimierungsproblem gilt wegen Bemerkung 3.20 und Theorem 3.21 auch für die hier betrachtete logarithmische Nutzenfunktion.

Das konvexe Optimierungsproblem

Da wir in diesem Abschnitt ausschließlich zeitunabhängige und deterministische Parameter betrachten, lassen wir den Querstrich weg und schreiben $(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P})$ statt $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})$. Die Lagrangefunktion $L : \mathbb{R} \times \Xi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für das Optimierungsproblem (3.16) ist gegeben durch

$$L(\zeta_{Q,P},\eta_{Q,P},\tilde{y}) := \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q,P}^2+\int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q,P}(x)-1-\ln\eta_{Q,P}(x)\Big)\nu_P(dx)$$
$$+\tilde{y}\bigg(\mu_P+\int_{|x|>1}x\nu_P(dx)+\sigma^2\zeta_{Q,P}+\int_{\mathbb{R}_0}x(\eta_{Q,P}(x)-1)\nu_P(dx)\bigg).$$

Direktes Differenzieren der Lagrangefunktion nach $\zeta_{Q,P}$ und anschließendes Nullsetzen ergibt $\zeta_{Q,P}=-\tilde{y}$. Da die Abbildung

$$\eta_{Q,P}\mapsto L\left(\zeta_{Q,P},\eta_{Q,P},\tilde{y}\right)$$

konvex in $\eta_{Q,P}>0$ ist, fordern wir

$$\frac{d}{dt}L(\zeta_{Q,P},\eta_{Q,P}+tF,\tilde{y})_{|t=0}=0$$

für alle F. Damit erhalten wir $\eta_{Q,P}(x)=\frac{1}{1-\zeta_{Q,P}x}$.

Diese Parameter sind nach [Kallsen] genau die Parameter, die für einen optimalen Konsumratenprozess in Frage kommen. Sie tauchen auch z. B. bei den Arbeiten von [Goll, Kallsen] und [Corcuera et al] auf, wobei jeweils auf unterschiedliche Art ihre Optimalität begründet wird. Um eine Existenzaussage bzgl. des ungünstigsten Martingalmaßes formulieren zu können, führen wir die folgende Bedingung ein:

$\mathcal{C}_0$: es sei $\sigma>0$ und es existiert ein $\zeta_{Q,P}$ mit

(i) $1-\zeta_{Q,P}x>0$ ν_P fast sicher,

(ii) $\zeta_{Q,P}$ löst die Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) mit $\eta_{Q,P}(x)=\left(\frac{1}{1-\zeta_{Q,P}x}\right)$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}_0}\left|x\left((1-\zeta_{Q,P}x)^{-1}-1\right)\right|\nu_P(dx)<\infty$

und

$\mathcal{C}_0$: es sei $\sigma=0$ und es existiert ein $\zeta_{Q,P}$ mit

(i) $1+\zeta_{Q,P}x>0$ ν_P fast sicher,

(ii) $\zeta_{Q,P}$ löst die Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) mit $\eta_{Q,P}(x)=\left(\frac{1}{1+\zeta_{Q,P}x}\right)$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}_0}\left|x\left((1+\zeta_{Q,P}x)^{-1}-1\right)\right|\nu_P(dx)<\infty$.

Lemma 3.23
Sei $\sigma > 0$. Dann gilt

(i) Für $x \in \mathbb{R}_0$ ist der maximal zulässige Bereich von $\zeta_{Q,P}$ für $\eta_{Q,P}(x) = (1 - \zeta_{Q,P}x)^{-1} > 0$ gegeben durch das Intervall $[-1, 0]$.

(ii) Die Minimumstelle der Abbildung

$$\zeta_{Q,P} \mapsto \sigma^2 \zeta_{Q,P} + \int_{\mathbb{R}_0} x \left((1 - \zeta_{Q,P}x)^{-1} - 1 \right) \nu_P(dx)$$

ist gegeben durch -1.

(iii) Wenn die Ungleichung $\mathcal{U}$ gilt, dann existiert eine Lösung $\zeta_{Q,P}$ der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10).

Sei $\sigma = 0$. Dann gilt

(iv) Für $x \in \mathbb{R}_0$ ist der maximal zulässige Bereich von $\zeta_{Q,P}$ für $\eta_{Q,P}(x) = (1 + \zeta_{Q,P}x)^{-1} > 0$ gegeben durch das Intervall $[0, 1]$.

(v) Die Minimumstelle der Abbildung

$$\zeta_{Q,P} \mapsto \int_{\mathbb{R}_0} x \left((1 + \zeta_{Q,P}x)^{-1} - 1 \right) \nu_P(dx)$$

ist gegeben durch 1.

(vi) Wenn die Ungleichung $\mathcal{U}$ gilt, dann existiert eine Lösung $\zeta_{Q,P}$ der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10).

Beweis:
Für $\sigma > 0$ folgen die Behauptungen aus Lemma 3.11 mit $\gamma = 1$. Für $\sigma = 0$ beweisen wir die Aussagen (iv) - (vi) wie folgt.

(i) Wir erhalten

- $x \in (-1, 0)$:

$$1 > -\zeta_{Q,P}x \quad \Leftrightarrow \quad \zeta_{Q,P} \leq 1, \quad \text{d. h.} \quad \zeta_{Q,P} \in (-\infty, 1].$$

- $x \in (0, \infty)$:

$$1 > -\zeta_{Q,P}x \quad \Leftrightarrow \quad \zeta_{Q,P} \geq 0, \quad \text{d. h.} \quad \zeta_{Q,P} \in [0, \infty).$$

Insgesamt ist der maximal zulässige Bereich gegeben durch $(-\infty, 1] \cap [0, \infty) = [0, 1]$.

(ii) Wir setzen $\zeta_{Q,P} := \kappa, \kappa \in [0,1]$. Es gilt

- $x \in (-1,0)$

$$\kappa \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\kappa x} \leq \frac{1}{1+x} \quad \Leftrightarrow \quad x\left(\frac{1}{1+\kappa x}-1\right) \geq x\left(\frac{1}{1+x}-1\right).$$

- $x \in (0,\infty)$

$$\kappa \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\kappa x} \geq \frac{1}{1+x} \quad \Leftrightarrow \quad x\left(\frac{1}{1+\kappa x}-1\right) \geq x\left(\frac{1}{1+x}-1\right).$$

Damit erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}_0} x\left(\frac{1}{1+\zeta_{Q,P}x}-1\right)\nu_P(dx) \quad \geq \quad \int_{\mathbb{R}_0} x\left(\frac{1}{1+x}-1\right)\nu_P(dx),$$

d. h. $\zeta_{Q,P} = 1$ ist die Minimumstelle.

(iii) Die Existenzaussage im Falle $\sigma = 0$ bzgl. $\zeta_{Q,P}$ ergibt sich analog zu Lemma 3.11 (iii) bzw. (vi). □

Theorem 3.24
Wenn $\mathcal{C}_0$ erfüllt ist, dann existiert eine Lösung $(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P})$ des konvexen Optimierungsproblems (3.16) und diese Lösung definiert für alle $y \in (0,\infty)$ eine duale Lösung $Q_P \in \bar{\mathcal{M}}_{\subseteq}^P$.

Beweis:
Für $\sigma > 0$ sei $\eta_{Q_P}(x) := (1-\zeta_{Q_P}x)^{-1}$, für $\sigma = 0$ sei $\eta_{Q_P}(x) := (1+\zeta_{Q_P}x)^{-1}$. Wenn $\mathcal{C}_0$ erfüllt ist, dann existiert bzgl. η_{Q_P} eine Lösung ζ_{Q_P} der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) und das Paar $(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P})$ löst (3.16). Mit Bemerkung 3.22 folgt dann die Behauptung. □

Bemerkung 3.25
Wenn wir unter den Voraussetzungen von Theorem 3.24 ein ungünstigstes Maß $Q_P \in \mathcal{M}_{\subseteq}^P$ erhalten haben, ergeben sich die Girsanov-Parameter von $P^\star \in \mathcal{P}$ über $\arg\inf_{P\in\mathcal{P}} k\left(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P}\right)$, da mit $\mathcal{M}_{\subseteq} := \left\{(P,Q) : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{M}_{\subseteq}^P\right\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\arg\inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}_{\subseteq}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] &= \arg\inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q_P,P}\right)K(dt)\right] \\
&= \arg\inf_{P\in\mathcal{P}} \int_0^T tk\left(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P}\right)K(dt) \\
&= \arg\inf_{P\in\mathcal{P}} k\left(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P}\right).
\end{aligned}$$

Theorem 3.26
Es gelte $\mathcal{C}_0$ bzgl. $P^\star$. Dann existiert eine duale Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}_\subseteq$ bzgl. $y^\star$ mit $v(y^\star) + x_0 y^\star = u(x_0)$ und eine primale Lösung ist gegeben durch

- $u(x_0) = \int_0^T \left(tk\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right) - \ln(y^\star)\right) K(dt)$,
- $y^\star = \frac{\int_0^T K(dt)}{x_0}$,
- $c_s^\star = \frac{x_0}{\int_0^T K(dt)} \left(Z_s^{Q^\star, P^\star}\right)^{-1} \quad \forall s \in [0,T]$

mit $Z^{Q^\star, P^\star}$ gegeben durch (3.5) bzgl. $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})$.

Beweis:
Der Lagrangemultiplikator ist die Lösung von

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_0^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt)\right] = x_0 \quad &\Leftrightarrow \quad I\left(y^\star\right) \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_0^T I\left(Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt)\right] = x_0 \\
&\Leftrightarrow \quad I\left(y^\star\right) = \frac{x_0}{\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_0^T \left(Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)^{-1} K(dt)\right]} \\
&\Leftrightarrow \quad I\left(y^\star\right) = \frac{x_0}{\int_0^T K(dt)} \quad \Leftrightarrow \quad y^\star = \frac{\int_0^T K(dt)}{x_0}.
\end{aligned}$$

Es verbleibt die Darstellung der primalen Zielfunktion zu zeigen.

$$\begin{aligned}
u(x_0) &= \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T U\left(I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)\right) K(dt)\right] \\
&= \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T -\ln\left(y^\star\right) K(dt)\right] + \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T -\ln Z_t^{Q^\star,P^\star} K(dt)\right] \\
&= -\int_0^T \ln\left(y^\star\right) K(dt) + \int_0^T tk(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}) K(dt).
\end{aligned}$$

□

3.3.3 Exponentielle Funktion

In diesem Abschnitt untersuchen wir das duale Optimierungsproblem bzgl. der Funktion $U(x) = -\frac{1}{\rho}\exp(-\rho x)$ mit $\rho \in (0, \infty)$. Nach unserer Definition handelt es sich um keine Nutzenfunktion, allerdings kann man diesen Begriff wie auch die in Kapitel 2 vorgestellte Dualitätstheorie auf den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ von U ausdehnen, siehe [Gundel] (2006). Daher untersuchen wir die Exponentialfunktion in diesem Abschnitt näher.

Die konvex konjugierte Funktion V ist gegeben durch

$$V(y) \;=\; U(I(y)) - yI(y) = \frac{1}{\rho}(y\ln y - y).$$

Da $\mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P}K(dt)\right] \leq \int_0^T K(dt) < \infty \;\; \forall Q \in \mathcal{M}^P$ gilt, ist $Z^{Q,P}$ integrierbar bzgl. $P \times K$ für jedes $Q \in \mathcal{M}^P$ und damit lässt sich die duale Zielfunktion bzgl. einer Teilmenge $\mathcal{M}^P_{\subseteq}$ wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}
v_P(y) &:= \inf_{Q\in\mathcal{M}^P_{\subseteq}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] \\
&= \inf_{Q\in\mathcal{M}^P_{\subseteq}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T \frac{1}{\rho}\left(yZ_t^{Q,P}\ln\left(yZ_t^{Q,P}\right) - yZ_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] \\
&= \inf_{Q\in\mathcal{M}^P_{\subseteq}} \left(\frac{1}{\rho}y\mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P}\left(\ln y + \ln Z_t^{Q,P}\right)K(dt)\right] - \frac{1}{\rho}y\mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P}K(dt)\right]\right) \\
&= \inf_{Q\in\mathcal{M}^P_{\subseteq}} \frac{1}{\rho}\Bigg(y\ln(y)\mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P}K(dt)\right] + y\mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P}\ln Z_t^{Q,P}K(dt)\right] \\
&\qquad\qquad -y\mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P}K(dt)\right]\Bigg) \\
&= \inf_{Q\in\mathcal{M}^P_{\subseteq}} \frac{1}{\rho}\left(y\ln y\int_0^T K(dt) + y\mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P}\ln Z_t^{Q,P}K(dt)\right]\right) - \frac{1}{\rho}y\int_0^T K(dt).
\end{aligned}$$

Um nun die duale Zielfunktion weiter zu vereinfachen, gehen wir genauer auf die Menge $\mathcal{M}^P_{\subseteq}$ ein. Dazu betrachten wir die Klasse $\Theta_{\subseteq}$ von Parametern, welche die Maße $Q \in \mathcal{M}^P_{\subseteq}$ repräsentieren. Wir nehmen nur solche Parameter aus der Menge Θ (siehe Abschnitt 3.3.1) in die Teilmenge $\Theta_{\subseteq}$ auf, für die

(i) $\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \left|\ln \eta_{Q,P}(x)\right| \nu_Q(dx) < \infty$,

(ii) $\mathbb{E}_Q\left[\int_0^T \left(\int_0^t \sigma\zeta_{Q,P}(s)dW_s^Q + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \ln\eta_{Q,P}(x,s)(\delta - \nu_Q)(dx,ds)\right)K(dt)\right] = 0$ und

(iii) $\mathbb{E}_P\left[\exp\left(\int_0^t k(\zeta_{Q,P}(s,\omega),\eta_{Q,P}(s,\omega))ds\right)\right] < \infty \quad \forall t \in [0,T]$

mit

$$k(\zeta_{Q,P},\eta_{Q,P}) \;:=\; \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q,P}^2 - \int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q,P}(x) - 1 - \eta_{Q,P}(x)\ln\eta_{Q,P}(x)\Big)\nu_P(dx).$$

gilt. Die letzte Bedingungen ist auch in der Arbeit von [Esche, Schweitzer] zu finden. Wir erhalten für alle Parameter aus der Menge $\Theta_{\subseteq}$

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_P\Big[\int_0^T Z_t^{Q,P}\ln Z_t^{Q,P}K(dt)\Big] \\
= \;& \mathbb{E}_Q\Big[\int_0^T\int_0^t \sigma\zeta_{Q,P}(s)dW_s^P - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\zeta_{Q,P}^2(s)ds \\
& + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{Q,P}(x,s)\delta(dx,ds) - \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q,P}(x,s)-1\Big)\nu_P(dx)dsK(dt)\Big] \\
= \;& \mathbb{E}_Q\Big[\int_0^T\Big(\int_0^t \sigma\zeta_{Q,P}(s)dW_s^Q + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{Q,P}(x,s)(\delta-\nu_Q)(dx,ds)\Big)K(dt)\Big] \\
& + \mathbb{E}_Q\Big[\int_0^T\Big(\int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q,P}^2(s)ds \\
& - \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q,P}(x,s)-1-\eta_{Q,P}(x,s)\ln\eta_{Q,P}(x,s)\Big)\nu_P(dx)ds\Big)K(dt)\Big] \\
= \;& \mathbb{E}_Q\Big[\int_0^T\int_0^t k(\zeta_{Q,P}(s),\eta_{Q,P}(s))dsK(dt)\Big].
\end{aligned}
$$

Mit den gleichen Argumenten wie zuvor folgern wir die Existenz eines Paares $(\bar{s},\bar{\omega})\in[0,T]\times\Omega$, für das die anschließenden Ungleichungen gelten:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q\Big[\int_0^T\int_0^t k(\zeta_{Q,P}(s,\omega),\eta_{Q,P}(s,\omega))dsK(dt)\Big] &\geq \int_0^T\int_0^t k(\zeta_{Q,P}(s,\bar{\omega}),\eta_{Q,P}(s,\bar{\omega}))dsK(dt) \\
&\geq \int_0^T tk(\zeta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega}),\eta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega}))K(dt) \\
&= \int_0^T tk(\bar{\zeta}_{Q,P},\bar{\eta}_{Q,P})K(dt)
\end{aligned}
$$

mit $\bar{\zeta}_{Q,P} := \zeta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega})$ und $\bar{\eta}_{Q,P} := \eta_{Q,P}(\bar{s},\bar{\omega})$.

Bemerkung 3.27

- Analog zu Bemerkung 3.5 gilt auch hier wegen Lemma 4.4 [Kallsen] für den Fall, dass wir konstante Parameter betrachten, die Gültigkeit von $\mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P}\ln Z_t^{Q,P}K(dt)\right] = \int_0^T tk(\bar{\zeta}_{Q,P},\bar{\eta}_{Q,P})K(dt)$

- Da $0\leq\left(1-\sqrt{\bar{\eta}_{Q,P}}\right)^2\leq\bar{\eta}_{Q,P}\ln\bar{\eta}_{Q,P}+1-\bar{\eta}_{Q,P}$ für alle $\bar{\eta}_{Q,P}\in\Xi$ gilt, ist Proposition 3.6 auch für die Exponentialfunktion gültig. Damit sind alle Parameter $(\bar{\zeta}_{Q,P},\bar{\eta}_{Q,P})\in\bar{\Theta}_{\subseteq}$ mit $k(\bar{\zeta}_{Q,P},\bar{\eta}_{Q,P})<\infty$ Girsanov-Parameter und der zugehörige duale Zielfunktionswert ist endlich.

Theorem 3.28

(i) Für jedes $Q \in \mathcal{M}_{\subseteq}^P$ existiert ein $\bar{Q} \in \bar{\mathcal{M}}_{\subseteq}^P$ mit

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{\bar{Q},P} \ln\left(Z_t^{\bar{Q},P}\right) K(dt)\right] \leq \mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P} \ln\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right]$$

d. h. $$\inf_{Q\in\mathcal{M}_{\subseteq}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P} \ln\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right] = \inf_{Q\in\bar{\mathcal{M}}_{\subseteq}^P} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T Z_t^{Q,P} \ln\left(Z_t^{Q,P}\right) K(dt)\right].$$

(ii) Wenn eine Minimumstelle von $Q \mapsto \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt)\right]$ in $\mathcal{M}_{\subseteq}^P$ existiert, dann existiert eine eindeutige Minimumstelle in $\bar{\mathcal{M}}_{\subseteq}^P$.

Beweis:
Wegen Bemerkung 3.27 analog zu Theorem 3.7. □

Damit lautet das zu betrachtende, konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{cases} k(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \to \min \\ (\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P}) \in \bar{\Theta}_{\subseteq}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Nach Annahme 3.3 gilt für die Zielfunktion der optimalen Lösung $(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P})$ von (3.17) die Ungleichung $k(\bar{\zeta}_{Q_P}, \bar{\eta}_{Q_P}) < \infty$.

Bemerkung 3.29
Der in Proposition 3.9 geführte Beweis bzgl. dem Zusammenhang zwischen dem dualen und dem konvexen Optimierungsproblem gilt wegen Bemerkung 3.27 und Theorem 3.28 auch für die hier betrachtete Exponentialfunktion.

Das konvexe Optimierungsproblem

Da wir in diesem Abschnitt ausschließlich zeitunabhängige und deterministische Parameter betrachten, lassen wir den Querstrich weg und schreiben $(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P})$ statt $(\bar{\zeta}_{Q,P}, \bar{\eta}_{Q,P})$. Die Lagrangefunktion $L : \mathbb{R} \times \Xi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für das Optimierungsproblem (3.17) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}, \tilde{y}) \;:=\; & \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q,P}^2 - \int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q,P}(x) - 1 - \eta_{Q,P}(x)\ln\eta_{Q,P}(x)\Big)\nu_P(dx) \\ & + \tilde{y}\left(\mu_P + \int_{|x|>1} x\nu_P(dx) + \sigma^2\zeta_{Q,P} + \int_{\mathbb{R}_0} x(\eta_{Q,P}(x) - 1)\nu_P(dx)\right). \end{aligned}$$

Direktes Differenzieren der Lagrangefunktion nach $\zeta_{Q,P}$ und anschließendes Nullsetzen ergibt $\zeta_{Q,P} = -\tilde{y}$. Da die Abbildung

$$\eta_{Q,P} \mapsto L\left(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P}, \tilde{y}\right)$$

konvex in $\eta_{Q,P} > 0$ ist, fordern wir

$$\frac{d}{dt} L(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P} + tF, \tilde{y})_{|t=0} = 0$$

für alle F. Damit erhalten wir $\eta_{Q,P}(x) = \exp(\zeta_{Q,P} x)$.

Diese Parameter sind nach [Kallsen] genau die Parameter, die für einen optimalen Konsumratenprozess in Frage kommen. Sie tauchen auch z. B. bei den Arbeiten von [Chan], [Corcuera et al], [Esche, Schweizer], [Fujiwara, Miyahara] und [Steiger] auf, wobei jeweils auf unterschiedliche Art ihre Optimalität begründet wird.

Bemerkung 3.30
Im exponentiellen Fall ist im Gegensatz zu den beiden vorherigen Fällen der zulässige Bereich für den Parameter $\zeta_{Q,P}$ nicht eingeschränkt.

Daher betrachten wir für $\sigma > 0$ die Ungleichung

$$\mathcal{U}: \qquad \int_{\mathbb{R}_0} \left| x\left(\exp\left(\zeta_{Q,P} x\right) - 1\right) \right| \nu_P(dx) < \infty$$

und für $\sigma = 0$ die Ungleichung

$$\mathcal{U}: \qquad \int_{\mathbb{R}_0} \left| x\left(\exp\left(-\zeta_{Q,P} x\right) - 1\right) \right| \nu_P(dx) < \infty.$$

Theorem 3.31
Sei ζ_{Q_P} eine Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung. Wenn $\mathcal{U}$ bzgl. ζ_{Q_P} gilt, dann existiert eine Lösung $(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P})$ des konvexen Optimierungsproblems (3.17) und diese Lösung definiert für alle $y \in (0, \infty)$ eine duale Lösung $Q_P \in \bar{\mathcal{M}}^P_{\subseteq}$.

Beweis:
Wir betrachten die Fälle $\sigma > 0$ und $\sigma = 0$ separat.

- $\sigma > 0$: Aufgrund der Definition von η_{Q_P} sind alle ζ_{Q_P} zulässig. Da für $\zeta_{Q_P} = 0$ die Ungleichung $\mu_P + \int_{|x|>1} x\nu_P(dx) > 0$ gilt und $x\left(\exp\left(\zeta_{Q_P}x\right) - 1\right) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_0$ sowie $\zeta_{Q_P} \in (-\infty, 0)$ ist, erhalten wir

$$\lim_{\zeta_{Q_P} \to -\infty} \left(\int_{\mathbb{R}_0} x\Big(\exp\left(\zeta_{Q_P}x\right) - 1\Big)\nu_P(dx) + \sigma^2\zeta_{Q_P} \right) = -\infty$$

  und mit dem Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle, siehe auch [Steiger]. Da die Existenz des Maßes $Q_P \in \bar{\mathcal{M}}^P_{\subseteq}$ unabhängig von $y \in (0, \infty)$ ist, folgt mit Bemerkung 3.29 die Behauptung.

- $\sigma = 0$: Setzen wir $\zeta_{Q_P} = 0$ in die Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) ein, so ist die linke Seite wie bisher strikt positiv. Da für $\zeta_{Q_P} > 0$

  - $x \in (-1, 0)$: $\quad \exp\left(-\zeta_{Q_P}x\right) - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(\exp(-\zeta_{Q_P}x) - 1\right) < 0,$
  - $x \in (0, \infty)$: $\quad \exp\left(-\zeta_{Q_P}x\right) - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(\exp(-\zeta_{Q_P}x) - 1\right) < 0$

  gilt, erhalten wir die Existenz einer Nullstelle der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) bzgl. $\eta_{Q_P}(x) = \exp(-\zeta_{Q_P}x)$, wenn $\zeta_{Q_P} \to \infty$. Da die Existenz eines Maßes $Q_P \in \bar{\mathcal{M}}^P_{\subseteq}$ unabhängig von $y \in (0, \infty)$ ist, folgt mit Bemerkung 3.29 die Behauptung. □

Bemerkung 3.32
Wenn wir unter den Voraussetzungen von Theorem 3.31 ein ungünstigstes Maß $Q_P \in \mathcal{M}^P_{\subseteq}$ erhalten haben, ergeben sich die Girsanov-Parameter von $P^\star \in \mathcal{P}$ über $\arg\inf_{P\in\mathcal{P}} k\left(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P}\right)$, da mit $\mathcal{M}_{\subseteq} := \left\{(P, Q) : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{M}^P_{\subseteq}\right\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\arg \inf_{(P,Q)\in\mathcal{M}_{\subseteq}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q,P}\right) K(dt) \right] &= \arg \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P\left[\int_0^T V\left(yZ_t^{Q_P,P}\right) K(dt) \right] \\
&= \arg \inf_{P\in\mathcal{P}} \int_0^T tk\left(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P}\right) K(dt) \\
&= \arg \inf_{P\in\mathcal{P}} k\left(\zeta_{Q_P}, \eta_{Q_P}\right).
\end{aligned}$$

Theorem 3.33
Sei $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})$ eine Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung bzgl. $P^\star$ und gelte $\mathcal{U}$ bzgl. $\zeta_{Q^\star}$. Dann existiert eine duale Lösung $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}_{\subseteq}$ bzgl. $y^\star$ mit $v(y^\star) + x_0 y^\star = u(x_0)$ und eine primale Lösung ist gegeben durch

- $u(x_0) = -\frac{1}{\rho} y^\star \int_0^T K(dt)$,
- $y^\star = \exp\left(-\rho \frac{x_0 + \frac{1}{\rho}\int_0^T tk\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right) K(dt)}{\int_0^T K(dt)}\right)$,
- $c_s^\star = \frac{x_0 + \frac{1}{\rho}\int_0^T tk\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right) K(dt)}{\int_0^T K(dt)} - \frac{1}{\rho} \ln Z_s^{Q^\star, P^\star} \quad \forall s \in [0,T]$

mit $Z^{Q^\star, P^\star}$ gegeben durch (3.5) bzgl. $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})$.

Beweis:
Damit $y^\star$ die Bedingung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_0^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star, P^\star}\right) K(dt)\right] &= I\left(y^\star\right) \int_0^T K(dt) + \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_0^T I\left(Z_t^{Q^\star, P^\star}\right) K(dt)\right] \\
&= I\left(y^\star\right) \int_0^T K(dt) - \frac{1}{\rho} \int_0^T tk(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}) K(dt) \\
&= x_0
\end{aligned}$$

erfüllt, muss die Gleichung

$$I\left(y^\star\right) = \frac{x_0 + \frac{1}{\rho}\int_0^T tk\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right) K(dt)}{\int_0^T K(dt)} \quad \Leftrightarrow \quad y^\star = \exp\left(-\rho \frac{x_0 + \frac{1}{\rho}\int_0^T tk\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right) K(dt)}{\int_0^T K(dt)}\right)$$

gelten. Für den primalen Zielfunktionswert erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(x_0) &= \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T U\left(I\left(y^\star Z_t^{Q^\star, P^\star}\right)\right) K(dt)\right] = \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T -\frac{1}{\rho} y^\star Z_t^{Q^\star, P^\star} K(dt)\right] \\
&= -\frac{1}{\rho} y^\star \int_0^T K(dt).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.34
Bei der Existenz wie auch der Darstellung der ungünstigsten Girsanov-Parameter $\zeta_{Q^\star}$ und $\eta_{Q^\star}$ ist bzgl. den drei Nutzenfunktionen aufgefallen, dass diese unabhängig von der Wahl des Maßes K sind. Dieses Maß spielt nur beim Lagrangemultiplikator eine wichtige Rolle. Mit den in Kapitel 3 erreichten Resultaten können wir nun im folgenden Kapitel 4 eine Investmentstrategie für den optimalen Konsumprozess berechnen.

Kapitel 4

Berechnung einer Investmentstrategie

Bei der klassischen Martingalmethode wird vorausgesetzt, dass jeder Zahlungsanspruch replizierbar ist, d. h. eine Hedgingstrategie für alle zulässigen Zahlungsansprüche existiert. In den meisten Märkten gibt es aber auch Zahlungsansprüche, die nicht replizierbar sind.

Wir zeigen in **Abschnitt 4.1**, wann wir im Lévy Markt einen allgemeinen Zahlungsanspruch hedgen können und wie dann eine zugehörige Strategie aussieht. Diese Ergebnisse wenden wir dann in **Abschnitt 4.2** auf die optimalen Konsumprozesse aus Kapitel 3 an, um eine zugehörige Investmentstrategie zu berechnen. Abschließend vergleichen wir unsere Resultate mit den Arbeiten von [Kallsen] und [Corcuera et al] in **Abschnitt 4.3**.

4.1 Das allgemeine Hedgingtheorem

Gegeben sei ein Finanzmarkt, der aus einer Aktie und einem Bond besteht, beide wie in unserem bisherigen Lévy Markt modelliert. Wir betrachten ausschließlich die Maße $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ aus Kapitel 3. Es soll ein $\mathcal{F}_T^L$ messbarer Zahlungsanspruch H_T mit $\mathbb{E}_{Q^\star}[H_T] = x_0$ gehedged werden.

Ob wir immer eine Hedgingstrategie für H_T finden können, hängt von der betrachteten Filtration ab, wie das folgende Beispiel (welches dem Buch von [Dana, Jeanblanc] entnommen wurde) zeigt:

Beispiel 4.1
Gegeben sei ein Bond B mit $B_t = 1$ für alle $t \in [0,T]$ und eine Aktie S, die wie folgt über zwei unabhängige Brown'sche Bewegungen $W^{(1)}$ und $W^{(2)}$ bzgl. dem Maß P_0 modelliert wird:

$$dS_t = S_t \left(\mu_{P_0} dt + \sigma_1 dW_t^{(1)} + \sigma_2 dW_t^{(2)} \right), S_0 > 0$$

mit den konstanten Parametern $\mu_{P_0} > 0, (\sigma_1, \sigma_2) \in (0,\infty)^2$.

Lassen wir als Filtration die von beiden Brown'schen Bewegungen erzeugte Filtration $\mathcal{F}^{W^{(1)},W^{(2)}}$ zu, so ist der Zahlungsanspruch $W_T^{(2)}$ messbar bzgl. $\mathcal{F}_T^{W^{(1)},W^{(2)}}$, aber über die Aktie nicht replizierbar.

Betrachten wir hingegen nur die Zahlungsansprüche, die messbar bzgl. der vom Aktienkurs erzeugten Filtration $\mathcal{F}_T^S$ sind, so können wir jeden messbaren Zahlungsanspruch replizieren: wir definieren für alle $t \in [0,T]$

$$W_t^{(3)} := \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\left(\sigma_1 W_t^{(1)} + \sigma_2 W_t^{(2)}\right) \quad \text{sowie} \quad \sigma_3 := \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

und können diesbzgl. die Aktie in der Form

$$dS_t = S_t\left(\mu_{P_0}dt + \sigma_3 dW_t^{(3)}\right)$$

darstellen. Aufgrund der konstanten Parameterwahl gilt $\mathcal{F}_t^{W^{(3)}} = \mathcal{F}_t^S$ für alle $t \in [0,T]$ und da jeder $\mathcal{F}_T^{W^{(3)}}$ messbare Zahlungsanspruch als Funktion von S_T dargestellt werden kann, folgt die Behauptung. ◇

Definition 4.2
Ein Lévy Markt heißt vollständig, wenn für jeden Zahlungsanspruch H_T mit $\mathbb{E}_{Q^\star}[H_T] = x_0$, welcher $\mathcal{F}_T^L$ messbar ist, eine Strategie $\alpha^\star \in \mathcal{A}(x_0)$ existiert mit $x_0 + \int_0^t \alpha_s^\star dS_s = \mathbb{E}_{Q^\star}\left[H_T \middle| \mathcal{F}_t^L\right]$ für alle $t \in [0,T]$. Wir nennen dann $\alpha^\star$ eine Hedgingstrategie für H_T.

In dem von uns betrachteten Lévy Markt ist es nicht möglich, zulässige Hedgingstrategien für jeden Zahlungsanspruch zu finden, wenn der Investor genau eine Aktie und einen Bond zur Verfügung hat.

Beispiel 4.3
Replizierbare Zahlungsansprüche in dem von uns betrachteten Lévy Markt sind

(i) die Aktie selbst, d. h. $H_T = S_T$ mit der Strategie $\alpha_t^\star = 1$ für alle $t \in [0,T]$.

(ii) $H_T = (S_T - F)^+ - (F - S_T)^+$ mit Ausübungspreis $F \in \mathbb{R}$. Die Hedgingstrategie für H_T ist für alle $t \in [0,T]$ gegeben durch $\alpha_t^\star = 1$ und $\beta_t^\star = -F$. Interessanterweise lassen sich die einzelnen Bausteine von H_T nicht replizieren, siehe Beispiel 4.4 (ii). ◇

Beispiel 4.4
Nicht replizierbare Zahlungsansprüche in dem von uns betrachteten Lévy Markt sind:

(i) $H_T = W_T^{Q^\star}$, da die Anzahl $\alpha^\star$ an gehaltenen Aktien wegen

$$x_0 + \int_0^T \alpha_s^\star dS_s = x_0 + \int_0^T \alpha_s^\star \sigma S_{s-} dW_s^{Q^\star} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \alpha_s^\star x S_{s-}(\delta - \nu_{Q^\star})(dx,ds)$$

die beiden Gleichungen $\alpha_t^\star S_{t-}\sigma = 1$ und $\alpha_t^\star = 0$ für alle $t \in [0,T]$ erfüllen muss. Dies ist jedoch gleichzeitig nicht möglich.

(ii) die Europäische Call Option, d. h. $H_T = (S_T - F)^+$ mit Ausübungspreis $F \in \mathbb{R}$. Warum das so ist, wird in Bemerkung 4.8 erklärt.

Weitere Beispiele sind in der Arbeit von [Benth et al] zu finden. Um einen Zahlungsanspruch nachbilden zu können, müssen wir gemäß Definition 4.2 eine Strategie $\alpha^\star \in \mathcal{A}(x_0)$ so finden, dass zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ die Gleichung

$$x_0 + \int_0^t \alpha_s^\star dS_s = \mathbb{E}_{Q^\star}\left[H_T \middle| \mathcal{F}_t^L\right] =: H_t$$

gilt. Dazu verfolgen wir den Ansatz des Delta Hedgings. Eine Zerlegung des Aktiendepots $x_0 + \int_0^t \alpha_s^\star dS_s$ zur Zeit $t \in [0,T]$ in Abhängigkeit der Strategie $\alpha^\star$ sowie den einzelnen Prozessen der Aktie ist durch das Modell gegeben, für den zu **replizierenden Preis** H_t des Zahlungsanspruchs H_T muss noch eine geeignete Zerlegung gefunden werden. Wir verwenden allgemeine Darstellungssätze bzgl. hinreichend differenzierbaren Zufallsvariablen. Was dabei unter differenzierbar zu verstehen ist und wie die im Anschluss verwendeten Operatoren $D^{(0,Q^\star)}$ und $D^{(1)}$ angewendet werden, wird im Anhang anhand der Arbeit von [Petrou] diskutiert. Dafür benötigen wir die folgende generelle Annahme bzgl. dem zugrundeliegenden Lévy Prozess.

Annahme 4.5
Es gilt $\int_{\mathbb{R}_0} x^2 \nu_{Q^\star}(dx) < \infty$. ◇

Damit können wir neben einer notwendige Bedingung für die Replizierbarkeit eines im Markt befindlichen, differenzierbaren Zahlungsanspruches auch eine zugehörige Hedgingstrategie angeben.

Theorem 4.6
Sei $\sigma > 0$, $\mathbb{E}_{Q^\star}[H_T] = x_0$ und $H_T \in \bigcap_{l=0,1} \mathbb{D}^{(l,Q^\star)}$.

(i) Der Zahlungsanspruch H_T ist replizierbar, wenn gilt:

$$D^{(1)}_{(s,x)} H_T = \frac{x}{\sigma} D_s^{(0,Q^\star)} H_T \quad \text{für alle } (s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_0.$$

(ii) Eine Hedgingstrategie $\alpha^\star$ für H_T zur Zeit $s \in [0,T]$ ist dann gegeben durch

$$\alpha_s^\star = \frac{1}{\sigma S_{s-}} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(0,Q^\star)} H_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right],$$

falls $\alpha^\star$ zulässig im Sinne von Kapitel 2 ist.

Beweis:
Sei $t \in [0,T]$ beliebig aber fest. Mit Proposition A.23 gilt

$$\begin{aligned} H_t &= \mathbb{E}_{Q^\star}[H_T] + \int_0^t \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(0,Q^\star)} H_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right] dW_s^{Q^\star} \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_{(s,x)}^{(1)} H_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right] (\delta - \nu_{Q^\star})(dx, ds). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Gemäß unserer Modellierung folgt

$$x_0 + \int_0^t \alpha_s^\star dS_s = x_0 + \int_0^t \alpha_s^\star S_{s-} \sigma dW_s^{Q^\star} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \alpha_s^\star S_{s-} x (\delta - \nu_{Q^\star})(dx, ds). \tag{4.2}$$

Durch Vergleichen von (4.1) und (4.2) erhalten wir $x_0 = \mathbb{E}_{Q^\star}[H_T]$ und für $\alpha^\star$ die beiden folgenden Gleichungen für alle $(s,x) \in [0,t] \times \mathbb{R}_0$:

$$\begin{aligned} & \alpha_s^\star S_{s-}\sigma = \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(0,Q^\star)} H_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right] \quad \text{und} \quad \alpha_s^\star S_{s-} x = \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_{(s,x)}^{(1)} H_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right] \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_{(s,x)}^{(1)} H_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right] = \frac{x}{\sigma} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(0,Q^\star)} H_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right] \\ \Leftarrow \quad & D_{(s,x)}^{(1)} H_T = \frac{x}{\sigma} D_s^{(0,Q^\star)} H_T, \end{aligned} \tag{4.3}$$

d. h. es ergibt sich durch die Voraussetzung $D_{(s,x)}^{(1)} H_T = \frac{x}{\sigma} D_s^{(0,Q^\star)} H_T \quad \forall (s,x) \in [0,t] \times \mathbb{R}_0$ und die damit verbundenen Möglichkeit für den Prozess $\alpha^\star$, beide Gleichungen gleichzeitig zu erfüllen, kein Widerspruch. Damit erhalten wir die Aussage (i) der Replizierbarkeit. Die zweite Aussage ergibt sich dann direkt aus der folgenden Gleichheit für alle $x \in \mathbb{R}_0$:

$$\alpha_s^\star = \tfrac{1}{xS_{s-}} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_{(s,x)}^{(1)} H_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right] = \tfrac{1}{\sigma S_{s-}} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(0,Q^\star)} H_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right]. \qquad \square$$

Bemerkung 4.7
Da die Anteile $\beta^\star$ im Bond direkt durch die Anteile $\alpha^\star$ in der Aktie mit $\beta_s^\star = \mathbb{E}_{Q^\star}\left[H_T \middle| \mathcal{F}_s^L\right] - \alpha_s^\star S_s$ angegeben werden können, beschränken wir uns auf die Berechnung von $\alpha^\star$.

Bemerkung 4.8
Damit die Europäische Call Option repliziert werden kann, muss die Gleichung (4.3) erfüllt sein. Dies ist z. B. bei einer Aktie, deren Sprunghöhen sich ausschließlich im Intervall $(0,1)$ befinden, nicht gegeben. Wir erhalten für die Richtungsableitungen bzgl. allen $x \in (0,1), (s,\omega) \in [0,T] \times \Omega$

- $\frac{x}{\sigma} D_s^{(0,Q^\star)} (S_T - F)^+ = x S_T \mathbb{1}_{\{S_T > F\}}$ und
- $D_{(s,x)}^{(1)} (S_T - F)^+ = (x-1) S_T \mathbb{1}_{\{xS_T > F\}} + (F - S_T) \mathbb{1}_{\{F = xS_T\}} - (S_T - F)^+ \mathbb{1}_{\{xS_T < F\}}$

und damit die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D^{(1)}_{(s,x)}\left(S_T-F\right)^+\Big|\mathcal{F}^L_{s-}\right] \\
= \;& \mathbb{E}_{Q^\star}\left[(x-1)S_T\mathbb{1}_{\{xS_T>F\}}\Big|\mathcal{F}^L_{s-}\right]+\mathbb{E}_{Q^\star}\left[(F-S_T)\mathbb{1}_{\{F=xS_T\}}\Big|\mathcal{F}^L_{s-}\right] \\
& -\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\left(S_T-F\right)^+\mathbb{1}_{\{xS_T<F\}}\Big|\mathcal{F}^L_{s-}\right] \\
= \;& \mathbb{E}_{Q^\star}\Big[xS_T\underbrace{\mathbb{1}_{\{xS_T>F\}}}_{\leq\mathbb{1}_{\{S_T>F\}}}\Big|\mathcal{F}^L_{s-}\Big]-\underbrace{\mathbb{E}_{Q^\star}\left[S_T\mathbb{1}_{\{xS_T>F\}}\Big|\mathcal{F}^L_{s-}\right]}_{>0} \\
& +\underbrace{\mathbb{E}_{Q^\star}\left[(F-S_T)\mathbb{1}_{\{F=xS_T\}}\Big|\mathcal{F}^L_{s-}\right]}_{<0}-\underbrace{\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\left(S_T-F\right)^+\mathbb{1}_{\{xS_T<F\}}\Big|\mathcal{F}^L_{s-}\right]}_{>0} \\
< \;& \mathbb{E}_{Q^\star}\left[xS_T\mathbb{1}_{\{S_T>F\}}\Big|\mathcal{F}^L_{s-}\right]=\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\frac{x}{\sigma}D^{(0,Q^\star)}_s\left(S_T-F\right)^+\Big|\mathcal{F}^L_{s-}\right].
\end{aligned}$$

Somit sind auf der Nichtnullmenge $(0,1)\times[0,T]\times\Omega$ die beiden Prozesse verschieden und können nicht durch einen Prozess $\alpha^\star$ repliziert werden.

Für den Fall $\sigma=0$ benötigen wir die Aussagen aus der Arbeit von [Løkka], die ebenfalls im Anhang zu finden sind.

Theorem 4.9
Sei $\sigma=0$, $\mathbb{E}_{Q^\star}[H_T]=x_0$ und $H_T\in\tilde{\mathbb{D}}_{1,2}$. Wenn

$$\alpha^\star_s=\frac{1}{xS_{s-}}\mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_{(s,x)}H_T\Big|\mathcal{F}^J_{s-}\right],\quad s\in[0,T]$$

unabhängig von der Sprunghöhe x und zulässig ist, dann ist $\alpha^\star$ eine Hedgingstrategie für H_T.

Beweis:
Sei $t\in[0,T]$ beliebig aber fest. Mit Proposition A.25 gilt

$$H_t=\mathbb{E}_{Q^\star}[H_T]+\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_{(s,x)}H_T\Big|\mathcal{F}^J_{s-}\right](\delta-\nu_{Q^\star})(dx,ds)$$

und nach einem Vergleich mit der Modellierung

$$x_0+\int_0^t\alpha^\star_s dS_s=x_0+\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\alpha^\star_s S_{s-}x(\delta-\nu_{Q^\star})(dx,ds)$$

erhalten wir
$$\alpha^\star_s=\frac{1}{xS_{s-}}\mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_{(s,x)}H_T\Big|\mathcal{F}^J_{s-}\right]\quad\forall x\in\mathbb{R}_0. \tag{4.4}$$

Dieser Prozess $\alpha^\star$ kommt somit nur als Hedgingstrategie in Frage, wenn $D_{(s,x)}H$ linear von x abhängt. □

Bemerkung 4.10
Man könnte im Fall $\sigma = 0$ den Eindruck haben, dass immer eine Hedgingstrategie existiert, da man durch das Delta Hedging die Gleichung (4.4) erhält und der Prozess $\alpha^\star$ im Vergleich zu $\sigma > 0$ nicht mehrere Gleichungen auf einmal erfüllen muss. Allerdings darf die Strategie $\alpha^\star$ nicht von der Sprunghöhe x abhängen, da sie sonst nicht vorhersagbar und somit nicht zulässig wäre.

4.2 Die Lösung des primalen Problems

Wir berechnen eine zu $c^\star$ zugehörige Investmentstrategie $\alpha^\star$ unter Verwendung der Resultate aus Abschnitt 4.1 für das Sprung-Diffusions Modell und das Sprungmodell. Mit $(P^\star, Q^\star)$ bezeichnen wir wie zuvor die ungünstigsten Maße aus Kapitel 3.

Gegeben ist der optimale Konsumratenprozesses $c^\star = I\left(y^\star Z^{Q^\star,P^\star}\right)$ mit

$$\begin{aligned} Z_t^{Q^\star,P^\star} &= \exp\Bigg(\int_0^t \zeta_{Q^\star}\sigma \, dW_s^{P^\star} - \frac{1}{2}\int_0^t \zeta_{Q^\star}^2\sigma^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \ln \eta_{Q^\star}(x)\delta(dx,ds) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\eta_{Q^\star}(x) - 1\Big)\nu_{P^\star}(dx)ds \Bigg), \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

und $y^\star$ als Lösung von Theorem 3.1 (iv). Gesucht ist eine Strategie $\alpha^\star \in \mathcal{A}(x_0)$ mit $V_T(\alpha^\star, c^\star) = 0$, d. h.

$$x_0 + \int_0^T \alpha_s^\star dS_s - \int_0^T c_s^\star K(ds) = 0. \tag{4.5}$$

Die Existenz einer solchen Strategie erhalten wir mit Proposition 2.20 sowie der Optimalität von $c^\star$. Mit $H_t := \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_0^T c_s^\star K(ds)\middle|\mathcal{F}_t^L\right]$ definieren wir den Preisprozess von $H_T := \int_0^T c_s^\star K(ds)$ zur Zeit $t \in [0,T]$. Wir erhalten eine Lösung von (4.5), wenn wir für alle $t \in [0,T]$ ein $\alpha^\star \in \mathcal{A}(x_0)$ finden mit

$$x_0 + \int_0^t \alpha_s^\star dS_s = \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_0^T c_s^\star K(ds)\middle|\mathcal{F}_t^L\right] = H_t,$$

d. h. eine den Preisprozess $(H_t)_{t\in[0,T]}$ replizierende Strategie $\alpha^\star$ (gemäß Abschnitt 4.1) ist eine für den optimalen Konsumprozess $c^\star$ zugehörige Investmentstrategie. Bevor wir mit den Theoremen 4.6 und 4.9 die gesuchte Investmentstrategie $\alpha^\star \in \mathcal{A}(x_0)$ berechnen, beweisen wir die beiden nützlichen Hilfsaussagen.

Lemma 4.11
Es gilt für $c \in \mathcal{C}(x_0)$ sowie für alle $t \in [0,T]$ und $r \le t$

$$\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_t^T c_s K(ds)\middle|\mathcal{F}_r^L\right] = \int_t^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[c_s\middle|\mathcal{F}_r^L\right] K(ds).$$

Beweis:
Sei $t \in [0,T]$ beliebig aber fest. Nach Definition des bedingten Erwartungswertes müssen wir die Gültigkeit der Gleichung

$$\int_A \int_t^T c_s K(ds) dQ^\star = \int_A \int_t^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[c_s \middle| \mathcal{F}_r^L\right] K(ds) dQ^\star$$

für alle Mengen $A \in \mathcal{F}_r^L$ zeigen. Da $c \in \mathcal{C}(x_0)$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_A \int_t^T |c_s| K(ds) dQ^\star &\leq \int_\Omega \int_0^T |c_s| K(ds) dQ^\star = \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_0^T c_s K(ds)\right] \\ &= \mathbb{E}_{P^\star}\left[\int_0^T c_s Z_s^{Q^\star,P^\star} K(ds)\right] \leq x_0 < \infty\end{aligned}$$

nach Proposition 2.20. Mit Fubini gilt dann

$$\begin{aligned}\int_A \int_t^T c_s K(ds) dQ^\star &= \int_t^T \int_A c_s dQ^\star K(ds) = \int_t^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[c_s \mathbb{1}_A\right] K(ds) \\ &= \int_t^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\mathbb{E}_{Q^\star}\left[c_s \mathbb{1}_A \middle| \mathcal{F}_r^L\right]\right] K(ds) = \int_t^T \int_\Omega \mathbb{1}_A \mathbb{E}_{Q^\star}\left[c_s \middle| \mathcal{F}_r^L\right] dQ^\star K(ds) \\ &= \int_t^T \int_A \mathbb{E}_{Q^\star}\left[c_s \middle| \mathcal{F}_r^L\right] dQ^\star K(ds) = \int_A \int_t^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[c_s \middle| \mathcal{F}_r^L\right] K(ds) dQ^\star.\end{aligned}$$

□

Die für die Zerlegung wichtige Eigenschaft der Messbarkeit wird in der folgenden Hilfsaussage bewiesen.

Lemma 4.12
Für $t \in [0,T]$ ist $I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)$ messbar bzgl. $\mathcal{F}_t^L$.

Beweis:
Es genügt zu zeigen, dass $Z^{Q^\star,P^\star}$ adaptiert bzgl. $\mathcal{F}^L$ ist, was gleichbedeutend mit der $\mathcal{F}_t^L$ Messbarkeit von

$$\sigma \zeta_{Q^\star} W_t^{P^\star} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \ln \eta_{Q^\star}(x) \delta(dx, ds) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} (\eta_{Q^\star}(x) - 1)\, \nu_{P^\star}(dx) ds \tag{4.6}$$

für alle $t \in [0,T]$ ist. Nach Lemma 3.1 [Solé et al] kann die Filtration $\mathcal{F}^L$ zerlegt werden in $\mathcal{F}^{W^{P^\star}} \vee \mathcal{F}^J$. Damit lässt sich der erste und zweite Summand von (4.6) beobachten. Da die Zuwächse stationär sind, sich das Lévy Maß $\nu_{P^\star}$ durch $\nu_{P^\star}(B) = \mathbb{E}_{P^\star}[\delta(B,[0,1])]$ für $B \subset \mathbb{R}_0$ über den beobachtbaren Sprungprozess δ berechnen lässt und $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}(x))$ zeitunabhängig als auch deterministisch sind, folgt die Messbarkeit von (4.6). □

Annahme 4.13
Wir nehmen im Folgenden für die berechneten Prozesse $\alpha^\star$ an, dass diese integrierbar bzgl. dem Aktienkurs S sind. $\diamond$

4.2.1 Sprung-Diffusions Modell

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass die Volatilität $\sigma > 0$ ist.

a) Power Nutzenfunktion

Der Lagrangemultiplikator ist gegeben durch

$$I(y^\star) = \frac{x_0}{\int_0^T \exp\big(tk(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})\big)K(dt)} \quad \text{mit} \quad I(y^\star) = (y^\star)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

$$\text{und} \qquad k\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right) := \frac{q(q-1)\sigma^2\zeta_{Q^\star}^2}{2} + \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\eta_{Q^\star}^q(x) - 1 - q(\eta_{Q^\star}(x) - 1)\Big)\nu_{P^\star}(dx).$$

Für die Strategie erhalten wir die folgende Aussage.

Theorem 4.14
Sei $\int_0^T c_t^\star K(dt) \in \bigcap_{l=0,1} \mathbb{D}^{(l,Q^\star)}$. Dann ist

- eine Hedgingstrategie $\alpha^\star$ für $H_T = \int_0^T c_t^\star K(dt)$ zu jedem Zeitpunkt $s \in [0,T]$ gegeben durch

$$\alpha_s^\star \;=\; -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma S_{s-}} \left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \int_s^T \exp\Big((t-s)k(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})\Big)K(dt)$$

  mit $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}(x)) = \left(\zeta_{Q^\star}, \left(1 - \frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma}x\right)^{-\gamma}\right)$ als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) bzgl. $P^\star$,

- das Paar $(\alpha^\star, c^\star)$ optimal für das primale Optimierungsproblem,

- der zugehörige Vermögensprozess $V(\alpha^\star, c^\star)$ gegeben durch

$$V_s(\alpha^\star, c^\star) = \left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \int_{s+}^T \exp\Big((t-s)k\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right)\Big)K(dt) \quad \forall s \in [0,T].$$

Beweis:
Mit Lemma 4.11 erhalten wir die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{Q^\star}[H_T] &= \int_0^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)\right]K(dt) = I(y^\star)\int_0^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)\right]K(dt)\\ &= \frac{x_0}{\int_0^T \exp\left(tk(\zeta_{Q^\star},\eta_{Q^\star})\right)K(dt)}\int_0^T \exp\left(tk(\zeta_{Q^\star},\eta_{Q^\star})\right)K(dt)\\ &= x_0.\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $H_T \in \bigcap_{l=0,1}\mathbb{D}^{(l,Q^\star)}$ gilt, folgt

$$D_s^{(0,Q^\star)}H_T = D_s^{(0,Q^\star)}\int_0^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)K(dt) = -\int_s^T \frac{\sigma\zeta_{Q^\star}}{\gamma}I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)K(dt) \quad (4.7)$$

und

$$D_{(s,x)}^{(1)}H_T = -\int_s^T \frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma}xI\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)K(dt).$$

Damit erhalten wir die Gleichung $\frac{x}{\sigma}D_s^{(0,Q^\star)}H_T = D_{(s,x)}^{(1)}H_T$ für alle $s\in[0,T]$, d. h. der Zahlungsanspruch ist nach Theorem 4.6 replizierbar und die Hedgingstrategie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\alpha_s^\star &= \frac{1}{\sigma S_{s-}}\mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(0,Q^\star)}H_T\middle|\mathcal{F}_{s-}^L\right]\\ &\overset{(4.7)}{=} -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma S_{s-}}\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_s^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)K(dt)\middle|\mathcal{F}_{s-}^L\right].\end{aligned}$$

Da $I\left(y^\star Z^{Q^\star,P^\star}\right)\in\mathcal{C}(x_0)$ nach Theorem 3.1 (iv), erhalten wir mit Lemma 4.11, Bemerkung 3.5 sowie den stationären und unabhängigen Zuwächsen eines Lévy Prozesses

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_s^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)K(dt)\middle|\mathcal{F}_{s-}^L\right] &= \int_s^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)\middle|\mathcal{F}_{s-}^L\right]K(dt)\\ &= \int_s^T I\left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)\mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(\frac{Z_t^{Q^\star,P^\star}}{Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}}\right)\right]K(dt)\\ &= \int_s^T I\left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)\mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(Z_{t-s-}^{Q^\star,P^\star}\right)\right]K(dt)\\ &= \int_s^T \left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\exp\left((t-s)k(\zeta_{Q^\star},\eta_{Q^\star})\right)K(dt).\end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $\alpha^\star$ gilt $V_T(\alpha^\star,c^\star)=0$ und aufgrund der Optimalität von $c^\star$ ist das Paar $(\alpha^\star,c^\star)$ eine optimale, primale Lösung. Für die Darstellung des Vermögensprozesses erhalten wir

$$\begin{aligned} V_s(\alpha^\star, c^\star) &= \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_{s+}^{T} I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt)\middle|\mathcal{F}_s^L\right] \\ &= \left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \int_{s+}^{T} \exp\Big((t-s)k(\zeta_{Q^\star},\eta_{Q^\star})\Big) K(dt). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.15
Die in der Arbeit von [Kallsen] angegebene Strategie erhalten wir als Spezialfall aus Theorem 4.14 für die Menge $\mathcal{P} = \{P_0\}$. Dasselbe gilt für den optimalen Konsumratenprozess $c^\star$, siehe Abschnitt 4.3.

Korollar 4.16 (Spezialfall Endnutzenmaximierung)
Sei $\sigma > 0$ und $I\left(y^\star Z_T^{Q^\star,P^\star}\right) \in \bigcap_{l=0,1} \mathbb{D}^{(l,Q^\star)}$. Dann ist eine Hedgingstrategie $\alpha^\star$ zur Zeit $s \in [0,T]$ für $I\left(y^\star Z_T^{Q^\star,P^\star}\right)$ gegeben durch

$$\alpha_s^\star = \frac{1}{\sigma S_{s-}} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(0,Q^\star)} I\left(y^\star Z_T^{Q^\star,P^\star}\right)\middle|\mathcal{F}_{s-}^L\right] = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma S_{s-}}\left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \exp\Big((T-s)k(\zeta_{Q^\star},\eta_{Q^\star})\Big).$$

Bemerkung 4.17

- Die in Korollar 4.16 berechnete Strategie stimmt mit der Strategie von [Corcuera et al] überein, siehe Abschnitt 4.3.
- Die Bedingung $\frac{x}{\sigma} D_t^{(0,Q^\star)} I\left(y^\star Z_T^{Q^\star,P^\star}\right) = D_{(t,x)}^{(1)} I\left(y^\star Z_T^{Q^\star,P^\star}\right)$ ist äquivalent zu der in [Corcuera et al] formulierten Notwendigkeit, nicht in die dort künstlich eingeführten Hilfsassets (Power Jump Assets) zu investieren, denn es gilt für eine beliebige Funktion $\eta_{Q^\star}(x)$

  $$\begin{aligned} \frac{x}{\sigma} D_t^{(0,Q^\star)} I\left(y^\star Z_T^{Q^\star,P^\star}\right) = D_{(t,x)}^{(1)} I\left(y^\star Z_T^{Q^\star,P^\star}\right) &\Leftrightarrow \left(I\left(\eta_{Q^\star}(x)\right) - 1\right) = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma} x I\left(y^\star Z_T^{Q^\star,P^\star}\right) \\ &\Leftrightarrow \eta_{Q^\star}(x) = \left(1 - \frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma} x\right)^{-\gamma}, \end{aligned}$$

  d. h. für diese Wahl von $\eta_{Q^\star}(x)$ ist der Anteil, der in die Power Jump Assets investiert wird, identisch null. Entsprechendes gilt für den logarithmischen und den exponentiellen Fall, siehe Abschnitt 4.4 aus [Corcuera et al].

Beispiel 4.18
Wir betrachten den Black-Scholes Markt aus Beispiel 3.17. Eine Hedgingstrategie $\alpha^\star$ für $H_T := \int_0^T I\left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right) K(ds)$ ist zu jedem Zeitpunkt $s \in [0,T]$ gegeben durch

$$\alpha_s^\star = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma S_{s-}} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_s^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt)\middle|\mathcal{F}_{s-}^L\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu_{P_0}\rho^\star}{\sigma^2\gamma S_{s-}}\left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\int_s^T \exp\left((t-s)\frac{q(q-1)}{2}\sigma^2\zeta_{Q^\star}^2\right)K(dt)\\
&= \frac{\mu_{P_0}\rho^\star}{\sigma^2\gamma S_{s-}}V_{s-}^\star\\
\text{mit}\qquad & V_{s-}^\star := V_{s-}(\alpha^\star,c^\star) = \left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\int_s^T \exp\left((t-s)\frac{q(q-1)}{2}\sigma^2\zeta_{Q^\star}^2\right)K(dt).
\end{aligned}
$$

Für den nicht robusten Fall wählen wir $\mathcal{P}=\{P_0\}$, d. h. $\rho=1$ für alle $P\in\mathcal{P}$ und somit ergibt sich $\zeta_{Q^\star}=\zeta_{Q_0}=-\frac{\mu_{P_0}}{\sigma^2}$. Betrachten wir den prozentualen Anteil am Gesamtvermögen, der in der Aktie gehalten wird, so gilt wegen $S_{s-}=S_s$ und $V_{s-}^\star=V_s^\star$

$$\frac{\alpha_s^\star S_s}{V_s^\star}=\frac{\mu_{P_0}}{\gamma\sigma^2},$$

d. h. wir erhalten das bekannte Merton Ratio. Beim ungünstigsten Maß $P^\star\in\mathcal{P}$ mit $\rho^\star<1$ ist der prozentuale Anteil am Vermögen, der in die Aktie investiert wird, kleiner als bei jedem anderen Maß $P\in\mathcal{P}$. ◇

b) Logarithmische Nutzenfunktion

Der Lagrangemultiplikator ist gegeben durch

$$I(y^\star)=\frac{x_0}{\int_0^T K(dt)}\quad\text{mit}\quad I\left(y^\star\right)=\frac{1}{y^\star}.$$

Theorem 4.19
Sei $\int_0^T c_t^\star K(dt)\in\bigcap_{l=0,1}\mathbb{D}^{(l,Q^\star)}$. Dann ist

- eine Hedgingstrategie $\alpha^\star$ für $H_T=\int_0^T c_t^\star K(dt)$ zu jedem Zeitpunkt $s\in[0,T]$ gegeben durch

$$\alpha_s^\star = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{S_{s-}}\left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-1}\int_s^T K(dt)$$

  mit $(\zeta_{Q^\star},\eta_{Q^\star}(x))=\left(\zeta_{Q^\star},(1-\zeta_{Q^\star}x)^{-1}\right)$ als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) bzgl. $P^\star$,

- das Paar $(\alpha^\star,c^\star)$ optimal für das primale Optimierungsproblem,

- der zugehörige Vermögensprozess $V(\alpha^\star,c^\star)$ gegeben durch

$$V_s(\alpha^\star,c^\star)=\left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)^{-1}\int_{s+}^T K(dt)\quad\forall s\in[0,T].$$

Beweis:
Analog zur Power Nutzenfunktion ist H_T erreichbar, da

$$D_s^{(0,Q^\star)} H_T = -\sigma \zeta_{Q^\star} \int_s^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt)$$

gilt und

$$\begin{aligned} D_{(s,x)}^{(1)} H_T &= \int_s^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)(1-\zeta_{Q^\star} x)\, K(dt) - \int_s^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt) \\ &= -\zeta_{Q^\star} x \int_s^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt), \end{aligned}$$

d. h. $\frac{1}{\sigma} D_s^{(0,Q^\star)} H_T = \frac{1}{x} D_{(s,x)}^{(1)} H_T$ für alle $s \in [0,T]$. Da auch

$$\mathbb{E}_{Q^\star}[H_T] = I(y^\star) \int_0^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)\right] K(dt) = I(y^\star) \int_0^T K(dt) = x_0$$

ist, sind die Voraussetzungen von Theorem 4.6 erfüllt und wir erhalten für die Hedgingstrategie $\alpha^\star$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} \alpha_s^\star &= \frac{1}{\sigma S_{s-}} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(0,Q^\star)} H_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right] = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{S_{s-}} \int_s^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) \middle| \mathcal{F}_{s-}^L\right] K(dt) \\ &= -\frac{\zeta_{Q^\star}}{S_{s-}} \int_s^T I\left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right) \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(Z_{t-s-}^{Q^\star,P^\star}\right)\right] K(dt) \\ &= -\frac{\zeta_{Q^\star}}{S_{s-}} \int_s^T I\left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right) \mathbb{E}_{P^\star}\left[\mathbb{E}_{P^\star}\left[Z_T^{Q^\star,P^\star} \middle| \mathcal{F}_{t-s-}^L\right] \frac{1}{Z_{t-s-}^{Q^\star,P^\star}}\right] K(dt) \\ &= -\frac{\zeta_{Q^\star}}{S_{s-}} \left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-1} \int_s^T K(dt). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $\alpha^\star$ gilt $V_T(\alpha^\star, c^\star) = 0$ und aufgrund der Optimalität von $c^\star$ ist das Paar $(\alpha^\star, c^\star)$ eine optimale, primale Lösung. Für die Darstellung des Vermögensprozesses erhalten wir

$$V_s(\alpha^\star, c^\star) = \int_{s+}^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) \middle| \mathcal{F}_s^L\right] K(dt) = \left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)^{-1} \int_{s+}^T K(dt).$$

□

c) Exponentialfunktion

Ein Problem der Exponentialfunktion als Nutzenfunktion ist, dass durch sie auch negative Zahlungsansprüche generiert werden können, für die durch das Delta Hedging zwar replizierende Prozesse, aber keine zulässigen Strategien gefunden werden können. Wir werden daher zusätzlich die Positivität des Konsumratenprozesses annehmen.

Der Lagrangemultiplikator ist im exponentiellen Fall gegeben durch

$$I\left(y^\star\right) = \frac{x_0 + \frac{1}{\rho}\int_0^T tk(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})K(dt)}{\int_0^T K(dt)} \quad \text{mit} \quad I\left(y^\star\right) = -\frac{1}{\rho}\ln y^\star$$

und $$k\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right) := \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q^\star}^2 - \int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q^\star}(x) - 1 - \eta_{Q^\star}(x)\ln\eta_{Q^\star}(x)\Big)\nu_{P^\star}(dx).$$

Theorem 4.20
Sei $\int_0^T c_t^\star K(dt) \in \bigcap_{l=0,1}\mathbb{D}^{(l,Q^\star)}$ und $c_t^\star$ für alle $t \in [0,T]$ nach unten durch 0 beschränkt. Dann ist

- eine Hedgingstrategie $\alpha^\star$ für $H_T = \int_0^T c_t^\star K(dt)$ zu jedem Zeitpunkt $s \in [0,T]$ gegeben durch

  $$\alpha_s^\star = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\rho S_{s-}}\int_s^T K(dt)$$

  mit $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}(x)) = (\zeta_{Q^\star}, \exp(\zeta_{Q^\star}x))$ als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) bzgl. $P^\star$,

- das Paar $(\alpha^\star, c^\star)$ optimal für das primale Optimierungsproblem,

- der zugehörige Vermögensprozess $V(\alpha^\star, c^\star)$ gegeben durch

  $$V_s(\alpha^\star, c^\star) = -\frac{1}{\rho}\ln\left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)\int_{s+}^T K(dt) - \frac{1}{\rho}\int_{s+}^T (t-s)k\left(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}\right)K(dt) \quad \forall s \in [0,T].$$

Beweis:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q^\star}[H_T] &= \int_0^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)\right]K(dt) \\
&\overset{(\circ)}{=} -\int_0^T \frac{1}{\rho}tk(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})K(dt) + I\left(y^\star\right)\int_0^T K(dt) \\
&= -\frac{1}{\rho}\int_0^T tk(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})K(dt) + x_0 + \frac{1}{\rho}\int_0^T tk(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star})K(dt) \\
&= x_0,
\end{aligned}$$

wobei die Gleichheit in $(\circ)$ für $s = 0$ aus (4.8) folgt. Da

$$D_s^{(0,Q^\star)}H_T = -\int_s^T \frac{\sigma}{\rho}\zeta_{Q^\star}K(dt) = -\frac{\sigma\zeta_{Q^\star}}{\rho}\int_s^T K(dt)$$

sowie

$$D^{(1)}_{(s,x)}H_T \;=\; \int_s^T I\left(\eta_{Q^\star}(x)\right)K(dt) = -\frac{\zeta_{Q^\star}x}{\rho}\int_s^T K(dt)$$

für alle $s \in [0,T]$ gilt, erhalten wir aus Theorem 4.6 die Replizierbarkeit von H_T und die anschließende Darstellung für die Hedgingstrategie:

$$\alpha^\star_s \;=\; \frac{1}{\sigma S_{s-}}\mathbb{E}_{Q^\star}\left[D^{(0,Q^\star)}_s H_T\middle|\mathcal{F}^L_{s-}\right] = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\rho S_{s-}}\int_s^T K(dt).$$

Nach Konstruktion von $\alpha^\star$ gilt $V_T(\alpha^\star,c^\star)=0$ und aufgrund der Optimalität von $c^\star$ ist das Paar $(\alpha^\star,c^\star)$ eine optimale, primale Lösung. Für die Darstellung des zugehörigen Vermögensprozesses folgt

$$\begin{aligned}
V_s(\alpha^\star,c^\star) &= \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_{s+}^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)K(dt)\middle|\mathcal{F}^L_s\right]\\
&= \int_{s+}^T I\left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right) + \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(Z_{t-s}^{Q^\star,P^\star}\right)\right]K(dt)\\
&= I\left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)\int_{s+}^T K(dt) - \frac{1}{\rho}\int_{s+}^T \mathbb{E}_{P^\star}\left[Z_{t-s}^{Q^\star,P^\star}\ln Z_{t-s}^{Q^\star,P^\star}\right]K(dt)\\
&= -\frac{1}{\rho}\ln\left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)\int_{s+}^T K(dt) - \frac{1}{\rho}\int_{s+}^T (t-s)k\left(\zeta_{Q^\star},\eta_{Q^\star}\right)K(dt). \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

□

4.2.2 Sprungmodell

Hier betrachten wir den bisherigen Finanzmarkt, allerdings besitzt die Aktie nun keine Brown'sche Bewegung mehr, d. h. $\sigma = 0$. Analog zum Fall mit Volatilität $\sigma > 0$ benötigen wir auch hier einen geeigneten Darstellungssatz. Wir diskutieren die dafür benötigten Grundlagen aus der Arbeit von [Løkka] im Anhang.

Der hier betrachtete Fall wurde nach unserer Kenntnis noch nicht in der Literatur untersucht. Die Wahl von $\sigma = 0$ ist bei [Corcuera et al] nicht zulässig.

a) Power Nutzenfunktion

Für diese Nutzenfunktion ist der Lagrangemultiplikator gegeben durch

$$I\left(y^\star\right) = \frac{x_0}{\int_0^T \exp\left(tk(\eta_{Q^\star})\right)K(dt)}$$

mit $$k\left(\eta_{Q^\star}\right) := \int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta^q_{Q^\star}(x) - 1 - q(\eta_{Q^\star}(x)-1)\Big)\nu_{P^\star}(dx).$$

Theorem 4.21
Sei $\int_0^T c_t^\star K(dt) \in \tilde{\mathbb{D}}_{1,2}$. Dann ist

- eine Hedgingstrategie $\alpha^\star$ für $H_T = \int_0^T c_t^\star K(dt)$ zu jedem Zeitpunkt $s \in [0,T]$ gegeben durch

$$\alpha_s^\star = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{qS_{s-}} \left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \int_s^T \exp\left((t-s)k(\eta_{Q^\star})\right) K(dt)$$

  mit $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}(x)) = \left(\zeta_{Q^\star}, \left(1 - \frac{\zeta_{Q^\star}}{q}x\right)^{-\gamma}\right)$ als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) bzgl. $P^\star$,

- das Paar $(\alpha^\star, c^\star)$ optimal für das primale Optimierungsproblem,

- der zugehörige Vermögensprozess $V(\alpha^\star, c^\star)$ gegeben durch

$$V_s(\alpha^\star, c^\star) = \left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \int_{s+}^T \exp\Big((t-s)k(\eta_{Q^\star})\Big) K(dt) \quad \forall s \in [0,T].$$

Beweis:
Die Gültigkeit von $\mathbb{E}_{Q^\star}[H_T]$ ergibt sich wie im Beweis von Theorem 4.14. Mit $D_{(s,x)} I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{q} x I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)$ für alle $s \le t$ folgt

$$D_{(s,x)} H_T = \int_s^T D_{(s,x)} I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt) = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{q} x \int_s^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt).$$

Mit Theorem 4.9 erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha_s^\star &= -\frac{1}{xS_{s-}} \frac{\zeta_{Q^\star}}{q} x \left(\mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_s^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt) \middle| \mathcal{F}_{s-}^J\right]\right. \\ &= -\frac{\zeta_{Q^\star}}{qS_{s-}} I\left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right) \int_s^T \exp\left((t-s)k(\eta_{Q^\star})\right) K(dt). \end{aligned}$$

Da $\alpha^\star$ unabhängig von der Sprunghöhe ist, folgt die erste Behauptung. Nach Konstruktion von $\alpha^\star$ gilt $V_T(\alpha^\star, c^\star) = 0$ und aufgrund der Optimalität von $c^\star$ ist das Paar $(\alpha^\star, c^\star)$ eine optimale, primale Lösung. Für den Vermögensprozess $V^\star$ erhalten wir

$$V_s(\alpha^\star, c^\star) = \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\int_{s+}^T c_t^\star K(dt) \middle| \mathcal{F}_s^J\right] = \left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \int_{s+}^T \exp\left((t-s)k(\eta_{Q^\star})\right) K(dt).$$

□

Beispiel 4.22
Wir betrachten den Poisson Sprungmarkt aus Beispiel 3.19. Die Hedgingstrategie $\alpha^\star$ zur Zeit $s \in [0,T]$ für $H_T := \int_0^T I\big(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\big)K(dt)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \alpha_s^\star &= -\frac{\zeta_{Q^\star}}{qS_{s-}} I\left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right) \int_s^T \exp\left((t-s)k\left(\eta_{Q^\star}\right)\right) K(dt) \\ \text{mit} \quad I\left(y^\star\right) &= \frac{x_0}{\int_0^T \exp\left(t\lambda_{P^\star}\left(\eta_{Q^\star}^q(1) - 1 - q\left(\eta_{Q^\star}(1)-1\right)\right)\right)K(dt)} \end{aligned}$$

und $\zeta_{Q^\star} = q - q\left(1 - \frac{\mu_{P_0}\rho^\star}{\lambda_{P_0}+\mu_{P_0}(\rho^\star-1)}\right)^{q-1}$ als dem einzigen $\zeta_{Q^\star}$, für dass $\eta_{Q^\star}(1) = 1 - \frac{\mu_{P_0}\rho^\star}{\lambda_{P_0}+\mu_{P_0}(\rho^\star-1)} = \left(1 - \frac{\zeta_{Q^\star}}{q}\right)^{-\gamma}$ die Market-Price-of-Risk-Gleichung löst. ◇

b) Logarithmische Nutzenfunktion

Der Lagrangemultiplikator ist gegeben durch

$$I(y^\star) = \frac{x_0}{\int_0^T K(dt)} \quad \text{mit} \quad I(y^\star) = \frac{1}{y^\star}.$$

Theorem 4.23
Sei $\int_0^T c_t^\star K(dt) \in \tilde{\mathbb{D}}_{1,2}$. Dann ist

- eine Hedgingstrategie $\alpha^\star$ für $H_T = \int_0^T c_t^\star K(dt)$ zu jedem Zeitpunkt $s \in [0,T]$ gegeben durch

$$\alpha_s^\star = \frac{\zeta_{Q^\star}}{S_{s-}} \left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-1} \int_s^T K(dt)$$

  mit $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}(x)) = \left(\zeta_{Q^\star}, (1+\zeta_{Q^\star}x)^{-1}\right)$ als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) bzgl. $P^\star$,

- das Paar $(\alpha^\star, c^\star)$ optimal für das primale Optimierungsproblem,

- der zugehörige Vermögensprozess $V(\alpha^\star, c^\star)$ gegeben durch

$$V_s(\alpha^\star, c^\star) = \left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)^{-1} \int_{s+}^T K(dt) \quad \forall s \in [0,T].$$

Beweis:
Sei $t \in [0,T]$ beliebig aber fest. Es gilt $\mathbb{E}_Q[H_T] = x_0$ analog zum Fall $\sigma > 0$ und mit

$$D_{(s,x)}H_T \;=\; \zeta_{Q^\star} x \int_s^T I\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right) K(dt)$$

erhalten wir nach Theorem 4.9 die folgende Gleichung für die Hedgingstrategie

$$\alpha_s^\star \;=\; \frac{\zeta_{Q^\star}}{S_{s-}} I\left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right) \int_s^T K(dt) = \frac{\zeta_{Q^\star}}{S_{s-}} \left(y^\star Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-1} \int_s^T K(dt).$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von $\alpha^\star$ bzgl. der Sprunghöhe x ergibt sich die erste Behauptung. Nach Konstruktion von $\alpha^\star$ gilt $V_T(\alpha^\star, c^\star) = 0$ und aufgrund der Optimalität von $c^\star$ ist das Paar $(\alpha^\star, c^\star)$ eine optimale, primale Lösung. Die Darstellung des Vermögensprozess ist offensichtlich. □

c) Exponentialfall

Zum Schluss betrachten wir noch den Exponentialfall. Der Lagrangemultiplikator ist in diesem Fall gegeben durch

$$I(y^\star) = \frac{x_0 + \frac{1}{\rho}\int_0^T tk(\eta_{Q^\star})K(dt)}{\int_0^T K(dt)}$$

mit $$k(\eta_{Q^\star}) := -\int_{\mathbb{R}_0} \Big(\eta_{Q^\star}(x) - 1 - \eta_{Q^\star}(x)\ln \eta_{Q^\star}(x)\Big)\nu_{P^\star}(dx).$$

Theorem 4.24
Sei $\int_0^T c_t^\star K(dt) \in \tilde{\mathbb{D}}_{1,2}$ und $c_t^\star$ für alle $t \in [0,T]$ nach unten durch 0 beschränkt. Dann ist

- eine Hedgingstrategie $\alpha^\star$ für $H_T = \int_0^T c_t^\star K(dt)$ zu jedem Zeitpunkt $s \in [0,T]$ gegeben durch

  $$\alpha_s^\star \;=\; \frac{\zeta_{Q^\star}}{\rho S_{s-}} \int_s^T K(dt)$$

  mit $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}(x)) = (\zeta_{Q^\star}, \exp(-\zeta_{Q^\star} x))$ als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung (3.10) bzgl. $P^\star$,
- das Paar $(\alpha^\star, c^\star)$ optimal für das primale Optimierungsproblem,
- der zugehörige Vermögensprozess $V(\alpha^\star, c^\star)$ gegeben durch

  $$V_s(\alpha^\star, c^\star) \;=\; -\frac{1}{\rho}\ln\left(y^\star Z_s^{Q^\star,P^\star}\right) \int_{s+}^T K(dt) - \frac{1}{\rho}\int_{s+}^T (t-s)k(\eta_{Q^\star})K(dt) \quad \forall s \in [0,T].$$

Beweis:
Die Gültigkeit von $\mathbb{E}_{Q^\star}[H_T] = x_0$ ergibt sich wie im Beweis von Theorem 4.20. Aus

$$D^{(1)}_{(s,x)} H_T \quad = \quad \int_s^T I(\eta_{Q^\star}(x)) K(dt) = \frac{\zeta_{Q^\star}}{\rho} x \int_s^T K(dt)$$

folgt dann

$$\alpha^\star_s \quad = \quad \frac{1}{xS_{s-}} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D^{(1)}_{(s,x)} H_T \middle| \mathcal{F}^J_{s-} \right] = \frac{1}{xS_{s-}} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\frac{\zeta_{Q^\star} x}{\rho} \middle| \mathcal{F}^J_{s-} \right] \int_s^T K(dt) = \frac{\zeta_{Q^\star}}{\rho S_{s-}} \int_s^T K(dt).$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von $\alpha^\star$ bzgl. der Sprunghöhe x ergibt sich aus Theorem 4.9 die erste Behauptung. Nach Konstruktion von $\alpha^\star$ gilt $V_T(\alpha^\star, c^\star) = 0$ und aufgrund der Optimalität von $c^\star$ ist das Paar $(\alpha^\star, c^\star)$ eine optimale, primale Lösung. Die Darstellung des zugehörigen Vermögensprozesses ergibt sich analog zum Fall $\sigma > 0$. □

4.3 Standard Portfolio Optimierungsprobleme

In diesem Abschnitt weisen wir nach, dass unsere Ergebnisse mit denen der Arbeiten von [Corcuera et al] und [Kallsen] übereinstimmen.

[Corcuera et al]

Wählen wir $\sigma > 0, K(dt) = \delta_T(dt)$ und $\mathcal{P} = \{P_0\}$, so erhalten wir die in [Corcuera et al] betrachtete Problemstellung der Endnutzenmaximierung als Spezialfall. Wir betrachten hier die Power Nutzenfunktion sowie den logarithmischen und exponentiellen Fall, können aber die geforderte Gleichheit der angegebenen Hedgingstrategien auch für eine allgemeinere Klasse von Nutzenfunktionen zeigen.

Für die Power Nutzenfunktion erhalten wir nach Korollar 4.16 für die Hedgingstrategie zur Zeit $t \in [0, T]$

$$\alpha^\star_t = \frac{1}{\sigma S_{t-}} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D^{(0,Q^\star)}_t I\left(y^\star Z^{Q^\star, P^\star}_T \right) \middle| \mathcal{F}^L_{t-} \right] = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma S_{t-}} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[I\left(y^\star Z^{Q^\star, P^\star}_T \right) \middle| \mathcal{F}^L_{t-} \right] \quad \text{mit}$$

$(\zeta_{P^\star}, \eta_{P^\star}) = (0, 1)$ und $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}) = (\zeta_{Q_0}, \eta_{Q_0})$. Die duale Problemstellung reduziert sich auf $\inf_{Q \in \mathcal{M}^{P_0}} \mathbb{E}_{P_0}\left[\left(Z^{Q,P_0}_T \right)^q \right]$. Für den ungünstigsten Parameter η_{Q_0} erhalten wir

$$\eta_{Q_0}(x) = (1 + (q-1)\zeta_{Q_0} x)^{\frac{1}{q-1}} = \left(1 - \frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma} x \right)^{-\gamma}$$

mit ζ_{Q_0} als Lösung von

$$\mu_{P_0} + \int_{|x|>1} x \nu_{P_0}(dx) + \sigma^2 \zeta_{Q_0} + \int_{\mathbb{R}_0} x \left(\left(1 - \frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma} x \right)^{-\gamma} - 1 \right) \nu_{P_0}(dx) = 0.$$

Mit der anschließenden Tabelle zeigen wir den Zusammenhang der einzelnen Größen beider Modelle

Unser Modell	σ	$\sigma\zeta_{Q_0}$	$\mu_{P_0} + \int_{\lvert x\rvert>1} x\nu_{P_0}(dx)$	0	1
[Corcuera et al]	c	$G^\star$	$a+b$	r	$B_t,\ t\in[0,T]$

und für die Parameter $(G^\star, H^\star)$ von [Corcuera et al] folgt

- $H^\star(x) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{G^\star}{c\gamma}x\right)^\gamma} = \dfrac{1}{\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^\gamma} = \eta_{Q_0}(x)$ und
- $cG^\star + a + b - r + \displaystyle\int_{\mathbb{R}_0} x\left(\left(1-\frac{G^\star}{c\gamma}x\right)^{-\gamma} - 1\right)\nu_{P_0}(dx) = 0$

$$\overset{\text{Unsere Notation}}{\Leftrightarrow} \quad \sigma^2\zeta_{Q_0} + \mu_{P_0} + \int_{|x|>1} x\nu_{P_0}(dx) + \int_{\mathbb{R}_0} x\left(\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{-\gamma} - 1\right)\nu_{P_0}(dx) = 0.$$

Damit erhalten wir dasselbe ungünstigste Martingalmaß $Q_0 \in \mathcal{M}^{P_0}$ wie [Corcuera et al]. Der logarithmische Fall ergibt sich durch $\gamma = 1$, der exponentielle Fall ist mit der obigen Tabelle offensichtlich.

Wir zeigen nun noch die Gleichheit der Strategien. Der logarithmische Fall ergibt sich wiederum aus der Power Nutzenfunktion durch $\gamma = 1$. Mit

$$\frac{1}{\sigma S_{t-}}\mathbb{E}_{Q_0}\left[D_t^{(0,Q_0)} I\left(y^\star Z_T^{Q_0,P_0}\right)\middle|\mathcal{F}_{t-}^L\right] \;=\; -\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma S_{t-}}\mathbb{E}_{Q_0}\left[I\left(y^\star Z_T^{Q_0,P_0}\right)\middle|\mathcal{F}_{t-}^L\right]$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q_0}\left[I\left(y^\star Z_T^{Q_0,P_0}\right)\middle|\mathcal{F}_{t-}^L\right] &= x_0\frac{\mathbb{E}_{Q_0}\left[\left(Z_T^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\middle|\mathcal{F}_{t-}^L\right]}{\mathbb{E}_{Q_0}\left[\left(Z_T^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right]} \\
&= x_0\frac{\left(Z_{t-}^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\mathbb{E}_{Q_0}\left[\left(Z_{t,T}^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\middle|\mathcal{F}_{t-}^L\right]}{\mathbb{E}_{Q_0}\left[\left(Z_{t-}^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\mathbb{E}_{Q_0}\left[\left(Z_{t,T}^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\middle|\mathcal{F}_{t-}^L\right]\right]} \\
&= x_0\frac{\left(Z_{t-}^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\mathbb{E}_{Q_0}\left[\left(Z_{t-}^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right]}
\end{aligned}$$

ergibt sich für die Hedgingstrategie zur Zeit $t\in[0,T]$

$$\alpha_t^\star \;=\; -\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma S_{t-}}x_0\frac{\left(Z_{t-}^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\mathbb{E}_{Q_0}\left[\left(Z_{t-}^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right]} \overset{\text{Notation [Corcuera et al]}}{=} -\frac{G^\star}{c\gamma S_{t-}}x_0\frac{\left(Z_{t-}^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{\mathbb{E}_{Q_0}\left[\left(Z_{t-}^{Q_0,P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right]},$$

was der Hedgingstrategie von [Corcuera et al] gleicht. Für den exponentiellen Fall erhalten wir mit Theorem 4.20 sofort

$$\alpha_t^\star = -\frac{\zeta_{Q_0}}{\rho S_{t-}} \overset{\text{Notation [Corcuera et al]}}{=} -\frac{G^\star}{c\alpha S_{t-}},$$

da dem ρ bei der exponentiellen Nutzenfunktion der Parameter α bei [Corcuera et al] entspricht.

[Kallsen]

Wählen wir $\sigma > 0$ und $\mathcal{P} = \{P_0\}$, so erhalten wir die in [Kallsen] betrachtete Problemstellung der nicht robusten Konsumnutzenmaximierung. Wir zeigen hier die Gleichheit der optimalen Konsumratenprozesse. Die Übereinstimmung der Hedgingstrategien ist dann offensichtlich.

Optimale Konsumprozesse für die Power Nutzenfunktion

Wie bereits gesehen ist der Lagrangemultiplikator $y^\star$ gegeben durch

$$I(y^\star) = \frac{x_0}{\int_0^T \exp\left(tk(\zeta_{Q_0}, \eta_{Q_0})\right) K(dt)}.$$

Daraus folgt für alle $t \in [0,T]$

$$c_t^\star = I\left(y^\star Z_t^{Q_0,P_0}\right) = \frac{x_0}{\int_0^T \exp\left(tk\left(\zeta_{Q_0}, \eta_{Q_0}\right)\right) K(dt)} I\left(Z_t^{Q_0,P_0}\right).$$

Um nun die Konsumratenprozesse vergleichen zu können, geben wir die anschließende Tabelle bzgl. der Notationen an:

Unser Modell	x_0	k	γ	$-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}$	t	σ^2	$\nu_{P_0}(dx)$
[Kallsen]	ϵ	α	p	γ	A	c	$F(dx)$

Der zweite Eintrag gilt aufgrund der Gleichheit der folgenden Integralterme:

$$\begin{aligned}
\left((\eta_{Q_0}(x))^q - 1 - q\left(\eta_{Q_0}(x) - 1\right)\right) &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{\gamma q}} - 1 - q\left(\left(1 - \frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{-\gamma} - 1\right) \\
&= \left(\gamma\left(1 - \frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{-\gamma q+\gamma} - q\gamma\right) \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{\gamma}} + q - 1 \\
&= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{\gamma}} \underbrace{\left(\gamma\left(1 - \frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{-\gamma q+\gamma} - q\gamma\right)}_{=1-\zeta_{Q_0}x} - 1\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1-\zeta_{Q_0}x}{\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{\gamma}}-1\right).$$

Damit ist zu zeigen, dass $I\left(Z_t^{Q_0,P_0}\right)=\mathcal{E}\left(\gamma L+A\alpha\right)_t$ für alle $t\in[0,T]$ gilt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}\left(\gamma L+A\alpha\right)_t \\
= \quad & \exp\left(\gamma L_t+\alpha t-\frac{1}{2}\gamma^2 ct\right)\prod_{0<s\le t}\left(1+\gamma\Delta L_s\right)\exp\left(-\gamma\Delta L_s\right) \\
= \quad & \exp\left(\gamma L_t+t\frac{(1-p)c\gamma^2}{2}+\frac{t}{p}\int_{\mathbb{R}_0}\left(\frac{1+p\gamma x}{(1+\gamma x)^p}-1\right)F(dx)-\frac{1}{2}\gamma^2 ct\right) \\
& \prod_{0<s\le t}\left(1+\gamma\Delta L_s\right)\exp\left(-\gamma\Delta L_s\right) \\
\overset{\text{Unsere Notation}}{=} \quad & \exp\left(-\frac{1}{\gamma}\left(\zeta_{Q_0}L_t+\frac{t}{2}\gamma\sigma^2\frac{\zeta_{Q_0}^2}{\gamma}-t\int_{\mathbb{R}_0}\left(\frac{1+\gamma\left(-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}\right)x}{\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{\gamma}}-1\right)\nu_{P_0}(dx)\right)\right) \\
& \prod_{0<s\le t}\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}\Delta L_s\right)\exp\left(\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}\Delta L_s\right). \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\prod_{0<s\le t}\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}\Delta L_s\right)\exp\left(\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}\Delta L_s\right) &= \exp\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)\delta(dx,ds)\right. \\
&\quad \left.+\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}x\delta(dx,ds)\right)
\end{aligned}$$

folgern wir weiter

$$\begin{aligned}
(4.9) \quad = \quad & \exp\Bigg(-\frac{1}{\gamma}\Bigg(\zeta_{Q_0}\mu_{P_0}t+\sigma\zeta_{Q_0}W_t+\zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{0<|x|\le 1}x(\delta-\nu_{P_0})(dx,ds) \\
& +\zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{|x|>1}x\delta(dx,ds)+\frac{t}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2-t\int_{\mathbb{R}_0}\left(\frac{1-\zeta_{Q_0}x}{\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{\gamma}}-1\right)\nu_{P_0}(dx)\Bigg)\Bigg) \\
& \cdot\exp\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)\delta(dx,ds)+\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}x\delta(dx,ds)\right) \\
= \quad & \exp\Bigg(-\frac{1}{\gamma}\Bigg(\mu_{P_0}\zeta_{Q_0}t+\sigma\zeta_{Q_0}W_t+\zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}x(\delta-\nu_{P_0})(dx,ds) \\
& +\zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{|x|>1}x\nu_{P_0}(dx)ds+\frac{t}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2-t\int_{\mathbb{R}_0}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{\gamma}}-1\right)\nu_{P_0}(dx) \\
& +t\zeta_{Q_0}\int_{\mathbb{R}_0}\frac{x}{\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)^{\gamma}}\nu_{P_0}(dx)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}-\gamma\ln\left(1-\frac{\zeta_{Q_0}}{\gamma}x\right)\delta(dx,ds)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} x\delta(dx,ds)\Big)\Big)\\
= \;& \exp\Big(-\frac{1}{\gamma}\Big((\circ)+\sigma\zeta_{Q_0}W_t-\frac{t}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2-t\int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q_0}(x)-1\Big)\nu_{P_0}(dx)\\
& +\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{Q_0}(x)\delta(dx,ds)\Big)\Big), \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
(\circ) \;=\; & \mu_{P_0}\zeta_{Q_0}t+\sigma^2\zeta_{Q_0}^2t-\zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}x\nu_{P_0}(dx)ds+\zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{|x|>1}x\nu_{P_0}(dx)ds\\
& +t\zeta_{Q_0}\int_{\mathbb{R}_0}x\eta_{Q_0}(x)\nu_{P_0}(dx)\\
=\; & \zeta_{Q_0}\Big(\underbrace{\mu_{P_0}t+t\int_{|x|>1}x\nu_{P_0}(dx)+t\int_{\mathbb{R}_0}x\Big(\eta_{Q_0}(x)-1\Big)\nu_{P_0}(dx)+\sigma^2\zeta_{Q_0}t}_{=0}\Big)\\
=\; & 0.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich insgesamt die Gültigkeit von $\mathcal{E}(\gamma L+\alpha A)_t = (4.10) = I\left(Z_t^{Q_0,P_0}\right)$ für alle $t\in[0,T]$.

Optimale Konsumprozesse für die logarithmische Nutzenfunktion

Wie bereits gezeigt ist im Falle der logarithmischen Nutzenfunktion der Lagrangemultiplikator gegeben durch $I(y^\star)=\frac{x_0}{\int_0^T K(dt)}$ und daher gilt $c_t^\star = I\left(y^\star Z_t^{Q_0,P_0}\right)=\frac{x_0}{\int_0^T K(dt)}I\left(Z_t^{Q_0,P_0}\right)$. Mit der folgenden Tabelle

Unser Modell	$-\zeta_{Q_0}$	σ^2	δ
[Kallsen]	γ	c	μ^L

bleibt die Gültigkeit der Gleichung $I\left(Z_t^{Q_0,P_0}\right)=\mathcal{E}(\gamma L)_t$ für alle $t\in[0,T]$ zu zeigen. Wir erhalten einerseits

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\gamma L)_t \;=\; & \exp\Big(\gamma L_t-\frac{1}{2}\gamma^2 ct\Big)\prod_{0<s\le t}(1+\gamma\Delta L_s)\exp(-\gamma\Delta L_s)\\
=\; & \exp\Big(\gamma L_t-\frac{1}{2}\gamma^2 ct+\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln(1+\gamma x)\,\mu^L(dx,ds)-\gamma\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}x\mu^L(dx,ds)\Big)\\
\overset{\text{Unsere Notation}}{=}\; & \exp\Big(-\Big(\zeta_{Q_0}L_t+\frac{1}{2}\zeta_{Q_0}^2\sigma^2t+\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}-\ln\big(1-\zeta_{Q_0}x\big)\delta(dx,ds)\\
& -\zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}x\delta(dx,ds)\Big)\Big)\\
=\; & \exp\Big(-\Big(\zeta_{Q_0}\mu_{P_0}t+\sigma\zeta_{Q_0}W_t+\zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{0<|x|\le 1}x(\delta-\nu_{P_0})(dx,ds)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{|x|>1} x\delta(dx,ds) - \frac{1}{2}\zeta_{Q_0}^2\sigma^2 t + \zeta_{Q_0}^2\sigma^2 t \\
&+\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{Q_0}(x)\delta(dx,ds) - \zeta_{Q_0}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} x\delta(dx,ds)\Big)\Big) \\
= \quad &\exp\Big(-\mu_{P_0}\zeta_{Q_0}t - \sigma\zeta_{Q_0}W_t + \zeta_{Q_0}t\int_{0<|x|\le 1} x\nu_{P_0}(dx) \\
&-\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{Q_0}(x)\delta(dx,ds) - \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2 t\Big)
\end{aligned}
$$

und andererseits

$$
\begin{aligned}
I\left(Z_t^{Q_0,P_0}\right) &= \frac{1}{Z_t^{Q_0,P_0}} = Z_t^{P_0,Q_0} = \exp\Big(\sigma\zeta_{P_0,Q_0}\left(W_t + \sigma\zeta_{P_0,Q_0}t\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{P_0,Q_0}^2 t \\
&\quad +\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{P_0,Q_0}(x)\delta(dx,ds) - t\int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{P_0,Q_0}(x)-1\Big)\nu_{Q_0}(dx)\Big) \\
&= \exp\Big(\sigma\zeta_{P_0,Q_0}W_t + \sigma^2\zeta_{P_0,Q_0}^2 t - \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{P_0,Q_0}^2 t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{P_0,Q_0}(x)\delta(dx,ds) \\
&\quad -t\int_{\mathbb{R}_0}\underbrace{\Big(\eta_{P_0,Q_0}(x)-1\Big)\eta_{Q_0}(x)}_{1-\eta_{Q_0}(x)}\nu_{P_0}(dx)\Big) \\
&= \exp\Big(-\sigma\zeta_{Q_0}W_t + \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2 t - \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{Q_0}(x)\delta(dx,ds) \\
&\quad +t\int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q_0}(x)-1\Big)\nu_{P_0}(dx)\Big).
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
\frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2 t + t\int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q_0}(x)-1\Big)\nu_{P_0}(dx) = -\mu_{P_0}\zeta_{Q_0}t + \zeta_{Q_0}t\int_{0<|x|\le 1} x\nu_{P_0}(dx) - \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2 t,
$$

da

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2 t + \underbrace{t\int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q_0}(x)-1\Big)\nu_{P_0}(dx)}_{=t\int_{\mathbb{R}_0}\zeta_{Q_0}x\nu_{Q_0}(dx)} \pm t\zeta_{Q_0}\int_{\mathbb{R}_0} x\nu_{P_0}(dx) \\
= \quad &\underbrace{\sigma^2\zeta_{Q_0}^2 t + t\zeta_{Q_0}\int_{\mathbb{R}_0} x\Big(\eta_{Q_0}(x)-1\Big)\nu_{P_0}(dx)}_{=\zeta_{Q_0}t\left(-\mu_{P_0}-\int_{|x|>1}x\nu_{P_0}(dx)\right)} - \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2 t + t\zeta_{Q_0}\int_{\mathbb{R}_0} x\nu_{P_0}(dx) \\
= \quad &-\mu_{P_0}t\zeta_{Q_0} - \zeta_{Q_0}t\int_{|x|>1} x\nu_{P_0}(dx) - \frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2 t + t\zeta_{Q_0}\int_{\mathbb{R}_0} x\nu_{P_0}(dx).
\end{aligned}
$$

Optimale Konsumprozesse im Exponentialfall

Für den exponentiellen Fall erhalten wir die folgende Tabelle

Unser Modell	ρ	ζ_{Q_0}	x_0	σ^2	$\nu_{P_0}(dx)$	$-\frac{1}{\rho}k(\zeta_{Q_0},\eta_{Q_0})$
[Kallsen]	p	$-p\gamma$	ϵ	c	$F(dx)$	α

wobei die letzte Spalte aus

$$\begin{aligned} k(\zeta_{Q_0},\eta_{Q_0}) &\overset{\text{Notation [Kallsen]}}{=} \frac{1}{2}cp^2\gamma^2 + \int_{\mathbb{R}_0}\Big(-\exp(-p\gamma x)p\gamma x - \exp(-p\gamma x) + 1\Big)F(dx) \\ &= \frac{1}{2}cp^2\gamma^2 + \int_{\mathbb{R}_0}\exp(-p\gamma x)\Big(\exp(p\gamma x) - p\gamma x - 1\Big)F(dx) \\ &= -p\left(-\frac{1}{2}cp\gamma^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}_0}\exp(-p\gamma x)\Big(\exp(p\gamma x) - p\gamma x - 1\Big)F(dx)\right) \\ &= -p\alpha \end{aligned}$$

folgt. Da der Lagrangemultiplikator durch

$$I(y^\star) = \frac{x_0 + \frac{1}{\rho}\int_0^T tk(\zeta_{Q_0},\eta_{Q_0})\,K(dt)}{\int_0^T K(dt)} \overset{\text{Notation [Kallsen]}}{=} \frac{\epsilon - \alpha\int_0^T tK(dt)}{\int_0^T K(dt)} \tag{4.11}$$

gegeben ist und des Weiteren

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta_{Q_0}}{\rho}L_t &= -\frac{\zeta_{Q_0}}{\rho}\left(\mu_{P_0}t + \sigma W_t + \int_0^t\int_{0<|x|<1} x(\delta-\nu_{P_0})(dx,ds) + \int_0^t\int_{|x|>1} x\delta(dx,ds)\right) \\ &= -\frac{1}{\rho}\left(\sigma\zeta_{Q_0}W_t^{Q_0} + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0} x\zeta_{Q_0}(\delta-\nu_{Q_0})(dx,ds)\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

gilt, folgt mit (4.11) und (4.12) für den Konsumratenprozess

$$\begin{aligned} & I\left(y^\star Z_t^{Q_0,P_0}\right) \\ = \;& I(y^\star) + I\left(Z_t^{Q_0,P_0}\right) \\ = \;& -\frac{1}{\rho}\Bigg(-\frac{1}{2}\sigma^2\zeta_{Q_0}^2 t + t\int_{\mathbb{R}_0}\eta_{Q_0}(x)\ln\eta_{Q_0}(x)\nu_{P_0}(dx) - t\int_{\mathbb{R}_0}\Big(\eta_{Q_0}(x)-1\Big)\nu_{P_0}(dx) \\ & +\sigma\zeta_{Q_0}W_t^{Q_0} + \sigma^2\zeta_{Q_0}^2 t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{Q_0}(x)(\delta-\nu_{Q_0})(dx,ds)\Bigg) + I(y^\star) \\ = \;& -\frac{1}{\rho}\left(k(\zeta_{Q_0},\eta_{Q_0})t + \sigma\zeta_{Q_0}W_t^{Q_0} + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln\eta_{Q_0}(x)(\delta-\nu_{Q_0})(dx,ds)\right) + I(y^\star) \\ \overset{\text{Notation [Kallsen]}}{=} \;& \alpha t + \gamma L_t + \frac{\epsilon - \alpha\int_0^T tK(dt)}{\int_0^T K(dt)}. \end{aligned}$$

Lassen wir nun den Zeitparameter bis zu der von [Kallsen] eingeführten Stoppzeit laufen, so stimmen die Ergebnisse exakt überein.

Kapitel 5

Beispiele

Der Aufbau aller Beispiele ist der Folgende: nachdem wir die Problemstellung erläutert haben, führen wir das zugrundeliegende Modell ein und geben dabei die Darstellung des Aktienkurses bzgl. P_0 an. Wir erklären, inwiefern jeder Maßwechsel von P_0 nach $P \in \mathcal{P}$ die Aktie beeinflusst. Dadurch werden neben $\mathcal{P}$ auch die Menge der betrachteten Martingalmaße festgelegt. Abschließend geben wir die vollständige Lösung für das duale und primale Optimierungsproblem an.

Zuerst untersuchen wir das in Kapitel 4 eingeführte Beispiel einer Aktie mit zwei Brown'schen Bewegungen, danach folgen zwei Beispiele, in denen die Aktie neben einer Brown'schen Bewegung auch einen Sprungterm besitzt. Dieser gleicht im ersten Beispiel einem Poisson Prozess, im zweiten Beispiel einem Compound-Poisson Prozess. Im ersten Fall können wir nicht nur die Existenzfrage von ζ_{Q_P} klären, sondern auch eine explizite Formel für den Girsanov-Parameter ζ_{Q_P} angeben, die für alle $P \in \mathcal{P}$ Gültigkeit besitzt. In Beispiel 5.3 ist die Herleitung einer geschlossenen Formel nicht mehr möglich. Abschließend vergleichen wir für konkrete Zahlenwerte den Einfluss der Sprünge auf die Optimalwerte, d. h. wir vergleichen die Beispiele 5.2 und 5.3 mit dem Black-Scholes Markt (Beispiel 5.1). Weitere Eigenschaften der ungünstigsten Maße $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ sowie ihr Einfluss auf die Investmentstrategie $\alpha^\star$ werden in Abschnitt 5.4 diskutiert.

5.1 Der unvollständige Black-Scholes Markt

Problemstellung

Wir untersuchen die primale Problemstellung der robusten Konsumnutzenmaximierung für die Power Nutzenfunktion. Über das folgende Modell beschreiben wir die Menge $\mathcal{M}$ aller betrachteten Maße.

Modell

Wir betrachten einen unvollständigen Black-Scholes Markt, bei dem die Aktie gegeben ist durch die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dS_t = S_t \left(\mu_{P_0} dt + \sigma_1 dW_t^{(1)} + \sigma_2 dW_t^{(2)} \right),\ S_0 > 0,\ t \in [0,T]$$

mit den Konstanten $\mu_{P_0} \in \mathbb{R}, (\sigma_1, \sigma_2) \in (0,\infty)^2$ und zwei unabhängigen Brown'schen Bewegungen $W^{(1)}$ und $W^{(2)}$ bzgl. P_0. Das robuste Problem wird durch die Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \ := \ \Bigg\{ P : Z_T^{P,P_0} = \exp\Bigg(& \sigma_1 \zeta_P^{(1)} W_T^{(1)} + \sigma_2 \zeta_P^{(2)} W_T^{(2)} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(\zeta_P^{(1)}\right)^2 T \\ & - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(\zeta_P^{(2)}\right)^2 T \Bigg), \left(\zeta_P^{(1)}, \zeta_P^{(2)}\right) \in A \Bigg\} \end{aligned}$$

mit $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, beschrieben. Die Prozesse

$$\sigma_i W_t^{(i),P} = \sigma_i W_t^{(i)} - \sigma_i^2 \zeta_P^{(i)} t, \quad i = 1,2$$

bezeichnen die beiden unabhängigen Brown'schen Bewegungen bzgl. $P \in \mathcal{P}$. Der unter P modellierte Aktienkurs S besitzt die folgende Darstellung

$$dS_t = S_t \left(\mu_P dt + \sigma_1 dW_t^{(1),P} + \sigma_2 dW_t^{(2),P} \right) \quad \text{mit} \quad \mu_P := \mu_{P_0} + \sigma_1^2 \zeta_P^{(1)} + \sigma_2^2 \zeta_P^{(2)}.$$

Wie bereits im einleitenden Beispiel von Kapitel 4 gesehen befinden wir uns in einem unvollständigen Markt, da unsere Filtration gegeben ist durch $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T]} := \left(\mathcal{F}_t^{W^{(1)},W^{(2)}}\right)_{t\in[0,T]}$.

Die Radon-Nikodym Ableitung eines Martingalmaßes $Q \in \mathcal{M}^P$ ist gegeben durch

$$Z_T^{Q,P} = \exp\left(\sigma_1 \zeta_{Q,P}^{(1)} W_T^{(1),P} + \sigma_2 \zeta_{Q,P}^{(2)} W_T^{(2),P} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(\zeta_{Q,P}^{(1)}\right)^2 T - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(\zeta_{Q,P}^{(2)}\right)^2 T \right)$$

mit $(\zeta_{Q,P}^{(1)}, \zeta_{Q,P}^{(2)})$ als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung

$$\mu_P + \sigma_1^2 \zeta_{Q,P}^{(1)} + \sigma_2^2 \zeta_{Q,P}^{(2)} = 0.$$

Wir bezeichnen mit

$$\sigma_i W_t^{(i),Q} = \sigma_i W_t^{(i),P} - \sigma_i^2 \zeta_{Q,P}^{(i)} t, \quad i = 1,2$$

die beiden unabhängigen Brown'schen Bewegungen bzgl. dem P äquivalenten Martingalmaß $Q \in \mathcal{M}^P$.

Da für $U(x) = \frac{1}{1-\gamma}x^{1-\gamma}, \gamma \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{P_0}\left[\int_0^T V\left(yZ_s^{Q,P}\right)K(ds)\right] \\
= &-\frac{1}{q}y^q\int_0^T \exp\left(\left(\frac{q(q-1)\sigma_1^2\left(\zeta_{Q,P}^{(1)}\right)^2}{2}+\frac{q(q-1)\sigma_2^2\left(\zeta_{Q,P}^{(2)}\right)^2}{2}\right)s\right)K(ds) \\
= &-\frac{1}{q}y^q\int_0^T \exp\left(sk\left(\zeta_{Q,P}^{(1)},\zeta_{Q,P}^{(2)}\right)\right)K(ds) \qquad (5.1)\\
&\text{mit}\quad k\left(\zeta_{Q,P}^{(1)},\zeta_{Q,P}^{(2)}\right) := \frac{q(q-1)\sigma_1^2\left(\zeta_{Q,P}^{(1)}\right)^2}{2}+\frac{q(q-1)\sigma_2^2\left(\zeta_{Q,P}^{(2)}\right)^2}{2}
\end{aligned}$$

gilt, erhalten wir wegen $-\frac{1}{q}y^q > 0$ und $\frac{q(q-1)}{2}s > 0$ das Optimierungsproblem

$$\begin{cases} \sigma_1^2\left(\zeta_{Q,P}^{(1)}\right)^2+\sigma_2^2\left(\zeta_{Q,P}^{(2)}\right)^2 \to \min \\ \mu_P+\sigma_1^2\zeta_{Q,P}^{(1)}+\sigma_2^2\zeta_{Q,P}^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Die Lösungen lauten

$$\zeta_{Q_P}^{(1)} = \zeta_{Q_P}^{(2)} = -\frac{\mu_P}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Lassen wir für die Parameter $\left(\zeta_P^{(1)},\zeta_P^{(2)}\right)$ als zulässigen Bereich $A = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \subset (0,\infty)^2$ zu und setzen die obige Lösung $\left(\zeta_{Q_P}^{(1)},\zeta_{Q_P}^{(2)}\right)$ in das Problem (5.1) ein, so ist eine Minimierung über den Bereich A gleichbedeutend zur Minimierung von μ_P^2, d. h. der Wahl $\left(\zeta_{P^\star}^{(1)},\zeta_{P^\star}^{(2)}\right) = (a_1,a_2)$.

Für die Hedgingstrategie von $H_T := \int_0^T c_t^\star K(dt)$ gilt nach der mehrdimensionalen Clark-Ocone Formel (siehe Proposition 2.1 [Ocone, Karatzas]) mit $D^{(1,Q^\star)}$ und $D^{(2,Q^\star)}$ als den Malliavin Operatoren bzgl. den Brown'schen Bewegungen $W^{(1),Q^\star}$ und $W^{(2),Q^\star}$

$$\alpha_s^\star\sigma_1 S_s = \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(1,Q^\star)}H_T\middle|\mathcal{F}_s^W\right] \quad \text{und} \quad \alpha_s^\star\sigma_2 S_s = \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(2,Q^\star)}H_T\middle|\mathcal{F}_s^W\right], \quad s\in[0,T].$$

Der Zahlungsanspruch H_T ist also replizierbar, wenn

$$\frac{1}{\sigma_1}D_s^{(1,Q^\star)}H_T = \frac{1}{\sigma_2}D_s^{(2,Q^\star)}H_T$$

gilt, was wegen

$$D_s^{(i,Q^\star)}H_T = -\frac{1}{\gamma}\sigma_i\zeta_{Q^\star}^{(i)}\int_s^T\left(y^\star Z_t^{Q^\star,P^\star}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}K(dt)$$

erfüllt ist.

Lösung

(i) Die ungünstigsten Parameter der Maße $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ sowie der Lagrangemultiplikator $y^\star$ sind gegeben durch

- $\left(\zeta^{(1)}_{P^\star}, \zeta^{(2)}_{P^\star}\right) = (a_1, a_2)$,
- $\left(\zeta^{(1)}_{Q^\star}, \zeta^{(2)}_{Q^\star}\right) = \left(-\frac{\mu_{P_0} + \sigma_1^2 a_1 + \sigma_2^2 a_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, -\frac{\mu_{P_0} + \sigma_1^2 a_1 + \sigma_2^2 a_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$
- $y^\star = (x_0)^{-\gamma} \left(\int_0^T \exp\left(tk\left(\zeta^{(1)}_{Q^\star}, \zeta^{(2)}_{Q^\star}\right)\right) K(dt)\right)^{\gamma}$.

(ii) Der primale Optimalwert sowie eine Investmentstrategie $\alpha^\star$ für $c^\star$ sind gegeben durch

- $u(x_0) = \frac{1}{1-\gamma} (y^\star)^q \int_0^T \exp\left(tk\left(\zeta^{(1)}_{Q^\star}, \zeta^{(2)}_{Q^\star}\right)\right) K(dt)$,
- $\alpha^\star_s = -\frac{\zeta^{(1)}_{Q^\star}}{\gamma S_s} \left(y^\star Z^{Q^\star, P^\star}_s\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \int_s^T \exp\left((t-s)k\left(\zeta^{(1)}_{Q^\star}, \zeta^{(2)}_{Q^\star}\right)\right) K(dt) \quad \forall s \in [0,T]$,
- $c^\star_s = \frac{x_0}{\int_0^T \exp\left(tk\left(\zeta^{(1)}_{Q^\star}, \zeta^{(2)}_{Q^\star}\right)\right) K(dt)} Z^{Q^\star, P^\star}_s \quad \forall s \in [0,T]$ mit

$$Z^{Q^\star, P^\star}_s = \exp\left(-\tfrac{\mu_{P^\star}\sigma_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} W^{(1),P^\star}_s - \tfrac{\mu_{P^\star}\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} W^{(2),P^\star}_s - \tfrac{1}{2}\tfrac{\mu^2_{P^\star}\sigma_1^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2} s - \tfrac{1}{2}\tfrac{\mu^2_{P^\star}\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2} s\right).$$

Bemerkung 5.1
Setzen wir $\sigma_2 = 0$, so ist $\zeta^{(1)}_{Q^\star} = -\frac{\mu_{P^\star}}{\sigma_1^2}$ die einzige Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung und wir erhalten die Ergebnisse der Beispiele 3.17 und 4.18.

5.2 Der Poisson-Diffusions Markt

Problemstellung

Wir untersuchen die primale Problemstellung der robusten Konsumnutzenmaximierung für die Power Nutzenfunktion. Über das folgende Modell beschreiben wir die Menge $\mathcal{M}$ aller betrachteten Maße.

Modell

Wir betrachten einen unvollständigen Markt, bei dem die Aktie über das Tripel $\left(\mu_{P_0}, \sigma^2, \lambda_{P_0} \mathbb{1}_{\{x=1\}}\right)$, $\sigma > 0$, modelliert wird, d. h. es gilt

$$dS_t = S_{t-} \left(\mu_{P_0} dt + \sigma dW_t + d(N_t - \lambda_{P_0} t)\right), \; S_0 > 0.$$

Jedes $P \in \mathcal{P}$ ändert den Drift der Aktie um den Faktor ρ, d. h. unter einem Maß P erhalten wir die folgende Darstellung für S

$$dS_t \;=\; S_{t-}\left(\left(\mu_{P_0}+\sigma^2\zeta_P+(\eta_P(1)-1)\lambda_{P_0}\right)dt+\sigma dW_t^P+d\left(N_t-\eta_P(1)\lambda_{P_0}\right)\right)$$

mit $\mu_{P_0}+\sigma^2\zeta_P+(\eta_P(1)-1)\,\lambda_{P_0}=\mu_{P_0}\rho \quad\Leftrightarrow\quad \eta_P(1)=1+\frac{(\rho-1)\mu_{P_0}-\sigma^2\zeta_P}{\lambda_{P_0}}$. Die Menge $\mathcal{P}$ wird dann wie folgt durch $\rho\in A, A\subset(0,\infty)$ abgeschlossen, beschrieben

$$\mathcal{P}:=\left\{P: Z_T^{P,P_0}=(\eta_P(1))^{N_T}\exp\left(\sigma\zeta_P W_T-\frac{1}{2}\zeta_P^2\sigma^2T-T(\eta_P(1)-1)\lambda_{P_0}\right),\,\rho\in A\right\}.$$

Für die Radon-Nikodym Ableitung eines Martingalmaßes $Q\in\mathcal{M}^P$ erhalten wir

$$Z_T^{Q,P}=(\eta_{Q,P}(1))^{N_T}\exp\left(\sigma\zeta_{Q,P}W_T^P-\frac{1}{2}\zeta_{Q,P}^2\sigma^2T-T\eta_P(1)\lambda_{P_0}\left(\eta_{Q,P}(1)-1\right)\right)$$

mit $\eta_{Q_P}(1)=(1+(q-1)\zeta_{Q_P})^{\frac{1}{q-1}}$ und ζ_{Q_P} als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung

$$\begin{aligned}&\mu_{P_0}+\sigma^2\zeta_P+\sigma^2\zeta_{Q_P}+(\eta_P(1)-1)\lambda_{P_0}+((1+(q-1)\zeta_{Q_P})^{\frac{1}{q-1}}-1)\eta_P(1)\lambda_{P_0}=0\\ \Leftrightarrow\quad&\mu_{P_0}\rho+\sigma^2\zeta_{Q_P}+((1+(q-1)\zeta_{Q_P})^{\frac{1}{q-1}}-1)\eta_P(1)\lambda_{P_0}=0.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Da es hier nur eine Sprunghöhe gibt, können wir die Existenz von ζ_{Q_P} direkt nachweisen. Wir definieren die stetige und auf $\left(-\infty,-\frac{1}{q-1}\right)$ wohldefinierte Funktion h über

$$h(\zeta_{Q_P}):=\mu_{P_0}\rho-\eta_P(1)\lambda_{P_0}+\sigma^2\zeta_{Q_P}+\frac{1}{\sqrt[1-q]{1+(q-1)\zeta_{Q_P}}}\eta_P(1)\lambda_{P_0}.$$

Mit

$$\lim_{\zeta_{Q_P}\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[1-q]{1+(q-1)\zeta_{Q_P}}}\eta_P(1)\lambda_{P_0}=0\quad\text{und}\quad\lim_{\zeta_{Q_P}\to-\frac{1}{q-1}|+}\frac{1}{\sqrt[1-q]{1+(q-1)\zeta_{Q_P}}}\eta_P(1)\lambda_{P_0}=\infty$$

erhalten wir $\lim_{\zeta_{Q_P}\to-\infty}h(\zeta_{Q_P})=-\infty<0$ und $\lim_{\zeta_{Q_P}\to-\frac{1}{q-1}|+}h(\zeta_{Q_P})=+\infty>0$. Somit existiert ein ζ_{Q_P} mit $h(\zeta_{Q_P})=0$ nach dem Zwischenwertsatz. Wir haben nun für festes $P\in\mathcal{P}$ die Existenz von ζ_{Q_P} als Lösung der Gleichung (5.2) nachgewiesen und η_{Q_P} über $\eta_{Q_P}(1)=(1+(q-1)\zeta_{Q_P})^{\frac{1}{q-1}}$ festgelegt. Damit lautet das konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{cases}\frac{q(q-1)\sigma^2\zeta_{Q_P}^2}{2}+\eta_{Q_P}^q(1)-1-q\left(\eta_{Q_P}(1)-1\right)\eta_P(1)\lambda_{P_0}\to\min\\ P=P(\zeta_P,\eta_P)\in\mathcal{P}.\end{cases}\tag{5.3}$$

Wir berechnen für jedes $P\in\mathcal{P}$ die Größe ζ_{Q_P} von (5.2) und setzen dann diese zusammen mit $\eta_{Q_P}(1)$ in die duale Zielfunktion von (5.3) ein. Wir demonstrieren dies an einem konkreten Zahlenbeispiel. Wir wählen $\eta_P(1)=1$ für alle $P\in\mathcal{P}$ und erhalten für jedes $P\in\mathcal{P}$ den Parameter

$\zeta_P = \frac{(\rho-1)\mu_{P_0}}{\sigma^2}$. Für $\gamma = \frac{1}{2}$ reduziert sich die Market-Price-of-Risk-Gleichung auf $\mu_{P_0}\rho - \lambda_{P_0} + \sigma^2\zeta_{Q_P} + \lambda_{P_0}(1-2\zeta_{Q_P})^{-\frac{1}{2}} = 0$. Mit $\mu_{P_0} > 0, \lambda_{P_0} > \frac{4}{9}$ und $A = [\epsilon_1, \epsilon_2]$ mit $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \frac{4}{9\mu_{P_0}}$ erhalten wir als Lösung der obigen Gleichung

$$\begin{aligned}\zeta_{Q_P} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{\lambda_{P_0}}{\sigma^2} + \sqrt{\frac{\lambda_{P_0}^2}{\sigma^4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{\mu_{P_0}\rho - \lambda_{P_0}}{\sigma^2}\right)^3}}\right. \\ &\quad \left. + \sqrt[3]{\frac{\lambda_{P_0}}{\sigma^2} - \sqrt{\frac{\lambda_{P_0}^2}{\sigma^4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{\mu_{P_0}\rho - \lambda_{P_0}}{\sigma^2}\right)^3}}\right)^2.\end{aligned}$$

Setzen wir diese explizite Formel in (5.3) ein, so können wir anschließend die Zielfunktion in $\rho \in A$ minimieren und erhalten das ungünstigste Maß $P^\star \in \mathcal{P}$. Dies machen wir nun für die Parameter $\mu_{P_0} = 0.1, \sigma = 1 = \lambda_{P_0}$. Die obige Lösungsformel für ζ_{Q_P} reduziert sich dann auf

$$\zeta_{Q_P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(0.1\rho - 1)\right)^3}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(0.1\rho - 1)\right)^3}}\right)^2$$

und (5.3) besitzt die folgende Darstellung:

$$\begin{cases} k\left(\zeta_{Q_P}\right) \to \min \\ \rho \in \left[\frac{1}{9}, \frac{39}{9}\right] \end{cases} \tag{5.4}$$

mit $k\left(\zeta_{Q_P}\right) := \zeta_{Q_P}^2 + \sqrt{1 - 2\zeta_{Q_P}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta_{Q_P}}}$. Die Abbildung 5.1 zeigt den Verlauf der Zielfunktion von (5.4) bzgl. allen $\rho \in \left[\frac{1}{9}, \frac{39}{9}\right]$. An der Stelle $\rho^\star = \frac{1}{9}$ wird das Minimum angenommen.

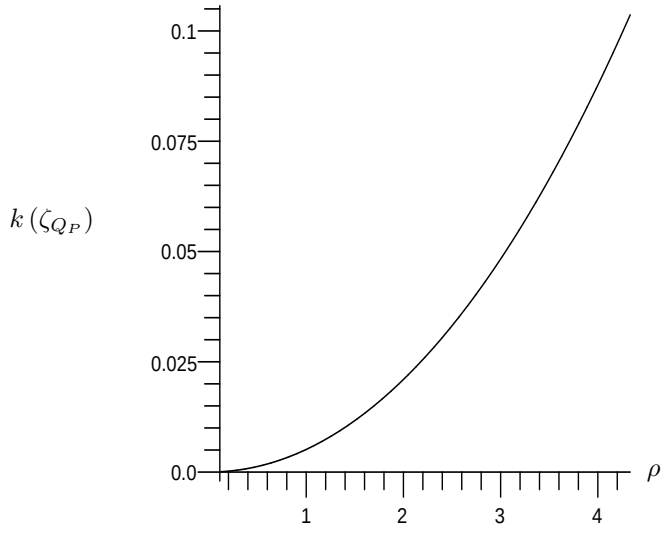

Abbildung 5.1: das ungünstigste, subjektive Maß

Lösung

Wir erhalten mit $\gamma = \frac{1}{2}$, $\mu_{P_0} = 0.1$, $\sigma = \lambda_{P_0} = 1$, $x_0 = 9$, $T = 100$ und $K(dt) = dt$ die folgende Lösung:

(i) Die ungünstigsten Parameter der Maße $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ sowie der Lagrangemultiplikator $y^\star$ sind für das obige Zahlenbeispiel gegeben durch

- $(\zeta_{P^\star}, \eta_{P^\star}) = \left(-\frac{8}{90}, 1\right),$
- $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}) = (-0.0056, 0.9945),$
- $y^\star = 3.3385.$

(ii) Der primale Optimalwert sowie eine Investmentstrategie $\alpha^\star$ für $c^\star$ sind gegeben durch

- $u(x_0) = 60.0937,$
- $\alpha_s^\star = 0.001 \frac{\left(Z_{s-}^{Q^\star,P^\star}\right)^{-2}}{S_{s-}} \left(16133.019 \exp(-6.2373 \cdot 10^{-5} s) - 1\right) \quad \forall s \in [0,T],$
- $c_s^\star = 0.0897 \left(Z_s^{Q^\star,P^\star}\right)^{-2} \quad \forall s \in [0,T]$ mit

$$Z_s^{Q^\star,P^\star} = (0.9945)^{N_s} \exp\left(-0,0056 W_s^{P^\star} + 0.5484\right).$$

Vergleich mit dem Black-Scholes Markt

Vergleichen wir den primalen und dualen Zielfunktionswert sowie den Lagrangemultiplikator beider Modelle, so erhalten wir die nachfolgende Tabelle:

Parameter	$y^\star$	$u(x_0)$	$v(y^\star)$
Black-Scholes Markt	3.6020	64.8364	32.4182
Poisson-Diffusions Markt	3.3385	60.0937	30.0472

Ersetzen wir die zweite Brown'sche Bewegung durch einen Poisson Prozess, so verkleinern sich die Optimalwerte.

5.3 Der Compound-Poisson-Diffusions Markt

Problemstellung

Wir untersuchen die primale Problemstellung der robusten Konsumnutzenmaximierung für die Power Nutzenfunktion. Über das folgende Modell beschreiben wir die Menge $\mathcal{M}$ aller betrachteten Maße.

Modell

Wir betrachten einen unvollständigen Markt, bei dem die Aktie über das Tripel

$$\left(\mu_{P_0} + \lambda_{P_0} \int_{0<|x|\leq 1} x F_X(dx), \sigma^2, \lambda_{P_0} F_X(dx)\right),\ \sigma > 0,$$

modelliert wird, d. h. der Sprungterm der Aktie wird über einen Compound-Poisson Prozess gesteuert mit unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen X_i, deren Verteilungsfunktion gegeben ist durch F_X mit $X_i =: X$. Die stochastische Differentialgleichung der Aktie lässt sich beschreiben durch

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-}\left(\mu_{P_0} dt + \sigma dW_t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i\right) \\ &= S_{t-}\left(\left(\mu_{P_0} + \lambda_{P_0} \int_{\mathbb{R}_0} x F_X(dx)\right) dt + \sigma dW_t + \int_{\mathbb{R}_0} x(\delta - \lambda_{P_0} F_X)(dx, dt)\right),\ S_0 > 0. \end{aligned}$$

Das robuste Problem wird durch die Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{P} := \Big\{ P : Z_T^{P,P_0} = \exp\Big(&\zeta_P \sigma\, W_T - \frac{1}{2}\zeta_P^2 \sigma^2 T + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \ln \eta_P(x) \delta(dx, ds) \\ &- T \int_{\mathbb{R}_0} (\eta_P(x) - 1)\, \lambda_{P_0} F_X(dx)\Big), (\zeta_P, \eta_P) \in A \Big\} \end{aligned}$$

für $A \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ abgeschlossen, modelliert. Unter einem Maß $P \in \mathcal{P}$ hat die Aktie die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-}\Big(\Big(\mu_{P_0} + \lambda_{P_0} \int_{\mathbb{R}_0} x F_X(dx)\Big) dt + \sigma dW_t^P + \sigma^2 \zeta_P dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_0} x(\eta_P(x) - 1) \lambda_{P_0} F_X(dx) dt + \int_{\mathbb{R}_0} x(\delta - \eta_P(x) \lambda_{P_0} F_X)(dx, dt)\Big). \end{aligned}$$

Die Radon-Nikodym Ableitung eines Martingalmaßes $Q \in \mathcal{M}^P$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Z_T^{Q,P} &= \exp\Big(\sigma \zeta_{Q,P} W_T^P - \frac{1}{2}\sigma^2 \zeta_{Q,P}^2 T + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \ln \eta_{Q,P}(x) \delta(dx, ds) \\ &\quad - T \int_{\mathbb{R}_0} (\eta_{Q,P}(x) - 1)\, \eta_P(x) \lambda_{P_0} F_X(dx)\Big) \end{aligned}$$

mit $(\zeta_{Q,P}, \eta_{Q,P})$ als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung

$$\begin{aligned} &\mu_{P_0} + \lambda_{P_0} \int_{\mathbb{R}_0} x F_X(dx) + \sigma^2 \zeta_P + \int_{\mathbb{R}_0} x(\eta_P(x) - 1) \lambda_{P_0} F_X(dx) \\ &+ \sigma^2 \zeta_{Q,P} + \int_{\mathbb{R}_0} x(\eta_{Q,P}(x) - 1) \eta_P(x) \lambda_{P_0} F_X(dx) = 0. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, dass die Zufallsvariablen (X_i) Weibull verteilt sind mit den Parametern $(z_1, z_2, z_3) = (0.5, 1, -1)$, d. h. die Dichte aller ist gegeben durch

$$\frac{F_X(dx)}{dx} = \begin{cases} \frac{z_2}{z_1}\left(\frac{x+1}{z_1}\right)^{z_2-1}\exp\left(-\left(\frac{x+1}{z_1}\right)^{z_2}\right), & x > -1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 2(\exp(-2(x+1))), & x > -1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Parameter μ_{P_0} und λ_{P_0} setzen wir auf $\mu_{P_0} = 0.1758$ und $\lambda_{P_0} = 1$. Ebenso die Volatilität σ der Brown'schen Bewegung sei $\sigma = 1$. Die Menge $\mathcal{P}$ beschreiben wir über alle Paare $(\zeta_P, \eta_P) \in A := [0.5, 1.5] \times \{1\}$, d. h. unter allen Maßen $P \in \mathcal{P}$ bleibt die erwartete Anzahl an Sprüngen gleich.

Gemäß Theorem 3.13 sind für die Power Nutzenfunktion die ungünstigsten Girsanov-Parameter gegeben durch $\eta_{Q_P}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta_{Q_P}x}}$ mit $\gamma = \frac{1}{2}$ und ζ_{Q_P} als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung, die sich mit den obigen Werten vereinfachen lässt zu

$$0.1758 + \zeta_P + \zeta_{Q_P} + \int_{\mathbb{R}_0} \frac{2x\exp(-2(x+1))}{\sqrt{1-2\zeta_{Q_P}x}}dx = 0. \tag{5.5}$$

Berechnen wir nun für jedes Maß $P \in \mathcal{P}$, d. h. jeden Parameter $\zeta_P \in [0.5, 1.5]$ das zugehörige Maß $Q_P \in \mathcal{M}^P$, d. h. ζ_{Q_P} als Lösung von (5.5), so erhalten wir die folgende Konstellation für ζ_P und ζ_{Q_P} in Abbildung 5.2. Man erkennt, dass das kleinste $\zeta_P = 0.5$ mit $\zeta_{Q_P} = -0.1129$ den kleinsten Wert $\zeta^2_{Q_P}$ für $Q_P \in \mathcal{M}^P$ liefert.

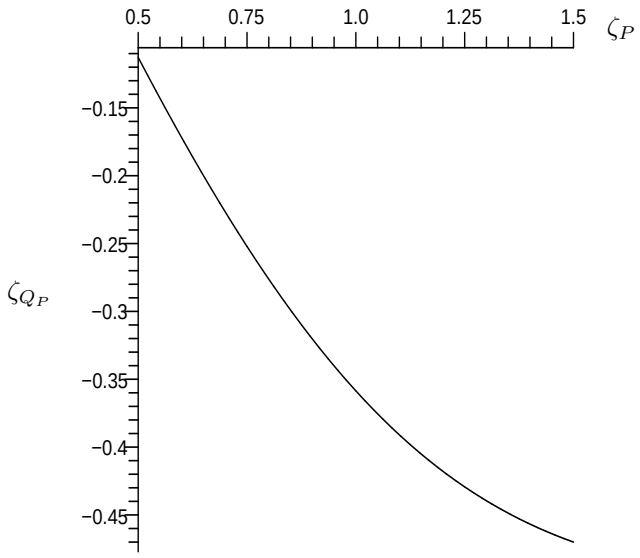

Abbildung 5.2: das ungünstigste Martingalmaß

Um das ungünstigste Maß $P^\star \in \mathcal{P}$ zu finden, müssen wir die dualen Zielfunktionswerte für alle $\zeta_P \in [0.5, 1.5]$ auswerten.

Die Zielfunktion $k(\zeta_{Q_P})$ ist gegeben durch

$$k(\zeta_{Q_P}) := \zeta_{Q_P}^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \left(\sqrt{1 - 2\zeta_{Q_P} x} - 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta_{Q_P} x}} - 1 \right) \right) 2 \exp(-2x - 2) dx$$

und ausgewertet für alle betrachteten Maße $P \in \mathcal{P}$ ergibt dass den anschließenden Graphen:

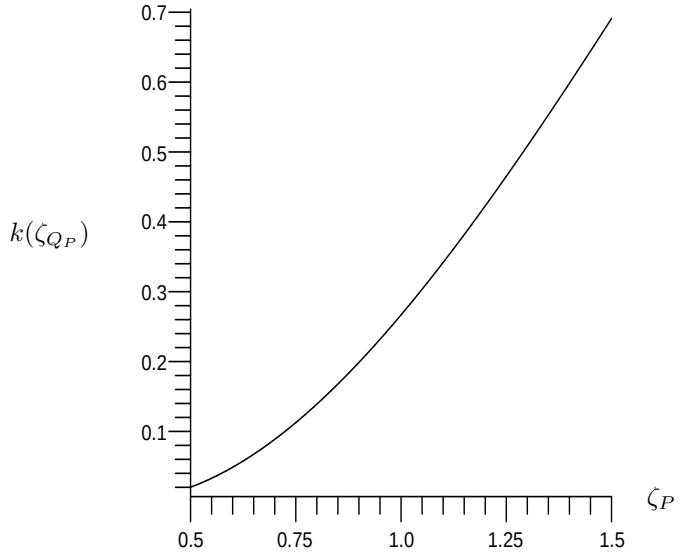

Abbildung 5.3: das ungünstigste, subjektive Maß

Lösung

Wir erhalten mit $\gamma = \frac{1}{2}$, $\mu_{P_0} = 0.1758$, $\sigma = \lambda_{P_0} = 1$, $x_0 = 9$, $T = 1$ und $K(dt) = dt$ die folgende Lösung:

(i) Die ungünstigsten Parameter der Maße $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ sowie der Lagrangemultiplikator $y^\star$ sind für das obige Zahlenbeispiel gegeben durch

- $(\zeta_{P^\star}, \eta_{P^\star}) = (0.5, 1)$,
- $(\zeta_{Q^\star}, \eta_{Q^\star}) = \left(-0.1129, \frac{1}{\sqrt{1 + 0.2258x}} \right)$,
- $y^\star = 0.3350$.

(ii) Der primale Optimalwert sowie eine Investmentstrategie $\alpha^\star$ für $c^\star$ sind gegeben durch

- $u(x_0) = 6.0303$,
- $\alpha_s^\star = 100.1010 \frac{\left(Z_{s-}^{Q^\star, P^\star} \right)^{-2}}{S_{s-}} (1.0203 \exp(-0.0201 s) - 1) \quad \forall s \in [0, T]$,
- $c_s^\star = 8.9097 \left(Z_s^{Q^\star, P^\star} \right)^{-2} \quad \forall s \in [0, T]$ mit

$$Z_s^{Q^\star, P^\star} = \exp\left(-0.1129 W_s^{P^\star} - \tfrac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_0} \ln(1 + 0.2258x)\, \delta(dx, ds) - 0.0736 \right).$$

Vergleich mit dem Black-Scholes Markt

Vergleichen wir den primalen und dualen Zielfunktionswert sowie den Lagrangemultiplikator beider Modelle, so erhalten wir die nachfolgende Tabelle:

Parameter	$y^\star$	$u(x_0)$	$v(y^\star)$
Black-Scholes Markt	0.4002	7.2029	3.6015
Compound-Poisson-Diffusions Markt	0.3350	6.0303	3.0153

Mehr Sprunghöhen als beim Poisson Prozess wirken sich also auf die Optimalwerte in der gleichen Weise aus, d. h. alle Zahlenwerte werden kleiner.

Variation der Volatilität im Lévy Markt

Zum Schluss variieren wir den Volatilitätsparameter und betrachten die Auswirkungen auf die Lösung $\zeta_{Q^\star}$ der Market-Price-of-Risk-Gleichung. Die Ergebnisse für Beispiel 5.3 sind in der anschließenden Tabelle zusammengefasst.

σ	$\zeta_{P^\star}$	$\eta_{P^\star}$	$\zeta_{Q^\star}$	$\eta_{Q^\star}$
1.0	0.5	1	-0.1129	$\left(\sqrt{1+0.2258x}\right)^{-1}$
1.5	0.5	1	-0.1999	$\left(\sqrt{1+0.3998x}\right)^{-1}$
2.0	0.5	1	-0.2514	$\left(\sqrt{1+0.5028x}\right)^{-1}$
2.5	0.5	1	-0.2860	$\left(\sqrt{1+0.5720x}\right)^{-1}$
3.0	0.5	1	-0.3111	$\left(\sqrt{1+0.6222x}\right)^{-1}$

Man erkennt, dass für steigende Volatilität sich das ungünstigste subjektive Maß $P^\star \in \mathcal{P}$ nicht verändert, der Girsanov-Parameter $\zeta_{Q^\star}$ des ungünstigsten Martingalmaßes hingegen immer kleiner wird. Fassen wir $-\sigma\zeta_{Q^\star}$ als den Marktpreis des Risikos auf, so steigt dieser mit wachsender Volatilität, d. h. je stärker die Aktie schwangt, desto größer ist die Prämie für jede übernommene Risikoeinheit.

5.4 Numerische Analyse

Unter Verwendung der Power Nutzenfunktion halten wir hier weitere Beobachtungen fest, die uns bei den drei vorangegangenen Beispielen aufgefallen sind. Wir beginnen mit einer Analyse der Eigenschaften der ungünstigsten Maße $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ und beobachten anschließend ihre Auswirkungen auf die Investmentstrategie. Zudem untersuchen wir, inwiefern das Sprungverhalten des Lévy Prozesses das Investitionsverhalten in die Aktie beeinflusst.

Die ungünstigste Maße $P^\star$ und $Q^\star$

Wir beginnen mit dem ungünstigsten subjektiven Maß $P^\star \in \mathcal{P}$.

(i) In Beispiel 5.1 war der Drift der Aktie sowie die Girsanov-Parameter bzgl. $P^\star$ gegeben durch

$$\mu_{P^\star} = \mu_{P_0} + \sigma_1^2 \zeta_{P^\star}^{(1)} + \sigma_2^2 \zeta_{P^\star}^{(2)} \quad \text{mit} \quad \left(\zeta_{P^\star}^{(1)}, \zeta_{P^\star}^{(2)}\right) = (a_1, a_2) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$

(ii) In Beispiel 5.2 war der Drift der Aktie sowie die Girsanov-Parameter bzgl. $P^\star$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &\mu_{P^\star} = \mu_{P_0}\rho^\star = \mu_{P_0} + \sigma^2 \zeta_{P^\star} + (\eta_{P^\star}(1) - 1)\,\lambda_{P_0} \\ \text{mit} \qquad &\eta_{P^\star}(1) = 1, \zeta_{P^\star} = -\frac{8}{90} \in \left[-\frac{8}{90}, \frac{30}{90}\right]. \end{aligned}$$

(iii) In Beispiel 5.3 war der Drift der Aktie sowie die Girsanov-Parameter bzgl. $P^\star$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &\mu_{P_0} + \lambda_{P_0} \int_{\mathbb{R}_0} x F_X(dx) + \sigma^2 \zeta_{P^\star} + \int_{\mathbb{R}_0} x\,(\eta_{P^\star}(x) - 1)\,\lambda_{P_0} F_X(dx) \\ \text{mit} \qquad &\eta_{P^\star}(x) \equiv 1,\, \zeta_{P^\star} = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]. \end{aligned}$$

Damit wird das Adjektiv „ungünstig“, welches wir bereits in Bemerkung 2.41 erklärt haben, in mehrfacher Hinsicht verständlich:

- In allen Fällen minimieren die ungünstigsten Girsanov-Parameter von $P^\star \in \mathcal{P}$ den Drift der Aktie, d. h. Anleger mit dieser Einschätzung gehen von der kleinstmöglichen Rendite aus, die die Aktie bzgl. allen Modellen erwarten lässt. Dies entspricht unserer Intuition eines ungünstigsten Maßes und passt auch mit den gemachten Beobachtungen aus Kapitel 7 [Gundel] (2005) zusammen.
- Auch beim primalen Optimierungsproblem ist dieser Sachverhalt zu erkennen. Wie im Beweis von Theorem 3.16 zu erkennen, ist das robuste Problem äquivalent zum nicht robusten Problem bzgl. der Modellierung $P^\star \in \mathcal{P}$. Es macht also keinen Unterschied, ob man $P^\star$ wählt oder den erwarteten Konsumnutzen bzgl. allen $P \in \mathcal{P}$ minimiert, da $P^\star$ bereits die für den Anleger ungünstigste Wahl darstellt, sozusagen ein worst-case Szenario.
- Auch das ungünstigste Martingalmaß verdient seinen Namen. Wie in Lemma 2.39 zu sehen, ist der Preis für den optimalen Konsumprozess unter $Q^\star$ am größten, d. h. zusammen mit $P^\star$ spiegelt das Paar $(P^\star, Q^\star)$ den teuersten Markt mit dem kleinsten Drift für die Aktie wider.

Um das Investitionsverhalten in die Aktie bei unterschiedlicher Wahl von $P \in \mathcal{P}$ zu untersuchen, betrachten wir den Zusammenhang zwischen den Parametern der subjektiven Maße und der Martingalmaße und erhalten die anschließenden Aussagen:

(i) In Beispiel 5.1 ergab sich für die Girsanov-Parameter

$$\zeta_{Q^\star}^{(1)} = \zeta_{Q^\star}^{(2)} = -\frac{\mu_{P^\star}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = -\frac{\mu_{P_0} + \sigma_1^2 \zeta_{P^\star}^{(1)} + \sigma_2^2 \zeta_{P^\star}^{(2)}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad \text{mit} \quad \left(\zeta_{P^\star}^{(1)}, \zeta_{P^\star}^{(2)}\right) = (a_1, a_2) \subset (0, \infty).$$

(ii) Für Beispiel 5.2 erhalten wir den in Abbildung 5.4 veranschaulichten Zusammenhang zwischen den Parametern ρ der Maße $P \in \mathcal{P}$ und den entsprechenden Parametern ζ_{Q_P} der Maße $Q_P \in \mathcal{M}^P$. Analog zu Beispiel 5.3 besitzt $P^\star \in \mathcal{P}$ den kleinsten Girsanov-Parameter $\rho^\star$, somit auch den kleinsten Wert für $\zeta_{P^\star}$, was den größten Wert für $\zeta_{Q^\star}$ impliziert.

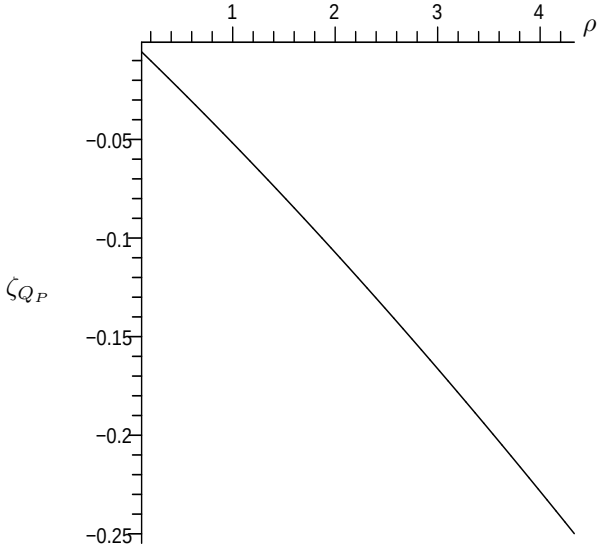

Abbildung 5.4: der Zusammenhang zwischen ρ und ζ_{Q_P}

(iii) In Beispiel 5.3 verdeutlichten wir in Abbildung 5.2 den Zusammenhang der Parameter.

Bei allen Beispielen zeigte sich, dass der kleinste Parameter für ζ_P den größten Wert für ζ_{Q_P} liefert, d. h. dass ungünstigste, subjektive Maß besitzt den kleinsten, das ungünstigste, äquivalente Martingalmaß den größten, zugelassenen Parameterwert ζ. Nun sind wir in der Lage, den Einfluss unterschiedlicher Maße $P \in \mathcal{P}$ auf die Hedgingstrategie $\alpha^\star$ zu untersuchen.

Für den Fall $\sigma > 0$ erhalten wir nach Theorem 4.14 mit $V_t^\star := V_t(\alpha^\star, c^\star)$

$$\frac{\alpha_t^\star S_{t-}}{V_{t-}^\star} = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma} \quad \text{mit } \zeta_{Q^\star} \text{ als Lösung der Market-Price-of-Risk-Gleichung}$$

$$\mu_{P^\star} + \int_{|x|>1} x \nu_{P^\star}(dx) + \sigma^2 \zeta_{Q^\star} + \int_{\mathbb{R}_0} x \left(\left(1 - \frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma} x\right)^{-\gamma} - 1 \right) \nu_{P^\star}(dx) = 0. \tag{5.6}$$

Bemerkung 5.2
Für den prozentualen Aktienanteil am Gesamtvermögen erkennen wir für den Lévy Sprungmarkt das Merton Ratio wieder. Wie im Black-Scholes Modell ist es unabhängig von $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$.

Einfluss der subjektiven Maße auf die Investmentstrategie

Wie bereits beobachtet impliziert $\zeta_{P^\star}$ in allen Beispielen den größten Wert $\zeta_{Q^\star}$, d. h. es gilt $0 > \zeta_{Q^\star} > \zeta_{Q_P}$ für alle $P \in \mathcal{P}$. Damit erhalten wir die folgende Aussage.

Theorem 5.3
Sei $\sigma > 0$ und $0 > \zeta_{Q^\star} > \zeta_{Q_P}$. Dann gilt

$$\frac{\alpha_t^\star S_{t-}}{V_{t-}^\star} < -\frac{\zeta_{Q_P}}{\gamma}.$$

Beweis:
Nach Theorem 4.14 erhalten wir

$$\frac{\alpha_t^\star S_{t-}}{V_{t-}^\star} = -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma} < -\frac{\zeta_{Q_P}}{\gamma}.$$

□

Das obige Theorem besagt somit, dass der prozentuale Aktienanteil am Gesamtvermögen bzgl. dem ungünstigsten subjektiven Maß $P^\star$ kleiner dem prozentualen Aktienanteil am Gesamtvermögen bzgl. jedem anderen $P \in \mathcal{P}$ ist. Dieser Effekt, bzgl. dem ungünstigsten subjektiven Maß $P^\star$ weniger in die Aktie zu investieren als bei jedem anderen subjektiven Maß $P \in \mathcal{P}$, war bereits im Black-Scholes Markt (siehe Beispiel 4.18) zu beobachten.

Variieren wir statt dem subjektiven Maß nun das Martingalmaß, so stellen wir durch Lemma 2.39 fest, dass das ungünstigste Martingalmaß den teuersten Preis für den optimalen Konsumprozess liefert und die in Kapitel 4 berechnete Investmentstrategie $\alpha^\star$ den Preisprozess des optimalen Konsums bzgl. allen anderen Bewertungen $Q \in \mathcal{M}^{P^\star}, Q \neq Q^\star$, dominiert.

Halten wir nun das subjektive Maß $P^\star$ fest und verändern die Anzahl der Sprünge, so taucht dasselbe Phänomen erneut auf. Dies wird im Folgenden diskutiert.

Einfluss der Sprünge auf die Investmentstrategie

Nach einer Interpretation von $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M}$ sowie den jeweiligen Einfluss auf die Hedgingstrategie $\alpha^\star$ vergleichen wir das Investitionsverhalten zwischen dem hier betrachteten Lévy Markt und dem Black-Scholes Markt.

Da wir Sprünge aus dem Intervall $(-1, \infty)$ zulassen, erhalten wir die beiden Ungleichungen

$$\int_{|x|>1} x\nu_{P^\star}(dx) > 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}_0} x\left(\left(1 - \frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma}x\right)^{-\gamma} - 1\right)\nu_{P^\star}(dx) < 0$$

für alle $\zeta_{Q^\star} \in [-\gamma, 0]$. Die Lösung $\zeta^{BS}_{Q^\star}$ ist im Black-Scholes Markt gegeben durch $\zeta^{BS}_{Q^\star} = -\frac{\mu_{P^\star}}{\sigma^2}$. Für diese Lösung sollen die Ungleichungen $\zeta^{BS}_{Q^\star} = -\frac{\mu_{P^\star}}{\sigma^2} \geq -\gamma$ und

$$\int_{|x|>1} x\nu_{P^\star}(dx) + \int_{\mathbb{R}_0} x\left(\left(1 - \frac{\zeta^{BS}_{Q^\star}}{\gamma}x\right)^{-\gamma} - 1\right)\nu_{P^\star}(dx) \leq 0$$

erfüllt sein. Setzen wir dann $\zeta_{Q^\star} := \zeta^{BS}_{Q^\star}$ in die Market-Price-of-Risk-Gleichung (5.6) ein, so ist die linke Seite negativ, für $\zeta_{Q^\star} = 0$ positiv und somit muss $\zeta_{Q^\star} \geq \zeta^{BS}_{Q^\star}$ gelten. Wir erhalten für das Investitionsverhalten die Aussage:

$$\begin{aligned} \text{prozentualer Aktienanteil im Black-Scholes Markt} &= -\frac{\zeta^{BS}_{Q^\star}}{\gamma} \\ &\geq -\frac{\zeta_{Q^\star}}{\gamma} \\ &= \text{prozentualer Aktienanteil im Lévy Markt.} \end{aligned}$$

Anhang A

Grundlagen

A.1 Lévy Prozesse

Die Definitionen und Aussagen sind in den Büchern von [Cont, Tankov], [Applebaum] oder [Sato] zu finden.

Definition A.1
Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ ein beliebiger Grundraum. Ein Radon Maß auf $(E, \mathcal{B}(E))$ ist ein Maß ν, für das auf jeder kompakten, messbaren Menge $A \in \mathcal{B}(E)$ gilt: $\nu(A) < \infty$.

Definition A.2
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P_0)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $E \subset \mathbb{R}^d$ und ν ein Radon Maß auf $(E, \mathcal{B}(E))$. Ein Poisson'sches Zufallsmaß δ mit Intensitätsmaß ν ist ein zufälliges Maß

$$\delta : \mathcal{B}(E) \times \mathcal{F} \to \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$$

mit den Eigenschaften

- $\forall A \in \mathcal{B}(E) \;\; \forall k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$ gilt $P_0(\delta(A) = k) = e^{-\nu(A)} \frac{(\nu(A))^k}{k!}$,
- $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(E)$ disjunkt $\Rightarrow$ $\delta(A_1), \ldots, \delta(A_n)$ sind unabhängige Zufallsvariablen,
- $\forall \omega \in \Omega$ ist $\delta(., \omega)$ ein Maß auf E.

Definition A.3
Ein stochastischer Prozess $L = (L_t)_{t \in [0,T]}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P_0)$ mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt Lévy Prozess, wenn gilt

- $L_0 = 0$,
- L besitzt unabhängige Zuwächse, d. h. für jede wachsende Zerlegung $t_0, \ldots, t_n \in [0,T]$ sind $L_{t_0}, L_{t_1} - L_{t_0}, \ldots, L_{t_n} - L_{t_{n-1}}$ unabhängig,
- L besitzt stationäre Zuwächse, d. h. die Verteilung von $L_{t+s} - L_t$ mit $s > 0$ hängt nicht von t ab,
- L ist stochastisch stetig, d. h. $\forall \epsilon > 0$ gilt $\lim_{s \to 0} P_0(|X_{t+s} - X_t| \geq \epsilon) = 0$.

Nach Theorem 1.2 [Øksendal, Sulem] (2005) existiert für jeden Lévy Prozess eine Version, die rechtsstetig ist und linksseitige Grenzwerte besitzt, d. h. càdlàg Pfade hat. Diese Eigenschaft ist wichtig für den Beweis, dass jeder Lévy Prozess auf dem Zeitintervall [0,T] nur endlich viele Sprünge mit Sprunghöhe $x \in [\epsilon, \infty), \epsilon > 0$ besitzt.

Wir beschreiben den Lévy Prozess durch eine geeignete Zerlegung mit Hilfe eines Poisson'schen Zufallsmaßes δ. Dazu sei mit $A \times [0,t] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0 \times [0,T])$

$$\delta(A, [0,t]) := \delta_L(A \times [0,t], \omega) := \#\{s \in [0,t] : (s, L_s(\omega) - L_{s-}(\omega)) \in A\} \tag{A.1}$$

und
$$\nu_{P_0}(A) := \mathbb{E}_{P_0}[\delta(A, [0,1])]. \tag{A.2}$$

Wir bezeichnen mit ν_{P_0} das zu L zugehörige Lévy Maß (bzgl. P_0) und verwenden die Notation $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Bemerkung A.4

- δ ist ein Radon Maß auf $\mathbb{R}_0 \times [0,T]$, d. h. für jede kompakte Menge $A \times [0,t] \subset \mathbb{R}_0 \times [0,T]$ gilt $\delta(A \times [0,t]) < \infty$.
- Nach Theorem 1.5 [Øksendal, Sulem] (2005) gilt dasselbe für das Lévy Maß ν_{P_0}.

Die obige Bemerkung können wir wegen der càdlàg Eigenschaft der Lévy Prozesse ausdehnen, indem wir die Sprunghöhe nach oben unbeschränkt lassen. Dann erhalten wir die anschließende Aussage bzgl. der Zerlegung von Lévy Prozessen.

Proposition A.5
Sei $L = (L_t)_{t \in [0,T]}$ ein Lévy Prozess mit Lévy Maß ν_{P_0}. Dann gilt

(i) ν_{P_0} aus (A.2) ist ein Radon Maß auf $\mathbb{R}_0$ und erfüllt

$$\int_{\mathbb{R}_0} \min\left(1, x^2\right) \nu_{P_0}(dx) < \infty.$$

(ii) δ aus (A.1) ist ein Poisson'sches Zufallsmaß auf $\mathbb{R}_0 \times [0,T]$ mit Intensitätsmaß $\nu_{P_0}(dx)dt$.

(iii) Es existieren $\mu_{P_0} \in \mathbb{R}$ und $\sigma_{P_0} \geq 0$ mit

$$L_t = \mu_{P_0} t + \sigma_{P_0} W_t + \int_0^t \int_{0<|x|\leq 1} x(\delta - \nu_{P_0})(dx, ds) + \int_0^t \int_{|x|>1} x\delta(dx, ds), \quad \text{(A.3)}$$

wobei $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ ein Wiener Prozess bzgl. P_0 ist.

Des Weiteren bemerken wir, dass aufgrund der Darstellung (A.3) jeder Lévy Prozess über das Lévy Tripel $\left(\mu_{P_0}, \sigma^2_{P_0}, \nu_{P_0}\right)$ beschrieben werden kann. Bzgl. der Integrierbarkeit erhalten wir die folgende Aussage.

Proposition A.6
Sei L ein Lévy Prozess mit Tripel $\left(\mu_{P_0}, \sigma^2_{P_0}, \nu_{P_0}\right)$. Dann gilt $\forall t \in [0,T]$

(i) L_t hat endliches, p-tes Moment für $p \in \mathbb{R}_+$ (d. h. $\mathbb{E}_{P_0}[|L_t|^p] < \infty$) genau dann, wenn $\int_{|x|>1} |x|^p \nu_{P_0}(dx) < \infty$.

(ii) L_t hat endliches, p-tes Exponentialmoment für $p \in \mathbb{R}$ (d. h. $\mathbb{E}_{P_0}[\exp(pL_t)] < \infty$) genau dann, wenn $\int_{|x|>1} \exp(px)\nu_{P_0}(dx) < \infty$.

Interessant ist in diesem Zusammenhang die Äquivalenz:

$$\mathbb{E}_{P_0}[|L_s|] < \infty \text{ für alle } s \in [0,T] \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}_{P_0}[|L_s|] < \infty \text{ für ein } s \in [0,T].$$

Um das Lévy Tripel eines gegebenen Prozesses bestimmen zu können, zitieren wir folgenden Aussagen.

Proposition A.7
Sei $(L_t)_{t\in[0,T]}$ ein Lévy Prozess mit Lévy Tripel $\left(\mu_{P_0}, \sigma^2_{P_0}, \nu_{P_0}\right)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}_{P_0}[\exp(izL_t)] = \exp(th(z)), \quad z \in \mathbb{R}, i \text{ imaginäre Einheit und}$$
$$h(z) = -\frac{1}{2}\sigma^2_{P_0} z^2 + i\mu_{P_0} z + \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\exp(izx) - 1 - izx\mathbb{1}_{\{0<|x|\leq 1\}}\Big)\nu_{P_0}(dx).$$

Definition A.8
Ein Compound-Poisson Prozess ist ein Prozess in der Form $\left(\sum_{j=1}^{N_t} X_j\right)_{t\in[0,T]}$, wobei

- N_t ein Poisson Prozess ist mit Intensität $\lambda_{P_0} t$,

- $X_j \sim F_{X_j} = F_X$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen sind, unabhängig von N.

Korollar A.9
Sei $(L_t)_{t\in[0,T]}$ ein Compound-Poisson Prozess. Dann besitzt die charakteristische Funktion die folgende Darstellung

$$\mathbb{E}_{P_0}[\exp(izL_t)] = \exp\left(t\lambda_{P_0}\int_{\mathbb{R}_0}\Big(\exp(izx)-1\Big)F_X(dx)\right) \quad \forall z\in\mathbb{R}, i \text{ imaginäre Einheit,}$$

wobei F_X die Verteilungsfunktion und $\lambda_{P_0}t$ die Intensität des Poisson Prozesses unter P_0 bezeichnet.

Beispiel A.10
Wir betrachten hier die Lévy Tripel bzgl. P_0 dreier wichtiger Prozesse:

- die Brown'sche Bewegung $(\sigma_{P_0}W_t)_{t\in[0,T]}$ wird durch das Tripel $\left(0,\sigma^2_{P_0},0\right)$ beschrieben.
- der Poisson Prozess $(N_t)_{t\in[0,T]}$ mit Intensität $\lambda_{P_0}t$ besitzt das Tripel $\left(\lambda_{P_0},0,\lambda_{P_0}\mathbb{1}_{\{x=1\}}dx\right)$.
- beim Compound-Poisson Prozess ist das Tripel gegeben durch

$$\left(\lambda_{P_0}\int_{0<|x|\le 1} xF_X(dx), 0, \lambda_{P_0}F_X(dx)\right).$$

$\diamond$

Mit der Darstellungseigenschaft und Integrierbarkeit von Lévy Prozessen können wir nun diskutieren, wann diese Martingale sind.

Proposition A.11
Sei δ ein Poisson'sches Zufallsmaß mit Intensitätsmaß ν_{P_0}. Dann gilt für jede messbare Menge $A\subset\mathbb{R}\times[0,T]$ und für jede deterministische Funktion h mit $\int_A|\exp(h(x,t))-1|\nu_{P_0}(dx)dt<\infty$:

$$\mathbb{E}_{P_0}\left[\exp\left(\int_A h(x,t)\delta(dx,dt)\right)\right] = \exp\left(\int_A\Big(\exp(h(x,t))-1\Big)\nu_{P_0}(dx)dt\right).$$

Proposition A.12
Sei $(L_t)_{t\in[0,T]}$ ein reellwertiger Prozess mit unabhängigen Zuwächsen. Wenn $\mathbb{E}_{P_0}[\exp(zL_t)]<\infty$ $\forall t\in[0,T]$ und ein $z\in\mathbb{R}$, dann ist $\left(\frac{\exp(zL_t)}{\mathbb{E}_{P_0}[\exp(zL_t)]}\right)_{t\in[0,T]}$ ein Martingal.

Eine ähnliche Aussage wie in Proposition A.12 wird im stetigen Fall in Korollar 5.13 [Karatzas, Shreve] betätigt und ist unter der „Novikov Bedingung“ bekannt.

Damit können wir bei der Modellierung von z. B. Aktienkursen schnell und direkt feststellen, wann dieser die Martingaleigenschaft besitzt und wann nicht. So erhalten wir als Konsequenz unserer Überlegung das folgende Resultat für integrierbare Lévy Prozesse:

Proposition A.13
Sei $L = (L_s)_{s\in[0,T]}$ ein Lévy Prozess mit Tripel $\left(\mu_{P_0}, \sigma^2_{P_0}, \nu_{P_0}\right)$ und sei $\mathbb{E}_{P_0}[|L_s|] < \infty \ \ \forall s \in [0,T]$. Dann gilt

$$L \text{ ist ein Martingal genau dann, wenn } \mu_{P_0} + \int_{|x|>1} x\nu_{P_0}(dx) = 0.$$

Wir schließen dieses Kapitel mit dem mathematischen Ausdruck des stochastischen Exponentials ab, mit dessen Hilfe wir in Kapitel 2 den Aktienkurs modellieren. Dabei verwenden wir die Definition bzgl. eines allgemeinen Semimartingals nach [Jacod, Shiryaev].

Das stochastische Exponential $\mathcal{E}(L)$ eines Semimartingals (und damit auch eines Lévy Prozesses) $L = (L_s)_{s\in[0,T]}$ ist die Lösung X der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = X_{t-}dL_t, \quad X_0 = 1,$$

die gegeben ist durch

$$\mathcal{E}(L)_t := X_t = \exp\left(L_t - L_0 - \frac{1}{2} < L^{\text{st}}, L^{\text{st}} >_t\right) \prod_{0<s\leq t} (1+ \triangle\ L_s)\exp(- \triangle\ L_s),$$

wobei L^{st} den stetigen Martingalanteil von L bezeichnet und $\triangle\ L_s := L_s - L_{s-}$.

Proposition A.14
Sei L ein Lévy Prozess und ein Martingal, dann ist das stochastische Exponential $\mathcal{E}(L)$ ebenfalls ein Martingal.

A.2 Hilfsresultate Kapitel 2

Theorem A.15
Seien $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von integrierbaren Zufallsvariablen und $h = h(x)$ eine nicht negative, wachsende Funktion, definiert für alle $x \in [0,\infty)$ derart, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = \infty \quad \text{und} \quad \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}_P[h(|X_n|)] < \infty \quad \text{gilt.}$$

Dann ist die Familie $\{X_n\}_{n\geq 1}$ gleichmäßig integrierbar.

Beweis:
siehe Lemma 3 [Shiryaev]. □

Theorem A.16
Sei A_1 eine konvexe, kompakte Teilmenge eines lokal konvexen Raumes und A_2 eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes. Wir nehmen an, dass die Funktion $h : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$z_1 \mapsto h(z_1, z_2)$ ist stetig und konkav auf A_1 für jedes $z_2 \in A_2$.
$z_2 \mapsto h(z_1, z_2)$ ist konvex auf A_2 für jedes $z_1 \in A_1$.

Dann gilt

$$\sup_{z_1 \in A_1} \inf_{z_2 \in A_2} h(z_1, z_2) = \inf_{z_2 \in A_2} \sup_{z_1 \in A_1} h(z_1, z_2).$$

Beweis:
siehe Theorem 45.8 [Strasser]. □

Lemma A.17
Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von nicht negativen Zufallsvariablen. Dann existiert eine Folge $Y_n \in conv\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ mit $n \geq 1$, die fast sicher gegen eine Zufallsvariable Y mit Werte in $[0, \infty]$ konvergiert.

Beweis:
siehe z. B. Lemma 3.1 [Kramkov, Schachermayer] (1999). □

A.3 Differenzierbarkeit

A.3.1 Richtungsableitungen

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, Q^\star)$. Die hier aus [Petrou] übernommenen Aussagen gelten unter der folgenden Annahme:

Annahme A.18
Der unter $Q^\star \in \mathcal{M}^{P^\star}$ betrachtete Lévy Prozess $L^{Q^\star}$ mit der Darstellung

$$L_t^{Q^\star} = \sigma W_t^{Q^\star} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} x(\delta - \nu_{Q^\star})(dx, ds) \quad \text{für alle } t \in [0, T],$$

ist quadratisch integrierbar, d. h. $\int_{\mathbb{R}_0} x^2 \nu_{Q^\star}(dx) < \infty$. $\diamond$

Für die anschließenden Aussagen führen wir mit λ als Lebesgue Maß die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= [0,T] \quad \text{und} \quad B^{(1)} = [0,T] \times \mathbb{R}_0, \\ Y^{(0)} &= W_\cdot^{Q^\star} \quad \text{und} \quad Y^{(1)} = (\delta - \nu_{Q^\star})(\cdot,\cdot), \\ d\langle Y^{(0)} \rangle &= d\lambda \quad \text{und} \quad d\langle Y^{(1)} \rangle = d\nu_{Q^\star} \times d\lambda. \end{aligned}$$

Zudem sei

$$m^l = \begin{cases} t, & l = 0 \\ (t,x), & l = 1. \end{cases}$$

Mit $j_1, \ldots, j_n \in \{0,1\}$ definieren wir die Mengen $G_{j_1,\ldots,j_n}$ und $G^k_{j_1,\ldots,j_n}$ sowie das n-fach iterierte Integral $J_n^{(j_1,\ldots,j_n),Q^\star}$ für $k, n \in \mathbb{N}$ wie folgt

- $G_{j_1,\ldots,j_n} := \left\{ \left(m_1^{j_1}, \ldots, m_n^{j_n} \right) \in \bigotimes_{i=1}^n B^{(j_i)} : 0 =: t_0 < t_1 < \ldots < t_n < T \right\},$
- $G^k_{j_1,\ldots,j_n}(t) := \Big\{ \left(m_1^{j_1}, \ldots, \hat{m}_k^{j_k}, \ldots, m_n^{j_n} \right) \in G_{j_1,\ldots,j_{k-1},j_{k+1},\ldots,j_n} :$
$$0 =: t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t < t_{k+1} < \ldots < t_n < T \Big\},$$
- $J_n^{(j_1,\ldots,j_n),Q^\star}(g_{j_1,\ldots,j_n}) := \int_{G_{j_1,\ldots,j_n}} g_{j_1,\ldots,j_n} \left(m_1^{j_1}, \ldots, m_n^{j_n} \right) dY^{(j_1)}(m_1^{j_1}) \ldots dY^{(j_n)}(m_n^{j_n}),$

wobei $g_{j_1,\ldots,j_n}$ eine deterministische Funktion aus $\mathcal{L}^2(G) := \mathcal{L}^2\left(G_{j_1,\ldots,j_n}, \bigotimes_{i=1}^n d\langle Y^{(j_i)} \rangle\right)$ ist und $\hat{m}$ bedeutet, dass wir das Element m weglassen. Damit erhalten wir den folgenden Zerlegungssatz:

Lemma A.19
Für jede Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T^L, Q^\star\right) =: \mathcal{L}^2(Q^\star)$ existiert eine eindeutige Folge $\{g_{j_1,\ldots,j_n}\}_{n=1}^\infty$ mit $g_{j_1,\ldots,j_n} \in \mathcal{L}^2(G)$ derart, dass

$$X = \mathbb{E}_{Q^\star}[X] + \sum_{n=1}^\infty \sum_{j_1,\ldots,j_n \in \{0,1\}} J_n^{(j_1,\ldots,j_n),Q^\star}(g_{j_1,\ldots,j_n})$$

und

$$\|X\|^2_{\mathcal{L}^2(Q^\star)} = \sum_{n=1}^\infty \sum_{j_1,\ldots,j_n \in \{0,1\}} \|g_{j_1,\ldots,j_n}\|^2_{\mathcal{L}^2(G)} \quad \text{gilt.}$$

Damit können wir nun die Menge aller differenzierbaren Zufallsvariablen wie folgt beschreiben.

Definition A.20

- Für $l = 0, 1$ und $(P^\star, Q^\star) \in \mathcal{M} := \left\{(P, Q) : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{M}^P\right\}$ definieren wir die folgende Menge:

$$\mathbb{D}^{(l,Q^\star)} := \Bigg\{ X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^L, Q^\star), X = \mathbb{E}_{Q^\star}[X] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_n \in \{0,1\}} J_n^{(j_1,\ldots,j_n),Q^\star}(g_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_n \in \{0,1\}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(j_i=l)} \int_{B^{(j_n)}} \|g_{j_1,\ldots,j_n}(\cdot, m^l, \cdot)\|^2_{\mathcal{L}^2\left(G^i_{j_1,\ldots,j_{n-1}}(t), \bigotimes_{k=1,k\neq i}^n d\langle Y^{(j_k)}\rangle\right)} d\langle Y^{(j_n)}\rangle < \infty \Bigg\}.$$

- Sei $X \in \mathbb{D}^{(l,Q^\star)}$. Dann ist die Ableitung von X bzgl. der $l-$ten Richtung gegeben durch

$$D_{m^l}^{(l,(1-l)Q^\star)} X = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_n \in \{0,1\}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{j_i=l\}} J_{n-1}^{(j_1,\ldots,\hat{j_i},\ldots,j_n),Q^\star} \left(g_{j_1,\ldots,j_n}(\cdot, m^l, \cdot) \mathbb{1}_{G^i_{j_1,\ldots,j_n}(t)} \right).$$

Mit $D^{(0,Q^\star)}$ bezeichnen wir die erste Richtungsableitung bzgl. dem Wiener Prozess $W^{Q^\star}$, mit $D^{(1)} := D^{(1,0)}$ bezeichnen wir die zweite Richtungsableitung bzgl. dem kompensierten Sprungmaß $(\delta - \nu_{Q^\star})$.

Es gilt für die Integrierbarkeitsbedingung in der Menge $\mathbb{D}^{(l,Q^\star)}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\left(D_{m^l}^{(l,(1-l)Q^\star)} X\right)^2\right] \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_n \in \{0,1\}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{j_i=l\}} \int_{B^{(j_n)}} \|g_{j_1,\ldots,j_n}(\cdot, m^l, \cdot)\|^2_{\mathcal{L}^2\left(G^i_{j_1,\ldots,j_{n-1}}(t), \otimes_{k=1,k\neq i}^n d\langle Y^{(j_k)}\rangle\right)} d\langle Y^{(j_n)}\rangle, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} X \in \mathbb{D}^{(0,Q^\star)} \quad &\Leftrightarrow \quad X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^L, Q^\star), \quad \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\left(D_t^{(0,Q^\star)} X\right)^2\right] < \infty \quad \forall t \in [0,T]. \\ X \in \mathbb{D}^{(1,Q^\star)} \quad &\Leftrightarrow \quad X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^L, Q^\star), \quad \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\left(D_{(t,x)}^{(1)} X\right)^2\right] < \infty \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_0. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für eine stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $X \in \mathbb{D}^{(1,Q^\star)}$ die Behauptung

$$h(X) \in \mathbb{D}^{(1,Q^\star)} \quad \text{wenn} \quad X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^L, Q^\star), \, \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\left(D_{(t,x)}^{(1)} h(X)\right)^2\right] < \infty \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_0,$$

siehe auch Lemma 3.6 [Øksendal, Sulem] (2004). Bei Richtungsableitungen bzgl. der Brown'schen Bewegung ist die Zulässigkeit von $h(X) \in \mathbb{D}^{(0,Q^\star)}$ garantiert, wenn $X \in \mathbb{D}^{(0,Q^\star)}$ und h stetig differenzierbar ist (siehe bzgl. der klassischen Malliavin Ableitung Proposition 1.2.4 [Nualart]).

Lemma A.21
Sei $X \in \mathbb{D}^{(0,Q^\star)}$ und h eine stetig differenzierbare Funktion mit beschränkten Ableitungen. Dann ist $h(X) \in \mathbb{D}^{(0,Q^\star)}$ und es gilt die Kettenregel

$$D_t^{(0,Q^\star)} h(X) = h'(X) D_t^{(0,Q^\star)} X.$$

Eine Rechenregel für die zweite Richtungsableitung ist durch das folgende Lemma gegeben. Dazu benötigen wir die anschließende Notation: für $A_1 \subset [0,T]$ und $A_2 \subset \mathbb{R}_0$ definieren wir die Transformationen $\epsilon^-_{(t,x)}$ und $\epsilon^+_{(t,x)}$ auf Ω wie folgt:

$$\epsilon^-_{(t,x)}\omega(A_1 \times A_2) := \omega(A_1 \times A_2 \cap (t,x)^c) \quad \text{und}$$
$$\epsilon^+_{(t,x)}\omega(A_1 \times A_2) := \epsilon^-_{(t,x)}\omega(A_1 \times A_2) + \mathbb{1}_{A_1}(t)\mathbb{1}_{A_2}(x).$$

Lemma A.22
Sei $X \in \mathbb{D}^{(1,Q^\star)}$. Dann gilt

$$D^{(1)}_{(t,x)} X = X \circ \epsilon^+_{(t,x)} - X.$$

Zum Schluss zitieren wir das Hauptresultat Theorem 2.3.1 aus der Dissertation von [Petrou].

Proposition A.23
Sei $\sigma > 0$ und $X \in \bigcap_{l=0,1} \mathbb{D}^{(l,Q^\star)}$. Dann lässt sich X wie folgt zerlegen

$$X = \mathbb{E}_{Q^\star}[X] + \int_0^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_s^{(0,Q^\star)} X \middle| \mathcal{F}^L_{s-}\right] dW_s^{Q^\star} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D^{(1)}_{(s,x)} X \middle| \mathcal{F}^L_{s-}\right] (\delta - \nu_{Q^\star})(dx, ds).$$

A.3.2 Differenzenoperator

Wir zitieren hier die Resultate aus der Arbeit von [Løkka]. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, Q^\star)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}^J_t$ die vom Lévy Prozess $J_s := \int_0^s \int_{\mathbb{R}_0} x(\delta - \nu_{Q^\star})(dx, dr)$, $s \le t$ erzeugte σ-Algebra. Des Weiteren definieren wir die Menge aller quadratisch integrierbaren, deterministischen Funktionen f_n auf $[0,T]^n \times \mathbb{R}_0^n$ über $\mathcal{L}^2([0,T]^n \times \mathbb{R}_0^n)$ und für jedes $f_n \in \mathcal{L}^2([0,T]^n \times \mathbb{R}_0^n)$ gilt

$$\|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n \times \mathbb{R}_0^n)} := \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} f_n^2(t_1, x_1, \dots, t_n, x_n) \nu_{Q^\star}(dx_1) dt_1 \dots \nu_{Q^\star}(dx_n) dt_n.$$

Die folgenden Integrale $I_n(f_n)$ und $J_n(f_n)$ sind für $n \ge 1$, $f_n \in \mathcal{L}^2([0,T]^n \times \mathbb{R}_0^n)$, f_n symmetrisch, gegeben durch

$$I_n(f_n) := \int_{[0,T]^n \times \mathbb{R}_0^n} f_n(t_1, x_1, \dots, t_n, x_n)(\delta - \nu_{Q^\star})(dt, dx)^{\otimes n} := n! J_n(f_n) \quad \text{mit}$$

$$J_n(f_n) := \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \int_0^{t_n} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}_0} f_n(t_1, x_1, \dots, t_n, x_n)(\delta - \nu_{Q^\star})(dt, dx)^{\otimes n} \quad \text{und}$$
$$I_0(f_0) := f_0 =: J_0(f_0) \quad \text{für } f_0 \in \mathbb{R}_0.$$

Damit erhalten wir die folgende Darstellung.

Lemma A.24
Sei $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^J, Q^\star)$. Dann existiert eine eindeutige Folge von deterministischen, symmetrischen und quadratisch integrierbaren Funktionen $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ mit

$$X = \sum_{n=0}^\infty I_n(f_n) \quad \text{und} \quad \|X\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^J, Q^\star)} = \sum_{n=0}^\infty n! \|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n \times \mathbb{R}_0^n)}.$$

Mit der Menge $\tilde{\mathbb{D}}_{1,2} \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^J, Q^\star)$, welche gegeben ist durch

$$\tilde{\mathbb{D}}_{1,2} := \left\{ X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^J, Q^\star) : X = \sum_{n=0}^\infty I_n(f_n) : \sum_{n=1}^\infty n n! \|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n \times \mathbb{R}_0^n)} < \infty \right\},$$

definieren wir für alle $X \in \tilde{\mathbb{D}}_{1,2}$ den linearen Differenzenoperator $D : \tilde{\mathbb{D}}_{1,2} \to \mathcal{L}^2([0,T] \times \mathbb{R}_0 \times \Omega)$ durch

$$D_{(t,x)} X := \sum_{n=1}^\infty n I_{n-1}(f_n(\cdot, t, x)).$$

Proposition A.25
Sei $\sigma = 0$ und $X \in \tilde{\mathbb{D}}_{1,2}$. Dann gilt

$$X = \mathbb{E}_{Q^\star}[X] + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_{(s,x)} X \middle| \mathcal{F}_{s-}^J \right] (\delta - \nu_{Q^\star})(dx, ds).$$

Mit Proposition 10 [Løkka] gilt auf $\tilde{\mathbb{D}}_{1,2}$ die Gleichung $D_{(t,x)} X = X \circ \epsilon^+_{(t,x)} - X$.

Beispiel A.26
Betrachten wir die rechte Seite von Proposition A.25 für einen Poisson Prozess $(N_t)_{t \in [0,T]}$ mit Intensität $\lambda_{Q^\star} t$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{Q^\star}[N_T] + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{Q^\star}\left[D_{(s,x)} N_T \middle| \mathcal{F}_{s-}^J \right] (\delta - \nu_{Q^\star})(dx, ds) \\
= \; & \mathbb{E}_{Q^\star}[N_T] + \int_0^T \mathbb{E}_{Q^\star}\left[\mathbb{1}_{[0,T]}(s) \middle| \mathcal{F}_{t-}^J \right] (dN_s - \lambda_{Q^\star} ds) \\
= \; & \lambda_{Q^\star} T + \int_0^T dN_s - \lambda_{Q^\star} \int_0^T ds = N_T.
\end{aligned}$$

$\diamond$

Literaturverzeichnis

[1] [Applebaum] Applebaum, D.: Lévy processes and stochastic calculus. Cambridge University Press, 2004.

[2] [Aubin, Ekeland] Aubin, J.-P., Ekeland, I.: Applied nonlinear analysis. John Wiley & Sons, 1984.

[3] [Bauer] Bauer, H.: Maß - und Integrationstheorie. 2nd Edition, de Gruyter, 1992.

[4] [Bender, Niethammer] Bender, C., Niethammer, C. R.: On q-optimal martingale measures in exponential Lévy models. Finance and Stochastics, 12, 381 - 410, 2008.

[5] [Benth et al] Benth, F. E., Nunno, G. D., Løkka, A., Øksendal, B., Proske, F.: Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by Lévy processes. Mathematical Finance, Vol. 13, No. 1, 55 - 72, 2003.

[6] [Bellini, Frittelli] Bellini, F., Frittelli, M.: On the existence of minimax martingale measures. Mathematical Finance, Vol. 12, No. 1, 1 - 22, 2002.

[7] [Biagini, Frittelli] Biagini, S., Frittelli, M.: Utility maximization in incomplete markets for unbounded processes. Finance and Stochastics, 9, 493 - 517, 2005.

[8] [Bingham, Kiesel] Bingham, N. H., Kiesel, R.: Risk-neutral valuation - pricing and hedging of financial derivatives. Springer, 2004.

[9] [Burgert, Rüschendorf] Burgert, C., Rüschendorf, L.: Optimal consumption strategies under model uncertainty. Statistics and Decisions, Vol. 23, 1 - 14, 2005.

[10] [Chan] Chan, T.: Pricing contingent claims on stocks driven by Lévy processes. The Annals of Applied Probability, Vol. 9, No. 2, 504 - 528, 1999.

[11] [Cont, Tankov] Cont, R., Tankov, G.: Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC, 2004.

[12] [Corcuera et al] Corcuera, J. M., Guerra, J., Nualart, D., Schoutens, W.: Optimal investment in a Lévy market. Applied Mathematics and Optimization, 53, 279 - 309, 2006.

[13] [Cvitanić et al] Cvitanić, J., Schachermayer, W., Wang, H.: Utility maximization in incomplete marktes with random endowment. Finance and Stochastics, 5, 259 - 272, 2001.

[14] [Dana, Jeanblanc] Dana, R.-A., Jeanblanc, M.: Financial markets in continuous time. Springer, 2003.

[15] [Esche, Schweizer] Esche, F., Schweizer, M.: Minimal entropy preserves the Lévy property: how and why. Stochastic Processes and their Applications, 115, 299 - 327, 2005.

[16] [Föllmer, Kabanov] Föllmer, H., Kabanov, Y. M.: Optional decomposition and lagrange multipliers. Finance and Stochastics, 2, 69 - 81, 1998.

[17] [Föllmer, Kramkov] Föllmer, H., Kramkov, D.: Optional decompositions under constraints. Probability Theory and Related Fields, 109, 1 - 25, 1997.

[18] [Föllmer, Schied] Föllmer, H., Schied, A.: Stochastic finance: An introduction in discrete time. De Gruyter, 2002.

[19] [Fujiwara, Miyahara] Fujiwara, T., Miyahara, Y.: The minimal entropy martingale measures for geometric Lévy processes. Finance and Stochastics, 7, 509 - 531, 2003.

[20] [Goll, Kallsen] Goll, T., Kallsen, J.: Optimal portfolios for logarithmic utility. Stochastic Processes and their Applications, 89, 31 - 48, 2000.

[21] [Goll, Rüschendorf] Goll, T., Rüschendorf, L.: Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization. Finance and Stochastics, 5, 557 - 581, 2001.

[22] [Gundel] Gundel, A.: Robust utility maximization for complete and incomplete market models. Finance and Stochastics, 9, 151 - 176, 2005.

[23] [Gundel] Gundel, A.: Robust utility maximization, f-projections, and risk constraints. Dissertation, Humboldt - Universität zu Berlin, 2006.

[24] [Jacod, Shiryaev] Jacod, J., Shiryaev, A. N.: Limit theorems for stochastic processes. Springer, 1987.

[25] [Jeanblanc et al] Jeanblanc, M., Klöppel, S., Miyahara, Y.: Minimal F^Q- martingale measures for exponential Lévy processes. The Annals of Applied Probability, Vol. 7, Nos. 5/6, 1615 - 1638, 2007.

[26] [Kallsen] Kallsen, J.: Optimal portfolios for exponential Lévy processes. Mathematical Methods of Operations Research, Vol. 51, No. 3, 357 - 374, 2000.

[27] [Karatzas et al] Karatzas, I., Lehoczky, J. P., Shreve, S. E., Xu, G.-L.: Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market. SIAM J. Control and Optimization, Vol. 29, No. 3, 702 - 730, 1991.

[28] [Karatzas, Shreve] Karatzas, I., Shreve, S. E.: Brownian motion and stochastic calculus. 2nd edition, Springer, 1999.

[29] [Karatzas, Žitković] Karatzas, I., Žitković, G.: Optimal consumption from investment and random endowment in incomplete semimartingale markets. The Annals of Applied Probability, Vol. 31, No. 4, 1821 - 1858, 2003.

[30] [Kirch] Kirch, M.: Efficient hedging in incomplete markets under model uncertainty. Dissertation, Humboldt - Universität zu Berlin, 2002.

[31] [Kramkov, Schachermayer] Kramkov, D., Schachermayer, W.: The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. The Annals of Applied Probability, Vol. 9, No. 3, 904 - 950, 1999.

[32] [Kramkov, Schachermayer] Kramkov, D., Schachermayer, W.: Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. The Annals of Applied Probability, Vol. 13, No. 4, 1504 - 1516, 2003.

[33] [Løkka] Løkka, A.: Martingale representation of functionals of Lévy processes. Stochastic Analysis and Applications, Vol. 22, No. 4, 867 - 892, 2004.

[34] [Nualart] Nualart, D.: The Malliavin calculus and related topics. 2nd edition, Springer, 2006.

[35] [Øksendal, Sulem] Øksendal, B., Sulem, A.: Partial observation control in an anticipating environment. Preprint, 2004.

[36] [Øksendal, Sulem] Øksendal, B., Sulem, A.: Applied stochastic control of jump diffusions. Springer, 2005.

[37] [Ocone, Karatzas] Ocone, D. L., Karatzas, I.: A generalized clark representation formula, with application to optimal portfolios. Stochastics and Stochastics Report, Vol. 34, 187 - 220, 1990.

[38] [Petrou] Petrou, E.: Malliavin calculus in Lévy spaces and applications in finance. Ph.D. thesis, Imperial College London, 2006.

[39] [Protter] Protter, P.: Stochastic integration and differential equations - a new approach. Springer, 1995.

[40] [Quenez] Quenez, M.-C.: Optimal portfolio in a multiple-priors model. Progress in Probability, Vol. 58, 291 - 321, 2004.

[41] [Rockafellar] Rockafellar, R. T.: Convex analysis. Princeton University Press, 1972.

[42] [Sato] Sato, K.-I.: Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge University Press, 1999.

[43] [Schied] Schied, A.: Optimal investment for risk- and ambiguity-averse preferences: a duality approach. Finance and Stochastics, 11, 107 - 129, 2007.

[44] [Schied, Wu] Schied, A., Wu, C.-T.: Duality theory for optimal investments under model uncertainty. Statistics & Decisions, Vol. 23, 199 - 217, 2005.

[45] [Shiryaev] Shiryaev, A. N.: Probability. 2nd edition, Springer, 1996.

[46] [Shreve] Shreve, S.: Stochastic calculus for finance II: continuous time models. Springer, 2004.

[47] [Solé et al] Solé, J. L., Utzet, F., Vives, J.: Canonical Lévy process and Malliavin calculus. Stochastic Processes and their Applications, 117, 165 - 187, 2007.

[48] [Steiger] Steiger, G. J.: The optimal martingale measure for investors with exponential utility functions. Dissertation, Swiss Federal Institute of Technology Zürich, 2005.

[49] [Strasser] Strasser, H.: Mathematical theory of statistics. De Gruyter, 1985.

[50] [Wittmüß] Wittmüß, W.: Robust optimization of consumption with random endowment. Preprint, 2006.

[51] [Xu] Xu, M.: Minimizing shortfall risk using duality approach - an application to partial hedging in incomplete markets. Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, 2004.

[52] [Xu, Shreve] Xu, G.-L., Shreve, S.: A duality method for optimal consumption and investment under short selling prohibition. The Annals of Applied Probability, Vol. 2, No. 1, 87 - 112, 1992.

Danksagung

Zuallererst bedanke ich mich bei meinem Betreuer und Doktorvater Professor Dr. Ulrich Rieder, der mir die Möglichkeit gab, meine Promotion im Bereich Finanzmathematik am Institut für Optimierung und Operations Research zu schreiben. Er half mir einerseits finanziell durch die Unterstützung zum Erhalt eines Stipendiums nach dem Landesgraduiertenförderungsgesetz und andererseits fachlich durch seine kritische Fragen und Anmerkungen besonders in den letzten Wochen der Dissertation.

Bei Herrn Professor Dr. Rüdiger Kiesel bedanke ich ebenfalls sehr herzlich für die Unterstützung bzgl. meines Stipendiums sowie die Übernahme des Zweitgutachtens meiner Dissertation.

Herrn Professor Dr. Frank Proske danke ich für zwei Blockvorlesungen an der Universität Ulm, den netten und unkomplizierten Umgang miteinander sowie die daraus entstandene Freundschaft.

Für die angenehme Atmosphäre und die schöne Zeit in und außerhalb der Abteilung danke ich meinen Freunden und Kollegen Jens, Thomas und Marc.

Meinen Freunden aus Kehl, Ulm und Umgebung danke ich für das entgegengebrachte Verständnis über all die Jahre, in denen die Promotion einen Großteil meiner Zeit in Anspruch nahm.

Bei meinen Eltern sowie meiner Schwester bedanke ich mich für das Vertrauen, dass sie in mich gesetzt haben, dieses Projekt erfolgreich abzuschließen. Dies war für mich eine große Verpflichtung und Motivation, die Erwartungen nicht zu enttäuschen. Der Familie Scheck danke ich, dass ich mich bei Ihnen von Anfang an wie zu Hause fühlen konnte.

Dem Land Baden-Württemberg danke ich für die finanzielle Förderungen durch das Stipendium nach dem Landesgraduiertenförderungsgesetz.

Last but not least bedanke ich mich bei meiner Freundin Tamara, die durch viel Verständnis, Geduld und Liebe mir während dieser drei Jahre eine angenehme Promotionszeit ermöglichte und mir half wo immer sie konnte.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und noch nicht veröffentlicht. Die Satzung der Universität Ulm zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis habe ich beachtet.

Ich bin mir bewusst, dass eine unwahre Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Ulm, 13. Oktober 2008

Summary

Today, the investment of money is one of the most challenging things. Due to globalization, changes on stock markets are realized within a few seconds. These days, many investors in the stock markets are losing much money because of the US real estate crisis. Over night, stock prices broke down to bottomless and many pensioners in the USA lost their pensions just because of wrong investment policies.

Without money, many people are no longer able to finance their daily consumption. Therefore we conclude that portfolio optimization for the consumers does not work properly without the correct modelling of stock price behavior. The recent strong declines in the stock markets have demonstrated this. A model to describe the reality of stock price behavior should therefore include possibilities for jumps in contrary to the Black-Scholes model.

Thus the financial crisis that dominates the news around the globe these days poses a great opportunity and challenge to think about intelligent investment strategies which guarantee everyone the best possible consumption even if stock prices jump up and down.

In the literature, there are several papers about maximizing the expected utility resulting from consumption in semimartingale markets, but unfortunately no explicit formulae for a consumption process and a corresponding investment strategy are given. That's why we are looking for models which allow on the one hand nice formulae for both processes and jump possibilities on the other hand.

The first class is a Lévy market, where the necessary processes can be described by Girsanov-parameters. [Kallsen] verifies the optimality of his choice of consumption and investment processes for the nonrobust case (i.e. just one model for the stock price behavior). The derivation of these processes is not motivated which is a disadvantage for the reader interested in working with the same methods for different problems. Motivated by an artificial market completion, [Corcuera et al] get the same Girsanov-parameters by the criteria of „not investing in the artificial stocks“. This is on the one hand a nice rationale, but on the other hand this technique is difficult to translate to other markets.

This leads us to apply a general duality principle to the primal problem of maximizing the expected utility of consumption in a robust (i.e. we investigate several models for the stock price behavior) Lévy market setting. The market consists of one bond and one stock, which is driven by a Lévy

process with jump sizes between -1 and ∞. Using a modified martingale method, our goal is to find an optimal consumption process and a corresponding investment strategy. We generalize the results of [Kallsen] and [Corcuera et al] to the robust case and consider also a pure jump market.

The thesis is organized as follows: in **chapter 2**, motivated by the modified martingale method of [Kramkov, Schachermayer], we try to set up the corresponding dual problem with respect to the primal problem described above. In contrast to literature, we are not interested in expanding the dual space to guarantee the existence of a solution of the dual problem. Therefore our way implicates some difficulties in the proofs which we solve successfully. One of the main results is Theorem 2.32, which gives the dual relationship of both value functions. The existence of the primal solution is shown in Theorem 2.38 and, under the assumption of the existence of a dual solution (which is also important for the existence of an optimal Lagrange multiplier, see Lemma 2.37), we are able to state an explicit formula for the optimal consumption process subject to the dual solution in Theorem 2.40.

In **chapter 3** we describe the dual solution more precisely. The computation of the optimal Lagrange multiplier is done in Theorem 3.1. Theorem 3.2 delivers an existence for the worst case probability measure. With respect to the computation of both worst case measures (probability and martingale), a general formula for density processes in a Lévy market shows us the dependence of these processes with regard to two Girsanov-parameters. This observation makes it possible to investigate the dual problem as an optimization problem with respect to these Girsanov-parameters. In order to find a solution for the most interesting cases of a power, logarithmic and exponential utility functions (with and without Brownian motion), we first observe that it is enough to concentrate on deterministic and time independent parameters (see Theorem 3.7). Instead of the stochastic dual problem we now have to solve a convex optimization problem. For the power utility function, we determine the optimal candidates and discuss in Theorem 3.13 under which assumptions they exist. With these results we are able to state the whole solution of the primal problem in Theorem 3.16. The same results also hold for the other two prementioned utility functions (see Theorem 3.26 and 3.33).

The challenge in **chapter 4** is the computation of an investment strategy with respect to the optimal consumption process in the 2nd step of the martingale method. This is possible for complete markets like the Black-Scholes one and difficult for Lévy markets using the martingale method, because these markets are incomplete, i.e. in most cases there does not exist an investment strategy for which the corresponding terminal wealth is identically zero. Our way to find a solution is a generalization of Malliavin calculus for Lévy processes. The idea of delta hedging in mind, we state criteria for a general contingent claim whether it is replicable or not. In the next step, we compute the general formula for the corresponding hedging strategy in both cases of a jump diffusion and a jump market, see Theorem 4.6 and 4.9. With this formula, we calculate an investment strategy for the optimal consumption processes analyzed in chapter 3 (see Theorem 4.14, 4.19 and 4.20).

In **chapter 5**, we have a look at several examples for which we compute a worst case probability and martingale measure as well as an investment strategy for the optimal consumption process with respect to real data values. We compare the results of the jump diffusion markets with the values

resulting from the incomplete Black-Scholes market. We close this thesis with a discussion about the influence of worst case measures with respect to the investment strategy (see Theorem 5.3).