

ulm university universität
uulm

Systemtheorie

Theorie linearer Regelsysteme

Wintersemester 2007/ 2008

Andreas Rauh, Eberhard P. Hofer, Michael A. Danzer



Dozent: Dipl.-Ing. Andreas Rauh

Institut für Mess–, Regel– und Mikrotechnik

Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik

Universität Ulm

Danksagung

Die Autoren dieses Vorlesungsskriptums danken Herrn Dipl.-Ing. (FH) Björn Steurer für die ausführliche Überarbeitung dieses Skriptums im Wintersemester 2006/2007.

Das Manuskript orientiert sich an der von Herrn Prof. Dr.-Ing. Harald Aschemann bis zum Wintersemester 2005/2006 an der Universität Ulm angebotenen Vorlesung Systemtheorie. Insbesondere danken wir Herrn Prof. Aschemann für die freundliche Überlassung der in diesem Skriptum eingebundenen Umdruckblätter.

Inhalt

1 Einführung 1
1.1 Einführendes Beispiel: Dynamische Systeme im Zustandsraum 1
1.2 Zustandsraumdarstellung 3
1.3 Beispiele 4

2 Allgemeine Lösung von Zustandsdifferentialgleichungen 7
2.1 Lösung der skalaren Differentialgleichung 7
2.2 Lösung der Vektor-Differentialgleichung 8
2.3 Berechnung der Transitionsmatrix 9
2.3.1 Direkte Auswertung der Reihenentwicklung 9
2.3.2 Berechnung der Transitionsmatrix über den Satz von Cayley-Hamilton 10
2.3.3 Berechnung der Transitionsmatrix durch Ähnlichkeitstransformation 12
2.4 Auswertung der Lösung der Zustandsdifferentialgleichung 19
2.4.1 Impulsantwort und Sprungantwort 20
2.4.2 Lösung der Zustandsdifferentialgleichung im Laplacebereich 21
2.5 Linearisierung um die Ruhelage 22

3 Strukturelle Eigenschaften linearer Systeme im Zustandsraum 24
3.1 Stabilitätsverhalten eines linearen zeitinvarianten Systems 24
3.2 Anmerkungen zu Eigenwertlage und Zeitverhalten 25
3.3 Steuerbarkeit 27
3.3.1 Steuerbarkeitskriterium nach Kalman 28
3.3.2 Steuerbarkeitskriterium nach Gilbert und Hautus 29
3.4 Beobachtbarkeit 30
3.4.1 Beobachtbarkeitskriterium nach Kalman 30
3.4.2 Beobachtbarkeitskriterium nach Gilbert und Hautus 31
3.5 Normalformen 32
3.5.1 Jordansche Normalform 32
3.5.2 Beobachtungsnormalform 1. Art (BNF 1. Art) 35
3.5.3 Beobachtungsnormalform 2. Art (BNF 2. Art) 37
3.5.4 Steuerungsnormalform 1. Art (SNF 1. Art) 39
3.5.5 Steuerungsnormalform 2. Art (SNF 2. Art) 40

4 Struktur von Zustandsgleichungen 42
4.1 Vorfilterberechnung auf Stationarität 44
4.2 Vorsteuerung mit Führungsgrößenaufschaltung 44

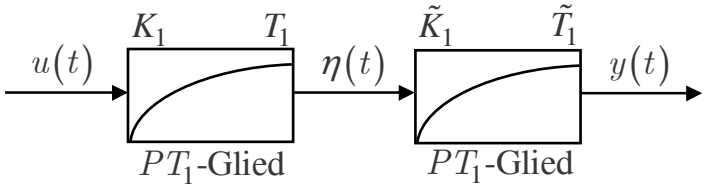
5 Zustandsreglersynthese 47
5.1 Polvorgabe (Eigenwertvorgabe) 47
5.2 Polvorgabe bei Transformation auf SNF 2. Art 48
5.3 Modale Regelung 53
5.4 RICCATI-Reglerentwurf durch Minimierung eines quadratischen Gütemaßes 59
5.4.1 Die Ljapunov-Gleichung 60
5.4.2 Berechnung des Riccati-Reglers 61
5.4.3 Iterativ numerische Lösung der Riccati-Gleichung 65
5.4.4 Direkte Methode zur Lösung der Riccati-Gleichung 67
5.4.5 Vergleich zwischen Polvorgabe und Riccati-Entwurf 69
5.5 Reglerentwurf für MIMO-Systeme durch Entkopplung nach Falb-Wolovich 69
5.5.1 Motivation 69
5.5.2 Differenzordnung 70
5.5.3 Zustandsraumdarstellung mit Hilfe der Differenzordnungen 72
5.5.4 Entkopplung 73
5.6 Vollständige modale Synthese nach Roppenecker 76
5.6.1 Allgemeine Zustandsreglerformel 76
5.6.2 Eigenschaften der Parametervektoren und Reglerentwurf 77
5.7 Abschließende Zusammenfassung zu den Reglerentwurfsverfahren 81

6 Beobachter 83
6.1 Einführung 83
6.2 Beobachterentwurf und Reglerentwurf 84
6.3 Methoden zum Beobachterentwurf 86
6.3.1 Polvorgabe 86
6.3.2 Sonderfall: Polvorgabe bei BNF 2. Art 87
6.3.3 Ackermannformel für den Beobachterentwurf 87
6.4 Separationsprinzip 88
6.5 Reduzierter Beobachter 90
6.6 Abschließende Bemerkungen zum Beobachterentwurf 93

7 Behandlung von Störgrößen 94
7.1 Einführung 94
7.2 Störgrößenaufschaltung 94
7.3 Störmodell und Störbeobachter 95
7.4 PI-Zustandsregler 98

1 Einführung

1.1 Einführendes Beispiel: Dynamische Systeme im Zustandsraum



Klassischer Weg:

$$\tilde{T}_1\dot{y}(t)+y(t)=\tilde{K}_1\eta(t)$$

Differentiation: $\tilde{T}_1\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=\tilde{K}_1\dot{\eta}(t)$

$$T_1\dot{\eta}(t)+\eta(t)=K_1u(t)\,,\ y(0),\eta(0)\ \text{gegeben}$$

Dies führt auf die Eingangs-/Ausgangsdarstellung

$$\underbrace{T_1\tilde{T}_1}_{\hat{T}_2^2}\ddot{y}(t)+\underbrace{(T_1+\tilde{T}_1)}_{\hat{T}_1}\dot{y}(t)+y(t)=\underbrace{K_1\tilde{K}_1}_{\hat{K}_1}u(t),\ y(0)\,,\ \dot{y}(0)=\frac{1}{\tilde{T}_1}\left(\tilde{K}_1\eta(0)-y(0)\right)$$

Neuer Weg: Repräsentation 1

Wir führen die neuen Variablen $x_1 := y, x_2 := \eta$ ein.
Damit ergibt sich für die beiden PT_1-Glieder

$$\dot{x}_1=-\frac{1}{\tilde{T}_1}x_1+\frac{\tilde{K}_1}{\tilde{T}_1}x_2\,,\quad \dot{x}_2=-\frac{1}{T_1}x_2+\frac{K_1}{T_1}u\,.$$

Nun definieren wir

Zustandsvektor $\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, Matrix $\underline{A}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\tilde{T}_1} & \frac{\tilde{K}_1}{\tilde{T}_1}\\ 0 & -\frac{1}{T_1}\end{bmatrix}$, Vektor $\underline{b}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{K_1}{T_1}\end{bmatrix}$, Vektor $\underline{c}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

und erhalten:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{\tilde{T}_1} & \frac{\tilde{K}_1}{\tilde{T}_1}\\ 0 & -\frac{1}{T_1}\end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \frac{K_1}{T_1}\end{bmatrix}}_{\underline{b}} \cdot u\,, \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{\underline{c}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{\underline{x}}$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u \qquad y = \underline{c}^T \cdot \underline{x}$$

Neuer Weg: Repräsentation 2

Wir führen die neuen Variablen $x_1 := y,\ x_2 := \dot{y}$ ein.
Damit ergibt sich für die beiden PT_1-Glieder

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{\hat{T}_2^2}\left[-\hat{T}_1 x_2 - x_1 + \hat{K}_1 u\right].$$

Nun definieren wir

Zustandsvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$, Matrix $\underline{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{\hat{T}_2^2} & -\frac{\hat{T}_1}{\hat{T}_2^2}\end{bmatrix}$, Vektor $\underline{b} = \begin{bmatrix}0\\ \frac{\hat{K}_1}{\hat{T}_2^2}\end{bmatrix}$, Vektor $\underline{c} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

und erhalten

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{\hat{T}_2^2} & -\frac{\hat{T}_1}{\hat{T}_2^2}\end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \frac{\hat{K}_1}{\hat{T}_2^2}\end{bmatrix}}_{\underline{b}} \cdot u\,, \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{\underline{c}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{\underline{x}}$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u\,, \qquad y = \underline{c}^T \cdot \underline{x}$$

Zustandsraumdarstellung

In Abhängigkeit von den neu eingeführten Variablen $x_1 = x_1(t)$ und $x_2 = x_2(t)$ haben wir neue Repräsentationen zur Beschreibung des Eingangs-/Ausgangsverhaltens für unser dynamisches System erhalten.

Beide Beschreibungen haben die folgende Darstellung gemeinsam:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u\,, \quad \underline{x}(0) \text{ gegeben}$$
$$y = \underline{c}^T \underline{x}$$

Diese Darstellung heißt **Zustandsraumdarstellung**.

Bei diesem einführenden Beispiel handelt es sich um ein dynamisches System mit *einer* Eingangsgröße $u = u(t)$ und *einer* Ausgangsgröße $y = y(t)$. Derartige Systeme werden als SISO-Systeme (Single Input – Single Output) bezeichnet. Die Variablen $x_i = x_i(t),\ \ i = 1, 2$, sind interne Zustände, so genannte **Zustandsvariablen** des dynamischen Systems.

1.2 Zustandsraumdarstellung

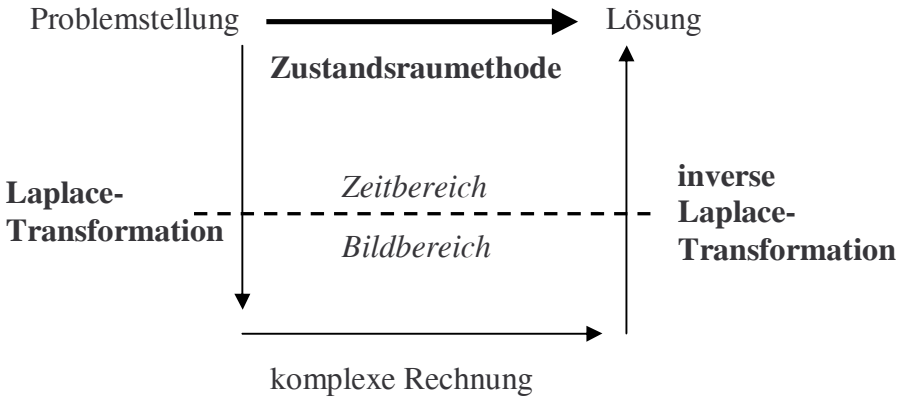
Bisheriges Vorgehen:

Lineares zeitinvariantes System:



- innere „Zustände“ werden nicht betrachtet.
- Charakterisierung des Übertragungsverhaltens durch Übertragungsfunktion.

Vorgehen:



Vorteile der Zustandsraummethode:

- Einbeziehung der inneren Systemzustände
- Die Anfangsbedingungen sind einfach zu berücksichtigen
- Die Zustandsraumdarstellung ist zur numerischen Simulation besser geeignet
- Struktureigenschaften dynamischer Systeme sind einfach nachzuweisen

Klassifizierung von dynamischen Systemen:

- allgemein nichtlinear und zeitvariant:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}(t=t_0), \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{u} \in \mathbb{R}^p$$
$$\underline{y} = \underline{h}(\underline{x},\underline{u},t), \qquad \underline{y} \in \mathbb{R}^q$$

- allgemein nichtlinear und zeitinvariant:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})$$
$$\underline{y} = \underline{h}(\underline{x},\underline{u})$$

- linear und zeitvariant:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{B}(t) \cdot \underline{u}(t)$$
$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{D}(t) \cdot \underline{u}(t)$$

- linear und zeitinvariant:

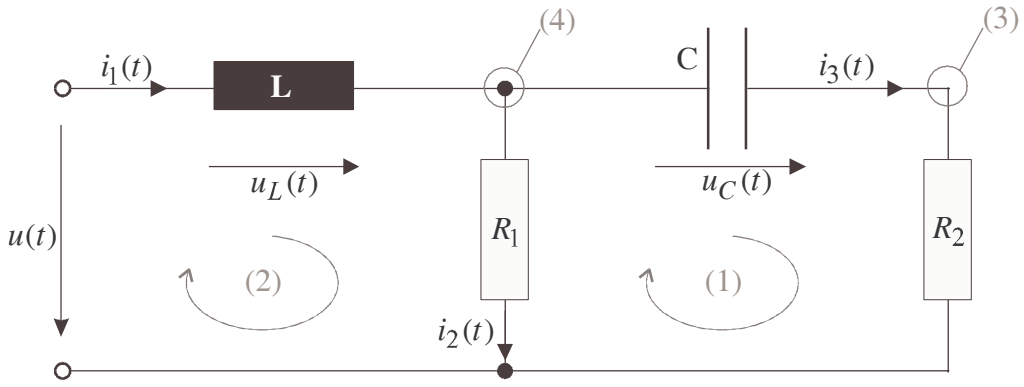
$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \qquad \text{Zustandsgleichung}$$
$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t) \qquad \text{Ausgangsgleichung}$$

mit

$\underline{x}$:	Zustandsvektor	Dimension: $(n,1)$
$\underline{u}$:	Eingangsvektor / Steuervektor	Dimension: $(p,1)$
$\underline{y}$:	Ausgangsvektor	Dimension: $(q,1)$
$\underline{A}$:	Systemmatrix	Dimension: (n,n)
$\underline{B}$:	Eingangsmatrix / Steuermatrix	Dimension: (n,p)
$\underline{C}$:	Ausgangsmatrix	Dimension: (q,n)
$\underline{D}$:	Durchgangsmatrix	Dimension: (q,p)

1.3 Beispiele

Beispiel 1:



$u(t)$	Spannung als Eingangsgröße
$i_2(t)$	Strom als Ausgangsgröße
$i_1(t)$	1. Zustandsgröße $x_1(t)$
$u_C(t)$	2. Zustandsgröße $x_2(t)$

$$(1) \;:\; u_C(t) + R_2 \cdot i_3(t) - R_1 \cdot i_2(t) = 0$$

$$(2) \;:\; u_L(t) + R_1 \cdot i_2(t) - u(t) = 0$$

$$(3) \;:\; i_C(t) = i_3(t) = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

$$(4) \;:\; i_2(t) = i_1(t) - C\frac{\mathrm{d}u_c}{dt}$$

$$(5) \;:\; u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

aus (1) mit (3), (4):

$$u_C(t) + R_2 C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} - R_1\left(i_1(t) - C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

aus (2) mit (4):

$$L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + R_1\left(i_1(t) - C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}\right) - u(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{R_1}{C\left(R_1+R_2\right)} \cdot i_1(t) - \frac{1}{C\left(R_1+R_2\right)} \cdot u_c(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{R_1 R_2}{L\left(R_1+R_2\right)} \cdot i_1(t) - \frac{R_1}{L\left(R_1+R_2\right)} \cdot u_c(t) + \frac{1}{L} \cdot u(t)$$

(4):

$$i_2(t) = i_1(t) - C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot i_1(t) + \frac{1}{R_1+R_2} \cdot u_c(t)$$

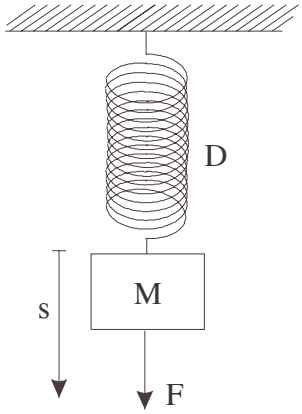
Damit kann folgende Zustandsraumbeschreibung angegeben werden:

$$u = u(t), \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix}, \qquad y = i_2(t)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)} & -\frac{R_1}{L(R_1+R_2)} \\ \frac{R_1}{C(R_1+R_2)} & -\frac{1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1+R_2} & \frac{1}{R_1+R_2} \end{bmatrix}, \qquad d = 0$$

Beispiel 2:
Einmassenschwinger (Masse M, Federkonstante D, Nulllage der Verschiebung s in der Ruhelage gewählt, für welche Federkraft und Gewichtskraft im Gleichgewicht sind)



$$M\,\ddot{s} = -Ds + F$$

$$x_1 = s \qquad \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{s} \qquad \dot{x}_2 = -\frac{D}{M}\cdot x_1 + \frac{F}{M}$$

$$u = F \qquad y = s$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

2 Allgemeine Lösung von Zustandsdifferentialgleichungen

Ziel ist die Berechnung des zeitlichen Verlaufs des Zustandsvektors $\underline{x}(t)$ in Abhängigkeit vom Anfangszustand $\underline{x}(t_0)$ und der Eingangsgröße $\underline{u}(t)$

2.1 Lösung der skalaren Differentialgleichung

$$\dot{x} = a\,x + b\,u$$

Anfangsbedingung: $x(t = t_0) = x(t_0)$

$$e^{-at} \cdot \Big| \quad \dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t)$$

$$e^{-at} \cdot \dot{x}(t) = e^{-at} \cdot a \cdot x(t) + e^{-at} \cdot b \cdot u(t)$$

$$\underbrace{e^{-at} \cdot \dot{x}(t) - e^{-at} \cdot a \cdot x(t)}_{\text{Differentialquotient } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-at}x(t)\right)} = e^{-at} \cdot b \cdot u(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-at}x(t)\right) = e^{-at}bu(t)$$

Zeitliche Integration von t_0 bis t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(e^{-a\tau}x(\tau)\right)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}b \cdot u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$e^{at} \cdot \Big| \quad e^{-at}x(t) - e^{-at_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}b \cdot u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) - e^{a(t-t_0)}x(t_0) = e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}b \cdot u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}b \cdot u(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

Lösung der skalaren Zustandsdifferential-gleichung

2.2 Lösung der Vektor-Differentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

Lösungsweg wie in 2.1:

Ausgangspunkt: $e^{-\underline{A}t} \cdot \Big| \quad \dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u}$

$$e^{-\underline{A}t} \cdot \dot{\underline{x}} = e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} + e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}$$

Hinweis: Die Reihenfolge der Matrizen $e^{-\underline{A}t}$ und $\underline{A}$ ist vertauschbar, da die zeitliche Taylorreihenentwicklung für $e^{\underline{A}t}$

$$e^{\underline{A}t} = \underline{I} + \underline{A}\frac{t}{1!} + \underline{A}^2\frac{t^2}{2!} + \ldots$$

lautet. Damit ergibt sich für die zeitliche Differentiation die Reihe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\underline{A}t}\right) = \underline{A} + \underline{A}^2\frac{t}{1!} + \underline{A}^3\frac{t^2}{2!} + \ldots = \underline{A}\underbrace{\left[\underline{I} + \underline{A}\frac{t}{1!} + \underline{A}^2\frac{t^2}{2!} + \ldots\right]}_{e^{\underline{A}t}}.$$

Somit gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\underline{A}t} = \underline{A} \cdot e^{\underline{A}t} = e^{\underline{A}t} \cdot \underline{A}$$

(aber allgemein: $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$)

---

weiter: $e^{-\underline{A}t} \cdot \dot{\underline{x}} - \underline{A} \cdot e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{x} = e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{x}) = e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}$$

Zeitliche Integration von t_0 bis t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(e^{-\underline{A}\tau} \cdot \underline{x}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-\underline{A}\tau} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$e^{\underline{A}t} \cdot \Big| \quad e^{-\underline{A}t}\,\underline{x}(t) - e^{-\underline{A}t_0}\,\underline{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\underline{A}\tau} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A}(t-t_0)}\,\underline{x}(t_0)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{\underline{A}(t-\tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{durch } \underline{u}(t) \text{ determinierter Teil der Lösung}}$$

$\rightarrow$ freie Bewegung $\quad$ $\rightarrow$ erzwungene Bewegung

Allgemeine Lösung der Zustandsdifferentialgleichung

Für $\underline{u} = \underline{0}$: $\quad \underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A}(t-t_0)}}_{\text{Transitionsmatrix}} \cdot \underline{x}(t_0)$

Zeitlicher Verlauf der Ausgangsgrößen:

$$\underline{y}(t) = \underbrace{\underline{C} \cdot e^{\underline{A}(t-t_0)} \underline{x}(t_0)}_{\underline{y}_f \text{ aus freier Bewegung}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \underline{C} \cdot e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\underline{y}_e \text{ aus erzwungener Bewegung}} \quad , \quad \underline{D} = \underline{0}$$

2.3 Berechnung der Transitionsmatrix

Eigenschaften der so genannten Fundamentalmatrix bzw. Transitionsmatrix $e^{\underline{A}t}$:

$$e^{\underline{A}\cdot 0} = \underline{I}$$
$$(e^{\underline{A}\cdot t})^{-1} = e^{\underline{A}(-t)} = e^{-\underline{A}\cdot t}$$
$$e^{\underline{A}(t_2-t_1)} \cdot e^{\underline{A}(t_1-t_0)} = e^{\underline{A}(t_2-t_0)}$$

2.3.1 Direkte Auswertung der Reihenentwicklung

$$e^{\underline{A}\cdot t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \underline{A}^n}{n!}$$

Beispiel:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^3 = -\underline{A} \qquad \underline{A}^4 = \underline{I}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\underline{A}^{2n} = (-1)^n \underline{I} \qquad \underline{A}^{2n+1} = (-1)^n \cdot \underline{A}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \cdot \underline{A}^n}{n!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l} \cdot \underline{A}^{2l}}{(2l)!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l+1} \cdot \underline{A}^{2l+1}}{(2l+1)!} = \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot \frac{t^{2l}}{(2l)!} \right)}_{\cos t} \cdot \underline{I} + \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!} \right)}_{\sin t} \cdot \underline{A}$$

$$\rightarrow \quad e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

2.3.2 Berechnung der Transitionsmatrix über den Satz von Cayley-Hamilton

Die Systemmatrix $\underline{A}$ enthält alle Informationen über das Eigenverhalten des Systems. Über die Eigenwerte von $\underline{A}$ wird das Verhalten des dynamischen Systems bestimmt.
Die Eigenwerte werden über das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(\lambda \underline{I} - \underline{A})$ berechnet.
Die Nullstellen von $p(\lambda)$ sind die Eigenwerte von $\underline{A}$:

$$p(\lambda) \overset{!}{=} 0 \qquad \rightarrow \qquad n \text{ Eigenwerte } \lambda_1, \ldots, \lambda_n .$$

Die Auswertung von $p(\lambda)$ führt auf

$$a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n = 0 .$$

Satz von Cayley-Hamilton:
$\underline{A}^n$ ist eine Linearkombination von $\underline{I}, \underline{A}, \underline{A}^2, \ldots, \underline{A}^{n-1}$ und genügt der charakteristischen Gleichung

$$p(\underline{A}) = a_0 \underline{I} + a_1 \underline{A} + a_2 \underline{A}^2 + \ldots + a_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \underline{A}^n = \underline{0} .$$

Wie kann das zur Berechnung von $e^{\underline{A} t}$ genutzt werden?

Einschub: $F(\lambda) = f_0 + f_1 \lambda + \ldots + \lambda^p$ Ordnung von $F(\lambda)$ sei $p > n$

Charakteristisches Polynom von $\underline{A}$ der Ordnung *n*:

$$p(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \ldots + \lambda^n$$

dann kann $F(\lambda)$ dargestellt werden als

$$F(\lambda) = Q(\lambda) \cdot p(\lambda) + \underbrace{R(\lambda)}_{\text{max. Ordnung: } n-1}$$

Jetzt für Matrizen:

$$\underline{p}(\underline{A}) = a_0 \underline{I} + a_1 \underline{A} + \ldots + \underline{A}^n$$

$$\underset{(n,n)}{\underline{F}}(\underline{A}) = f_0 \underline{I} + f_1 \underline{A} + \ldots + \underline{A}^p$$

dann gilt: $\underline{F}(\underline{A}) = \underline{Q}(A) \cdot \underbrace{\underline{p}(\underline{A})}_{=0} + \underline{R}(\underline{A})$

wegen Cayley-Hamilton

$$\underline{F}(\underline{A}) = \underline{R}(\underline{A}) = \alpha_0 \underline{I} + \alpha_1 \underline{A} + \ldots + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-1}$$

Jede (n,n)-Matrizenfunktion $\underline{F}(\underline{A})$ der Ordnung $p \geq n$ lässt sich somit durch Funktionen von max. Grad $n-1$ darstellen.

Anwendung auf $e^{\underline{A}t}$:

$$e^{\underline{A}t} = \alpha_0(t)\underline{I} + \alpha_1(t)\underline{A} + \ldots + \alpha_{n-1}(t)\underline{A}^{n-1}$$

Wie lassen sich die Funktionen $\alpha_i(t)$ bestimmen?

Einschub: $F(\lambda) = f_0 + f_1\lambda + \ldots + \lambda^p$

charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + \lambda^n$

Eigenschaft von $p(\lambda)$: $p(\lambda) = 0$ für $\lambda = \lambda_i$ (Eigenwerte)

also ist: $F(\lambda_i) = R(\lambda_i)$

jetzt wähle: $F(\lambda_i) = e^{\lambda_i \cdot t}$

$F(\lambda_i) = e^{\lambda_i t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_i + \ldots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}$, für $i = 1, \ldots, n$

aus n Eigenwerten erhält man n Gleichungen für n Unbekannte $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$

Anwendung auf die Berechnung der Transitionsmatrix

$e^{\underline{A}t} = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(t) \cdot \underline{A}^l$,

wobei die Funktionen $\alpha_l(t)$ aus $e^{\lambda_i t} = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(t) \cdot \lambda_i^{\,l}$, $i = 1, \ldots, n$ bestimmt werden. Dabei müssen alle Eigenwerte λ_i verschieden sein.

Beispiel: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $n = 2$

$$p(\lambda) = \det(\lambda\underline{I} - \underline{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = j$, $\lambda_2 = -j$, $n = 2$

$$e^{jt} = \alpha_0(t) + j\alpha_1(t)$$
$$e^{-jt} = \alpha_0(t) - j\alpha_1(t)$$

Addition: $e^{jt} + e^{-jt} = 2\alpha_0(t) \quad \rightarrow \quad \alpha_0(t) = \cos t$

Subtraktion: $e^{jt} - e^{-jt} = 2j\alpha_1(t) \quad \rightarrow \quad \alpha_1(t) = \sin t$

$$e^{\underline{A}t} = \cos t \cdot \underline{I} + \sin t \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Jetzt: Die Eigenwerte λ_i haben die Vielfachheit p_i. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda_i^{\,k}}(e^{\lambda_i t}) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda_i^{\,k}}\left[\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_i^{\,l}\cdot\alpha_l(t)\right], \qquad i=1,\ldots,l,\ k=0,\ldots,p_i-1$$

Beispiel mit mehrfachem Eigenwert:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda\underline{I}-\underline{A}) = -\lambda(\lambda-1)^2$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1$$

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{l=0}^{n-1}\lambda_i^{\,l}\cdot\alpha_l(t), \qquad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda_i^{\,k}}\left(e^{\lambda_i t}\right) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda_i^{\,k}}\left(\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_i^{\,l}\cdot\alpha_l(t)\right)$$
$$i=1,\ldots,l,\ k=0,\ldots,p_i-1$$

$$\lambda_1 = 0: \quad 1 = e^{0\cdot t} = \alpha_0(t);$$

$$\left.\begin{matrix}\lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1\end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} e^{1\cdot t} = \alpha_0(t) + \lambda_2\cdot\alpha_1(t) + \lambda_2^{\,2}\cdot\alpha_2(t)\big|_{\lambda_2=1} = \alpha_0(t)+\alpha_1(t)+\alpha_2(t) \\ t\cdot e^t = \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} e^t - 1 = \alpha_1(t) + \alpha_2(t) \\ t\cdot e^t = \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t) \end{matrix}\right\} \; t\cdot e^t - e^t + 1 = \alpha_2(t), \quad \alpha_1(t) = 2e^t - 2 - t\cdot e^t$$

$$\begin{aligned} e^{\underline{A}t} &= \underline{I}\cdot\alpha_0(t) + \underline{A}\cdot\alpha_1(t) + \underline{A}^2\cdot\alpha_2(t) \\ &= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot 1 + \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\cdot(2e^t-2-te^t) + \begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&-1\\1&2&0\end{bmatrix}\cdot(te^t-e^t+1) \end{aligned}$$

2.3.3 Berechnung der Transitionsmatrix durch Ähnlichkeitstransformation

Ziel: Transformation der Systemmatrix $\underline{A}$ in eine neue Systemmatrix $\underline{\tilde{A}}$, die Diagonalgestalt besitzt:

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \underline{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \underline{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Aufgrund der Struktur von $\underline{\tilde{A}}$ kann die Transitionsmatrix leicht berechnet werden.

1. Schritt: Ähnlichkeitstransformation

Koordinaten-Transformation: $\underline{x}' = \underline{T} \cdot \underline{x}$ bzw. $\underline{x} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{x}'$

Anwendung auf die Zustandsraumbeschreibung: $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u}$:

$$\underline{T} \cdot \Big| \quad \underline{T}^{-1} \cdot \dot{\underline{x}}' = \underline{A}\,\underline{T}^{-1}\underline{x}' + \underline{B}\,\underline{u}$$

$$\dot{\underline{x}}' = \underbrace{\underline{T}\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1}}_{\underline{A}'}\underline{x}' + \underbrace{\underline{T}\,\underline{B}}_{\underline{B}'}\underline{u}$$

$\underline{A}$, $\underline{A}'$ beschreiben dasselbe System

Die Matrizen $\underline{A}$, $\underline{A}'$ sind ähnlich; die Transformation $\underline{A}' = \underline{T}\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1}$ heißt Ähnlichkeitstransformation.

Eigenschaften:

- Die Determinante einer Matrix $\underline{A}$ ist gegenüber der Ähnlichkeitstransformation invariant:

$$\det(A) = \det(\underline{T}\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1})$$

- Die Eigenwerte einer Matrix sind gegenüber der Ähnlichkeitstransformation invariant:

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = \det(\lambda \underline{I} - \underline{T}\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1})$$

2. Schritt: Transformation auf Diagonalform

Voraussetzungen: einfache Eigenwerte λ_i, homogenes System $\underline{u} = 0$

gesucht: Transformation $\underline{x} = \underline{V}\,\underline{\tilde{x}}$

d.h.: $\underline{T}^{-1} = \underline{V}$, so dass $\dot{\underline{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{\tilde{x}} + \underline{\tilde{B}} \cdot \underline{u}$ mit $\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$ gilt.

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{V}^{-1}\underline{A}\,\underline{V}$$

$$\underline{V}\,\underline{\tilde{A}} = \underline{A}\,\underline{V}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \underline{v}_n \end{bmatrix} = \underline{V} \qquad \underline{v}_i : \text{Spaltenvektoren der Dimension } (n,1)$$

$$\underset{(n,n)}{\underline{A}} \cdot \underset{(n,n)}{\begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix}} = \underset{(n,n)}{\begin{bmatrix} \underline{A}\underline{v}_1 & \underline{A}\underline{v}_2 & \dots & \underline{A}\underline{v}_n \end{bmatrix}}$$

$$\underline{V}\,\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\underline{v}_1 & \dots & \lambda_n\underline{v}_n \end{bmatrix}$$

Aus $\underline{V}\,\underline{\tilde{A}} = \underline{A}\,\underline{V}$ resultiert:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1\underline{v}_1 & \dots & \lambda_n\underline{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}\,\underline{v}_1 & \dots & \underline{A}\,\underline{v}_n \end{bmatrix}$$

Spaltenweise geschrieben:

$$\underline{A}\,\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i\,,\ i = 1,\ldots,n \qquad \text{oder:} \qquad (\lambda_i\,\underline{I} - \underline{A})\,\underline{v}_i = \underline{0},\ i = 1,\ldots,n$$

$\underline{v}_i$ nennt man (Rechts-)Eigenvektoren (EV) von $\underline{A}$.
Damit erhält man die Lösung für die gesuchte Transformationsmatrix $\underline{V}$.
Das System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\cdot\underline{x} + \underline{B}\cdot\underline{u}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\cdot\underline{x} + \underline{D}\cdot\underline{u}$$

kann dargestellt werden als

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \tilde{\underline{A}}\cdot\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{B}}\cdot\underline{u}$$
$$\underline{y} = \tilde{\underline{C}}\cdot\tilde{\underline{x}} + \underline{D}\cdot\underline{u}$$

mit

$$\tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\underline{B}} = \underline{V}^{-1}\underline{B}, \qquad \tilde{\underline{C}} = \underline{C}\,\underline{V}$$

wobei $\underline{V}$ die Matrix der Eigenvektoren $\underline{v}_i$ ist und die Eigenwerte λ_i einfach sind.

3. Schritt: Berechnung der Transitionsmatrix

$$\underline{A} = \underline{V}\,\tilde{\underline{A}}\,\underline{V}^{-1}$$
$$e^{\underline{A}t} = \sum_{l=0}^{\infty} \underline{A}^l \cdot \frac{t^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} (\underline{V}\,\tilde{\underline{A}}\,\underline{V}^{-1})^l \cdot \frac{t^l}{l!}$$

dabei:
$$(\underline{V}\,\tilde{\underline{A}}\,\underline{V}^{-1})^l = \underbrace{\underline{V}\,\tilde{\underline{A}}\,\overbrace{\underline{V}^{-1}\cdot\underline{V}}^{=\mathrm{I}}\,\tilde{\underline{A}}\,\underline{V}^{-1}\cdot\ldots\cdot\underline{V}\,\tilde{\underline{A}}\,\underline{V}^{-1}}_{\text{l-mal}} = \underline{V}\,\tilde{\underline{A}}^l\,\underline{V}^{-1}$$

$$\rightarrow\quad e^{\underline{A}t} = \underline{V}\cdot\underbrace{\left(\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{\underline{A}}^l\cdot\frac{t^l}{l!}\right)}_{e^{\tilde{\underline{A}}t}}\cdot\underline{V}^{-1}$$

$e^{\tilde{\underline{A}}t}$ ist einfach zu berechnen:

$$e^{\tilde{\underline{A}}t} = \sum_{l=0}^{\infty}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}^l \cdot\frac{t^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty}\begin{bmatrix} \lambda_1^l & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n^l \end{bmatrix}\cdot\frac{t^l}{l!} = \begin{bmatrix} \sum_{l=0}^{\infty}\lambda_1^l\cdot\frac{t^l}{l!} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \sum_{l=0}^{\infty}\lambda_n^l\cdot\frac{t^l}{l!} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\underline{\tilde{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad e^{\underline{A}t} = \underline{V} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \cdot \underline{V}^{-1}$$

mit den Eigenwerten λ_i und den Eigenvektoren $\underline{v}_i$ von $\underline{A}$ und der Transformationsmatrix $\underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix}$. Sämtliche Eigenwerte λ_i sind einfach.

Beispiel: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

EW: $\lambda_1 = j$, $\lambda_2 = -j$

EV:

- $\underline{A}\underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jv_{11} \\ jv_{12} \end{bmatrix}$$

$v_{12} = jv_{11}$ wähle $v_{11} = 1$

$-v_{11} = jv_{12}$ $\quad v_{12} = j$ $\quad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$

- $\underline{A}\underline{v}_2 = \lambda_2 \underline{v}_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = -j \cdot \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}$$

$v_{22} = -jv_{21}$ wähle $v_{21} = 1$

$-v_{21} = -jv_{22}$ $\quad v_{22} = -j$ $\quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \qquad \underline{V}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

$$e^{\underline{\tilde{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{jt} & 0 \\ 0 & e^{-jt} \end{bmatrix}$$

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{jt} & 0 \\ 0 & e^{-jt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 \\ 1/2 & j/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

mit $e^{jt} + e^{-jt} = 2\cos t$ und $e^{jt} - e^{-jt} = 2j \sin t$

Hinweis:
Anwendung bei Eigenwerten mit der Vielfachheit p_i
Die Systemmatrix $\underline{A}$ ist auf Jordan-Gestalt transformierbar.

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \underline{0} & \\ & & \lambda_l & & & \\ & & & \underline{J}_1 & & \\ & \underline{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \underline{J}_r \end{bmatrix}$$

wobei $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ einfache Eigenwerte und $\underline{J}_1,\ldots,\underline{J}_r$ die Jordanblöcke der mehrfachen Eigenwerte sind.

$$\underline{J}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \underline{0} \\ & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ \underline{0} & & & \lambda_i \end{bmatrix}}_{(p_i,p_i)}, \qquad \text{z.B. } p_i = 2: \quad \underline{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$e^{\underline{A}t} = \underline{V} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & \underline{0} & \\ & & e^{\lambda_l t} & & & \\ & & & e^{\underline{J}_1 t} & & \\ & \underline{0} & & & \ddots & \\ & & & & & e^{\underline{J}_r t} \end{bmatrix} \cdot \underline{V}^{-1}$$

Wie wird $e^{\underline{J}_i t}$ berechnet?

$$\underline{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \underline{0} \\ & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ \underline{0} & & & \lambda_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_i \end{bmatrix}}_{\lambda_i \underline{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & \ddots & & 0 \\ & \underline{0} & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\Lambda}}$$

$$\underline{J}_i = \lambda_i \underline{I} + \underline{\Lambda}$$

$$e^{\underline{J}_i t} = e^{(\lambda_i \underline{I} + \underline{\Lambda})t} = e^{\lambda_i \underline{I} t} \cdot e^{\underline{\Lambda} t}$$

Wie wird $e^{\underline{\Lambda} t}$ berechnet?

$$e^{\underline{\Lambda} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{\Lambda}^k t^k}{k!}$$

$$\underline{\Lambda}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \underline{0} & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \underline{0} & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ \underline{0} & & & & 0 \end{bmatrix}$$

„1er-Diagonale wandert um eins nach rechts oben“.

Allgemein:

$\underline{\Lambda}^k = \underline{0}$ für $(k+1) > p_i$

dann wird aus

$$e^{\underline{\Lambda} t} = \sum_{k=0}^{p_i - 1} \frac{\underline{\Lambda}^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{1}{(p_i-1)!} t^{p_i-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ \underline{0} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\underline{J}_i t} = e^{\lambda_i t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{1}{(p_i-1)!} t^{p_i-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ \underline{0} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$\underline{A}\,\underline{v}_1 = \lambda_1\,\underline{v}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_{12} + v_{13} &= 0 \\ v_{11} + v_{12} - v_{13} &= 0 \\ v_{12} + v_{13} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vorsicht bei mehrfachen Eigenwerten:

$$\underline{A} \cdot \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \underline{0} & \\ & & \lambda_l & & & \\ & & & \underline{J}_1 & & \\ & \underline{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \underline{J}_r \end{bmatrix}$$

hier: $\underline{A} \cdot \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Es sind zwei linear unabhängige Eigenvektoren für $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ erforderlich.

$$\underline{A} \cdot \begin{bmatrix} \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{v}_2 = \underline{v}_2$$

$$\underline{A}\,\underline{v}_3 = \underline{v}_2 + \underline{v}_3$$

Hauptvektoren

jetzt zunächst:

- $\underline{A}\,\underline{v}_2 = \lambda_2\,\underline{v}_2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix}$

$$v_{22} + v_{23} = v_{21}$$
$$v_{21} + v_{22} - v_{23} = v_{22}$$
$$v_{22} + v_{23} = v_{23}$$

wähle $v_{22} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{21} = 1, \qquad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\underline{A}\,\underline{v}_3 = \underline{v}_2 + \underline{v}_3$

  analog: $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\underline{\tilde{A}}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & t\,e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$e^{\underline{A}t} = \underline{V}\, e^{\underline{\tilde{A}}t}\, \underline{V}^{-1}$$

2.4 Auswertung der Lösung der Zustandsdifferentialgleichung

Rückblick:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)}\, \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\underline{A}(t-\tau)}\, \underline{B}\,\underline{u}(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\, \underline{x}(t)$$

Beispiel: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$e^{\underline{A}(t-t_0)} = \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix};$$

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)}\,\underline{x}(t_0) + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{\underline{A}(t-t_0)}\,\underline{x}(t_0) + \int_0^t \begin{bmatrix} \sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) \end{bmatrix} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

2.4.1 Impulsantwort und Sprungantwort

Impulsantwort:

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,e^{\underline{A}(t-0)}\,\underline{x}(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \underbrace{\underline{C}\,e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}}_{\underline{g}(t-\tau)}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{Faltungsintegral}}$$

Für MIMO-Systeme ist die Impulsantwort für $\underline{x}(t_0 = 0) = \underline{0}$ als

$$\underline{y}(t) = \int_0^t \underline{C}\,e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

definiert.

Im SISO-Fall gilt:

$$p = q = 1$$
$$t_0 = 0, \quad \underline{x}(t_0) = \underline{0}$$

$$y(t) = \int_0^t \underbrace{\underline{g}(t-\tau)}_{\text{Gewichtsfunktion}}\,u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = g(t) * u(t) \qquad \text{Faltungsintegral}$$

Gewichtsfunktion $g(t) = \underline{c}^T\,e^{\underline{A}t}\,\underline{b}$

Für $u(t) = \delta(t)$
gilt $y(t) = g(t)$

Sprungantwort für SISO-Systeme:

$$u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für t} < 0 \end{cases}$$
$$\underline{x}(t_0) = \underline{0}, \quad p = q = 1, \quad t_0 = 0$$

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot \sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

vorheriges Beispiel: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$y(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \cos(t-\tau)\Big|_0^t = 1 - \cos t$$

Analog dazu gilt für MIMO-Systeme mit der verallgemeinerten Sprungfunktion

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sigma(t)$$

$$\underline{y}(t) = \int_0^t \underline{C}\, e^{\underline{A}(t-\tau)}\, \underline{B}\, \underline{\hat{u}}\,\mathrm{d}\tau = \underline{C}\, e^{\underline{A}t} \underbrace{\left(\int_0^t e^{-\underline{A}\tau}\,\mathrm{d}\tau \right)}_{-\underline{A}^{-1} e^{-\underline{A}\tau}\Big|_0^t} \underline{B}\, \underline{\hat{u}}$$

Einschub:

$$\int_0^t e^{-\underline{A}\tau}\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(-\tau)^l\, \underline{A}^l \mathrm{d}\tau = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!}\, \underline{A}^l \underbrace{\int_0^t \tau^l \mathrm{d}\tau}_{\frac{1}{l+1}\tau^{l+1}\Big|_0^t}$$

$$= -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-t)^{l+1}}{(l+1)!}\, \underline{A}^l \Big|_0^t = -\underline{A}^{-1} \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-t)^{l+1}}{(l+1)!}\, \underline{A}^{l+1}\Big|_0^t}_{(e^{-\underline{A}t} - \underline{I})} = \underline{A}^{-1}(\underline{I} - e^{-\underline{A}t})$$

$$\boxed{\underline{y}(t) = \underline{C}\, \underline{A}^{-1}(e^{\underline{A}t} - \underline{I})\, \underline{B}\, \underline{\hat{u}} \qquad \text{mit} \qquad \underline{u}(t) = \underline{\hat{u}}\, \sigma(t)}$$

2.4.2 Lösung der Zustandsdifferentialgleichung im Laplacebereich

Laplace-Transformierte des Zustandsvektors:

$$\mathscr{L}\{\underline{x}(t)\} = \underline{X}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, \underline{x}(t)\; dt$$

Differentiationsregel der Laplace-Transformation, Voraussetzung: $t_0 = 0$:

$$\mathscr{L}\{\dot{\underline{x}}(t)\} = s \cdot \underline{X}(s) - \underline{x}(0)$$

Anwendung auf die Zustandsdifferentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned}\right\} \quad \overset{\mathscr{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \left\{\begin{aligned} s \cdot \underline{X}(s) - \underline{x}(0) &= \underline{A}\,\underline{X}(s) + \underline{B}\,\underline{U}(s) \\ \underline{Y}(s) &= \underline{C}\,\underline{X}(s) \end{aligned}\right.$$

$$(s\,\underline{I}-\underline{A})\,\underline{X}(s)=\underline{x}(0)+\underline{B}\,\underline{U}(s)$$
$$\underline{X}(s)=(s\,\underline{I}-\underline{A})^{-1}\,\underline{x}(0)+(s\,\underline{I}-\underline{A})^{-1}\,\underline{B}\,\underline{U}(s)$$
$$\underline{Y}(s)=\underline{C}\cdot(s\,\underline{I}-\underline{A})^{-1}\,\underline{x}(0)+\underline{C}\,(s\,\underline{I}-\underline{A})^{-1}\,\underline{B}\,\underline{U}(s)$$

Sonderfall: $p=q=1,\quad \underline{x}(0)=\underline{0},\quad t_0=0$

$$\rightarrow Y(s)=\underbrace{\underline{c}^T\,(s\,\underline{I}-\underline{A})^{-1}\underline{b}}_{G(s)\text{: Übertragungsfunktion}}\qquad U(s)$$

Anmerkung:

$$\det(\lambda\,\underline{I}-\underline{A})=0\qquad\rightarrow\qquad\text{Eigenwerte von }\underline{A}$$

$$\frac{\operatorname{adj}(s\,\underline{I}-\underline{A})}{\det(s\,\underline{I}-\underline{A})}=(s\,\underline{I}-\underline{A})^{-1}$$

$$G(s)=\underline{c}^T\,\frac{\operatorname{adj}(s\,\underline{I}-\underline{A})}{\det(s\,\underline{I}-\underline{A})}\cdot\underline{b}=\frac{\sum_{i=1}^{m}b_i s^i}{\sum_{i=1}^{n}a_i s^i}$$

Die Pole von $G(s)$ entsprechen den Eigenwerten von $\underline{A}$.
Voraussetzung: keine Kürzungen von Wurzeln im Zähler- und Nennerpolynom.

2.5 Linearisierung um die Ruhelage

Bisherige Annahme: Das System ist linear und zeitinvariant
Gegeben: $\dot{x}_i=f_i(x_1,\ldots,x_n,\,u_1,\ldots,u_p),\quad i=1,\ldots,n,\quad u_1,\ldots,u_p$ seien konstant
Gesucht: stationärer Zustand bei konstanten Stellgrößen $u_1,\ldots,u_p$

Ruhelage des Systems $\dot{\underline{x}}=\underline{0}\quad\rightarrow\quad \underline{f}(\underline{x},\underline{u})\big|_{\underline{x}_R,\underline{u}_R}=\underline{0}$

Für $\underline{u}=\underline{u}_R$ ergeben sich n Gleichungen für n Unbekannte, die nach $x_1,\ldots,x_n$ aufgelöst werden. Es ergibt sich die Linearisierung um die Ruhelage $\underline{x}_R$
Übergang zu Abweichungen vom Arbeitspunkt

$$\Delta x_i=x_i-x_{iR},\qquad i=1,\ldots,n$$
$$\Delta u_j=u_j-u_{jR},\qquad j=1,\ldots,p$$
$$\Delta\dot{x}_i=\dot{x}_i$$

damit wird aus $\dot{\underline{x}}=\underline{f}(\underline{x},\underline{u})$

$$\Delta\dot{x}_i=f_i(x_{1R}+\Delta x_1,\ldots,x_{nR}+\Delta x_n,u_{1R}+\Delta u_1,\ldots,u_{pR}+\Delta u_p),\quad i=1,\ldots,n$$

Taylor-Reihenentwicklung:

$$\Delta\dot{x}_i = \underbrace{f_i(x_{1R},\ldots,x_{nR},u_{1R},\ldots,u_{pR})}_{=0 \text{ wegen Ruhelagenbedingung}} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_k}}_{a_{ik}}\Bigg|_{\underline{x}_R,\underline{u}_R} \cdot \Delta x_k + \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial u_j}}_{b_{ij}}\Bigg|_{\underline{x}_R,\underline{u}_R} \cdot \Delta u_j + \ldots, \qquad i = 1,\ldots,n$$

linearisiertes System:

$$\Delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_k + \sum_{j=1}^{p} b_{ij}\Delta u_j, \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\Delta\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\Delta\underline{x} + \underline{B}\,\Delta\underline{u}$$

$$\underline{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{(n,n)} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\Bigg|_{\underline{x}_R,\underline{u}_R} \qquad \textbf{Jacobi-Matrix}$$

$$\underline{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}}_{(n,p)} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}\Bigg|_{\underline{x}_R,\underline{u}_R}$$

Voraussetzung für die Taylor-Linearisierung: $\underline{f}$ muss in einer Umgebung von $\underline{x}_R,\underline{u}_R$ stetig und differenzierbar sein.
Analog ist bei der Linearisierung der Ausgangsgleichung zu verfahren.

3 Strukturelle Eigenschaften linearer Systeme im Zustandsraum

3.1 Stabilitätsverhalten eines linearen zeitinvarianten Systems

Definition der Stabilität:
Das dynamische System $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$, $\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$ mit den konstanten Matrizen $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ heißt **stabil**, wenn $\left\|\underline{x}(t)\right\|$ für alle $t \geq 0$ und alle $\underline{x}(t_0)$ beschränkt bleibt.

Definition der asymptotischen Stabilität:
Das dynamische System $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$, $\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$ heißt **asymptotisch stabil**, wenn für $\underline{u}(t) = \underline{0}$ bei beliebigem Anfangszustand $\underline{x}(t_0) \neq \underline{0}$ der Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$$

gilt.
Wie kann diese Eigenschaft überprüft werden?

Lösung der homogenen Gleichung:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)}\,\underline{x}(t_0)$$

Ähnlichkeitstransformation:

$$\underline{x}(t) = \underline{V}\, e^{\tilde{\underline{A}}(t-t_0)}\,\underline{V}^{-1}\,\underline{x}(t_0)$$

wobei $$\tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

eine Diagonalmatrix mit den einfachen Eigenwerten λ_i der Matrix $\underline{A}$ ist.

$$e^{\tilde{\underline{A}}(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 (t-t_0)} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & e^{\lambda_n (t-t_0)} \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t \to \infty} \left| e^{\lambda_i (t-t_0)} \right| = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0 \\ 1 & \text{für } \mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0 \\ \infty & \text{für } \mathrm{Re}\{\lambda_i\} > 0 \end{cases} \qquad \text{(bei einfachem Eigenwert } \lambda_i \text{)}$$

$\underline{x}(t)$ strebt genau dann gegen $\underline{0}$, wenn $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Welche Zusammenhänge gelten bei mehrfachen Eigenwerten?
Jordan-Gestalt von $\underline{\tilde{A}}$

Untermatrizen $e^{\underline{J}_i t} = e^{\lambda_i t} \cdot e^{\underline{\Lambda} t}$ mit $e^{\underline{\Lambda} t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & \underline{0} & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

$$\lim_{t\to\infty} \left| t^k e^{\lambda_i t} \right| = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0 \\ 1 & \text{für } \mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0 \quad \text{(bei einfachem Eigenwert } \lambda_i\text{)} \\ \infty & \text{für } \mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0 \quad \text{(bei mehrfachem Eigenwert } \lambda_i\text{)} \\ \infty & \text{für } \mathrm{Re}\{\lambda_i\} > 0 \end{cases}$$

Die Bedingung $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$ für asymptotische Stabilität ist somit auch bei mehrfachen Eigenwerten gültig.

Das dynamische System $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von $\underline{A}$ links der imaginären Achse der komplexen Ebene liegen, also: $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$.

3.2 Anmerkungen zu Eigenwertlage und Zeitverhalten

$\underline{x}(t)$ ist bestimmt durch $\underline{V}\, e^{\underline{\tilde{A}} t}\, \underline{V}^{-1}$ mit $\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$

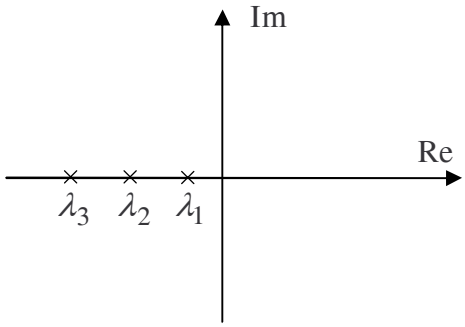
- λ_i reell

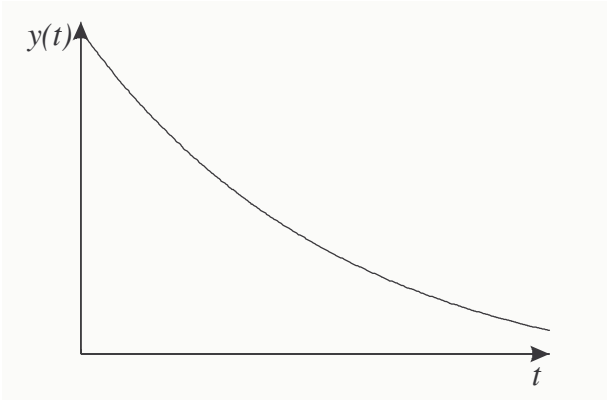
  $\underline{x}(t)$ wird durch Anteile $e^{\lambda_i t}$ bestimmt; monotones, aperiodisches (überdämpftes) Zeitverhalten
- λ_i komplex (konjugiert komplexe Eigenwert-Paare)

  $\underline{x}(t)$ hat Anteile (oszillatorische Zeitvorgänge) der Form $C_0 e^{\mathrm{Re}\{\lambda_i\} t} \cdot \sin(\mathrm{Im}\{\lambda_i\} t + \varphi)$
- je weiter links von der imaginären Achse ein Eigenwert liegt, desto schneller klingt der zugehörige Zeitvorgang ab.

Beispiele für Eigenwert-Konfigurationen:

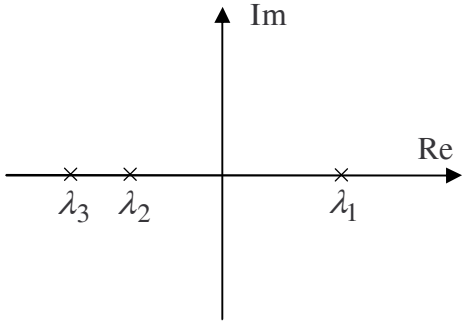
a)

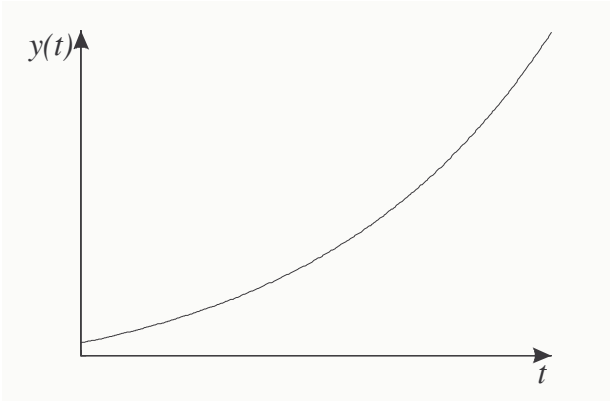




Die Zeitvorgänge klingen monoton ab, das System ist asymptotisch stabil; der langsamste Vorgang (Eigenwert λ_1) dominiert den Zeitvorgang.

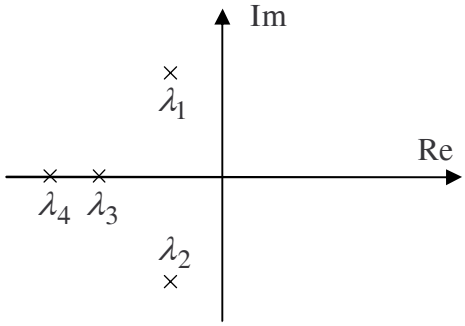
b)

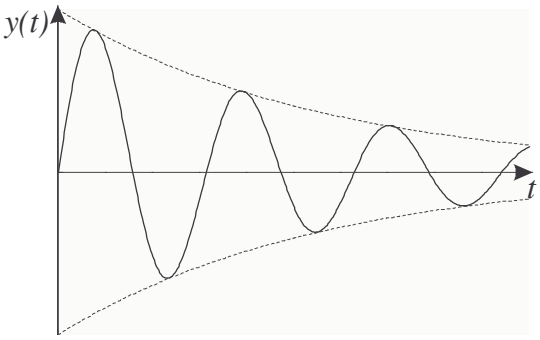




Das System ist instabil, bei einer Anfangsstörung strebt $\|\underline{x}(t)\|$ ohne Schwingungen ins Unendliche.

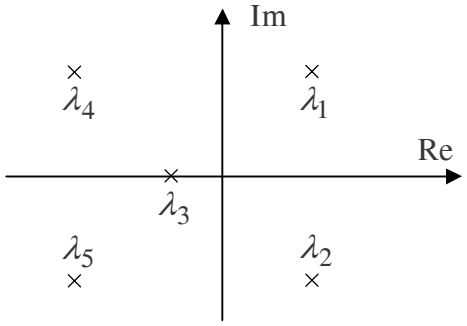
c)

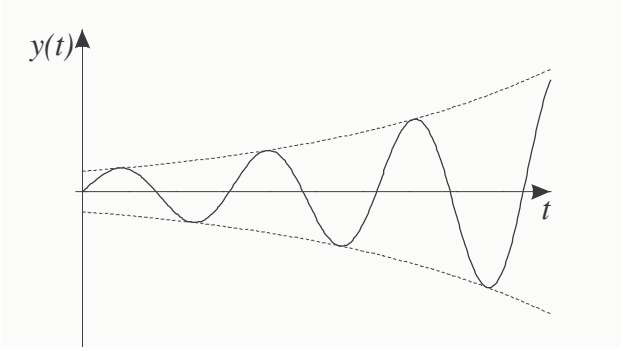




Das System ist asymptotisch stabil, der Zeitvorgang hat oszillatorische Anteile.

d)





Das System ist instabil, es treten aufklingende oszillatorische Zeitvorgänge auf

Stationärer Endwert bei Aufschaltung einer Sprungfunktion $\underline{u}(t) = \hat{\underline{u}} \cdot \sigma(t)$ bei asymptotisch stabilen Systemen (vgl. Abschnitt 2.4.1)

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{A}^{-1}(e^{\underline{A}t} - \underline{I})\underline{B}\,\hat{\underline{u}}$$

Für asymptotisch stabile Systeme gilt

$$\lim_{t\to\infty} e^{\underline{A}t} = \underline{0}$$

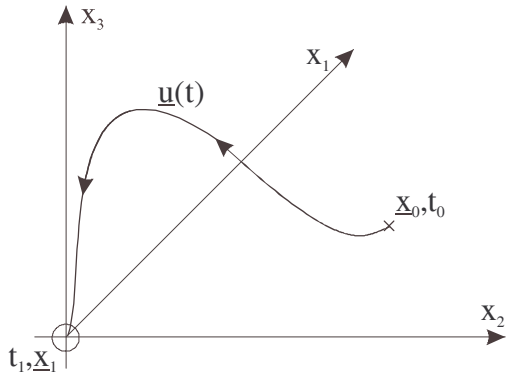
Somit ist der stationäre Endwert für $\underline{y}$ bei Aufschaltung einer Sprungfunktion

$$\lim_{t\to\infty} \underline{y}(t) = -\underline{C}\,\underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}\,\hat{\underline{u}}$$

3.3 Steuerbarkeit

Frage: Gibt es Komponenten des Zustandsvektors, die durch den Steuervektor nicht beeinflussbar sind?

Definition der Steuerbarkeit:
Ein dynamisches System $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$, $\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}$ heißt steuerbar, wenn durch geeignete Wahl von $\underline{u}(t)$ der beliebige Anfangszustand $\underline{x}(t_0)$ in endlicher Zeit t_1 in den Zustand $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1 = \underline{0}$ überführt werden kann.



Wie lässt sich diese Eigenschaft überprüfen?

3.3.1 Steuerbarkeitskriterium nach Kalman

Für MIMO-Systeme gilt:

$$\underline{x}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \;+\; e^{\underline{A}(t-t_0)}\,\underline{x}(t_0)$$

Aufgrund der Steuerbarkeitsdefinition gilt: $\underline{x}(t_1) = \underline{0}$

$$\underline{x}(t_1) = \underline{0} = \int_{0}^{t_1} e^{\underline{A}(t_1-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \;+\; e^{\underline{A}t_1}\,\underline{x}(t_0)$$

$$e^{-\underline{A}t_1}\,\Big|\qquad e^{\underline{A}t_1}\,\underline{x}(t_0) = -\int_{0}^{t_1} e^{\underline{A}(t_1-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)d\tau$$

$$\underline{x}(t_0) = -\int_{0}^{t_1} e^{-\underline{A}\tau}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

Rückblick: Satz von Cayley-Hamilton (siehe Abschnitt 2.3.2):

$$e^{\underline{A}t} = \alpha_0(t)\cdot\underline{I} + \alpha_1(t)\cdot\underline{A} + \ldots + \alpha_{n-1}(t)\underline{A}^{n-1}$$

---

hier: $$e^{-\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(-t)\underline{A}^k$$

$$\underline{x}(t_0) = -\int_{0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(-\tau)\,\underline{A}^k\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau = -\sum_{k=0}^{n-1} \underline{A}^k \cdot \underline{B} \underbrace{\int_{0}^{t_1} \alpha_k(-\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau}_{\underline{\beta}_k \text{ für } k=0,\ldots,n-1}$$

$\underline{\beta}_k$: p-dimensionaler Vektor

$$\underline{x}(t_0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \underline{A}^k \cdot \underline{B} \cdot \underline{\beta}_k = -\underbrace{\left[\underline{B} \mid \underline{A}\cdot\underline{B} \mid \underline{A}^2\cdot\underline{B} \mid \ldots \mid \underline{A}^{n-1}\underline{B}\right]}_{\underline{Q}_S} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\beta}_0 \\ \underline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist nur auflösbar, wenn die Matrix $\underline{Q}_S$ den vollen Rang n besitzt.

Definition der Steuerbarkeit nach Kalman
Ein dynamisches System $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$ ist genau dann steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{Q}_S = \begin{bmatrix} \underset{(n,p)}{\underline{B}} & \underset{(n,p)}{\underline{A}\,\underline{B}} & \underline{A}^2\underline{B} & \dots & \underset{(n,p)}{\underline{A}^{n-1}\underline{B}} \end{bmatrix}$$

den vollen Rang n hat. Die Steuerbarkeitsmatrix $\underline{Q}_s$ muss n linear unabhängige Spaltenvektoren haben.

Spezialfall: $p = 1$:

$\underline{Q}_s$ hat $\dim(n,n)$

Die Forderung nach n linear unabhängigen Spaltenvektoren der Matrix $\underline{Q}_S$ entspricht der Invertierbarkeit dieser Matrix.
Somit muss $\det(\underline{Q}_s) \neq 0$ gelten.

Beispiel: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{A}\,\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad \underline{Q}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Rang}\left(\underline{Q}_s\right) = 2 = n \qquad \rightarrow$ vollständige Steuerbarkeit ist gegeben

3.3.2 Steuerbarkeitskriterium nach Gilbert und Hautus

Erinnerung: Durch die Eigenvektor-Matrix $\underline{V}$ kann ein dynamisches System im Falle einfacher Eigenwerte auf Diagonalform transformiert werden.

$p = 1$: $\qquad \dot{\tilde{\underline{x}}} = \tilde{\underline{A}}\,\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{b}}\,u$

$$y = \tilde{\underline{c}}^T\,\tilde{\underline{x}} \qquad\qquad \tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dabei war $\qquad \tilde{\underline{A}} = \underline{V}^{-1} \cdot \underline{A}\,\underline{V}$

$$\tilde{\underline{b}} = \underline{V}^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\dot{\tilde{x}}_i = \lambda_i \tilde{x}_i + \tilde{b}_i u \qquad\qquad i = 1, \dots, n$$

$\tilde{x}_i$ ist durch u beeinflussbar, wenn $\tilde{b}_i \neq 0$ ist. Somit ist das System steuerbar, wenn $\tilde{b}_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt.

Gilbert-Kriterium für Mehrgrößensysteme:
Ein Mehrgrößensystem mit einfachen Eigenwerten ist genau dann steuerbar, wenn alle Zeilenvektoren von

$$\underline{\tilde{B}} = \underline{V}^{-1} \cdot \underline{B}$$

vom Nullvektor verschieden sind.

$$\underline{V}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \underline{w}_2^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix}}_{Links-EV} \qquad \text{aus} \qquad \underline{w}_i^T \, (\lambda_i \underline{I} - \underline{A}) = \underline{0}^T$$

Bei beliebiger Eigenwertlage sind Systeme dann steuerbar, wenn für jeden Links-Eigenvektor von $\underline{A}$ gilt: $\underline{w}_i^T \cdot \underline{B} \neq \underline{0}^T$

3.4 Beobachtbarkeit

Problem: Meist werden nicht alle „inneren" Zustände sensorisch erfasst; nur einzelne Messgrößen y_i sind als Messwert vorhanden bzw. messtechnisch erfassbar.

Frage: Lässt sich der gesamte Zustandsvektor $\underline{x}$ aus den Messgrößen $\underline{y}$ und dem bekannten Eingangsvektor $\underline{u}(t)$ vollständig rekonstruieren?

Definition der Beobachtbarkeit:
Ein dynamisches System $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}, \quad \underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}$ heißt beobachtbar, wenn man bei bekanntem $\underline{u}(t)$ im Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_1$ einen beliebigen Anfangszustand $\underline{x}(t_0)$ aus dem Messvektor $\underline{y}(t)$ eindeutig ermitteln kann.

3.4.1 Beobachtbarkeitskriterium nach Kalman

MIMO-System:
$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}$$

Ausgangsgleichung differenzieren: $\dot{\underline{y}} = \underline{C}\,\dot{\underline{x}} + \underline{D}\,\dot{\underline{u}}$

Zustandsgleichung einsetzen: $\dot{\underline{y}} = \underline{C} \cdot \underline{A}\,\underline{x} + \underline{C} \cdot \underline{B}\,\underline{u} + \underline{D}\,\dot{\underline{u}}$

erneutes Differenzieren: $\ddot{\underline{y}} = \underline{C} \cdot \underline{A}\,\dot{\underline{x}} + \underline{C} \cdot \underline{B}\,\dot{\underline{u}} + \underline{D}\,\ddot{\underline{u}}$

Zustandsgleichung einsetzen: $\ddot{\underline{y}} = \underline{C} \cdot \underline{A}^2\,\underline{x} + \underline{C}\,\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{u} + \underline{C} \cdot \underline{B}\,\dot{\underline{u}} + \underline{D}\,\ddot{\underline{u}}$

$\vdots$

differenzieren bis die $(n-1)$-te zeitliche Ableitung von $\underline{y}(t)$ gemäß

$$\underline{y}^{(n-1)} = \underline{C}\,\underline{A}^{n-1}\cdot\underline{x} + \underline{C}\,\underline{A}^{n-2}\cdot\underline{B}\,\underline{u} + \ldots + \underline{C}\,\underline{B}\,\underline{u}^{(n-2)} + \underline{D}\,\underline{u}^{(n-1)}$$

berechnet ist. Somit erhält man

$$\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{\dot{y}} \\ \underline{\ddot{y}} \\ \vdots \\ \underline{y}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \underline{C}\,\underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C}\,\underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{Q}_B} \underline{x} + \begin{bmatrix} \underline{D} & & & & \underline{0} \\ \underline{C}\,\underline{B} & \ddots & & & \\ \underline{C}\,\underline{A}\,\underline{B} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \underline{C}\,\underline{A}^{n-2}\,\underline{B} & & & \underline{C}\,\underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\dot{u}} \\ \underline{\ddot{u}} \\ \vdots \\ \underline{u}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Das Gleichungssystem lässt sich nur dann eindeutig nach $\underline{x}(t)$ auflösen, wenn $\underline{Q}_B$ vollen Rang n besitzt. Im SISO-Fall ($\underline{Q}_B$ ist dann eine (n,n)-Matrix) muss $\underline{Q}_B$ invertierbar sein, d.h. $\det \underline{Q}_B \neq 0$.

Definition der Beobachtbarkeit nach Kalman:
Ein lineares zeitinvariantes System ist genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ (q,n) \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \underline{C}\,\underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C}\,\underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}_{(n\cdot q,n)}$$

vollen Rang n hat, also n linear unabhängige Zeilenvektoren besitzt.

3.4.2 Beobachtbarkeitskriterium nach Gilbert und Hautus

Erinnerung: Durch die Eigenvektor-Matrix $\underline{V}$ kann ein dynamisches System im Falle einfacher Eigenwerte auf Diagonalform transformiert werden.

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \tilde{\underline{A}}\,\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{B}}\,\underline{u} \qquad \tilde{\underline{A}} = \underline{V}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{V}$$
$$\underline{y} = \tilde{\underline{C}}\,\tilde{\underline{x}} \qquad \tilde{\underline{B}} = \underline{V}^{-1}\,\underline{B}$$
$$\tilde{\underline{C}} = \underline{C}\,\underline{V}$$

SISO:

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \ldots & \tilde{c}_n \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}}$$

Das System ist beobachtbar, wenn alle $\tilde{c}_k \neq 0$ sind.
Ein Mehrgrößensystem mit beliebiger Eigenwertlage ist genau dann beobachtbar, wenn für jeden Eigenvektor $\underline{v}_i$ von $\underline{A}$ gilt: $\underline{C}\cdot\underline{v}_i \neq \underline{0}$, $\quad i = 1,\ldots,n$

Beispiel:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Q}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{c}^T \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Rang}\left(\underline{Q}_B\right) = 2 = n$ $\quad \rightarrow$ vollständige Beobachtbarkeit ist gegeben.

3.5 Normalformen

System der Ordnung n: ($p = q = 1$ SISO)

$$\dot{\underline{x}} = \underset{(n,n)}{\underline{A}}\ \underline{x} + \underset{(n,1)}{\underline{b}}\ u$$

$$y = \underset{(1,n)}{\underline{c}^T}\ \underline{x} + \underset{(1,1)}{d}\ u$$

$\Rightarrow \quad n^2 + n + n + 1$ verschiedene Parameter

Normalformen:
- Parameterreduktion
- Einfachere Identifikation von Struktureigenschaften

3.5.1 Jordansche Normalform

Transformation der Systemmatrix $\underline{A}$, so dass neue Systemmatrix $\tilde{\underline{A}}$ Diagonalgestalt hat (bereits bekannt aus Abschnitt 2.3)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \qquad \dot{\tilde{\underline{x}}} = \tilde{\underline{A}}\,\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{B}}\,\underline{u}$$

$$\underline{x} = \underline{V}\,\tilde{\underline{x}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \qquad \underline{y} = \tilde{\underline{C}}\,\tilde{\underline{x}}$$

Matrix $\underline{V}$ der Eigenvektoren von $\underline{A}$

$$\tilde{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \lambda_1 & & & & \underline{0} & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_l & & & \\ \hdashline & & & \underline{J}_1 & & \\ & \underline{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \underline{J}_r \end{array}\right], \qquad \tilde{\underline{B}} = \underline{V}^{-1}\underline{B}, \qquad \tilde{\underline{C}} = \underline{C}\,\underline{V}$$

Die Beziehung zwischen der Jordanschen Normalform und der Übertragungsfunktion ist im SISO-Fall durch

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots a_n s^n} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

gegeben.

Eine günstige Darstellung zur Berechnung der Impulsantwort mittels Partialbruchzerlegung ist:
a) bei einfachen reellen Polen

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s - \lambda_i} \qquad Y(s) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s - \lambda_i} \right) U(s)$$

Laplace-Transformierte der Zustandsgrößen werden definiert als

$$\tilde{X}_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} U(s), \quad i = 1, \ldots, n$$

$\bullet\!\!\mid \quad \mathscr{L}^{-1}$

$$(s - \lambda_i)\tilde{X}_i(s) = U(s)$$

$$\dot{\tilde{x}}_i = \lambda_i \tilde{x}_i + u, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} r_i \underbrace{\left(\frac{1}{s - \lambda_i} \right) U(s)}_{\tilde{X}_i}$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \tilde{X}_i(s) \qquad \mid\!\!\bullet \quad \mathscr{L}^{-1} \qquad y = \begin{bmatrix} r_1 & \ldots & r_n \end{bmatrix} \underline{\tilde{x}}$$

Ergebnis (SISO):

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\tilde{c}}^T = \begin{bmatrix} r_1 & \ldots & r_n \end{bmatrix}$$

Das DGL-System ist entkoppelt.

b) Jordansche Normalform bei mehrfachen Eigenwerten:

Partialbruchzerlegung bei mehrfachem Pol λ_1

$$Y(s) = \left[\frac{r_{p_i}}{s-\lambda_1} + \frac{r_{p_i-1}}{(s-\lambda_1)^2} + \ldots + \frac{r_1}{(s-\lambda_1)^{p_i}} + \underbrace{\sum_{i=p_i+1}^{n} \frac{r_i}{(s-\lambda_1)}}_{\text{einfache EW } \lambda_{p_i+1},\ldots,\lambda_n} \right] U(s)$$

einfache Eigenwerte wie bisher:

$$\tilde{X}_i(s) = \frac{1}{s-\lambda_i} U(s) \qquad i = p_i+1,\ldots,n$$

mehrfache Eigenwerte:

$$\tilde{X}_1(s) = \frac{1}{(s-\lambda_1)^{p_i}} U(s)$$

$$\tilde{X}_2(s) = \frac{1}{(s-\lambda_1)^{p_i-1}} U(s)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{X}_{p_i-1}(s) = \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} U(s)$$

$$\tilde{X}_{p_i}(s) = \frac{1}{(s-\lambda_1)} U(s)$$

Wie kommt man zur Zustandsraumdarstellung?

$$\tilde{X}_1(s) = \frac{1}{s-\lambda_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(s-\lambda_1)^{p_i-1}} U(s)}_{\tilde{X}_2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \; \mathscr{L}^{-1} \quad \dot{\tilde{x}}_1 = \lambda_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

$$\tilde{X}_2(s) = \frac{1}{s-\lambda_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(s-\lambda_1)^{p_i-2}} U(s)}_{\tilde{X}_3} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \; \mathscr{L}^{-1} \quad \dot{\tilde{x}}_2 = \lambda_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\tilde{X}_{p_i-1}(s) = \frac{1}{s-\lambda_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{s-\lambda_1} U(s)}_{\tilde{X}_{p_i}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \; \mathscr{L}^{-1} \quad \dot{\tilde{x}}_{p_i-1} = \lambda_1 \tilde{x}_{p_i-1} + \tilde{x}_{p_i}$$

$$\tilde{X}_{p_i}(s) = \frac{1}{s-\lambda_1} U(s) \qquad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\bullet\!\!-\!\!\circ} \qquad \dot{\tilde{x}}_{p_i} = \lambda_1 \tilde{x}_{p_i} + u(t)$$

$$\underline{\tilde{A}} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} \lambda_1 & 1 & & \underline{0} & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & \underline{0} & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ \underline{0} & & & \lambda_1 & & & \\ \hdashline & & & & \lambda_{p_i+1} & & \underline{0} \\ & \underline{0} & & & & \ddots & \\ & & & & \underline{0} & & \lambda_n \end{array}\right] \qquad \underline{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{p}_\text{i} - \text{te Stelle}$$

$$\underline{\tilde{c}}^T = \left[\begin{array}{ccc:ccc} r_1 & \cdots & r_{p_i} & r_{p_i+1} & \cdots & r_n \end{array}\right]$$

3.5.2 Beobachtungsnormalform 1. Art (BNF 1. Art)

SISO: $p = q = 1$

$$\underline{\hat{x}} = \underline{\underline{Q}}_B \, \underline{x} \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{x} = \underline{\underline{Q}}_B^{-1} \, \underline{\hat{x}}$$

$$\underline{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \, \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{c}^T \, \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}$$

1. Gleichung: $\hat{x}_1 = \underline{c}^T \, \underline{x}$

differenzieren:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \underline{c}^T \, \underline{\dot{x}}$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = \underbrace{\underline{c}^T \, \underline{A} \, \underline{x}}_{\hat{x}_2} + \underline{c}^T \, \underline{b} \, u$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \underline{c}^T \, \underline{b} \, u$$

2. Gleichung:

$$\hat{x}_2 = \underline{c}^T \, \underline{A} \, \underline{x}$$

differenzieren und Zustandsgleichung einsetzen:

$$\dot{\hat{x}}_2 = \underline{c}^T \, \underline{A} \left[\underline{A} \, \underline{x} + \underline{b} \, u \right]$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \underbrace{\underline{c}^T \underline{A}^2 \underline{x}}_{\hat{x}_3} + \underline{c}^T \underline{A} \underline{b} u$$

$$\vdots$$

$$\dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + \underline{c}^T \underline{A}^{n-2} \underline{b} u$$

letzte Gleichung differenziert:

$$\dot{\hat{x}}_n = \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} \dot{\underline{x}}$$

Zustandsgleichung einsetzen:

$$\dot{\hat{x}}_n = \underline{c}^T \underline{A}^n \underbrace{\underline{x}}_{\underline{Q}_B^{-1} \hat{\underline{x}}} + \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} \underline{b} u$$

$$\dot{\hat{x}}_n = \underbrace{\underline{c}^T \underline{A}^n \underline{Q}_B^{-1}}_{\substack{(1,n) \\ [-a_0 \ \cdots \ -a_{n-1}]}} \hat{\underline{x}} + \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} \underline{b} u$$

Zustandsraumdarstellung nach der Transformation:

$$\hat{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \underline{0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \underline{0} & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{b}} = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \underline{b} \\ \underline{c}^T \underline{A} \underline{b} \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} \underline{b} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{c}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{T} = \underline{Q}_B$$

Die Transformation ist nur möglich, wenn $\underline{Q}_B^{-1}$ existiert.

Beispiel: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

Das System liegt hier bereits in BNF 1. Art vor:

$$a_0 = 1 \ , \qquad a_1 = 0$$

Transformierte Systemdarstellung in BNF 1. Art:

$$\hat{\underline{A}} = \underline{Q}_B \underline{A} \underline{Q}_B^{-1}$$

$$\hat{\underline{b}} = \underline{Q}_B \underline{b}$$

$$\hat{\underline{c}}^T = \underline{c}^T \underline{Q}_B^{-1}$$

Eigenschaften bezüglich $\hat{\underline{Q}}_B$:

$$\hat{\underline{Q}}_B = \underline{Q}_B \underline{T}^{-1} \quad \text{wegen} \quad \underline{T}^{-1} = \underline{Q}_B^{-1}$$

also: $\hat{\underline{Q}}_B = \underline{I}$

3.5.3 Beobachtungsnormalform 2. Art (BNF 2. Art)

Die Zustandsraumdarstellung nach der Transformation sei:

$$\hat{\hat{\underline{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\hat{\underline{b}}} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \underset{\uparrow}{=}_{b_n = 0} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\hat{\underline{c}}}^T = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zunächst sei gesucht:
Transformation von BNF 1. Art auf BNF 2. Art

$$\hat{\hat{\underline{x}}} = \underline{T}\,\hat{\underline{x}}, \qquad \hat{\hat{\underline{Q}}}_B = \begin{bmatrix} \hat{\hat{\underline{c}}}^T \\ \hat{\hat{\underline{c}}}^T \hat{\hat{\underline{A}}} \\ \vdots \\ \end{bmatrix}$$

Anwendung der Ergebnisse aus der BNF 1. Art

$$\hat{\underline{Q}}_B = \underline{I}$$
$$\hat{\hat{\underline{Q}}}_B = \hat{\underline{Q}}_B \underline{T}^{-1}$$
$$\hat{\hat{\underline{Q}}}_B = \underline{T}^{-1}$$
$$\boxed{\hat{\hat{\underline{Q}}}_B^{-1} = \underline{T}}$$

damit ist die Transformation bekannt, weil alle Parameter aus der BNF 1. Art festliegen.

$$\hat{\hat{\underline{b}}} = \hat{\hat{\underline{Q}}}_B^{-1}\,\hat{\underline{b}}$$

$\hat{\hat{\underline{c}}}^T$, $\hat{\hat{\underline{A}}}$ kann wegen der Struktureigenschaften sofort hingeschrieben werden.

Beispiel:

$$\underline{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\hat{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\hat{c}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\hat{\hat{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\hat{\hat{c}}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\hat{\hat{c}}}^T \, \underline{\hat{\hat{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\hat{\hat{Q}}}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\hat{\hat{Q}}}_B^{\,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\hat{\hat{b}}} = \underline{\hat{\hat{Q}}}_B^{-1} \, \underline{\hat{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

BNF 2. Art und Übertragungsfunktion:

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} U(s)$$

$$\left(a_0 + a_1 s + \ldots + s^n \right) Y(s) = \left(b_0 + b_1 s + \ldots + b_{n-1} s^{n-1} \right) U(s)$$

durch s^n dividieren:

$$Y(s) \left(\frac{a_0}{s^n} + \frac{a_1}{s^{n-1}} + \ldots + 1 \right) = \left(\frac{b_0}{s^n} + \frac{b_1}{s^{n-1}} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{s} \right) U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s}\left\{ b_{n-1}U - a_{n-1}Y + \frac{1}{s}\left\{ b_{n-2}U - a_{n-2}Y + \frac{1}{s}\left\{ \ldots \left\{ \ldots + \underbrace{\frac{1}{s}\left\{ b_1 U - a_1 Y + \underbrace{\frac{1}{s}\left\{ b_0 U - a_0 Y \right\}}_{\hat{\hat{X}}_1} \right\}}_{\hat{\hat{X}}_2} \right\} \ldots \right\} \right\} \right\}}_{Y = \hat{\hat{X}}_n}$$

Man definiert die Zustandsvariablen

$$\hat{\hat{X}}_1 = \frac{1}{s}(b_0 U - a_0 \hat{\hat{X}}_n)$$

$$\hat{\hat{X}}_2 = \frac{1}{s}(b_1 U - a_1 \hat{\hat{X}}_n + \hat{\hat{X}}_1)$$
$$\vdots$$
$$\hat{\hat{X}}_n = \frac{1}{s}(b_{n-1} U - a_{n-1} \hat{\hat{X}}_n + \hat{\hat{X}}_{n-1})$$

$s\cdot\big|$ und $\mathscr{L}^{-1}$:

$$\dot{\hat{\hat{x}}}_1 = -a_0 \hat{\hat{x}}_n + b_0 u$$
$$\dot{\hat{\hat{x}}}_2 = -a_1 \hat{\hat{x}}_n + \hat{\hat{x}}_1 + b_1 u$$
$$\vdots$$
$$\dot{\hat{\hat{x}}}_n = -a_{n-1} \hat{\hat{x}}_n + \hat{\hat{x}}_{n-1} + b_{n-1} u$$

$$\underline{\hat{\hat{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \underline{0} & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\hat{\hat{b}}} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Koeffizienten von $Z(s)$ der Übertragungsfunktion $G(s)$ für $b_n = 0$

Da $\quad x_n = y \quad \Rightarrow \quad \underline{\hat{\hat{c}}}^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vorteile:
- aus $G(s)$ folgt sofort eine Zustandsbeschreibung
- immer beobachtbar
- Einfache Beobachtersynthese

Nachteil:
- Die Komponenten des Zustandsvektors $\underline{\hat{\hat{x}}}$ haben keine physikalische Bedeutung mehr.

3.5.4 Steuerungsnormalform 1. Art (SNF 1. Art)

Transformation: $\quad \underline{\overline{x}} = \underline{\underline{Q}}_S^{-1}\, \underline{x}$

SISO: $\quad p = q = 1$

Zustandsbeschreibung nach der Transformation auf die SNF 1. Art

$$\underline{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ \underline{0} & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\bar{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\bar{A}} = \underline{Q}_S^{-1} \underline{A} \underline{Q}_s, \qquad \underline{\bar{b}} = \underline{Q}_S^{-1} \underline{b}$$

$$\underline{\bar{c}}^T = \begin{bmatrix} \bar{c}_0 & \cdots & \bar{c}_{n-1} \end{bmatrix} = \underline{c}^T \underline{Q}_S^{-1}, \qquad \underline{T} = \underline{Q}_S^{-1}, \qquad \underline{\bar{Q}}_s = \underline{I}$$

3.5.5 Steuerungsnormalform 2. Art (SNF 2. Art)

Wird auch als Regelungsnormalform (RNF) bezeichnet

Zustandsbeschreibung nach der Transformation auf RNF:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ \underline{0} & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{c}}^T = \begin{bmatrix} \beta_0 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \underset{\uparrow}{=}_{b_n = 0} \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} = \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{Q}}_S^{-1}$$

Transformation von SNF 1. Art auf SNF 2. Art (RNF) $\underline{T} = \underline{\underline{Q}}_s$

RNF und Übertragungsfunktion:

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{n-1} s^{n-1}}{\underbrace{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}_{N(s)}} U(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} U(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{N(s)} U + \frac{b_1 s}{N(s)} U + \ldots + \frac{b_{n-1} s^{n-1}}{N(s)} U$$

Definition der Zustandsvariablen:

$$\underline{\underline{X}}_1 = \frac{1}{N(s)} U, \quad \underline{\underline{X}}_2 = \frac{s}{N(s)} U, \quad \ldots, \quad \underline{\underline{X}}_n = \frac{s^{n-1}}{N(s)} U$$

dann folgt:

$$s\,\underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{X}}_2\,, \quad s\,\underline{\underline{X}}_2 = \underline{\underline{X}}_3\,, \quad \ldots, \quad s\,\underline{\underline{X}}_{n-1} = \underline{\underline{X}}_n$$

$\mathscr{L}^{-1}$: $\quad \dot{\underline{\underline{x}}}_1 = \underline{\underline{x}}_2\,, \quad \dot{\underline{\underline{x}}}_2 = \underline{\underline{x}}_3\,, \quad \ldots, \quad \dot{\underline{\underline{x}}}_{n-1} = \underline{\underline{x}}_n$

oder: $\quad \ddot{\underline{\underline{x}}}_1 = \underline{\underline{x}}_3\,, \quad \dddot{\underline{\underline{x}}}_1 = \underline{\underline{x}}_4\,, \quad \ldots, \quad \underline{\underline{x}}_1^{(n-1)} = \underline{\underline{x}}_n$

$$\underline{\underline{X}}_1(s) = \frac{1}{N(s)}U = \frac{1}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n}U$$

im Zeitbereich:

$$a_0\underline{\underline{x}}_1 + a_1\underbrace{\dot{\underline{\underline{x}}}_1}_{\underline{\underline{x}}_2} + \ldots + a_{n-1}\underbrace{\underline{\underline{x}}_1^{(n-1)}}_{\dot{\underline{\underline{x}}}_n} + \underbrace{\underline{\underline{x}}_1^{(n)}}_{\dot{\underline{\underline{x}}}_n} = u$$

$$\dot{\underline{\underline{x}}}_n = -a_0\underline{\underline{x}}_1 - a_1\underline{\underline{x}}_2 - \ldots - a_{n-1}\underline{\underline{x}}_n + u$$

also: $a_0,\ldots,a_{n-1}$ sind die Koeffizienten von $N(s)$ der Übertragungsfunktion $G(s)$.

Damit lautet die Ausgangsgleichung:

$$Y(s) = b_0\underbrace{\frac{1}{N(s)}U}_{\underline{\underline{X}}_1} + \ldots + b_{n-1}\underbrace{\frac{s^{n-1}}{N(s)}U}_{\underline{\underline{X}}_n}$$

$$\underline{\underline{c}}^T = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$b_0,\cdots,b_{n-1}$ sind die Koeffizienten von $Z(s)$ der Übertragungsfunktion $G(s)$.

Vorteile:
- die Zustandsbeschreibung kann aus der Übertragungsfunktion sofort abgeleitet werden
- immer steuerbar
- Einfache Reglersynthese

Nachteil:
- Die Komponenten des Zustandsvektors $\underline{\underline{x}}$ haben keine physikalische Bedeutung mehr.

4 Struktur von Zustandsgleichungen

Zustandsbeschreibung: $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$

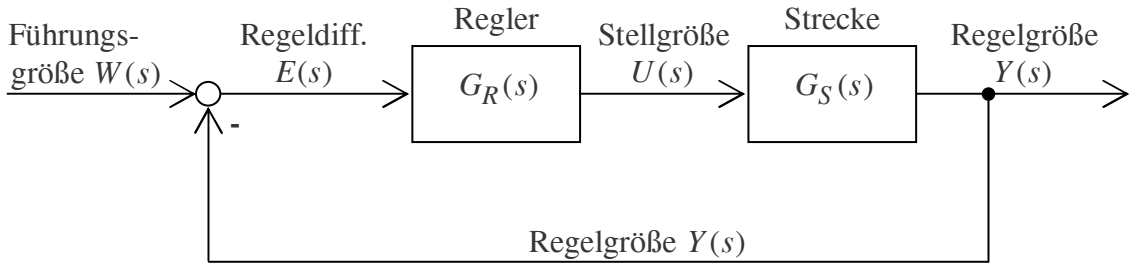
$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$

Ziele:

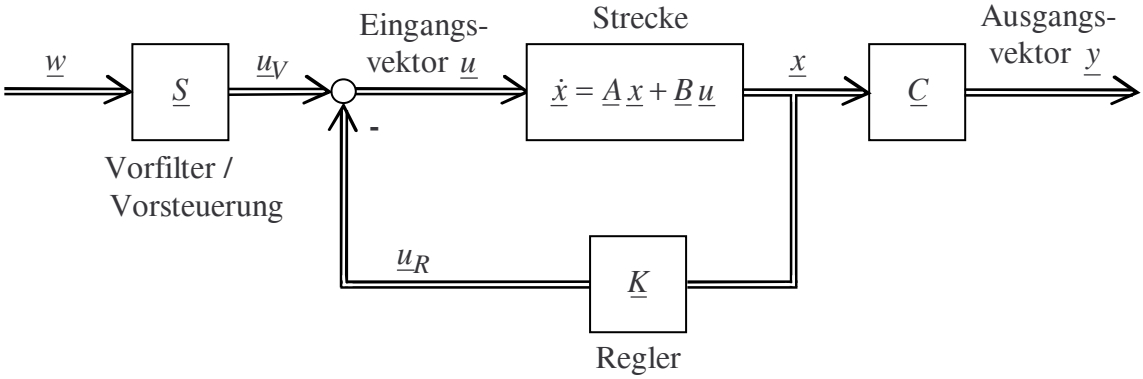
- Verbesserung des Ein-/Ausgangsverhaltens
- Stabilität des geregelten Systems
- Erhöhung der Dämpfung
- Erzielung eines verbesserten transienten Verhaltens
- Kompensation von Störungen
- Genaue Führungsgrößenfolge

Grundgedanke (RT1)
Einführung der Rückführung

Bildbereich:



Zustandsraum:



lineare Zustandsrückführung:

$$\underset{(p,1)}{\underline{u}} = -\underset{(p,n)}{\underline{K}} \cdot \underset{(n,1)}{\underline{x}} = -\underline{u}_R \qquad \text{für } \underline{w} = \underline{0}$$

für n=3 und p=2 ergibt sich damit die Zustandsrückführung

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

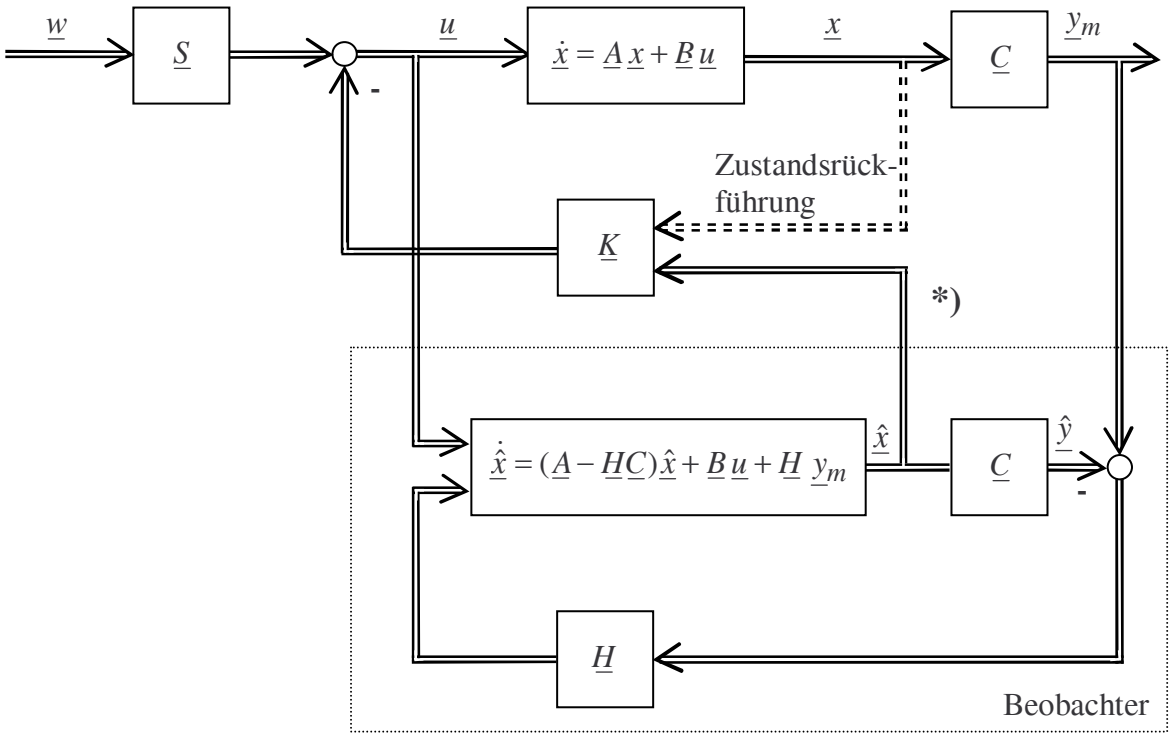
Kennzeichen:
Für die Zustandsregelung werden alle Zustandsgrößen benötigt
→ vollständige Zustandsrückführung
Zustandsregler *(Kap. 5)*
Die Führungsgrößen werden so gewichtet, dass die Ausgangsgrößen des Gesamtsystems sowie ggf. deren Ableitungen den Führungswerten entsprechen → Entwurf von Vorsteuerung und Vorfilter *(Kap. 4)*

jetzt Problem:
lineares Rückführgesetz benötigt alle Zustandsgrößen, was nicht immer möglich ist.

2 Möglichkeiten:

1. Rekonstruktion der fehlenden Komponenten → Beobachter *(Kap. 6)*
2. Reglerrückführung berücksichtigt nur Messgrößen → Ausgangsrückführung

zu 1: Beobachter:



*) falls der Zustandsvektor nicht vollständig zugänglich ist: Rückführung der Schätzwerte $\hat{x}$

→ Behandlung von Störgrößen *(Kap.7)*

4.1 Vorfilterberechnung auf Stationarität

Voraussetzung: Reglermatrix $\underline{K}$ ist bekannt, $\dim \underline{y} = \dim \underline{w}$

Wie ist $\underline{S}$ zu wählen?

$$\underline{u} = \underline{u}_V - \underline{u}_R$$
$$\underline{u} = \underline{S} \cdot \underline{w} - \underline{K} \cdot \underline{x}$$
$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}(\underline{S}\,\underline{w} - \underline{K}\,\underline{x})$$
$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\underline{x} + \underline{B}\,\underline{S}\,\underline{w} \qquad \text{mit} \qquad \underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$$

Forderung: Im stationären Zustand $\dot{\underline{x}} = 0$ soll $\underline{y} = \underline{w}$ mit $\underline{w} = \text{konst.}$ sein.

$$\underline{0} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\underline{x} + \underline{B}\,\underline{S}\,\underline{w}$$
$$\underline{x} = (\underline{B}\,\underline{K} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B}\,\underline{S}\,\underline{w}$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung liefert:

$$\underline{y} = \underbrace{\underline{C}(\underline{B}\,\underline{K} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B}\,\underline{S}}_{\overset{!}{=}\underline{I}}\,\underline{w} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{y} = \underline{w}$$

$$\underline{S}^{-1} = \underline{C}\left[\underline{B}\,\underline{K} - \underline{A}\right]^{-1} \cdot \underline{B}$$

$$\boxed{\underline{S} = \left[\, \underline{C}\left(\underline{B}\,\underline{K} - \underline{A}\right)^{-1} \underline{B} \,\right]^{-1}}$$

4.2 Vorsteuerung mit Führungsgrößenaufschaltung

1. Fall: $m = 0$ Strecke mit reinem Verzögerungsverhalten
keine Nullstellen im Zähler der Übertragungsfunktion

Ziel: $y(t) = w(t)$, d.h. die Ausgangsgröße soll der Führungsgröße ideal folgen
$q = p = 1$ o.B.d.A.

Forderung zusätzlich:

$$y = w$$
$$\dot{y} = \dot{w}$$
$$\ddot{y} = \ddot{w}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = w^{(n)}$$

$w, \ldots, w^{(n)}$ stehen als Eingangsgrößen zur Verfügung

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{b}\,\underline{k}^T)\underline{x} + \underline{b}\,\underline{s}^T \cdot \begin{bmatrix} w \\ \dot{w} \\ \ddot{w} \\ \vdots \\ w^{(n)} \end{bmatrix}$$

$\mathscr{L}$

$$sX(s) = (\underline{A} - \underline{b}\,\underline{k}^T)\underline{x} + \underline{b}\,\underline{s}^T \begin{bmatrix} w \\ sw \\ s^2 w \\ \vdots \\ s^n w \end{bmatrix}; \qquad \underline{y} = \underline{c}^T\,\underline{x}$$

darstellbar als:

$$Y(s) = G(s) \cdot W(s) = \frac{b_0}{N(s)} \cdot W(s)$$

$$\underline{X}(s) = (s\underline{I} - \underline{A} + \underline{b}\,\underline{k}^T)^{-1}\underline{b}\,\underline{s}^T \begin{bmatrix} w \\ sw \\ s^2 w \\ \vdots \\ s^n w \end{bmatrix}; \qquad \underline{s}^T = \begin{bmatrix} S_{V0} \\ S_{V1} \\ \vdots \\ S_{Vn} \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \underline{c}^T (s\underline{I} - \underline{A} + \underline{b}\,\underline{k}^T)^{-1}\underline{b} \underbrace{\left[S_{V0} + S_{V1} \cdot s + S_{V2} \cdot s^2 + \ldots + S_{Vn} \cdot s^{n-1} \right]}_{F_s(s)} W(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{N(s)} \cdot F_s(s) W(s)$$

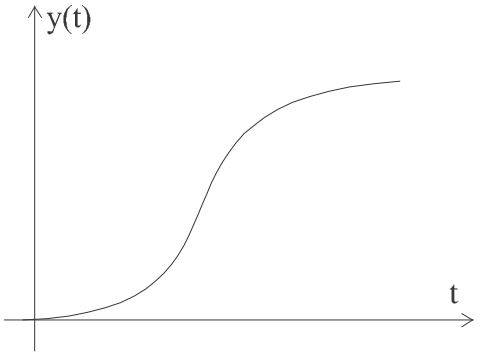
$$N(s) Y(s) = b_0 F_s(s) W(s)$$

$$\left(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n \right) Y(s) = \left(\underbrace{b_0 S_{V0}}_{b_{0V}} + \underbrace{b_0 S_{V1}}_{b_{1V}} s + \ldots + \underbrace{b_0 S_{Vn}}_{b_{nV}} s^n \right) W(s)$$

Bedingung: $Y(s) = W(s)$ bzw. $y(t) = w(t)$ ist genau dann erfüllt, wenn die Beziehungen

$$a_i = b_{iV} = b_0 \cdot \underbrace{S_{Vi}}_{\text{Parameter von } \underline{S}} \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n\,, \quad a_n = 1$$

erfüllt sind.



Damit wäre $G(s) = 1$, aber:

- verbleibende Modellfehler
- Parameterkonstanz ist nur eine Idealisierung
- Stetigkeit der Ableitungen der Führungsgröße $w(t)$ wird vorausgesetzt
- Stellgrößenbeschränkungen

Daher treten in der Realität trotzdem Abweichungen auf.

2. Fall $m \geq 1$: Stationaritätsbedingung für

$$\begin{matrix} y \\ \hline w \\ \vdots \\ \dfrac{y^{(n-m)}}{w^{(n-m)}} \end{matrix}$$

$$\underline{\dot{x}} = (\underline{\underline{A}} - \underline{b}\,\underline{k}^T)\underline{x} + \underset{(n,1)}{\underline{b}}\;\underset{(1,n-m+1)}{\underline{s}^T}\;\underset{(n-m+1,1)}{\underline{w}}$$

$$Y(s) = \underline{c}^T (s\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{b}\,\underline{k}^T)^{-1}\underline{b}\left[S_{V0} + S_{V1}s + \ldots + S_{V(n-m)}\, s^{n-m} \right] W(s)$$

$$= \frac{(b_0 + b_1 s + \ldots + s^m)\left[S_{V0} + S_{V1}s + \ldots + S_{V(n-m)}\, s^{n-m} \right]}{N(s)} W(s)$$

$$Y(s) = \frac{(b_{0V} + b_{1V} s + \ldots + b_{nV}\, s^n)}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n} W(s)$$

Bedingung: $y = w, \ldots, y^{(n-m)} = w^{(n-m)}$ erfüllt, wenn

$a_i = b_{iV}\left(\underline{s}^T\right), \quad i = 1, \ldots, n, \quad a_n = 1$

$\rightarrow$ nur $(n-m+1)$ Koeffizienten in $\underline{s}^T$
d.h. es verbleibt Restdynamik.

5 Zustandsreglersynthese

5.1 Polvorgabe (Eigenwertvorgabe)

Die Matrix der Reglerverstärkung $\underline{K}$ ist so zu wählen, dass die Forderungen aus Kapitel 4 nach

a) Stabilität
b) Dämpfung
c) Höherer Dynamik

erfüllt werden.

Erinnerung: 3.1 Stabilitätsbegriff
3.2 Eigenwertlage und zugehöriges Zeitverhalten

zu a) siehe 3.1: keine Eigenwerte rechts der imaginären Achse
zu b) siehe 3.2: definierte Eigenwertlage, dominante konjugiert komplexe Polpaare vermeiden $\rightarrow$ Schwingungsneigung
zu c) siehe 3.2: definierte Eigenwertlage, Verschieben von Eigenwerten nach links
$\rightarrow$ Höhere Dynamik ist durch Stellgrößenbeschränkung und Störwelligkeit begrenzt.

Mit Hilfe der linearen Zustandsrückführung $\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x}$ sollen die Eigenwerte des resultierenden Gesamtsystems aus Regler und Strecke definiert verschoben werden.

Zustandsgleichungen des geregelten Systems mit Vorsteuerung:

$$\begin{aligned}\underline{u} &= -\underline{K}\,\underline{x} + \underline{S}\,\underline{w}\\ \dot{\underline{x}} &= \underbrace{(\underline{A} - \underline{B}\;\underline{K})}_{\underline{A}_R}\underline{x} + \underline{B}\,\underline{S}\,\underline{w}\\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x}\end{aligned}$$

Jetzt bestimmen die Eigenwerte von $\underline{A}_R$ die Systemdynamik:

Nullstellen des Polynoms $\det(\lambda\,\underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\,\underline{K}) = 0$

Polynom $q(\lambda) = q_0 + q_1\,\lambda + \ldots + q_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$

Jetzt erfolgt die Vorgabe der Nullstellen von $q(\lambda)$:
$\rightarrow$ Eigenwertvorgabe oder Polvorgabe

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) \qquad p(\lambda) \text{ hat Nullstellen bei } \lambda_i$$

$$p(\lambda) = p_0 + p_1\,\lambda + p_2\,\lambda^2 + \ldots + p_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

Charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises

$$\det(\lambda\,\underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\,\underline{K}) \overset{!}{=} \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$$

$$q_0 + q_1\,\lambda + \ldots + q_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \lambda^n \overset{!}{=} p_0 + p_1\,\lambda + p_2\,\lambda^2 + \ldots + p_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} q_0(k_{ij}) &= p_0 \\ q_1(k_{ij}) &= p_1 \\ &\vdots \\ q_{n-1}(k_{ij}) &= p_{n-1} \end{aligned}\right\} n \text{ Gleichungen, } \underline{K} \text{ hat } p \cdot n \text{ Elemente}$$

Lineares Gleichungssystem ist für $p = 1$ eindeutig lösbar

$\rightarrow$ Die Reglerverstärkungen k_{ij} sind einfach zu bestimmen. Eine eindeutige Lösung liegt genau dann vor, wenn das System steuerbar ist.

Aber: Für $p > 1$ ist das Gleichungssystem unterbestimmt (n Gleichungen, $n \cdot p$ Unbekannte).

$\rightarrow$ unendlich viele Lösungen, sofern das System steuerbar ist.

5.2 Polvorgabe bei Transformation auf SNF 2. Art

Voraussetzung: $p = 1$, SNF 2. Art

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \underline{0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \underline{0} & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lineare Zustandsrückführung: $u = -\underline{\underline{k}}^T \underline{\underline{x}} = -\begin{bmatrix} \overline{\overline{k}}_1 & \cdots & \overline{\overline{k}}_n \end{bmatrix} \underline{\underline{x}}$

$$\underline{\underline{A}}_R = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{k}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \underline{0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \underline{0} & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\overline{k}}_1 & \cdots & \overline{\overline{k}}_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_R = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{k}}^T = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & & \underline{0} \\ & & & \ddots & \\ & & \ddots & & \\ \underline{0} & & & 0 & 1 \\ -a_0 - \overline{\overline{k}}_1 & -a_1 - \overline{\overline{k}}_2 & \ldots & & -a_{n-1} - \overline{\overline{k}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \underline{0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \underline{0} & & & 0 & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \cdots & \cdots & -q_{n-1} \end{bmatrix}$$

d.h. das geregelte System liegt wieder in SNF 2. Art vor.

Eigenschaften der SNF 2. Art:

- In der letzten Zeile stehen die Koeffizienten des Nennerpolynoms der korrespondierenden Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises.
- Das Nennerpolynom entspricht der charakteristischen Gleichung

$$\det(s\,\underline{I} - \underline{\underline{A}} + \underline{b}\,\underline{\underline{k}}^T) = \prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$$

$$q_0 + q_1\,s + \ldots + q_{n-1}\,s^{n-1} + s^n = p_0 + p_1\,s + \ldots + p_{n-1}\,s^{n-1} + s^n .$$

Da das System in SNF 2. Art vorliegt, gilt:

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 + \bar{\bar{k}}_1 \\ q_1 &= a_1 + \bar{\bar{k}}_2 \\ &\vdots \\ q_{n-1} &= a_{n-1} + \bar{\bar{k}}_n \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt auf:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{k}}_1 &= p_0 - a_0 \\ \bar{\bar{k}}_2 &= p_1 - a_1 \\ &\vdots \\ \bar{\bar{k}}_n &= p_{n-1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

Meist liegt das System nicht in SNF 2. Art vor, deshalb ist eine Transformation notwendig:

$$\begin{aligned} \underline{T}_1 &= \underline{Q}_S^{-1} \\ \underline{T}_2 &= \underline{\bar{\bar{Q}}}_s \qquad\qquad (\text{2 Schritte}) \\ \underline{T} &= \underline{\bar{\bar{Q}}}_s \cdot \underline{Q}_S^{-1} \end{aligned}$$

Wie kann das System direkt in die SNF 2. Art transformiert werden?

$$\underline{T}\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1} = \underline{\bar{\bar{A}}} \quad \rightarrow \quad \underline{T}\,\underline{A} = \underline{\bar{\bar{A}}}\,\underline{T}$$

$$\underline{T}\,\underline{b} = \underline{\bar{\bar{b}}}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \vdots \\ \underline{t}_n^T \end{bmatrix}$$

$$\underline{\bar{\bar{A}}}\,\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \underline{0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \underline{0} & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & \cdots & & \cdots & t_{2n} \\ & & \vdots & & \\ & & \underline{t}_n^T & & \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\bar{A}}}\,\underline{T} = \begin{bmatrix} t_{21} & t_{22} & \cdots & \cdots & t_{2n} \\ t_{31} & \cdots & & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_0 t_{11} - a_1 t_{21} - \ldots - a_{n-1} t_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_0 t_{1n} - \ldots - a_{n-1} t_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{t}_2^T \\ \underline{t}_3^T \\ \vdots \\ \underline{t}_n^T \\ -a_0 \underline{t}_1^T - a_1 \underline{t}_2^T - \ldots - a_{n-1} \underline{t}_n^T \end{bmatrix}$$

mit $\underline{T}\,\underline{A} = \underline{\underline{\bar{A}}}\,\underline{T}$:

$$\begin{aligned} \underline{t}_1^T \underline{A} &= \underline{t}_2^T \\ \underline{t}_2^T \underline{A} &= \underline{t}_3^T \qquad \rightarrow \quad \underline{t}_3^T = \underline{t}_1^T \underline{A}^2 \\ &\vdots \\ \underline{t}_{n-1}^T \underline{A} &= \underline{t}_n^T \qquad \rightarrow \quad \underline{t}_n^T = \underline{t}_1^T \underline{A}^{n-1} \\ \underline{t}_n^T \underline{A} &= -a_0 \underline{t}_1^T - \ldots - a_{n-1} \underline{t}_n^T \end{aligned}$$

damit folgt für $\underline{T}$:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \underline{t}_1^T \underline{A} \\ \cdots \\ \underline{t}_1^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Wie wird $\underline{t}_1^T$ bestimmt?

$$\underline{T}\,\underline{b} = \underline{\underline{b}} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \underline{t}_1^T \underline{A} \\ \cdots \\ \underline{t}_1^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{t}_1^T \cdot \underline{b} &= 0 \\ \underline{t}_1^T \cdot \underline{A}\underline{b} &= 0 \\ &\vdots \\ \underline{t}_1^T \cdot \underline{A}^{n-1} \underline{b} &= 1 \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \underline{Q}_s = \begin{bmatrix} \underline{b} & \underline{A}\underline{b} & \ldots & \underline{A}^{n-1} \underline{b} \end{bmatrix}$$

$$\underline{t}_1^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{b}}^T} \cdot \underline{\underline{Q}}_S^{-1}$$

also entspricht $\underline{t}_1^T$ der letzten Zeile von $\underline{\underline{Q}}_S^{-1}$

Bisher: Die Strecke liegt in SNF 2. Art vor

$$u = -\underline{k}^T \, \underline{x} \qquad\qquad \underline{\underline{k}}_1 = p_0 - a_0$$

$$u = -\underline{\underline{k}}^T \, \underline{\underline{x}} \qquad\qquad \vdots$$

$$\underline{\underline{k}}_n = p_{n-1} - a_{n-1}$$

mit $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{T}} \, \underline{x}$:

$$u = -\underbrace{\begin{bmatrix} p_0 - a_0 & \cdots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \underline{t}_1^T \, \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{t}_1^T \, \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}}^{\text{Polvorgabe-matrix}}}_{\underline{\underline{k}}^T \, \underline{\underline{T}} = \underline{k}^T} \underline{x}$$

resultiert die **Ackermannsche Formel**

$$\underline{k}^T = (p_0 - a_0)\underline{t}_1^T + (p_1 - a_1)\underline{t}_1^T \, \underline{A} + \ldots + (p_{n-1} - a_{n-1})\underline{t}_1^T \, \underline{A}^{n-1}$$

$$\underline{k}^T = p_0 \underline{t}_1^T + p_1 \underline{t}_1^T \, \underline{A} + \ldots + p_{n-1} \underline{t}_1^T \, \underline{A}^{n-1} + \underline{t}_1^T \, \underline{A}^n$$

$$\boxed{\underline{k}^T = \underline{t}_1^T (p_0 \underline{I} + p_1 \underline{A} + p_2 \underline{A}^2 + \ldots + p_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \underline{A}^n)}$$

wobei $\underline{t}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{Q}}_S^{-1}$ der letzten Zeile von $\underline{\underline{Q}}_S^{-1}$ entspricht.

Beispiel: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{c}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$a_0 = 1, \quad a_1 = 0$ Eigenwerte: $\lambda_1 = j, \quad \lambda_2 = -j$

$$\underline{\underline{A}}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - \underline{\underline{k}}_1 & -\underline{\underline{k}}_2 \end{bmatrix}$$

Polvorgabe: $s_1 = -1, \quad s_2 = -2$

$p(s) = s^2 + 3s + 2$ $\qquad p_0 = 2, \quad p_1 = 3$

$\underline{\underline{k}}_1 = p_0 - a_0 = 2 - 1 = 1$ $\qquad \underline{\underline{k}}_2 = p_1 - a_1 = 3 - 0 = 3$

$\underline{S} = 2$

Geregeltes System und Übertragungsfunktion

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$G(s) = \underline{c}^T \left(s\,\underline{I} - \underline{A} + \underline{b}\,\underline{k}^T \right)^{-1} \underline{b}$$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Die Übertragungsfunktion ist bezüglich der Wahl der Zustandsgrößen transformationsinvariant, d.h. $G(s)$ kann mit der SNF 2. Art angegeben werden.

$$\underline{\underline{A}}_R = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{k}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \underline{0} \\ & & \ddots & \\ & \ddots & & \\ \underline{0} & & 0 & 1 \\ -a_0 - \bar{\bar{k}}_1 & -a_1 - \bar{\bar{k}}_2 & \dots & -a_{n-1} - \bar{\bar{k}}_n \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{c}}^T = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix};$$

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{n-1} s^{n-1}}{(a_0 + \bar{\bar{k}}_1) + (a_1 + \bar{\bar{k}}_2)s + \ldots + (a_{n-1} + \bar{\bar{k}}_n)s^{n-1} + s^n}$$

Folgerung:

- der Zähler bleibt unverändert
- nur der Nenner ändert sich, d.h. die Pole werden verschoben.
- diese Art des Reglerentwurfs ist nur für SISO-Systeme anwendbar

Praktische Vorgehensweise beim Reglerentwurf durch Polvorgabe:

1. Pole bzw. Eigenwerte der ungeregelten Strecke berechnen
2. Polvorgabe, dominante Pole leicht verschieben
3. Reglerverstärkungen berechnen
4. $k_i \Delta x_i$ bei typischen Störungen berechnen ($\rightarrow$ Stellgrößenbeschränkungen)
5. Nachoptimieren: $k_i \Delta x_i$ sehr klein $\rightarrow k_i \uparrow$
   $k_i \Delta x_i$ sehr groß $\rightarrow k_i \downarrow$
6. Eigenwertlage mit modifizierten k_i berechnen. Falls asymptotische Stabilität vorliegt: experimentelle Überprüfung am realen System (bei Bedarf zurück zu 2.)

5.3 Modale Regelung

bisher: Eingrößensysteme (siehe 5.1 und 5.2) $p = q = 1$

Problem bei Mehrgrößensystemen (MIMO): unendlich große Lösungsmenge, um bestimmte Eigenwertvorgabe zu realisieren.

Idee: - Transformation auf Jordansche Normalform
- Entwurf des Reglers
- Rücktransformation

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underset{(n,p)}{\underline{B}}\,\underset{(p,1)}{\underline{u}} \quad \rightarrow \underline{\dot{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\,\underline{x} + \overbrace{\underline{B}\,\underline{S}\,\underline{w}}^{=\underline{0}}$$

Jordan-Normalform:

$$\underline{\dot{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{A}}\,\underline{\tilde{x}} + \underline{\tilde{B}}\,\underline{u}$$
$$\underline{y} = \underline{\tilde{C}}\,\underline{\tilde{x}}$$

mit $\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$ λ_i Eigenwerte aus $\det(\lambda_i \underline{I} - \underline{A}) = 0$

wobei hier einfache Eigenwerte angenommen werden.

Transformation:

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{T}\,\underline{x} \qquad \text{bzw.} \quad \underline{x} = \underline{V}\,\underline{\tilde{x}} \qquad \text{wobei } \underline{V} = \underline{T}^{-1}$$

mit $\underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix}$

wobei $\underline{v}_i$ die Rechtseigenvektoren mit $\left(\lambda_i \underline{I} - \underline{A}\right)\underline{v}_i = \underline{0}$ sind

oder $\underline{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix}$

wobei $\underline{w}_i^T$ die Linkseigenvektoren mit $\underline{w}_i^T \left(\lambda_i \underline{I} - \underline{A}\right) = \underline{0}^T$ sind

Dann gilt:

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{V}^{-1}\underline{A}\,\underline{V}$$
$$\underline{\tilde{B}} = \underline{V}^{-1}\underline{B}$$
$$\underline{\tilde{C}} = \underline{C}\,\underline{V}$$

$$\dot{\underline{\tilde{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{A}}} \underline{\tilde{x}} + \underbrace{\underline{\tilde{B}}\underline{u}}_{\underline{\tilde{u}}}$$

$$\underbrace{\underline{\tilde{u}}}_{(n,1)} = \underbrace{\underline{V}^{-1}}_{(n,n)} \underbrace{\underline{B}}_{(n,p)} \underbrace{\underline{u}}_{(p,1)} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix} \underline{B}\,\underline{u}$$

aus $\dot{\underline{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{A}}\,\tilde{x} + \underline{\tilde{u}}$

erhält man $\dot{\tilde{x}}_i = \lambda_i\,\tilde{x}_i + \tilde{u}_i\,, \qquad i = 1,\ldots,n$ entkoppelte DGL 1. Ordnung

$\tilde{u}_i = -\tilde{k}_i\,\tilde{x}_i\,, \qquad i = 1,\ldots,n$ Zustandsrückführung

$\dot{\tilde{x}}_i = \left(\lambda_i - \tilde{k}_i\right)\tilde{x}_i\,, \qquad i = 1,\ldots,n$

jetzt Polvorgabe λ_{Ri}

$$\lambda_i - \tilde{k}_i = \lambda_{Ri} \quad \rightarrow\ \tilde{k}_i = \lambda_i - \lambda_{Ri}$$

daraus $\tilde{u}_i = -\left(\lambda_i - \lambda_{Ri}\right)\tilde{x}_i\,, \qquad i = 1,\ldots,n$

Gesucht ist ein Zusammenhang, der $\tilde{u}_i$ auf $u_1,\ldots,u_p$ zurückführt. Formal erhält man $\tilde{u}_i$ aus

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-Vektor}}}{\underline{\tilde{u}}} = \underbrace{\underline{\tilde{B}}}_{(n,p)} \underset{\substack{\uparrow \\ p\text{-Vektor}}}{\underline{u}}$$

Problem: p Variablen in $\underline{u}$, aber n Gleichungen. Im Allgemeinen. ist $p < n$, d.h. das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar

Ausweg: Bei der Polvorgabe werden nicht *n* Eigenwerte, sondern nur p dominante (nahe der imaginären Achse liegende) Eigenwerte verschoben, alle anderen bleiben unverändert. Die Eigenwerte werden so sortiert, dass $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ dominant sind.

$$\underline{w}_1^T\,\underline{B}\,\underline{u} = \tilde{u}_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \rightarrow\quad \underline{u} = \underline{\tilde{B}}_p^{-1}\,\underline{\tilde{u}}$$

$$\underbrace{\underline{w}_p^T\underline{B}}_{\underline{\tilde{B}}_p}\,\underline{u} = \underbrace{\tilde{u}_p}_{\tilde{u}}$$

es war $\tilde{k}_i = \lambda_i - \lambda_{Ri}\,, \qquad i = 1,\ldots,p$

$$\tilde{u}_i = -\tilde{k}_i\,\tilde{x}_i\,, \qquad i = 1,\ldots,p$$

$$\underline{\tilde{u}} = -\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_{R1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p - \lambda_{Rp} \end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{K}}_p} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_p \end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{x}}_p}$$

mit $\underline{\tilde{x}} = \underline{V}^{-1}\,\underline{x}$ mit $\underline{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{\tilde{x}}_p = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T \end{bmatrix} \underline{x}$

damit wird

$$\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x}$$
$$\underline{u} = \underline{\tilde{B}}_p^{-1}\,\underline{\tilde{u}}$$

$$\underline{u} = -\underbrace{\underline{\tilde{B}}_p^{-1}\,\underline{\tilde{K}}_p \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T \end{bmatrix}}_{\hat{=}\underline{K}} \underline{x}$$

$\underline{K}$ verschiebt p dominante Eigenwerte.
Bleiben die Eigenwerte $p+1,\ldots,n$ tatsächlich liegen?

$$\dot{\underline{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{A}}\underline{\tilde{x}} + \underline{\tilde{B}}\underline{u} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \lambda_1 & & & & \underline{0} & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ \hdashline & & & \lambda_{p+1} & & \\ & \underline{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_p \\ \hdashline \tilde{x}_{p+1} \\ \\ \tilde{x}_n \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \underline{\tilde{B}}_p \\ \hdashline \\ \underline{\tilde{B}}_{n-p} \\ \\ \end{array}\right] \underline{u}$$

daraus folgt:

$$\dot{\underline{\tilde{x}}}_p = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p \end{bmatrix} \underline{\tilde{x}}_p + \underline{\tilde{B}}_p\,\underline{u}$$

$$\dot{\underline{\tilde{x}}}_{n-p} = \begin{bmatrix} \lambda_{p+1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix} \underline{\tilde{x}}_{n-p} + \underline{\tilde{B}}_{n-p}\,\underline{u}$$

Mit $\underline{u} = -\underline{\tilde{B}}_p^{-1}\,\underline{\tilde{K}}_p\,\underline{\tilde{x}}_p$ ergibt sich

$$\dot{\underline{\tilde{x}}}_p = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p \end{bmatrix} \underline{\tilde{x}}_p + \underbrace{\underline{\tilde{B}}_p \left(-\underline{\tilde{B}}_p^{-1} \right)}_{-\underline{I}} \underline{\tilde{K}}_p \;\; \underline{\tilde{x}}_p \Bigg)$$

$$\dot{\underline{\tilde{x}}}_{n-p} = \begin{bmatrix} \lambda_{p+1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix} \underline{\tilde{x}}_{n-p} + \underline{\tilde{B}}_{n-p} \left(-\underline{\tilde{B}}_p^{-1}\,\underline{\tilde{K}}_p\,\underline{\tilde{x}}_p \right)$$

bzw.

$$\dot{\underline{\tilde{x}}}_p = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p \end{bmatrix} \underline{\tilde{x}}_p - \underline{\tilde{K}}_p\,\underline{\tilde{x}}_p$$

$$\dot{\underline{\tilde{x}}}_{n-p} = \begin{bmatrix} \lambda_{p+1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix} \underline{\tilde{x}}_{n-p} - \underbrace{\underline{\tilde{B}}_{n-p}\,\underline{\tilde{B}}_p{}^{-1}\,\underline{\tilde{K}}_p}_{\underline{\Gamma}}\,\underline{\tilde{x}}_p$$

Man erhält mit $\underline{\tilde{K}}_p$

$$\dot{\underline{\tilde{x}}}_p = \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_{R1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p - \lambda_{Rp} \end{bmatrix} \right) \underline{\tilde{x}}_p = \begin{bmatrix} \lambda_{R1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_{Rp} \end{bmatrix} \underline{\tilde{x}}_p$$

$$\dot{\underline{\tilde{x}}}_{n-p} = -\underline{\Gamma}\,\underline{\tilde{x}}_p + \begin{bmatrix} \lambda_{p+1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix} \underline{\tilde{x}}_{n-p}$$

In kompakter Darstellung:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_p \\ \hline \dot{\tilde{x}}_{p+1} \\ \\ \dot{\tilde{x}}_n \end{array}\right]}_{\dot{\underline{\tilde{x}}}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc:ccc} \lambda_{R1} & & \underline{0} & & & \\ & \ddots & & & \underline{0} & \\ \underline{0} & & \lambda_{Rp} & & & \\ \hdashline & & & \lambda_{p+1} & & \underline{0} \\ & -\underline{\Gamma} & & & \ddots & \\ & & & \underline{0} & & \lambda_n \end{array}\right]}_{\underline{\tilde{A}}_R} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_p \\ \hline \tilde{x}_{p+1} \\ \\ \tilde{x}_n \end{array}\right]}_{\underline{\tilde{x}}}$$

Allgemein gilt:

$$\det \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{0} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \det(\underline{A}_{11}) \cdot \det(\underline{A}_{22})$$

Somit lautet die charakteristische Gleichung:

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{\tilde{A}}_R) = \underbrace{(\lambda - \lambda_{R1}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_{Rp})}_{\text{verschobene EW}} \cdot \underbrace{(\lambda - \lambda_{p+1}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)}_{\text{nicht verschobene EW}}$$

Hinweise zum Verfahren:
Sollen mehr als p Eigenwerte verschoben werden (meist reichen die verschobenen aus), wird das Verfahren mehrfach angewendet.

Vorgehen:
Ausgangspunkt:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

Regelgesetz:

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = -\underline{K}_1\,\underline{x} + \underline{u}_2$$

$\underline{K}_1$: wie zuvor beschrieben

Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$
$\Downarrow$
verschieben nach $\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rp}$

Damit:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\left(-\underline{K}_1\,\underline{x} + \underline{u}_2\right)$$

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\left(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}_1\right)}_{\underline{A}_{R1}}\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}_2$$

$\underline{A}_{R1}$ hat die Eigenwerte $\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rp}, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$

Dies führt auf

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}_{R1}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

und entspricht dem alten Problem mit einer neuen Systemmatrix $\underline{A}_{R1}$
Neue Aufgabe: Reglerentwurf $\underline{u}_2 = -\underline{K}_2\,\underline{x}$ mit der Verstärkungsmatrix $\underline{K}_2$

Eigenwerte $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{2p}$
$\Downarrow$
verschieben nach $\lambda_{R,p+1}, \ldots, \lambda_{R,2p}$

Der zuvor beschriebene Lösungsweg liefert die Reglermatrix $\underline{K}_2$

Damit ergibt sich für die Strecke:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}_{R1}\,\underline{x} + \underline{B} - \underline{K}_2\,\underline{x}$$

$$\underline{\dot{x}} = \underbrace{\left(\underline{A}_{R1} - \underline{B}\,\underline{K}_2\right)}_{\underline{A}_{R2}}\underline{x}$$

$\underline{A}_{R2}$ hat die Eigenwerte $\underbrace{\lambda_{R1},\ldots,\lambda_{Rp}}_{\text{1.Verschiebung}}$, $\underbrace{\lambda_{R,p+1},\ldots,\lambda_{R,2p}}_{\text{2.Verschiebung}}$, $\underbrace{\lambda_{2p+1},\ldots,\lambda_{n}}_{\text{nicht verschoben}}$

Das Regelgesetz lautet damit:

$$\underline{u} = -\underline{K}_1\,\underline{x} - \underline{K}_2\,\underline{x} = -(\underline{K}_1 + \underline{K}_2)\,\underline{x}\ .$$

Das Verfahren kann so fortgesetzt werden.
Im Allgemeinen ist n kein ganzzahliges Vielfaches von p. Dann werden im letzten Schritt weniger als p Eigenwerte verschoben. Man verschiebt bereits zuvor verschobene Eigenwerte formal nochmals, lässt sie jedoch in Wirklichkeit liegen.

Beispiel

Es sei $n = 8$, $p = 3$

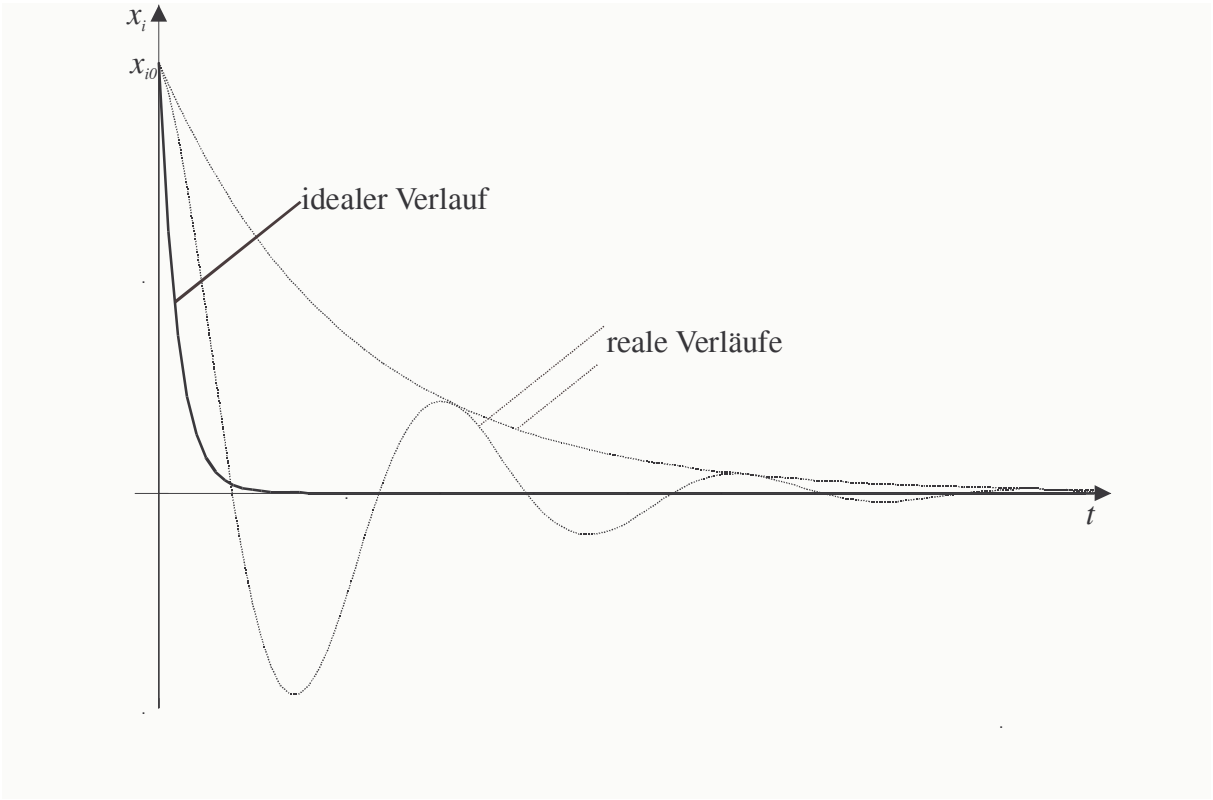
Systemmatrizen		Eigenwerte	
$\underline{A}$		$\underbrace{\lambda_1\ ,\lambda_2\ ,\lambda_3}_{\Downarrow}\ ,\lambda_4\ ,\lambda_5\ ,\lambda_6\ ,\lambda_7\ ,\lambda_8$	$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{u}_3$
$\underline{A}_{R1} = \underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}_1$	1. Verschiebung:	$\lambda_{R1},\lambda_{R2},\lambda_{R3},\underbrace{\lambda_4\ ,\lambda_5\ ,\lambda_6}_{\Downarrow}\ ,\lambda_7\ ,\lambda_8$	$\Rightarrow \underline{u}_1 = -\underline{K}_1\,\underline{x}$
$\underline{A}_{R2} = \underline{A}_{R1} - \underline{B}\,\underline{K}_2$	2. Verschiebung:	$\lambda_{R1},\lambda_{R2},\lambda_{R3},\lambda_{R4},\lambda_{R5},\underbrace{\lambda_{R6},\lambda_7\ ,\lambda_8}_{\Downarrow}$	$\Rightarrow \underline{u}_2 = -\underline{K}_2\,\underline{x}$
$\underline{A}_{R3} = \underline{A}_{R2} - \underline{B}\,\underline{K}_3$	3. Verschiebung:	$\lambda_{R1},\lambda_{R2},\lambda_{R3},\lambda_{R4},\lambda_{R5},\underbrace{\lambda_{R6}}_{\downarrow},\lambda_{R7},\lambda_{R8}$	$\Rightarrow \underline{u}_3 = -\underline{K}_3\,\underline{x}$

wird nur formal verschoben

$$\underline{u} = -(\underline{K}_1 + \underline{K}_2 + \underline{K}_3)\,\underline{x}$$

5.4 Reglerentwurf durch Minimierung eines quadratischen Gütemaßes (RICCATI-Regler)

Ausregeln einer Anfangsauslenkung $\underline{x}_0(t_0)$ auf $\underline{x}(t_e) = 0$.



Maßzahl für die Güte des Verlaufs von $x_i(t)$:

$$J = \int_0^\infty x_i^2(t)\,dt$$

Für den gesamten Zustandsvektor gilt:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\underbrace{q_{11}}_{>0}\, x_1^2(t) + q_{22}\, x_2^2(t) + \ldots + q_{nn}\, x_n^2(t))\,dt$$

q_{ii} werden gewählt nach: 1) Normierung
2) Bedeutung

Allgemeine Darstellung:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \underline{x}^T(t)\cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}}}_{\substack{\text{oft Diagonalmatrix}\\ \text{(nicht Voraussetzung)}}} \cdot \underline{x}(t)\,dt$$

Allgemeine Voraussetzungen für $\underline{Q}$:

- $\underline{Q}$ muss symmetrisch sein
- $\underline{Q}$ muss positiv definit sein

$$\underline{x}^T \underline{Q}\, \underline{x} \geq 0 \qquad \text{für } \underline{x} \neq 0$$

$$\underline{x}^T \underline{Q}\, \underline{x} = 0 \qquad \text{für } \underline{x} = 0$$

$\underline{Q}$ ist positiv definit, wenn alle Eigenwerte von $\underline{Q}$ positiv sind.

Außerdem ist der Verlauf von $\underline{u}(t)$ entscheidend.
Die Maßzahl für die Güte des Verlaufs von $\underline{u}(t)$ ist:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \underline{u}^T(t) \cdot \underline{R} \cdot \underline{u}(t)\, dt$$

Kombination der beiden Maßzahlen durch Addition der Integranden:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T(t) \cdot \underline{Q} \cdot \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) \cdot \underline{R} \cdot \underline{u}(t))\, dt \quad \underset{\underline{K}}{\rightarrow} \quad \text{Minimum}$$

5.4.1 Die Ljapunov-Gleichung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\, \underline{x}(t), \qquad \underline{x}_0(t_0) = \underline{x}_0$$

Lösung der homogenen Gleichung

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)}\, \underline{x}_0, \quad t_0 = 0$$

aus $$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \underline{x}^T \underline{Q}\, \underline{x}\, dt = \frac{1}{2} \underline{x}_0^T \underbrace{\int_0^\infty e^{\underline{A}^T t}\, \underline{Q}\, e^{\underline{A} t}\, dt}_{\underline{P}}\, \underline{x}_0$$

erhält man $$J = \frac{1}{2} \underline{x}_0^T \underline{P}\, \underline{x}_0$$

Hinweis: $\left(e^{\underline{A} t}\right)^T = e^{\underline{A}^T t}$

Wie wird $\underline{P}$ berechnet?

partielle Integration: 1. Operand $e^{\underline{A}^T t} = u$

2. Operand $\underline{Q}\, e^{\underline{A} t} = v'$

$$\int uv'\, dt = uv - \int u'v\, dt$$

hier: $$u' = \underline{A}^T e^{\underline{A}^T t}$$

$$v = \underline{Q}\, \underline{A}^{-1} e^{\underline{A} t}$$

$$\underline{P} = \left[e^{\underline{A}^T t}\, \underline{Q}\, \underline{A}^{-1}\, e^{\underline{A} t} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \underline{A}^T\, e^{\underline{A}^T t}\, \underline{Q}\, \underline{A}^{-1}\, e^{\underline{A} t}\, dt$$

Voraussetzung: $\underline{A}$ muss asymptotisch stabil sein, d.h. für $t \to \infty$ geht $e^{\underline{A} t} \to 0$

$\underline{A}^{-1}$ und $e^{\underline{A} t}$ sind somit vertauschbar.

$$\underline{P} = \underline{0} - \underline{Q}\underline{A}^{-1} - \underline{A}^T \underbrace{\int_0^{\infty} e^{\underline{A}^T t}\, \underline{Q}\, e^{\underline{A} t}\, dt}_{\underline{P}}\, \underline{A}^{-1} = -\underline{Q}\underline{A}^{-1} - \underline{A}^T\, \underline{P}\underline{A}^{-1} \quad \Big| \cdot \underline{A}$$

$$\boxed{\underline{P}\,\underline{A} + \underline{A}^T\, \underline{P} = -\underline{Q}} \qquad \textbf{Ljapunov-Gleichung}$$

Die Matrizen $\underline{A}, \underline{Q}$ sind gegeben. Falls $\underline{A}$ asymptotisch stabil ist sowie $\underline{Q}$ symmetrisch und positiv definit, dann existiert eine eindeutige, symmetrische positiv definite Lösung für $\underline{P}$:

$$\underline{P} = \int_0^{\infty} e^{\underline{A}^T t}\, \underline{Q}\, e^{\underline{A} t}\, dt$$

5.4.2 Berechnung des Riccati-Reglers

geregeltes System: $\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\,\underline{x}$ bzw. $\dot{\underline{x}} = \underline{A}_R\, \underline{x}$

$\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x}$ $\underline{u}^T = -\underline{x}^T\, \underline{K}^T$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T\, \underline{Q}\, \underline{x} + \underline{x}^T\, \underline{K}^T\, \underline{R}\, \underline{K}\, \underline{x})\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \underline{x}^T\, \underbrace{(\underline{Q} + \underline{K}^T\, \underline{R}\, \underline{K})}_{\underline{Q}_R \text{ symmetrisch, positiv definit}}\, \underline{x}\, dt$$

Lösung der homogenen Gleichung für das geregelte System:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}_R t}\, \underline{x}_0$$

damit ist

$$J = \frac{1}{2}\, \underline{x}_0^T\, \underline{P}\, \underline{x}_0 \;, \qquad \underline{P} = \int_0^{\infty} e^{\underline{A}_R^T t}\, \underline{Q}_R\, e^{\underline{A}_R t}\, dt$$

Voraussetzung:

Ist $\underline{A}_R$ asymptotisch stabil, dann genügt $\underline{P}$ der Ljapunov-Gleichung

$$\underline{A}_R^T \underline{P} + \underline{P}\,\underline{A}_R = -\underline{Q}_R \;.$$

J soll ein Minimum bezüglich der Reglermatrix $\underline{K}$ annehmen, d.h.:

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = 0, \quad i = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, n$$

oder: $$\left[\frac{\partial J}{\partial \underline{K}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = \frac{1}{2}\underline{x}_0^T \frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}} \underline{x}_0$$

Differenzieren der Ljapunov-Gleichung nach k_{ij} liefert:

$$\frac{\partial \underline{A}_R^T}{\partial k_{ij}}\underline{P} + \underline{A}_R^T \frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}}\underline{A}_R + \underline{P}\frac{\partial \underline{A}_R}{\partial k_{ij}} = -\frac{\partial \underline{Q}_R}{\partial k_{ij}}$$

Einführung einer Hilfsvariablen:

$$\underline{M}_R = \frac{\partial \underline{Q}_R}{\partial k_{ij}} + \frac{\partial \underline{A}_R^T}{\partial k_{ij}}\underline{P} + \underline{P}\frac{\partial \underline{A}_R}{\partial k_{ij}}$$

daraus:

$$\underline{A}_R^T \frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}}\underline{A}_R = -\underline{M}_R$$

Ist $\underline{M}_R$ symmetrisch und positiv definit? Nähere Betrachtung:

$$\frac{\partial \underline{Q}_R}{\partial k_{ij}} = \frac{\partial \underline{K}^T}{\partial k_{ij}}\underline{R}\,\underline{K} + \underline{K}^T\,\underline{R}\frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}}$$

$$\frac{\partial \underline{A}_R}{\partial k_{ij}} = -\underline{B}\frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}}, \qquad \frac{\partial \underline{A}_R^T}{\partial k_{ij}} = -\frac{\partial \underline{K}^T}{\partial k_{ij}}\underline{B}^T$$

oben einsetzen:

$$\underline{M}_R = \frac{\partial \underline{K}^T}{\partial k_{ij}}\underline{R}\,\underline{K} + \underline{K}^T\,\underline{R}\frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}} - \frac{\partial \underline{K}^T}{\partial k_{ij}}\underline{B}^T\,\underline{P} - \underline{P}\,\underline{B}\frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}}$$

$$= \frac{\partial \underline{K}^T}{\partial k_{ij}}(\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T\,\underline{P}) + \underbrace{(\underline{K}^T\,\underline{R} - \underline{P}\,\underline{B})}_{\substack{=(\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T\,\underline{P})^T, \text{ da} \\ \underline{R},\ \underline{P} \text{ symmetrisch} \\ \text{und positiv definit}}}\frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}}$$

damit ist $\underline{M}_R$ symmetrisch.

$\rightarrow$ die Gleichung $\underline{A}_R^T \frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}}\underline{A}_R = -\underline{M}_R$ hat Ljapunov-Gestalt.

Damit hat $\frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}}$ die Lösung

$$\frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}} = \int_0^\infty e^{\underline{A}_R^T t}\,\underline{M}_R\,e^{\underline{A}_R t}\,dt\,.$$

zurück zu $\dfrac{\partial J}{\partial k_{ij}} = \frac{1}{2}\,\underline{x}_0^T\,\dfrac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}}\,\underline{x}_0$

Es gilt

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\underline{x}_0^T e^{\underline{A}_R^T t} \left\{ \frac{\partial \underline{K}^T}{\partial k_{ij}} (\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T\,\underline{P}) + (\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T\,\underline{P})^T \frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}} \right\} e^{\underline{A}_R t}\,\underline{x}_0 \right] dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Bigg[\underbrace{\underline{x}_0^T e^{\underline{A}_R^T t} \frac{\partial \underline{K}^T}{\partial k_{ij}} (\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T\,\underline{P}) e^{\underline{A}_R t}\,\underline{x}_0}_{\text{skalare Größe}} + \underbrace{\underline{x}_0^T e^{\underline{A}_R^T t} (\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T\,\underline{P})^T \frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}} e^{\underline{A}_R t}\,\underline{x}_0}_{\text{skalare Größe}} \Bigg] dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = \int_0^\infty (\underline{x}_0^T e^{\underline{A}_R^T t} (\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T\,\underline{P})^T \frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}} e^{\underline{A}_R t}\,\underline{x}_0)\, dt$$

$$\frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial k_{ij}} = 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \frac{\partial k_{ij}}{\partial k_{ij}} = 1 & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \text{i-te Stelle} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{e}_i} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{\underline{e}_j^T} = \underline{e}_i\,\underline{e}_j^T$$

(j-te Stelle: ↑)

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = \int_0^\infty \underbrace{\underbrace{\underline{x}_0^T}_{(1,n)} \underbrace{e^{\underline{A}_R^T t}}_{(n,n)} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{R} & \underline{K} & - \underline{B}^T & \underline{P} \\ (p,p) & (p,n) & & (p,n)(n,n) \end{pmatrix}}_{(p,n)^T = (n,p)}}_{(1,p)} \underbrace{\underline{e}_i}_{(p,1)} \underbrace{\underline{e}_j^T}_{(1,n)} \underbrace{e^{\underline{A}_R t}}_{(n,n)} \underbrace{\underline{x}_0}_{(n,1)}\, dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = \underline{e}_i^T (\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T\,\underline{P}) \underbrace{\int_0^\infty e^{\underline{A}_R t}\,\underline{x}_0\,\underline{x}_0^T e^{\underline{A}_R^T t}\, dt}_{\text{Ljapunov-Gestalt } \underline{A}^T\underline{P} + \underline{P}\,\underline{A} = -\underline{Q}} \cdot \underline{e}_j$$

mit $\underline{Q} \triangleq \underline{x}_0\,\underline{x}_0^T$, $\underline{A} \triangleq \underline{A}_R$

$\underline{P}$ entspricht der neuen Matrix $\underline{W}$

$$\underline{A}_R\,\underline{W} + \underline{W}\,\underline{A}_R^T = -\underline{x}_0\,\underline{x}_0^T$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = \underline{e}_i^T \, (\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T \, \underline{P}) \underline{W} \, \underline{e}_j$$

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{K}} = \left[\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} \right] = (\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T \, \underline{P}) \quad \underline{W} \quad \overset{!}{=} \underline{0}$$

$\underline{W}$ abh. von $\underline{x}_0$ bel.

Es muss also gelten:

$$\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T \, \underline{P} = 0$$

$$\boxed{\underline{K} = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \, \underline{P}}$$

Problem: $\underline{P}$ ist nicht bekannt.

Erinnerung:

$$\underline{A}_R^T \underline{P} + \underline{P}\,\underline{A}_R = -\underline{Q}_R$$

$$\underline{A}_R = \underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}$$

$$\underline{Q}_R = \underline{Q} + \underline{K}^T \, \underline{R}\,\underline{K}$$

$$(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})^T \, \underline{P} + \underline{P}\,(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}) = -\underline{Q} - \underline{K}^T \, \underline{R}\,\underline{K}$$

$$\underline{A}^T \, \underline{P} - \underline{K}^T \, \underline{B}^T \, \underline{P} + \underline{P}\underline{A} - \underline{P}\,\underline{B}\,\underline{K} = -\underline{Q} - \underline{K}^T \, \underline{R}\,\underline{K} \qquad \text{mit } \underline{K} = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \, \underline{P}:$$

$$\underline{A}^T \, \underline{P} - (\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \, \underline{P})^T \, \underline{B}^T \, \underline{P} + \underline{P}\,\underline{A} - \underline{P}\,\underline{B}\,(\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \, \underline{P}) = -\underline{Q} - (\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \, \underline{P})^T \underbrace{\underline{R}\,\underline{R}^{-1}}_{\underline{I}} \underline{B}^T \, \underline{P}$$

$$\boxed{\underline{P}\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1} \, \underline{B}^T \, \underline{P} - \underline{A}^T \, \underline{P} - \underline{P}\,\underline{A} - \underline{Q} = \underline{0}}$$ **algebraische Riccati-Gleichung**

Eigenschaften der algebraischen Riccati-Gleichung:

- Es handelt sich um ein System von $n \cdot n$ nichtlinearen algebraischen Gleichungen zur Bestimmung der Elemente p_{ij} der Matrix $\underline{P}$.
- Sie besitzt eine eindeutige Lösung $\underline{P} > \underline{0}$.
- Das optimale Reglergesetz lautet dann $\underline{u} = -\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \, \underline{P} \, \underline{x}$.
- Wegen der Symmetrie $\underline{P} = \underline{P}^T$, also $p_{ij} = p_{ji}$, reduziert sich die Anzahl der Unbekannten auf $n \cdot \frac{1}{2}(n+1)$.

5.4.3 Iterativ numerische Lösung der Riccati-Gleichung

Problemstellung: Gesucht ist die Nullstelle der Gleichung

$$\underline{F}(\underline{P}) = \underline{P}\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P} - \underline{A}^T\,\underline{P} - \underline{P}\,\underline{A} - \underline{Q} \overset{!}{=} \underline{0}$$

Wähle als Startlösung $\underline{P}_0$

Voraussetzung für $\underline{P}_0$: $(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_0)$ ist asymptotisch stabil
(alle Eigenwerte müssen einen negativen Realteil haben)

Die verbesserte Lösung von $\underline{F}(\underline{P})$ sei:

$$\underline{P}_{k+1} = \underline{P}_k + \Delta\underline{P}_k \quad \rightarrow \Delta\underline{P}_k = \underline{P}_{k+1} - \underline{P}_k$$

in $\underline{F}(\underline{P})$:

$$\underline{F}\left(\underline{P}_k + \Delta\underline{P}_k\right) =$$

$$-\underline{A}^T\left[\underline{P}_k + \Delta\underline{P}_k\right] - \left[\underline{P}_k + \Delta\underline{P}_k\right]\underline{A} - \underline{Q} +$$

$$+ \underbrace{\left[\underline{P}_k + \Delta\underline{P}_k\right]\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\left[\underline{P}_k + \Delta\underline{P}_k\right]}_{\text{hier quadratische Terme in } \Delta\underline{P}_k \text{ vernachlässigen}}$$

$$\underline{F}(\underline{P}_k + (\underline{P}_{k+1} - \underline{P}_k)) \approx$$

$$-\underline{A}^T\,\underline{P}_{k+1} - \underline{P}_{k+1}\,\underline{A} - \underline{Q}$$

$$+\underline{P}_k\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_k + (\underline{P}_{k+1} - \underline{P}_k)\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_k$$

$$+\underline{P}_k\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T(\underline{P}_{k+1} - \underline{P}_k) \overset{!}{=} 0$$

Gleichung ist linear bezüglich $\underline{P}_{k+1}$.

$$-\underline{A}^T\,\underline{P}_{k+1} - \underline{P}_{k+1}\,\underline{A} - \underline{Q}$$

$$+\underline{P}_k\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_k + \underline{P}_{k+1}\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_k - \underline{P}_k\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_k$$

$$+\underline{P}_k\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_{k+1} - \underline{P}_k\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_k \overset{!}{=} 0$$

Eigenschaft bezüglich $\underline{P}_{k+1}$: die Folge

$$-\underline{Q} - \underline{P}_k\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_k = (\underline{A}^T - \underline{P}_k\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_k)^T\,\underline{P}_{k+1} + \underline{P}_{k+1}(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}^T\,\underline{P}_k)$$

konvergiert quadratisch gegen die Lösung. Die Lösung ist symmetrisch.

Beispiel: Doppelintegrator

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \underline{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \underline{\underline{Q}}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix},\quad r=1$$

$$\underline{b}\,r^{-1}\underline{b}^T=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}1\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\underline{P}_0=\begin{bmatrix}p_{1(0)} & p_{2(0)}\\ p_{2(0)} & p_{3(0)}\end{bmatrix}$$ Symmetrie beachten

$$\underline{A}-\underline{b}\,r^{-1}\underline{b}^T\,\underline{P}_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -p_{2(0)} & -p_{3(0)}\end{bmatrix}$$ hat SNF 2. Art und ist asympt. stabil

$\mathrm{Re}\{\lambda_i\}<0$ wenn $p_{2(0)}>0$, $p_{3(0)}>0$

$$\underline{P}_{k+1}\left(\underline{A}-\underline{b}\,r^{-1}\underline{b}^T\,\underline{P}_k\right)=\begin{bmatrix}p_{1(k+1)} & p_{2(k+1)}\\ p_{2(k+1)} & p_{3(k+1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -p_{2(k)} & -p_{3(k)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-p_{2(k+1)}p_{2(k)} & p_{1(k+1)}-p_{2(k+1)}p_{3(k)}\\ -p_{3(k+1)}p_{2(k)} & p_{2(k+1)}-p_{3(k)}p_{3(k+1)}\end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{A}-\underline{b}\,r^{-1}\underline{b}^T\,\underline{P}_k\right)^T\underline{P}_{k+1}+\underline{P}_{k+1}\left(\underline{A}-\underline{b}\,r^{-1}\underline{b}^T\,\underline{P}_k\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-2p_{2(k+1)}p_{2(k)} & p_{1(k+1)}-p_{2(k+1)}p_{3(k)}-p_{3(k+1)}p_{2(k)}\\ p_{1(k+1)}-p_{2(k+1)}p_{3(k)}-p_{3(k+1)}p_{2(k)} & 2(p_{2(k+1)}-p_{3(k+1)}p_{3(k)})\end{bmatrix}$$

$$\underline{P}_k\,\underline{b}\,r^{-1}\underline{b}^T\,\underline{P}_k=\begin{bmatrix}{p_{2(k)}}^2 & p_{2(k)}p_{3(k)}\\ p_{2(k)}p_{3(k)} & {p_{3(k)}}^2\end{bmatrix}$$ ist symmetrisch

$$-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}{p_{2(k)}}^2 & p_{2(k)}p_{3(k)}\\ p_{2(k)}p_{3(k)} & {p_{3(k)}}^2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-2p_{2(k+1)}p_{2(k)} & p_{1(k+1)}-p_{2(k+1)}p_{3(k)}-p_{3(k+1)}p_{2(k)}\\ p_{1(k+1)}-p_{2(k+1)}p_{3(k)}-p_{3(k+1)}p_{2(k)} & 2(p_{2(k+1)}-p_{3(k+1)}p_{3(k)})\end{bmatrix}$$

Komponentenweise vergleichen, aufgrund der Symmetrie erhält man 3 Gleichungen für 3 Unbekannte:

$$p_{2(k+1)} = \frac{1}{2p_{2(k)}}\left(2 + {p_{2(k)}}^2\right)$$

$$p_{3(k+1)} = \frac{1}{2p_{3(k)}}\left(2p_{2(k+1)} + 3 + {p_{3(k)}}^2\right)$$

$$p_{1(k+1)} = p_{3(k)}p_{2(k+1)} + p_{2(k)}p_{3(k+1)} - p_{2(k)}p_{3(k)}$$

5.4.4 Direkte Methode zur Lösung der Riccati-Gleichung

Einführung einer Hilfsmatrix:

$$\underline{A}' = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B}\,\underline{R}^{-1}\underline{B}^T \\ \underline{Q} & -\underline{A}^T \end{bmatrix}}_{(2n,2n)}$$

Über die Eigenvektoren von $\underline{A}'$ kann $\underline{P}$ bestimmt werden, wenn für die Eigenwerte λ_i der Matrix $\underline{A}'$ die Bedingung $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$ erfüllt ist.

Falls das System $(\underline{A}, \underline{B})$ vollständig steuerbar ist und das System $(\underline{A}, \underline{Q}_0)$ mit $\underline{Q} = \underline{Q}_0^T\,\underline{Q}_0$ vollständig beobachtbar ist, hat $\underline{A}'$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse.

Algorithmus zur Bestimmung von $\underline{P}$:

1. $\underline{A}'$ bilden
2. Berechnen der Eigenwerte λ_i, $i = 1, \ldots, n$ der Matrix $\underline{A}'$
3. Berechnen der Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_i für die gilt $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$
4. Aufstellen der Eigenvektor-Matrix
$$\underline{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \ldots & \underline{v}_n \end{bmatrix}}_{(2n,n)}, \quad \dim \underline{v}_i = (2n,1)$$
5. Aufspalten von
$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{12} \\ \underline{V}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (n,n) \\ \leftarrow (n,n) \end{matrix}$$

Dann ist $\boxed{\underline{P} = -\underline{V}_{22}\,\underline{V}_{12}^{-1}}$ die Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

Beispiel:
Gegeben sind die Matrizen $\underline{A}, \underline{b}, \underline{Q}$ und r des Beispiels „Doppelintegrator“ auf Seite 66.
Man erhält:

$$\underline{A}' = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenwerte bestimmen:

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}') = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -3 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 2$$

$$\lambda^2 = \kappa, \qquad \kappa_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \qquad \boxed{\lambda_2 = -\sqrt{2}}$$
$$\lambda_3 = 1 \qquad \boxed{\lambda_4 = -1}$$

zu λ_2, λ_4 werden die Eigenvektoren berechnet:
Eigenvektor zu $\lambda_2 = -\sqrt{2}$:

$$\left(\lambda_2 \underline{I} - \underline{A}'\right) \underline{v}_1 = \underline{0}$$

$$-\sqrt{2}\, v_{11} = v_{12}$$
$$-\sqrt{2}\, v_{12} = v_{14}$$
$$-\sqrt{2}\, v_{13} = 2 v_{11}$$
$$-\sqrt{2}\, v_{14} = 3 v_{12} - v_{13}$$

$$\text{wähle } v_{11} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_4 = -1$:

$$\text{wähle } v_{21} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 \\ \hline -\sqrt{2} & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \underline{V}_{12} \\ \underline{V}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \underline{V}_{12}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P} = \underline{V}_{22}\underline{V}_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Regler: $\underline{k}^T = r^{-1}\underline{b}^T\underline{P} = 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\underline{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$

5.4.5 Vergleich zwischen Polvorgabe und Riccati-Entwurf

Polvorgabe:
- Die Dynamik wird über die Lage der Eigenwerte gezielt beeinflusst. Stellgrößenbeschränkungen sind dabei problematisch.
- bei SISO: analytischer Entwurf
- bei MIMO: modale Regelung oder numerischer Entwurf

Riccati-Entwurf:
- Wahl von $\underline{Q}$, $\underline{R}$: Normierung beachten, nach Bedeutung wählen. Stellgrößenbeschränkungen können so besser berücksichtigt werden.
- bei Riccati-Regler: numerischer Entwurf

5.5 Reglerentwurf für MIMO-Systeme durch Entkopplung nach Falb-Wolovich

5.5.1 Motivation

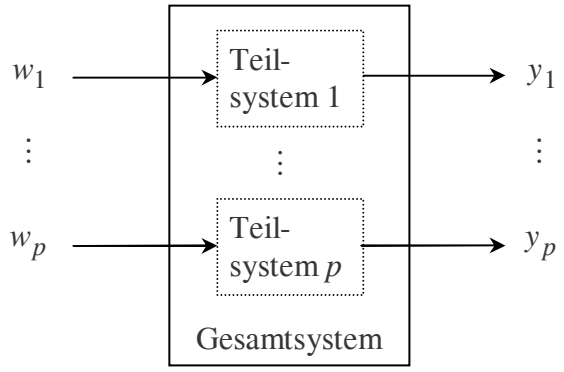
$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \ldots + b_{1p}u_p \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \ldots + b_{np}u_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n \\ &\vdots \\ y_q &= c_{q1}x_1 + \ldots + c_{qn}x_n \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall beeinflusst jede Komponente von $\underline{u}$ jede Komponente von $\underline{y}$. Das System ist verkoppelt.

Ziel: Im Fall $p = q$ sollen $\underline{S}$ und $\underline{K}$ so gewählt werden, dass jeweils eine Eingangskomponenten nur auf eine Ausgangskomponente Einfluss nimmt:



$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

$$y_i = \underline{c}_i^T\,\underline{x}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \end{bmatrix}$$

5.5.2 Differenzordnung

Betrachtung der *i*-ten Ausgangsgröße y_i, $i = 1, \ldots, p$:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

$$\underset{(1,1)}{y_i} = \underset{(1,n)}{\underline{c}_i^T}\ \underline{x}$$

Definition der Differenzordnung:

Eingrößensystem mit $Y(s) = G(s)U(s) = \dfrac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n}$, $m < n$

Im Zeitbereich liegt folgende Differentialgleichung vor:

$$\underbrace{y\,a_0 + \dot{y}\,a_1 + \ldots + y^{(n)}}_{\text{Ordnung } n} = \underbrace{b_0 + b_1\,\dot{u} + \ldots + b_m\,u^{(m)}}_{\text{Ordnung } m}$$

Die Differenzordnung ist $\delta = n - m$

Wie erhält man die Differenzordnung aus der Zustandsraumdarstellung?

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{C}\,(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}}_{\underline{G}(s)}\,U(s)$$

Einschub (siehe Abschnitt 2.4.2):

$$(s\,\underline{I} - \underline{A})\,\underline{X}(s) = \underline{x}(0) + \underline{B}\,\underline{U}(s)$$

setze $\underline{U}(s) = 0$:

$$\underline{X}(s) = \left(s\,\underline{I} - \underline{A}\right)^{-1} \underline{x}(0)$$



$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}\,t}\,\underline{x}(0)$$

$$\mathscr{L}\left\{e^{\underline{A}\,t}\right\} = (s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}$$

somit

$$(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \mathscr{L}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!}\underline{A}^{\nu}\right\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathscr{L}\left\{\frac{t^{\nu}}{\nu!}\right\}\underline{A}^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^{\nu}}{s^{\nu+1}}$$

mit $\mathscr{L}\left\{\dfrac{t^{\nu}}{\nu!}\right\} = \dfrac{1}{s^{\nu+1}}$

---

also: $$G(s) = \underline{C}(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\underline{C}\,\underline{A}^{\nu}\,\underline{B}}{s^{\nu+1}}$$

mit: $$\underline{C}(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B} = \frac{b_0 + b_1\,s + \ldots + b_m\,s^m}{a_0 + a_1\,s + \ldots + a_n\,s^n}$$

Die Differenzordnung kann über Grenzwertbildung bestimmt werden:

$$\lim_{s\to\infty} s^k\,G(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < \delta \\ \dfrac{b_m}{a_n} & \text{für } k = \delta \\ \infty & \text{für } k > \delta \end{cases}$$

also: $$\lim_{s\to\infty} s^{\delta}\,G(s) = \frac{b_m}{a_n}$$

$$\lim_{s\to\infty} s^{\delta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\underline{C}\,\underline{A}^{\nu}\,\underline{B}}{s^{\nu+1}} = \lim_{s\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\underline{C}\,\underline{A}^{\nu}\,\underline{B}}{s^{\nu+1-\delta}}$$

alle Glieder mit $(\nu + 1 - \delta) > 0$, also $\nu > \delta - 1$ streben gegen 0

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \underline{C}\,\underline{A}^{\nu}\,\underline{B}\,s^{\delta-\nu-1} \overset{!}{=} \frac{b_m}{a_n}$$

$$\lim_{s\to\infty} [\underline{C}\,\underline{B}\,s^{\delta-1} + \underline{C}\,\underline{A}\,\underline{B}\,s^{\delta-2} + \ldots + \underline{C}\,\underline{A}^{\delta-2}\,\underline{B}\,s + \underline{C}\,\underline{A}^{\delta-1}\,\underline{B}] \overset{!}{=} \frac{b_m}{a_n}$$

Der Grenzwert muss endlich und $\neq 0$ sein.

Damit lautet die Bedingung zur Bestimmung der Differenzordnung:

$$\begin{aligned} \underline{C}\,\underline{B} &= \underline{0} \\ \underline{C}\,\underline{A}\,\underline{B} &= \underline{0} \\ &\vdots \\ \underline{C}\,\underline{A}^{\delta-2}\,\underline{B} &= \underline{0} \\ \underline{C}\,\underline{A}^{\delta-1}\,\underline{B} &\neq \underline{0} \end{aligned}$$

Die Differenzordnung δ_i, $i = 1,\ldots,p$, zur Ausgangsgröße y_i mit der Ausgangsgleichung $y_i = \underline{c}_i^T\,\underline{x}$ ist $\delta_i = k$, wenn k die kleinste positive ganze Zahl $\leq n$ ist, für die gilt:

$$\underline{c}_i^T\,\underline{A}^{k-1}\,\underline{B} \neq \underline{0}$$

Die Differenzordnung des Gesamtsystems ist:

$$\delta = \sum_{i=1}^{p} \delta_i \leq n$$

5.5.3 Zustandsraumdarstellung mit Hilfe der Differenzordnungen

Ziel: Darstellung bei der alle Eingänge $\underline{u}$ direkt auf jeden Ausgang y_i einwirken.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

$$y_i = \underline{c}_i^T\,\underline{x}, \qquad \delta_i > 0$$

Differenzieren der Ausgangsgleichung:

$$\dot{y}_i = \underline{c}_i^T\,\dot{\underline{x}}$$

$$\dot{y}_i = \underline{c}_i^T\,\underline{A}\,\underline{x} + \underbrace{\underline{c}_i^T\,\underline{B}}_{=0 \text{ für } \delta_i > 1}\,\underline{u}$$

d.h. $\dot{y}_i = \underline{c}_i^T\,\underline{A}\,\underline{x}$ für $\delta_i > 1$

Nochmals differenzieren:

$$\ddot{y}_i = \underline{c}_i^T \underline{A}\,\underline{A}\,\underline{x} + \underbrace{\underline{c}_i^T \underline{A}\,\underline{B}}_{=0 \text{ für } \delta_i > 2}\ \underline{u} \quad \rightarrow \ddot{y}_i = \underline{c}_i^T \underline{A}^2\,\underline{x}$$

$$\vdots \qquad \delta_i \text{-mal differenzieren}$$

$$y_i^{(\delta_i)} = \underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i}\,\underline{x} + \underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i - 1}\,\underline{B}\,\underline{u}$$

Neue Systemdarstellung:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1^{(\delta_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(\delta_p)} \end{bmatrix}}_{\underline{y}^*_{(p,1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \underline{A}^{\delta_1} \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{A}^{\delta_p} \end{bmatrix}}_{\underline{C}^*_{(p,n)}} \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \underline{A}^{\delta_1 - 1}\,\underline{B} \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{A}^{\delta_{p-1}}\,\underline{B} \end{bmatrix}}_{\underline{D}^*_{(p,p)}} \underline{u}$$

$$\underline{y}^* = \underline{C}^*\,\underline{x} + \underline{D}^*\,\underline{u}$$

$$\downarrow$$

δ_i-te Ableitung der ursprünglichen Ausgänge y_i

5.5.4 Entkopplung

Ziel: Die Führungsgröße w_i soll nur den Ausgang y_i beeinflussen.

$$\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x} + \underline{S}\,\underline{w}$$

Wie sind $\underline{K}, \underline{S}$ zu wählen, damit dieses Ziel erreicht wird?

$$\underline{y}^* = \underline{C}^*\,\underline{x} + \underline{D}^*(-\underline{K}\,\underline{x} + \underline{S}\,\underline{w}) = (\underline{C}^* - \underline{D}^*\,\underline{K})\,\underline{x} + \underline{D}^*\,\underline{S}\,\underline{w}$$

$$\begin{bmatrix} y_1^{(\delta_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(\delta_p)} \end{bmatrix} = (\underline{C}^* - \underline{D}^*\,\underline{K})\,\underline{x} + \underbrace{\underline{D}^*\,\underline{S}}_{\text{Diagonalform}} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}^*\,\underline{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \sigma_p \end{bmatrix}$$

$$\underline{S} = \underline{D}^{*-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \sigma_p \end{bmatrix}$$

σ_j ist so zu wählen, dass die Stationaritätsbedingung erfüllt ist.

Voraussetzung: $\det \underline{D}^* \neq 0$ (Entkoppelbarkeitsbedingung)

Berechnung von $\underline{K}$:

$$\underline{y}^* = (\underline{C}^* - \underline{D}^* \underline{K})\underline{x} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \sigma_p \end{bmatrix} \underline{w}$$

zeilenweise:

$$y_i^{(\delta_i)} = \underbrace{[\underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i} - \underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i - 1} \underline{B}\,\underline{K}]\,\underline{x}}_{\text{soll nur von } y_i \text{ und dessen Ableitungen abhängen}} + \sigma_i w_i$$

Forderung: entkoppeltes Systemverhalten

$$y_i^{(\delta_i)} + \alpha_{i\nu}\, y_i^{(\delta_i - 1)} + \ldots + \alpha_{i1}\, \dot{y}_i + \alpha_{i0}\, y_i = \sigma_i w_i\,, \qquad i = 1,\ldots,p\,,\ \nu = 1,\ldots,\delta_i - 1$$

$$y_i^{(\delta_i)} = -\sum_{\nu=0}^{\delta_i - 1} \alpha_{i\nu}\, y_i^{(\nu)} + \sigma_i w_i$$

$y_i^{(\nu)}$ ersetzen durch

$$\begin{aligned} \underline{y}_i &= \underline{c}_i^T \underline{x} \\ \underline{\dot{y}}_i &= \underline{c}_i^T \underline{A}\,\underline{x} \\ &\vdots \\ \underline{y}_i^{(\delta_i - 1)} &= \underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i - 1} \underline{x} \end{aligned}$$

$$[\underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i} - \underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i - 1} \underline{B}\,\underline{K}]\,\underline{x} = -\sum_{\nu=0}^{\delta_i - 1} \alpha_{i\nu}\, \underline{c}_i^T \underline{A}^{\nu}\, \underline{x}$$

$$\underbrace{\underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i - 1} \underline{B}\,\underline{K}}_{\text{Zeilen von } \underline{D}^*} = \underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i} + \sum_{\nu=0}^{\delta_i - 1} \alpha_{i\nu}\, \underline{c}_i^T \underline{A}^{\nu}\,, \qquad i = 1,\ldots,p$$

$$\underline{K} = \underline{D}^{*-1} \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \underline{A}^{\delta_1} + \sum_{\nu=0}^{\delta_1 - 1} \alpha_{1\nu}\, \underline{c}_1^T \underline{A}^{\nu} \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{A}^{\delta_p} + \sum_{\nu=0}^{\delta_p - 1} \alpha_{p\nu}\, \underline{c}_p^T \underline{A}^{\nu} \end{bmatrix}$$

Voraussetzung: $\det \underline{D}^* \neq 0$ (Entkoppelbarkeitsbedingung)

$\alpha_{i\nu}$ über Frequenzbereichskriterium wählen

Polvorgabe (Bsp.: $\delta_1 = 2$): $\dfrac{\sigma_1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \dfrac{\sigma_1}{s^2 + \alpha_{11}\, s + \alpha_{10}}$

$$\underline{Y}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & G_{pp}(s) \end{bmatrix} \underline{W}(s)$$

wobei $G_{ii}(s) = \dfrac{\mu_i}{s^{\delta_i} + a^*_{i,\delta_i - 1}\, s^{\delta_i - 1} + \ldots + a^*_{i1}\, s + a^*_{i0}}$

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + u \end{aligned}\right\} \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} = x_1 - x_2$$

Differenzordnung:

$$\dot{y} = \underline{c}^T \dot{\underline{x}} = \underline{c}^T \underline{A}\, \underline{x} + \underline{c}^T \underline{b}\, u = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=0} u = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\ddot{y} = \underline{c}^T \underline{A}\, \dot{\underline{x}} = \underline{c}^T \underline{A}^2\, \underline{x} + \underline{c}^T \underline{A} \underline{b}\, u = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\neq 0} u = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} - 3u$$

Damit ist die Differenzordnung $\delta = \delta_1 = 2 = n$ (maximale Differenzordnung)
Entkopplung:

$$Y(s) = \frac{\sigma_1}{s^2 + \alpha_{11}\, s + \alpha_{10}} \cdot W(s)$$

Notwendig für stationäre Genauigkeit: $\sigma_1 = \alpha_{10}$
Parameter α_{10}, α_{11} aus Polvorgabe
Polvorgabe: $s_1 = s_2 = -3$

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 + 6s + 9 = s^2 + \alpha_{11}\, s + \alpha_{10}$$
$$\Rightarrow \alpha_{10} = 9,\ \alpha_{11} = 6$$

Entkoppelbarkeitsbedingung

$\det\left(\underline{D}^*\right) = \det\left(\underline{c}^T \underline{A} \underline{b}\right) = \det(-3) = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Die Entkoppelbarkeitsbedingung ist erfüllt.

Vorfiltermatrix $\underline{S}$ hier: $\sigma_1 = \alpha_{10} = 9$

Reglerverstärkung $\underline{K}$: hier ergibt sich ein Zeilenvektor $\underline{k}^T$

$$\underline{k}^T = \underline{D}^{*-1}\left(\underline{c}^T\underline{A}^2 + \sum_{\nu=0}^{1}\alpha_{1\nu}\,\underline{c}^T\underline{A}^\nu\right) = \underline{D}^{*-1}\left(\underline{c}^T\underline{A}^2 + \alpha_{10}\,\underline{c}^T\underline{I} + \alpha_{11}\,\underline{c}^T\underline{A}\right)$$

$$\underline{k}^T = -\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}1 & -4\end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}-1 & -2\end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & -25\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{4}{3} & \frac{25}{3}\end{bmatrix}$$

Damit:

$$u = \underline{D}^{*-1}\sigma_1 w - \underline{k}^T\underline{x} = -3w + \frac{4}{3}x_1 - \frac{25}{3}x_2$$

für $w = 1$ gilt somit: $x(t\to\infty) = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}^T \quad\Rightarrow\quad y(t\to\infty) = 1$

Hinweise zum Verfahren:

- Die Entkoppelbarkeit muss gegeben sein.
- $\delta = \sum_{i=1}^{p}\delta_i \le n$ Die Differenzordnung des Systems entspricht maximal der Systemordnung n, kann aber auch kleiner sein.
- Über $\alpha_{i\nu}$ können nur δ Eigenwerte verschoben werden.
  Ist also $\delta = n$, dann können alle Eigenwerte gezielt verändert werden.
  aber: ist $\delta < n$, so können nicht alle Eigenwerte gezielt verschoben werden.
  Es ist daher eine anschließende Stabilitätsüberprüfung erforderlich.

5.6 Vollständige modale Synthese nach Roppenecker

MIMO: Vorgabe der Eigenwerte
$\rightarrow n$ Bedingungen für $p \cdot n$ Parameter
$\rightarrow$ es bleiben Freiheitsgrade

2 Möglichkeiten: 1. Eine Lösung wird zufällig ausgewählt
2. Es werden zusätzliche Bedingungen formuliert

5.6.1 Allgemeine Zustandsreglerformel

Ziel: Eine Formel, die alle Lösungen für $\underline{K}$ bei einer bestimmten Pollage umfasst.

$$\left.\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}\\ \underline{u} &= -\underline{K}\,\underline{x}\end{aligned}\right\} \dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\,\underline{x}$$

Polvorgabe: n Eigenwerte $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$
Dann muss gelten:

$$[\lambda_i\,\underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\,\underline{K}]\,\underline{v}_i = \underline{0}, \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$[\lambda_i\,\underline{I} - \underline{A}]\,\underline{v}_i = -\underline{B}\underbrace{\underset{(p,n)}{\underline{K}}\ \underset{(n,1)}{\underline{v}_i}}_{=:\underline{p}_i},\qquad i = 1,\ldots,n$$

$\underline{p}_i$: $(p,1)$ Definition eines Parametervektors

$$[\lambda_i \underline{I} - \underline{A}]\underline{v}_i = -\underline{B}\,\underline{p}_i$$

$$\underline{v}_i = -[\lambda_i \underline{I} - \underline{A}]^{-1}\underline{B}\,\underline{p}_i = [\underline{A} - \lambda_i \underline{I}]^{-1}\underline{B}\,\underline{p}_i$$

außerdem:

$$\underline{p}_i = \underline{K}\,\underline{v}_i, \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\left[\underline{p}_1 \quad \cdots \quad \underline{p}_n\right] = \underline{K}\left[\underline{v}_1 \quad \cdots \quad \underline{v}_n\right]$$

$$\underline{K} = \underset{(p,n)}{\left[\underline{p}_1 \quad \cdots \quad \underline{p}_n\right]}\left[\underline{v}_1 \quad \underset{(n,n)}{\cdots} \quad \underline{v}_n\right]^{-1}$$

$\underline{v}_i$ eliminieren:

$$\underline{K} = \left[\underline{p}_1 \quad \cdots \quad \underline{p}_n\right]\left[[\underline{A} - \lambda_1 \underline{I}]^{-1}\underline{B}\,\underline{p}_1 \quad \cdots \quad [\underline{A} - \lambda_n \underline{I}]^{-1}\underline{B}\,\underline{p}_n\right]^{-1}$$

Eine allgemeine Lösung für $\underline{K}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ erhält man, wenn die Parametervektoren $\underline{p}_i$ zufällig gewählt werden. Unzulässig sind $\underline{p}_i$, für die $[\underline{v}_1 \ldots \underline{v}_n]^{-1}$ singulär wird.

5.6.2 Eigenschaften der Parametervektoren und Reglerentwurf

- Parametervektoren sind transformationsinvariant gegenüber $\underline{x}' = \underline{T}\,\underline{x}$.
- Wird ein λ_i komplex gewählt, so muss auch der hierzu konjugiert komplexe Eigenwert λ_i^* vorgegeben werden.
- Soll ein Eigenwert λ_i des ungeregelten Systems beibehalten werden, so ist $\underline{p}_i = \underline{0}$ zu wählen, da die folgenden Beziehungen gelten:

  $(\lambda_i \underline{I} - \underline{A})\underline{v}_i = \underline{0}$ ungeregeltes System

  $(\lambda_i \underline{I} - \underline{A})\underline{v}_i = -\underline{B}\underbrace{\underline{p}_i}_{=\underline{0}}$ geregeltes System

- Die Wahl der Parametervektoren $\underline{p}_i$ erfolgt nach zusätzlichen Bedingungen (Robustheit, Ausgangsrückführung).

Sonderfall SISO-System:

- Der Parametervektor $\underline{p}_i$ entartet zur skalaren Größe p_i:

$$\underline{k}^T = \left[p_1 \quad \cdots \quad p_n\right]\left[[\underline{A} - \lambda_1 \underline{I}]^{-1}\underline{b}\,p_1 \quad \cdots \quad [\underline{A} - \lambda_n \underline{I}]^{-1}\underline{b}\,p_n\right]^{-1}$$

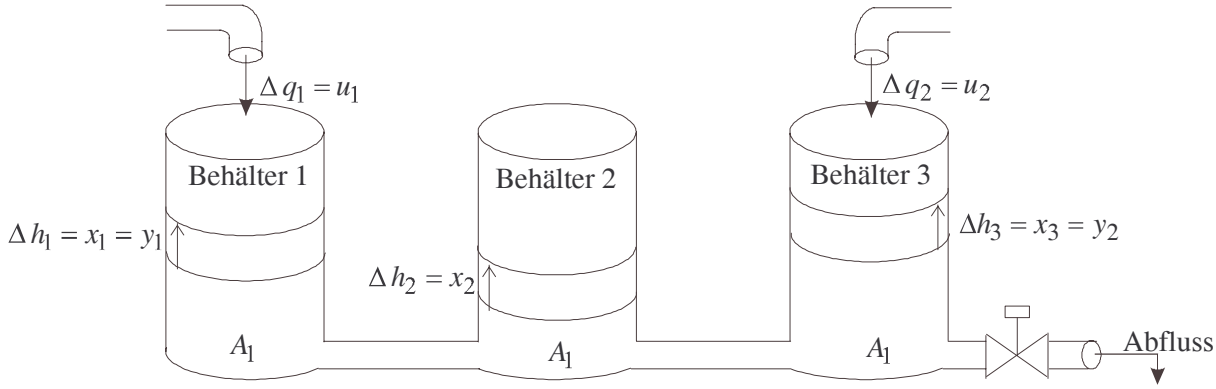
$$= \underbrace{\left[p_1 \quad \cdots \quad p_n\right]}_{(1,n)}\left[\left[[\underline{A} - \lambda_1 \underline{I}]^{-1}\underline{b} \quad \cdots \quad [\underline{A} - \lambda_n \underline{I}]^{-1}\underline{b}\right]\begin{bmatrix} p_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & p_n \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

Hinweis: $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\,\underline{A}^{-1}$

$$\underline{k}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}} \left[\begin{bmatrix} \underline{A} - \lambda_1 \underline{I} \end{bmatrix}^{-1} \underline{b} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \underline{A} - \lambda_n \underline{I} \end{bmatrix}^{-1} \underline{b} \right]^{-1}$$

d.h. der Regler hängt nur von vorgegebenen Eigenwerten ab.

Beispiel: MIMO-System



Massenänderung im Behälter: $\mathrm{d}m_1 = \rho\, A_1\, \mathrm{d}x_1$, wobei A_1 die Behälterfläche ist.

Zufluss: $\dot{m}_{\mathrm{zu}} = \rho\, u_1$

Abfluss: $\dot{m}_{\mathrm{ab}1/2} = \rho\, A_1\, k_1\, (x_1 - x_2)$

Bilanzgleichung:

$$\mathrm{d}m = (\dot{m}_{\mathrm{zu}} - \dot{m}_{\mathrm{ab}})\,\mathrm{d}t$$
$$\rho\, A_1\, \mathrm{d}x_1 = \rho\, u_1\, \mathrm{d}t - \rho\, A_1\, k_1\, (x_1 - x_2)\,\mathrm{d}t$$
$$\dot{x}_1 = \frac{1}{A_1} u_1 - k_1\, (x_1 - x_2)$$

Behälter 2:

$$\dot{m}_{\mathrm{zu}1/2} = \dot{m}_{\mathrm{ab}1/2}$$
$$\dot{m}_{\mathrm{ab}2/3} = \rho\, A_1\, k_1\, (x_2 - x_3)$$
$$\mathrm{d}m_2 = \rho\, A_1\, \mathrm{d}x_2$$
$$\dot{x}_2 = k_1\, (x_1 - x_2) - k_1\, (x_2 - x_3)$$
$$\dot{x}_2 = k_1\, x_1 - 2k_1\, x_2 + k_1\, x_3$$

Behälter 3:

$$\dot{m}_{\mathrm{zu}3} = \dot{m}_{\mathrm{ab}2/3} + \rho\, u_2$$
$$\dot{m}_{\mathrm{ab}} = -\rho\, A_1\, k_{\mathrm{Ventil}}\, x_3$$
$$\mathrm{d}m_3 = \rho\, A_1\, dx_3$$
$$\dot{x}_3 = k_1\, x_2 - \left(k_1 + \frac{k_{\mathrm{Ventil}}}{A_1} \right) x_3 + \frac{1}{A_1} u_2$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_1 & k_1 & 0 \\ k_1 & -2k_1 & k_1 \\ 0 & k_1 & -\left(k_1 + \dfrac{k_{\text{Ventil}}}{A_1}\right) \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{A_1} \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Wähle: $\underline{p}_1 = k_1 A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{p}_2 = k_1 A_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_{\text{Ventil}}}{A_1 k_1} \end{bmatrix}$, $\underline{p}_3 = k_1 A_1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -k_1, \ \lambda_3 = -2k_1$$

$$\underline{B}\,\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{A_1} \end{bmatrix} k_1 A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}$$

$(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})\,\underline{v}_1 = \underline{B}\,\underline{p}_1$ eindeutige Lösung!

$$\begin{aligned} k_1 v_{12} &= k_1 && \rightarrow \quad v_{12} = 1 \\ k_1 v_{11} - k_1 v_{12} + k_1 v_{13} &= 0 && \rightarrow \quad v_{11} = 1 \\ k_1 v_{12} - \frac{k_{\text{Ventil}}}{A_1} v_{13} &= k_1 && \rightarrow \quad v_{13} = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}\,\underline{p}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_1} \end{bmatrix} k_1 A_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{\text{Ventil}}}{A_1 k_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_{\text{Ventil}}}{A_1} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}\,\underline{p}_3 = \begin{bmatrix} k_1 \alpha \\ 0 \\ k_1 \beta \end{bmatrix}$$

$$(\underline{A} - \lambda_3 \underline{I})\,\underline{v}_3 = \underline{B}\,\underline{p}_3$$

$$k_1 v_{31} + k_1 v_{32} = k_1 \alpha$$
$$k_1 v_{31} + k_1 v_{33} = 0$$
$$k_1 v_{32} + \left(k_1 - \frac{k_{\text{Ventil}}}{A_1} \right) v_{33} = k_1 \beta$$

$$\rightarrow \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{k_1 A_1 (\alpha - \beta)}{2 k_1 A_1 - k_{\text{Ventil}}} \\ \hline \frac{-\alpha k_{\text{Ventil}} + k_1 A_1 (\alpha + \beta)}{2 k_1 A_1 - k_{\text{Ventil}}} \\ \hline -\frac{k_1 A_1 (\alpha - \beta)}{2 k_1 A_1 - k_{\text{Ventil}}} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \underline{p}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \end{bmatrix}^{-1} = k_1 A_1 \begin{bmatrix} -c & 1+c & -c \\ c & 1-c & c - \frac{k_{\text{Ventil}}}{A_1 k_1} \end{bmatrix}$$

mit $c = \dfrac{\alpha - \beta}{\left(1 - \dfrac{k_{\text{Ventil}}}{k_1 A_1} \right) \alpha + \beta}$

Beispiel zur Wahl von $\underline{p}_3$ zur Erzielung bestimmter Eigenschaften:

1. Wähle $\alpha = \beta,\ c = 0 \quad \rightarrow$ Der Füllstand 1 braucht nicht gemessen zu werden.
2. Stellgrößenbeschränkungen: Die Reglerverstärkungen möglichst klein wählen:

$$Q = \sum (k_{ij})^2 \quad \rightarrow \quad \text{Minimierung durch geeignete Wahl von } c$$

$$Q = c^2 + (1+c)^2 + c^2 + c^2 + (1-c)^2 + \left(c - \frac{k_{\text{Ventil}}}{\mathrm{k}_1 A_1} \right)^2$$

$$= 6c^2 + 2 + \left(\frac{k_{\text{Ventil}}}{\mathrm{k}_1 A_1} \right)^2 - 2c \frac{k_{\text{Ventil}}}{\mathrm{k}_1 A_1}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}c} = 12c - 2 \frac{k_{\text{Ventil}}}{\mathrm{k}_1 A_1} \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow c_{\text{opt}} = \frac{1}{6} \frac{k_{\text{Ventil}}}{\mathrm{k}_1 A_1}$$

5.7 Abschließende Zusammenfassung zu den Reglerentwurfsverfahren

Polvorgabe bei SISO-Systemen:

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\,\underline{K}) \overset{!}{=} \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) \qquad \text{mit den vorgegebenen Eigenwerten } \lambda_i$$

$$q_0(k_{ij}) + q_1(k_{ij})\,\lambda + \ldots + \lambda^n \overset{!}{=} p_0 + p_1 \lambda + \ldots + \lambda^n$$

Koeffizientenvergleich (Abschnitt 5.1):

$$\begin{aligned} q_0(k_{ij}) &= p_0 \\ &\vdots \\ q_{n-1}(k_{ij}) &= p_{n-1} \end{aligned}$$

Ackermann-Formel (Abschnitt 5.2):

$$\underline{k}^T = \underline{t}_1^T [p_0 \underline{I} + p_1 \underline{A} + \ldots + p_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \underline{A}^n]$$

wobei $\underline{t}_1^T$ die letzte Zeile von $\underline{Q}_S^{-1}$ ist.

Sonderfall in (5.2): $\underline{A}$ liegt in SNF 2. Art vor:

$$k_i = p_{i-1} - a_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Weitere Entwurfsverfahren für SISO- und MIMO-Systeme:

Modale Regelung (Abschnitt 5.3):
p Steuergrößen: Im 1. Schritt können p Eigenwerte verschoben werden:

$$\underline{K} = \underbrace{\tilde{\underline{B}}_p^{-1}}_{\begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T \underline{B} \end{bmatrix}} \cdot \underbrace{\tilde{\underline{K}}_p}_{\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_{1R} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p - \lambda_{pR} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T \end{bmatrix}$$

Riccati-Entwurf (Abschnitt 5.4):
- Führungsverhalten, quadratische Gütemaßminimierung
- Gewichtungsmatrizen $\underline{Q}$, $\underline{R}$ für die Zustandsgrößen und Eingangsgrößen

$$\underline{K} = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} \ , \qquad \underline{P} \text{ aus der algebraischen Riccati-Gleichung}$$

Entkopplungsregler (Abschnitt 5.5):
Ziel ist ein entkoppeltes Führungsverhalten
- Differenzordnung bestimmen, ggf. ist eine Stabilitätsprüfung erforderlich
- Entkoppelbarkeitsbedingungen beachten

$$\underline{S} = \underline{D}^{*-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \sigma_p \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \underline{D}^{*-1} \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \underline{A}^{\delta_1} + \sum_{\nu=0}^{\delta_1 - 1} \alpha_{1\nu} \underline{c}_1^T \underline{A}^{\nu} \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{A}^{\delta_p} + \sum_{\nu=0}^{\delta_p - 1} \alpha_{p\nu} \underline{c}_p^T \underline{A}^{\nu} \end{bmatrix}$$

Die Vorgabe der Reglerdynamik erfolgt über das Nennerpolynom der entkoppelten Teilsysteme.
Für $\delta < n$ ist eine Stabilitäts-Untersuchung erforderlich.

Modale Synthese (Abschnitt 5.6):
- λ_i vorgegeben
- $\underline{p}_i$ vorgegeben, zusätzliche Bedingung zur Auswahl einer Lösung.

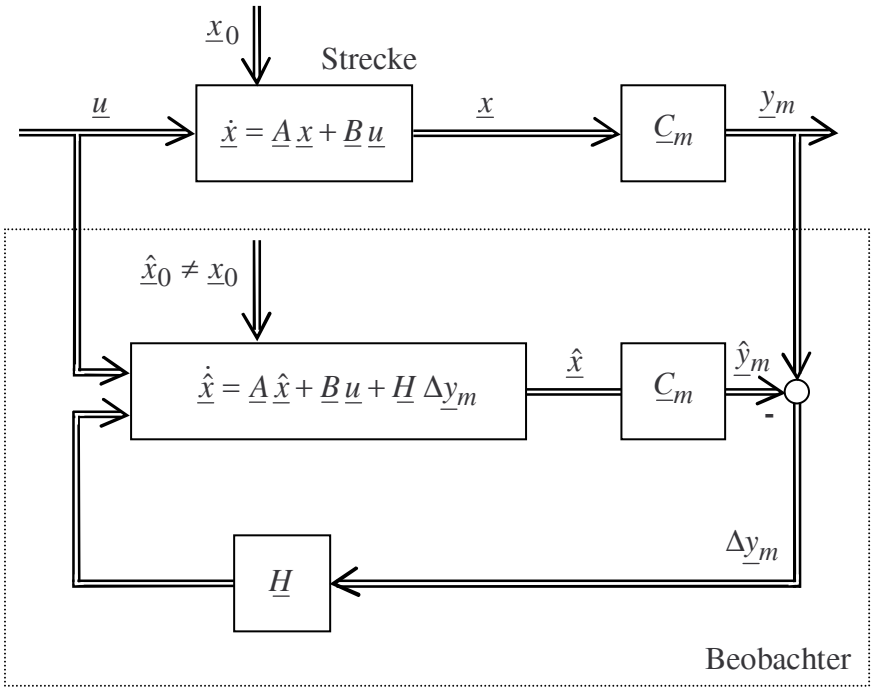
6 Beobachter

6.1 Einführung

Problemstellung:
Stillschweigende Annahme bei der Synthese von Zustandsreglern $\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x}$ ist, dass alle Zustandsgrößen verfügbar sind. In der Praxis sind oft einige Zustandsgrößen nicht oder nur mit großem Aufwand messbar.

Daher folgt die **Idee der Zustandsbeobachtung:**
Sämtliche Matrizen der Zustandsraumdarstellung $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}_m$ sind bekannt, ebenso $\underline{u}(t)$ und $\underline{y}_m(t)$. Der Index m symbolisiert die tatsächlich gemessenen Größen. Damit soll eine Rekonstruktion des Zustandsvektors $\underline{x}(t)$ durch Parallelschalten eines Modells der Strecke mit einer zusätzlichen Korrektur erreicht werden. Das Modell der Strecke wird mit $\underline{u}(t)$ beaufschlagt, wobei der Ausgang dieses Parallelmodells durch $\hat{\underline{y}}_m(t)$ gegeben ist, d.h. durch die Schätzwerte für die Messgrößen. Aus $\hat{\underline{y}}_m(t)$ und $\underline{y}_m(t)$ kann dann die Differenz $\Delta\underline{y}_m$ gebildet und diese nach Gewichtung mit einer Matrix $\underline{H}$ zurückgeführt werden.

Struktur des vollständigen Zustandsbeobachters:



6.2 Beobachterentwurf und Reglerentwurf

Ziel: Für beliebige Anfangsbedingungen $\underline{x}_0, \hat{\underline{x}}_0$ soll der Schätzwert $\hat{\underline{x}}(t)$ dem Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ entsprechen:

$$\hat{\underline{x}}(t) \overset{!}{=} \underline{x}(t)$$

Die Differentialgleichung des Beobachters im MIMO-Fall folgt direkt aus dem Strukturbild:

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{A}\,\hat{\underline{x}} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{H}\left(\underline{y}_m - \hat{\underline{y}}_m\right)$$
$$\hat{\underline{y}}_m = \underline{C}_m\,\hat{\underline{x}}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\hat{\underline{x}}} = (\underline{A} - \underline{H}\,\underline{C}_m)\hat{\underline{x}} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{H}\,\underline{y}_m$$

Wie ist $\underline{H}$ zu wählen, damit $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)\right) = \underline{0}$ für beliebige $\underline{x}_0, \hat{\underline{x}}_0$ gilt?

Die Differentialgleichung für den Schätzfehler $\tilde{\underline{e}}(t)$ mit

$$\tilde{\underline{e}}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)$$

bzw.

$$\dot{\tilde{\underline{e}}}(t) = \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}}(t)$$

ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\underline{e}}} &= \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}} \\
&= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} - \left(\underline{A}\,\hat{\underline{x}} - \underline{H}\,\underline{C}_m\hat{\underline{x}} + \underline{H}\,\underbrace{\underline{y}_m}_{\underline{C}_m\hat{\underline{x}}} + \underline{B}\,\underline{u}\right) \\
&= \underline{A}\left(\underline{x} - \hat{\underline{x}}\right) - \underline{H}\,\underline{C}_m\left(\underline{x} - \hat{\underline{x}}\right) \\
&= \underbrace{\left(\underline{A} - \underline{H}\,\underline{C}_m\right)}_{\Downarrow}\,\tilde{\underline{e}}
\end{aligned}$$

Analogie zum Regerentwurf

Der Schätzfehler $\tilde{\underline{e}}$ strebt für $t \to \infty$ genau dann gegen $\underline{0}$, wenn sämtliche Eigenwerte von $(\underline{A} - \underline{H}\,\underline{C}_m)$ links der imaginären Achse liegen. $\underline{H}$ ist folglich so zu bestimmen, dass dies der Fall ist. Der Beobachterentwurf erfolgt nach dem Dualitätsprinzip analog zum Reglerentwurf. Für die Systemmatrizen gilt folgende Analogie:

$\underline{A}^T$		$\underline{A}$
$\underline{C}_m^T$	$\leftrightarrow$	$\underline{B}$
$\underline{H}^T$		$\underline{K}$
Beobachter		Zustandsregler

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit:
Die fiktive Regelung kann entworfen werden, wenn das Beobachtersystem vollständig steuerbar ist, d.h. die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{Q}_s = \left[\underline{C}_m{}^T \quad \underline{A}^T \underline{C}_m{}^T \quad \cdots \quad \left(\underline{A}^T\right)^{n-1} \underline{C}_m{}^T \right]$$

den Höchstrang n besitzt. Gleichwertig ist die Forderung, dass die Beobachtermatrix $\underline{Q}_B$ des zu regelnden Systems, d.h.

$$\underline{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{C}_m \\ \underline{C}_m \underline{A}^T \\ \vdots \\ \underline{C}_m \left(\underline{A}^T\right)^{n-1} \end{bmatrix}$$

den Höchstrang n aufweist.

Beispiel: Dynamisches System „Auto“

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \qquad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \\ y_m &= \underline{c}_m^T \underline{x} \end{aligned}$$

Dynamisches Modell für den Beobachterentwurf

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}} &= \underline{A}\,\hat{\underline{x}} + \underline{b}\,u + h\left(y_m - \hat{y}_m\right) \\ \hat{y}_m &= \underline{c}_m^T \hat{\underline{x}} \end{aligned}$$

Differentialgleichung für den Schätzfehler

$$\dot{\tilde{\underline{e}}} = \left(\underline{A} - \underline{h}\,\underline{c}_m^T\right) \tilde{\underline{e}} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\underline{x}} = \left(\underline{A} - \underline{b}\underline{k}^T\right) \underline{x}$$

Parametrisierung des Beobachters

$$\dot{\tilde{\underline{e}}} = \left(\underline{A} - \underline{h}\,\underline{c}_m^T\right) \tilde{\underline{e}} = \begin{bmatrix} -h_1 & 1 \\ -h_2 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\underline{e}} \qquad \rightarrow \qquad \lambda^2 + h_1 \lambda + h_2 = 0$$

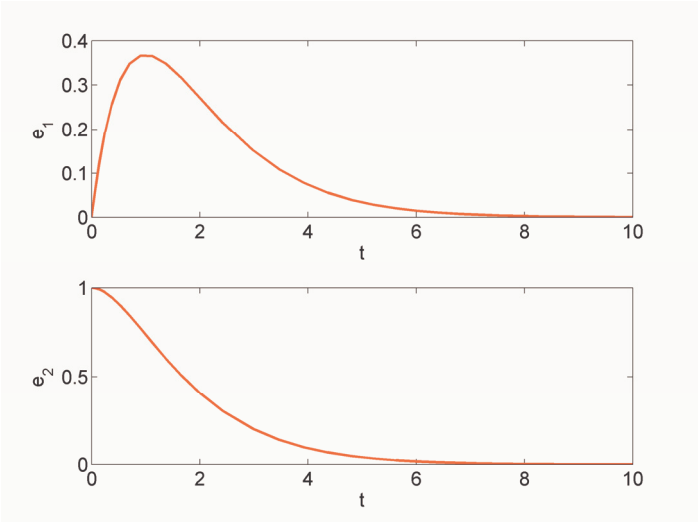
Die Eigenwerte werden so festgelegt, dass die Differentialgleichung für den Schätzfehler $\tilde{\underline{e}}$ asymptotisch stabil ist.

Zahlenbeispiel:

$$\tilde{e}_1(0) = 0, \quad \tilde{e}_2(0) = +1$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-h_1 \pm \sqrt{h_1^2 - 4h_2}}{2}$$

$$h_1 = 2, \quad h_2 = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \{-1, \ -1\}$$



6.3 Methoden zum Beobachterentwurf

6.3.1 Polvorgabe

(siehe auch Abschnitt 5.1)
Die gewünschten Eigenwerte des Beobachters seien $\lambda_{B1}, \ldots, \lambda_{Bn}$
Das daraus resultierende Wunschpolynom kann mit der charakteristischen Gleichung verglichen werden

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}^T + \underline{C}_m^T \underline{H}^T) = \det(\lambda \underline{I} - \underline{A} + \underline{H}\,\underline{C}_m) \overset{!}{=} \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{Bi})$$

$$\begin{aligned} q_0(h_{ij}) &= p_0 \\ &\vdots \\ q_{n-1}(h_{ij}) &= p_{n-1} \end{aligned}$$

Diese n Gleichungen sind nur im SISO-Fall eindeutig lösbar. Im MIMO-Fall bestehen wie beim Entwurf von linearen Zustandsreglern noch weitere Freiheitsgrade.

6.3.2 Sonderfall: Polvorgabe bei BNF 2. Art

Jetzt soll ein SISO-System in BNF 2. Art betrachtet werden, dessen Übertragungsfunktion durch

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n} \qquad \text{mit} \qquad b_n = 0$$

gegeben ist.

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & & \underline{0} & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ \underline{0} & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} + \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y_m = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} = \hat{\underline{c}}_m^T \hat{\underline{x}}$$

$$\hat{\underline{A}} - \hat{\underline{h}}\, \hat{\underline{c}}_m^T = \begin{bmatrix} 0 & & \underline{0} & -a_0 - h_1 \\ 1 & \ddots & & -a_1 - h_2 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ \underline{0} & & 1 & -a_{n-1} - h_n \end{bmatrix}$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet damit

$$\begin{aligned} \det(\lambda \underline{I} - \hat{\underline{A}} + \hat{\underline{h}}\, \hat{\underline{c}}_m^T) &= (a_0 + \hat{h}_1) + (a_1 + \hat{h}_2)\lambda + \ldots + (a_{n-1} + \hat{h}_n)\lambda^{n-1} + \lambda^n \\ &\overset{!}{=} \quad p_0 \quad + \quad p_1 \lambda \quad + \ldots + p_{n-1} \lambda^{n-1} \quad + \lambda^n \end{aligned}$$

Ein direkter Koeffizientenvergleich führt auf

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 &= p_0 - a_0 \\ &\vdots \\ \hat{h}_n &= p_{n-1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

6.3.3 Ackermannformel für den Beobachterentwurf

Erinnerung: $\underline{k}^T = \underline{t}_1^T \left[p_0 + p_1 \underline{A} + \ldots + p_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \underline{A}^n \right]$ (Abschnitt 5.2)

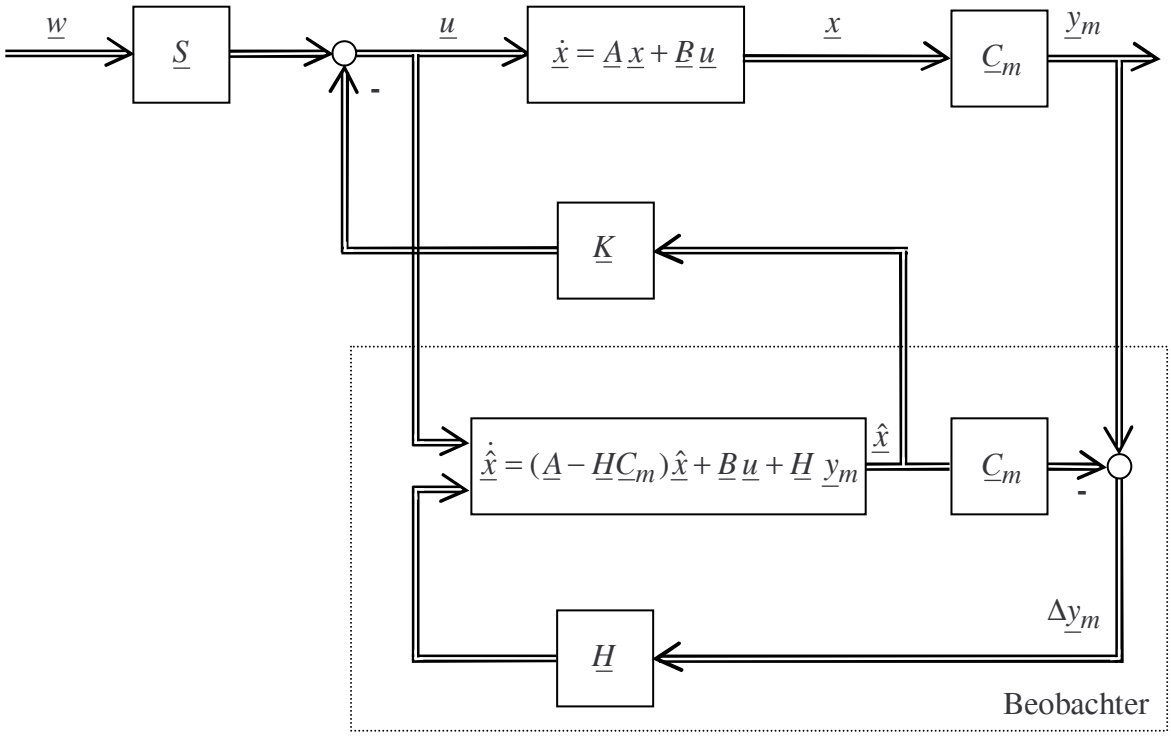
Die Übertragung auf den Beobachterentwurf ist direkt möglich:

$$\underline{h} = \left[p_0 + p_1 \underline{A} + \ldots + p_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \underline{A}^n \right] \underline{t}_{1B},$$

wobei $\underline{t}_{1B}$ der letzten Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix $\underline{Q}_B^{-1}$ entspricht.

6.4 Separationsprinzip

Struktur des Beobachters im geschlossenen Regelkreis:



Der Zustandsvektor $\underline{x}$ steht nicht direkt für die Regelung zur Verfügung. Als Ersatz wird daher der Schätzwert $\underline{\hat{x}}$ des Zustandsvektors $\underline{x}$ für die Rückführung verwendet.

Reglerentwurf:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$
$$\underline{u} = \underline{S}\,\underline{w} - \underline{K}\,\underline{x}$$

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\left(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}\right)}_{\text{EW: } \lambda_{Ri}}\underline{x} + \underline{B}\,\underline{S}\,\underline{w}$$

Beobachterentwurf:

$$\dot{\underline{\hat{x}}} = \underline{A}\,\underline{\hat{x}} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{H}\,\Delta\underline{y}_m$$

$$\underline{\tilde{e}} = \underline{x} - \underline{\hat{x}}$$

$$\dot{\underline{\tilde{e}}} = \underbrace{\left(\underline{A} - \underline{H}\,\underline{C}_m\right)}_{\text{EW: } \lambda_{Bi}}\underline{\tilde{e}}$$

$$\dot{\underline{\hat{x}}} = (\underline{A} - \underline{H}\,\underline{C}_m)\underline{\hat{x}} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{H}\,\underline{y}_m$$

Im Spezialfall $\underline{w} = \underline{0}$ gilt das Regelgesetz $\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{\hat{x}}$. Damit lauten die Differentialgleichungen:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{B}\,\underline{K}\,\underline{\hat{x}}$$

$$\dot{\underline{\hat{x}}} = \left(\underline{A} - \underline{H}\,\underline{C}_m\right)\underline{\hat{x}} - \underline{B}\,\underline{K}\,\underline{\hat{x}} + \underline{H}\,\underline{C}_m\,\underline{x}$$

Das Gesamtsystem kann somit folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\hat{\underline{x}}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A} & -\underline{B}\,\underline{K} \\ \underline{H}\,\underline{C}_m & \underline{A} - \underline{H}\,\underline{C}_m - \underline{B}\,\underline{K} \end{bmatrix}}_{(2n,2n)} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{\underline{x}} \end{bmatrix}$$

Frage: Bleiben die Eigenwerte des Gesamtsystems erhalten?

$$\det = \left(\begin{bmatrix} \lambda \underline{I} - \underline{A} & \underline{B}\,\underline{K} \\ -\underline{H}\,\underline{C}_m & \lambda \underline{I} - \underline{A} + \underline{H}\,\underline{C}_m - \underline{B}\,\underline{K} \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$$

Die Berechnung der Eigenwerte ist auf verschiedene Arten möglich:

1. Alternative: Determinante der Hypermatrix

$$\det\left(\left[\begin{array}{c|c} \underline{F} & \underline{G} \\ \hline \underline{H} & \underline{J} \end{array}\right] \right) = \begin{cases} \det\left(\underline{F}\right) \cdot \det\left(\underline{J} - \underline{H}\,\underline{F}^{-1}\,\underline{G} \right) \\ \det\left(\underline{J}\right) \cdot \det\left(\underline{F} - \underline{G}\,\underline{J}^{-1}\,\underline{H} \right) \end{cases}$$

2. Alternative: Die Definition einer Transformationsmatrix

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{I} & 0 \\ \underline{I} & -\underline{I} \end{bmatrix}$$

führt auf $$\tilde{\underline{x}}' = \begin{bmatrix} \underline{I} & 0 \\ \underline{I} & -\underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{\underline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x} - \hat{\underline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{e}} \end{bmatrix}$$

Dabei wird ausgenutzt, dass Eigenwerte transformationsinvariant sind.

3. Alternative: Physikalische Interpretation. Es wird der neue Zustandsvektor

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x} - \hat{\underline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{e}} \end{bmatrix}$$

definiert.
Man erhält das Zustandsgleichungssytem

$$\dot{\underline{x}}' = \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\tilde{\underline{e}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} - \underline{B}\,\underline{K} & \underline{B}\,\underline{K} \\ \underline{0} & \underline{A} - \underline{H}\,\underline{C}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{e}} \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte sind somit durch

$$\underbrace{\det\left[\lambda \underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\,\underline{K} \right]}_{\lambda_{R1},\ldots,\lambda_{Rn}} \cdot \underbrace{\det\left[\lambda \underline{I} - \underline{A} + \underline{H}\,\underline{C}_m \right]}_{\lambda_{B1},\ldots,\lambda_{Bn}}$$

gegeben.
Regler- und Beobachtereigenwerte können somit getrennt voneinander vorgegeben werden.

Ein Führungsgrößenvektor $\underline{w} \neq \underline{0}$ hat keinen Einfluss auf die Lage der Eigenwerte. Dies folgt aus dem Superpositionsprinzip für lineare Systeme bzw. direkt aus

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\tilde{\underline{e}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} - \underline{B}\,\underline{K} & \underline{B}\,\underline{K} \\ \underline{0} & \underline{A} - \underline{H}\,\underline{C}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}\,\underline{S}\,\underline{w} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Das Ergebnis ist das Separationsprinzip: Die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises $\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rn}$ werden bei dem nachträglichen Einfügen des Beobachters nicht verschoben. Es treten lediglich die Eigenwerte $\lambda_{B1}, \ldots, \lambda_{Bn}$ des Beobachters zu denjenigen des Reglers hinzu.

Konsequenz: Regler und Beobachter können auch in diesem Fall *getrennt* voneinander entworfen werden.

6.5 Reduzierter Beobachter

Bisher: Der Beobachter schätzt alle Komponenten des Zustandsvektors $\underline{x}$.
Dies ist jedoch nicht immer notwendig, wenn einzelne Zustandsgrößen x_i gemessen werden können.
Ziel: Entwurf eines reduzierten Beobachters, der nur die unbekannten Komponenten schätzt.
Annahme: Einzelne Komponenten x_i werden gemessen. Der Zustandsvektor wird in unbekannte sowie bekannte (=gemessene) Komponenten unterteilt

$$y_m = \left[\begin{array}{c|c|c} & 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \ddots & \\ & \underline{0} & 1 \end{array}\right] \underbrace{\left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-q} \\ \hline x_{n-q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right]}_{\underline{x}} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \underline{x}_u \quad \text{unbekannt: } q < n \text{ Komponenten} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \underline{y}_m \quad \text{bekannt bzw. gemessen: } q \text{ Komponenten} \end{array}$$

d.h.

$$\begin{aligned} y_{m1} &= x_{n-q+1} \\ &\vdots \\ y_{mq} &= x_n \end{aligned}$$

Die daraus resultierenden Substitutionen

$$\underline{x}_u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-q} \end{bmatrix}, \qquad \underline{y}_m = \begin{bmatrix} x_{n-q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

führen auf die Darstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_u \\ \dot{\underline{y}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}_u \\ \underline{y}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{B}_2 \end{bmatrix} \underline{u}$$

bzw.

$$\dot{\underline{x}}_u = \underline{A}_{11}\,\underline{x}_u + \underline{A}_{12}\,\underline{y}_m + \underline{B}_1\,\underline{u}$$
$$\dot{\underline{y}}_m = \underline{A}_{21}\,\underline{x}_u + \underline{A}_{22}\,\underline{y}_m + \underline{B}_2\,\underline{u}$$

Umformen liefert:

$$\dot{\underline{x}}_u = \underline{A}_{11}\,\underline{x}_u + \underbrace{\left(\underline{A}_{12}\,\underline{y}_m + \underline{B}_1\,\underline{u}\right)}_{\text{bekannt}}$$

$$\underbrace{\left(\dot{\underline{y}}_m - \underline{A}_{22}\,\underline{y}_m - \underline{B}_2\,\underline{u}\right)}_{\text{bekannt}} = \underline{A}_{21}\,\underline{x}_u$$

Mit folgender Substitution wird ein herkömmlicher Beobachter gemäß

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = (\underline{A} - \underline{H}\,\underline{C}_m)\,\hat{\underline{x}} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{H}\,\underline{y}_m$$

entworfen:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}} \quad &\rightarrow \quad \hat{\underline{x}}_u \\ \underline{A} \quad &\rightarrow \quad \underline{A}_{11} \\ \underline{B}\,\underline{u} \quad &\rightarrow \quad \underline{A}_{12}\,\underline{y}_m + \underline{B}_1\,\underline{u} \\ \underline{y}_m \quad &\rightarrow \quad \dot{\underline{y}}_m - \underline{A}_{22}\,\underline{y}_m - \underline{B}_2\,\underline{u} \\ \underline{C}_m \quad &\rightarrow \quad \underline{A}_{21} \end{aligned}$$

Daraus folgt die modifizierte Beobachtergleichung:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_u = (\underline{A}_{11} - \underline{H}\,\underline{A}_{21})\,\hat{\underline{x}}_u + \underline{A}_{12}\,\underline{y}_m + \underline{B}_1\,\underline{u} + \underline{H}\,(\dot{\underline{y}}_m - \underline{A}_{22}\,\underline{y}_m - \underline{B}_2\,\underline{u})$$

Die Dynamik wird durch die Lage der Eigenwerte von $\left(\underline{A}_{11} - \underline{H}\,\underline{A}_{21}\right)$ festgelegt. Diese kann über eine Polvorgabe bestimmt werden:

$$\det(\lambda\,\underline{I} - \underline{A}_{11} + \underline{H}\,\underline{A}_{21}) \overset{!}{=} \prod_{i=1}^{n-q} (\lambda - \lambda_{Bi})$$

In obiger Gleichung ist jedoch die erforderliche Differentiation $\dot{\underline{y}}_m$ des Messsignals problematisch. Abhilfe kann mit einer Substitution geschaffen werden:

$$\underline{\hat{x}}_R = \underline{\hat{x}}_u - \underline{H}\,\underline{y}_m$$
$$\dot{\underline{\hat{x}}}_R = \dot{\underline{\hat{x}}}_u - \underline{H}\,\dot{\underline{y}}_m$$

Damit lautet die Zustandsdifferentialgleichung des reduzierten Beobachters

$$\dot{\underline{\hat{x}}}_R = (\underline{A}_{11} - \underline{H}\,\underline{A}_{21})\,\underline{\hat{x}}_R + (\underline{B}_1 - \underline{H}\,\underline{B}_2)\,\underline{u} + \left[(\underline{A}_{11} - \underline{H}\,\underline{A}_{21})\,\underline{H} + \underline{A}_{12} - \underline{H}\,\underline{A}_{22}\right]\underline{y}_m$$
$$\underline{\hat{x}}_u = \underline{\hat{x}}_R + \underline{H}\,\underline{y}_m$$

Beispiel: BNF 2. Art, $n = 4$, $q = 1$
3 Zustandsgrößen schätzen:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1u} \\ \dot{x}_{2u} \\ \dot{x}_{3u} \\ \hline \dot{y}_m \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_{1u} \\ x_{2u} \\ x_{3u} \\ \hline y_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1u} \\ x_{2u} \\ x_{3u} \\ y_m \end{bmatrix}, \qquad \underset{(n-q,q)}{\underline{h}'} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Die Polvorgabe erfolgt über die charakteristische Gleichung

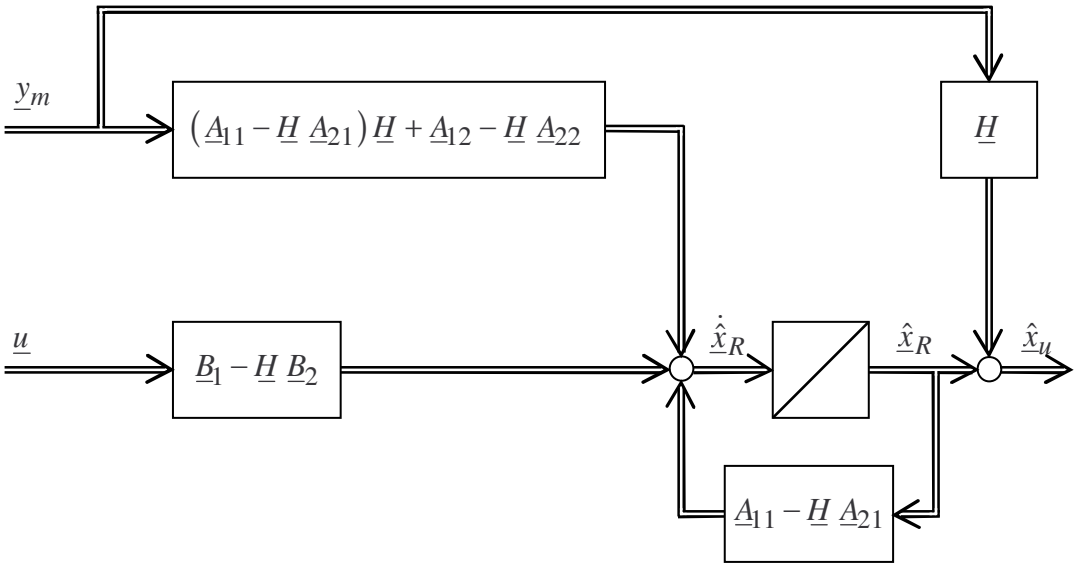
$$0 = \det\left(\lambda\,\underline{I} - \underline{A}_{11} + \underline{h}'\,\underline{A}_{21}\right)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & h_1 \\ -1 & \lambda & h_2 \\ 0 & -1 & \lambda + h_3 \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 + h_3\,\lambda^2 + h_2\,\lambda + h_1$$

Die Parameter werden z.B. durch Koeffizientenvergleich mit einem Wunschpolynom ermittelt

$$\det\left(\lambda\,\underline{I} - \underline{A}_{11} + \underline{h}'\,\underline{A}_{21}\right) = \prod_{i=1}^{n-q} (\lambda - \lambda_{Bi})$$

Für $\lambda_{Bi} = -1 \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{3} (\lambda + 1) = \lambda^3 + \underset{\downarrow}{3}_{h_3} \lambda^2 + \underset{\downarrow}{3}_{h_2} \lambda + \underset{\downarrow}{1}_{h_1}$

Resultierende Struktur des reduzierten Beobachters:



6.6 Abschließende Bemerkungen zum Beobachterentwurf

- Vorgegebene Eigenwerte des Beobachters sind weiter links der imaginären Achse zu platzieren als die Eigenwerte des geregelten Systems. Der Beobachter soll also „schneller“ als das geregelte reale System sein. Die Eigenwerte sollten jedoch nicht zu weit nach links gelegt werden, da sonst ein störendes **differenzierendes Verhalten** des Beobachters auftritt.

- Ein reduzierter Beobachter ist dem vollständigen Beobachter vorzuziehen, da eine **niedrigere Systemordnung den Implementierungsaufwand reduziert.** Zudem ist so eine **höhere Dynamik** erreichbar.

- Die Vorteile des vollständigen Beobachters sind eine **Plausibilitätskontrolle** zwischen gemessenen und geschätzten Größen und die Anwendung bei **verrauschten Messsignalen** (Kalman-Bucy-Filter).

7 Behandlung von Störgrößen

7.1 Einführung

Bisher:
- Ausregeln der Anfangsbedingungen $\underline{x}_0$, die als Anfangsstörung interpretiert werden kann.
- Regelung auf Führungsverhalten

Fragen:
- Was passiert bei länger andauernden Störgrößen?
- Wie reagiert die Regelung?

Erweiterung der Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{E}\,\underline{z}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$$

mit der Störeingangsmatrix $\underline{E}$ und dem Störgrößenvektor $\underline{z}$. Die Ausgangsgleichung bleibt unverändert: $\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$

7.2 Störgrößenaufschaltung

Annahme:
Die Störung $\underline{z}$ sei messbar und bekannt.

Frage:
Wie kann eine bekannte Störung $\underline{z}$ über den Steuereingang $\underline{u}$ kompensiert werden?

Forderung: $\underset{(n,p)\,(p,1)}{\underline{B}}\ \underline{u}_z + \underset{(n,r)\,(r,1)}{\underline{E}}\ \underline{z} = \underline{0}$,

$\underline{u}_z$: Anteil der Steuergröße $\underline{u}$ zur Kompensation der Störung

n Gleichungen

$\underline{u}_z$ hat p Elemente

Sonderfall: $p = n$
Falls die Eingangsmatrix $\underline{B}$ regulär und damit invertierbar ist, lässt sich die Störgröße durch Aufschaltung von

$$\underline{u}_z = -\underline{B}^{-1}\,\underline{E}\,\underline{z}$$

kompensieren.

Für gewöhnlich gilt jedoch $p < n$, $\underline{B}$ ist also nicht invertierbar.
Es wird versucht, den Ausdruck $\underline{B}\,\underline{u}_z + \underline{E}\,\underline{z} = \underline{0}$ durch Bildung einer quadratischen Norm zu minimieren:

$$\underline{B}\,\underline{u}_z + \underline{E}\,\underline{z} = \underline{e}'$$

Die quadratische Norm lautet damit:

$$\underline{e}'^T\,\underline{e}' = \left(\underline{B}\,\underline{u}_z + \underline{E}\,\underline{z}\right)^T \left(\underline{B}\,\underline{u}_z + \underline{E}\,\underline{z}\right)$$

$$= \underline{u}_z^T\,\underline{B}^T\,\underline{B}\,\underline{u}_z + \underbrace{\underline{u}_z^T\,\underline{B}^T\,\underline{E}}_{(1,1)}\,\underline{z} + \underbrace{\underline{z}^T\,\underline{E}^T\,\underline{B}\,\underline{u}_z}_{(1,r)\,(r,n)\,(n,p)\,(p,1)} + \underline{z}^T\,\underline{E}^T\,\underline{E}\,\underline{z}$$

$$= \underline{u}_z^T\,\underline{B}^T\,\underline{B}\,\underline{u}_z + 2\,\underline{u}_z^T\,\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z} + \underline{z}^T\,\underline{E}^T\,\underline{E}\,\underline{z}$$

Gesucht ist das Minimum bezüglich $\underline{u}_z$:

$$\frac{\partial(\underline{e}'^T\,\underline{e}')}{\partial\,\underline{u}_z} = 2\,\underline{B}^T\,\underline{B}\,\underline{u}_z + 2\,\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z} \overset{!}{=} 0$$

Die Lösung kann mit der Pseudoinversen der Eingangsmatrix $\underline{B}$ angegeben werden:

$$\underline{u}_z = -\underset{(p,p)}{(\underline{B}^T\,\underline{B})^{-1}}\,\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z} = -\underline{B}^+\,\underline{E}\,\underline{z}$$

Die Störkompensation wird damit über folgendes erweitertes Regelgesetz erreicht:

$$\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x} + \underline{S}\,\underline{w} + \underline{u}_z$$

Hinweis: Die Pseudoinverse kann auch verwendet werden, wenn die Matrix $\underline{B}$ für $p = n$ nicht invertierbar ist.

7.3 Störmodell und Störbeobachter

Bisher wurde der Störgrößenvektor als messbar angenommen. Dies ist häufig nicht der Fall. Deshalb:

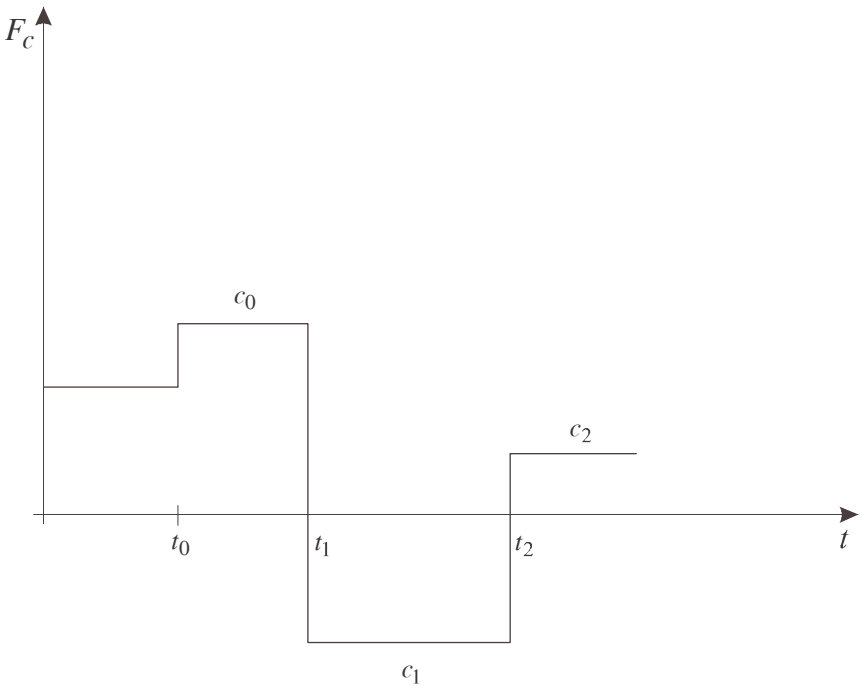
- Modellierung der Störung mit einem Störmodell in Form einer Differentialgleichung
- Entwurf eines Störbeobachters, der einen Schätzwert $\hat{\underline{z}}$ für die Störgröße $\underline{z}$ liefert. Dieser wird dann im Ansatz von Abschnitt 7.3 zur Kompensation verwendet.

Beispiele:

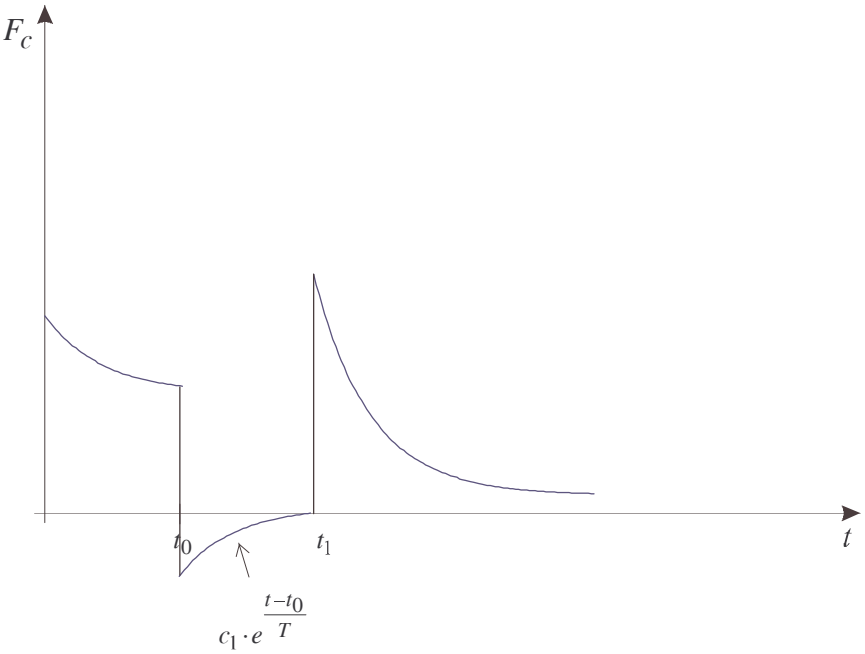
1. Harmonisches Störsignal mit bekannter Kreisfrequenz. Differentialgleichung 2. Ordnung als Störmodell:

$$\ddot{z} + \omega_0{}^2\,z = 0$$

2. Reibkraft bei mechanischen Systemen als stückweise konstante Funktion
Beschreibung mit einem Integrator als Störmodell. Differentialgleichung: $\dot{F}_C = 0$



3. Störung eines verfahrenstechnischen Prozesses:



Differentialgleichung 1. Ordnung als Störmodell:

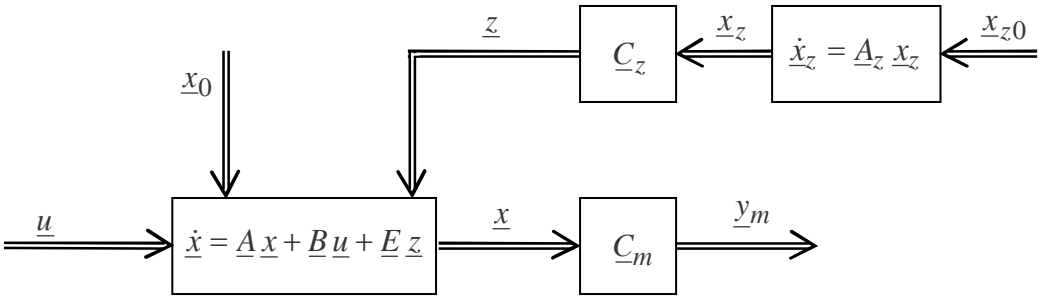
$$T\,\dot{z} + z = 0$$

Verallgemeinerte Darstellung des Störmodells im Zustandsraum:

$$\begin{aligned}\underline{\dot{x}}_z &= \underline{A}_z\,\underline{x}_z\\ \underline{z} &= \underline{C}_z\,\underline{x}_z\end{aligned}$$

Dieses Zustandsraummodell enthält keinen Steuereingang, was dem Wesen einer Störung entspricht. Obige Differentialgleichung ist somit immer eine homogene Differentialgleichung, deren Lösung durch bekannte Anfangsbedingungen determiniert ist.

Erweitertes Streckenmodell:



$$\begin{aligned}\underline{\dot{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{E}\,\underline{C}_z\,\underline{x}_z + \underline{B}\,\underline{u}\\ \underline{\dot{x}}_z &= \underline{A}_z\,\underline{x}_z\\ \underline{y}_m &= \underline{C}_m\,\underline{x}\end{aligned}$$

Das erweiterte Zustandsraummodell mit Störgrößen lautet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{\dot{x}}\\ \underline{\dot{x}}_z\end{bmatrix}}_{\underline{x}'} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c}\underline{A} & \underline{E}\,\underline{C}_z\\ \hline \underline{0} & \underline{A}_z\end{array}\right]}_{\underline{A}'}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{x}_z\end{bmatrix}}_{\underline{x}'} + \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}\\ \underline{0}\end{bmatrix}}_{\underline{B}'}\underline{u}$$

$$\underbrace{\underline{y}_m}_{\underline{y}'_m} = \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{C}_m & \underline{0}\end{bmatrix}}_{\underline{C}'_m}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{x}_z\end{bmatrix}}_{\underline{x}'}$$

Idee: Beobachterentwurf für das erweiterte Zustandsraummodell einschließlich Störgrößen

Entwurf eines vollständigen Beobachters

$$\underline{\dot{\hat{x}}}' = (\underline{A}' - \underline{H}'\,\underline{C}'_m)\,\underline{\hat{x}}' + \underline{H}'\,\underline{y}_m + \underline{B}'\,\underline{u}$$

mit $\quad \underline{A}' = \begin{bmatrix}\underline{A} & \underline{E}\,\underline{C}_z\\ \underline{0} & \underline{A}_z\end{bmatrix},\quad \underline{B}' = \begin{bmatrix}\underline{B}\\ \underline{0}\end{bmatrix},\quad \underline{C}'_m = \begin{bmatrix}\underline{C}_m & \underline{0}\end{bmatrix},\quad \underline{\hat{x}}' = \begin{bmatrix}\underline{\hat{x}}\\ \underline{\hat{x}}_z\end{bmatrix}$

Der Entwurf von $\underline{H}'$ erfolgt mit dem bekannten Beobachterentwurfsverfahren. Für die Rekonstruktion von $\underline{\hat{z}}$ gilt:

$$\underline{\hat{z}} = \underline{C}_z \, \underline{x}_z$$

Entwurf eines reduzierten Beobachters in Form eines reinen Störgrößenbeobachters:

$$\underline{C}_m = \underline{I} \qquad \rightarrow \qquad \underline{y}_m = \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_z \\ \dot{\underline{y}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_z & \underline{0} \\ \underline{E}\,\underline{C}_z & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_z \\ \underline{y}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{B} \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\dot{\underline{\hat{x}}}_z = (\underline{A}_z - \underline{H}\,\underline{E}\,\underline{C}_z)\underline{\hat{x}}_z + \underline{H}(\dot{\underline{y}}_m - \underline{A}\,\underline{y}_m - \underline{B}\,\underline{u})$$

Substitution:

$$\underline{\hat{x}}_{Rz} = \underline{\hat{x}}_z - \underline{H}\,\underline{y}_m$$

$$\dot{\underline{\hat{x}}}_{Rz} = \left(\underline{A}_z - \underline{H}\,\underline{E}\,\underline{C}_z\right)\underline{\hat{x}}_{Rz} - \underline{H}\,\underline{B}\,\underline{u} + \left[(\underline{A}_z - \underline{H}\,\underline{E}\,\underline{C}_z)\underline{H} - \underline{H}\,\underline{A}\right]\underline{y}_m$$

$$\underline{\hat{z}} = \underline{C}_z \left(\underline{\hat{x}}_{Rz} + \underline{H}\,\underline{y}_m\right)$$

Mit diesem Schätzwert kann die Störgrößenaufschaltung realisiert werden:

$$\underline{u}_z = -\left(\underline{B}^T\,\underline{B}\right)^{-1}\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z} = -\underline{B}^+\,\underline{E}\,\underline{z}$$

7.4 PI-Zustandsregler

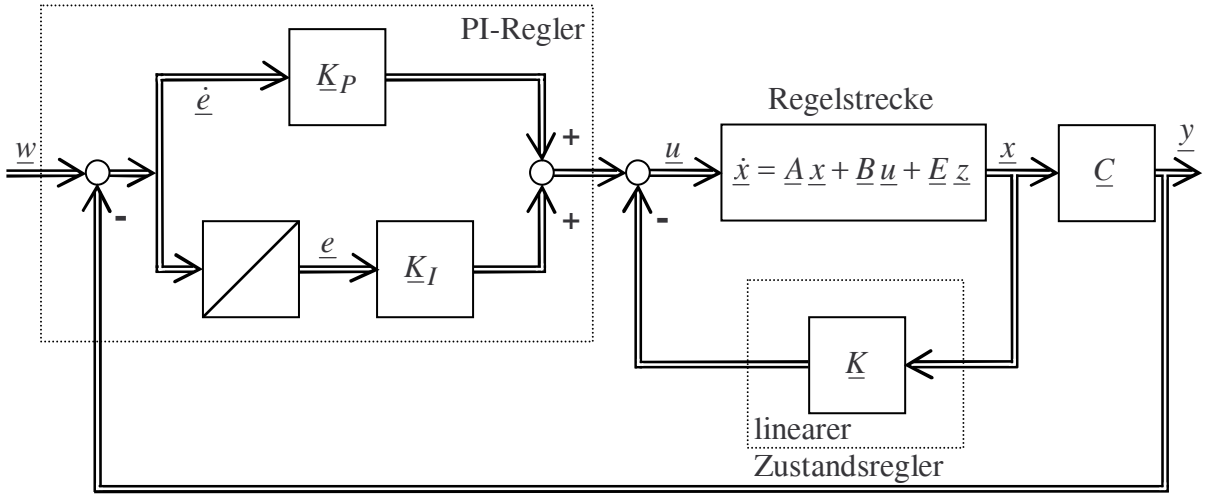
Beim Einwirken von Störungen auf eine Zustandsregelung kann unter Umständen die stationäre Genauigkeit hinsichtlich der Regelgrößen verloren gehen.

Idee: Statt einer beobachtergestützten Störgrößenkompensation wird eine zusätzliche PI-Regelschleife eingeführt.

Vorteile:
- es ist kein Störmodell erforderlich.
- durch den I-Anteil im Regler werden sämtliche konstanten Störungen ausgeglichen.

Nachteil:
- die Systemordnung wird durch zusätzliche Integratoren erhöht.

Struktur:



Ziel: Führungsverhalten mit $p = q$ (die Anzahl der Führungsgrößen soll der Anzahl der Regelgrößen entsprechen)

Forderung im stationären Zustand:

$$\dot{\underline{e}} = \underline{0}, \quad \underline{y}_\infty = \underline{w}_\infty$$

Frage: Wie sind $\underline{K}_p, \underline{K}_I, \underline{K}$ zu wählen?

Die Betrachtung der Zustandsgleichungen führt auf

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{E}\,\underline{z}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$$

$$\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x} + \underline{K}_p\,\dot{\underline{e}} + \underline{K}_I\,\underline{e}$$

$$\dot{\underline{e}} = \underline{w} - \underline{y}$$

O.B.d.A wird gewählt: $\underline{w} = \underline{0}, \quad \underline{z} = \underline{0}$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

$$\dot{\underline{e}} = -\underline{C}\,\underline{x}$$

$$\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x} - \underline{K}_p \cdot \underline{C}\,\underline{x} + \underline{K}_I\,\underline{e}$$

Das modifizierte Zustandsraummodell lautet damit:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{e}} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ -\underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix}}_{\underline{A}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix}}_{\underline{x}'} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{0} \end{bmatrix}}_{\underline{B}'} \underline{u}$$

$$\underline{u} = -\underbrace{\left[\underline{K} + \underline{K}_p \underline{C} \;\middle|\; -\underline{K}_I\right]}_{\underline{K}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix}}_{\underline{x}'}$$

Das modifizierte System hat die Ordnung $n+q$. Das erweiterte System mit dem PI-Zustandsregler ist steuerbar, wenn das ursprüngliche System steuerbar ist, und wenn zusätzlich die Matrix

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ -\underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix}$$

den Rang $n+q$ besitzt.
Der Reglerentwurf kann mit den Methoden aus Kapitel 5 durchgeführt werden.

Ergebnis:

$$\underline{K}' = \begin{bmatrix} \underline{K}'_{11} & \underline{K}'_{12} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}'_{12} = -\underline{K}_I$$

$$\underline{K}'_{11} = \underline{K} + \underline{K}_p \underline{C}$$

Problem: Verteilung auf $\underline{K}_p$ und $\underline{K}$?

1) $\underline{K}_p$ wählen; anschließende Bestimmung von $\underline{K}$ führt auf

$$\underline{K} = \underline{K}'_{11} - \underline{K}_p \underline{C}$$

2) Idee der Vorsteuerung einbringen: System sei zunächst in Ruhe, d.h. $\underline{y} = \underline{w} = \underline{0}$.
Nach $t = 0$: Aufschaltung einer sprungförmigen Führungsgröße $\underline{w} \neq \underline{0}$

Ziel: am Eingang $\underline{u}$ sollte möglichst schnell der **stationäre Wert** der Eingangsgröße $\underline{u}_\infty$ anliegen.
Für $p = q$ ergibt die Betrachtung des stationären Zustands:

$$\left.\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{A}\,\underline{x}_\infty + \underline{B}\,\underline{u}_\infty \\ \underline{y}_\infty &= \underline{C}\,\underline{x}_\infty \end{aligned}\right\} \underline{y}_\infty = -\underline{C}\,\underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}\,\underline{u}_\infty$$

Mit $\underline{y}_\infty = \underline{w}_\infty$ folgt:

$$\underline{u}_\infty = -(\underline{C}\,\underline{A}^{-1} \cdot \underline{B})^{-1} \underline{w}_\infty$$

Resultat: $\underline{K}_p = -(\underline{C}\;\;\underline{A}^{-1} \cdot \underline{B})^{-1}$ und $\underline{K} = \underline{K}'_{11} - \underline{K}_p \underline{C}$

Literaturverzeichnis

Unbehauen, H.: *Regelungstechnik 2: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme.* Vieweg-Verlag, Braunschweig, 9. Auflage, 2007.

Föllinger, O.; Franke, D.: *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme mit einer Anleitung zur Matrizenrechnung*. Oldenbourg-Verlag, München, 1982.

Föllinger, O.: *Regelungstechnik.* Hüthig-Verlag, Heidelberg, 8. Auflage, 2005.

Freund, E.: *Regelungssysteme im Zustandsraum I.* Oldenbourg-Verlag, München, 1987.

Freund, E.: *Regelungssysteme im Zustandsraum II.* Oldenbourg-Verlag, München, 1987.

Lunze, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen , Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen.* Springer-Verlag, Berlin, 6. Auflage, 2007.

Lunze, J.: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung.* Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage, 2006.

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Lineare Algebra

- **Vektoren**

  1. Zeilenvektor

  $$\underline{z}^T = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in I\!R^{1\times n}$$

  2. Spaltenvektor

  $$\underline{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in I\!R^{n\times 1}$$

- **Matrizen**

  1. Darstellung

  $$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in I\!R^{m\times n}$$

  $$\underline{B} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2 \ldots, \underline{b}_n) \text{ Spaltendarstellung}$$

  $$\underline{C} = \begin{pmatrix} \underline{c}_1^T \\ \underline{c}_2^T \\ \vdots \\ \underline{c}_m^T \end{pmatrix} \text{ Zeilendarstellung}$$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

2. Einheitsmatrix

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in I\!R^{n \times n}$$

3. obere Dreiecksmatrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in I\!R^{n \times n}$$

4. Diagonalmatrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in I\!R^{n \times n}$$

5. Nullmatrix

$$\underline{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in I\!R^{m \times n}$$

6. Rechenregeln

$$(\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot \underline{B} = \underline{A}_1 \cdot \underline{B} + \underline{A}_2 \cdot \underline{B}$$
$$\underline{A} \cdot (\underline{B}_1 + \underline{B}_2) = \underline{A} \cdot \underline{B}_1 + \underline{A} \cdot \underline{B}_2$$
$$\alpha \cdot (\underline{A} \cdot \underline{B}) = (\alpha \cdot \underline{A}) \cdot \underline{B} = \underline{A} \cdot (\alpha \cdot \underline{B}) \quad \text{für } \alpha \in I\!R$$
$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$$
$$\underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{A}$$
$$\underline{O} \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{O} = \underline{O}$$
im Allgemeinen $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

- **Transponierte Matrix**

1. Darstellung

$$\underline{A} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in I\!R^{m \times n}$$

$$\underline{A}^T = \begin{pmatrix} \underline{a}_1^T \\ \underline{a}_2^T \\ \vdots \\ \underline{a}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in I\!R^{n \times m}$$

2. Rechenregeln

$$\begin{aligned} (\underline{A} + \underline{B})^T &= \underline{A}^T + \underline{B}^T \\ (\alpha \cdot \underline{A})^T &= \alpha \cdot \underline{A}^T \\ (\underline{A}^T)^T &= \underline{A} \\ (\underline{A} \cdot \underline{B})^T &= \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T \end{aligned}$$

- **Rang einer $m \times n$ Matrix**

$$\begin{aligned} \text{Rang}(\underline{A}) &= \text{Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von } \underline{A} \\ &= \text{Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen von } \underline{A} \end{aligned}$$

$$\text{Rang}(\underline{A}^T) = \text{Rang}(\underline{A})$$

$$\text{Rang}(\underline{P}\,\underline{A}\underline{Q}) = \text{Rang}(\underline{A}) \text{ für invertierbare Matrizen } \underline{P} \text{ und } \underline{Q}$$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

- **Invertierbare Matrizen**

1. Definition: Eine $n \times n$ Matrix $\underline{A}$ heißt invertierbar, wenn es eine $n \times n$ Matrix $\underline{B}$ gibt, so daß gilt $\underline{AB} = \underline{BA} = \underline{I}$.

2. Rechenregeln

$$\begin{aligned}
&\underline{I} = \underline{I}^{-1} \\
&(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A} \\
&(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1} \\
&(\underline{A}^{T})^{-1} = (\underline{A}^{-1})^{T}
\end{aligned}$$

3. Äquivalente Aussagen

$\underline{A}$ ist invertierbar
Es gibt eine $n \times n$-Matrix $\underline{B}$ mit $\underline{AB} = \underline{I}$
Es gibt eine $n \times n$-Matrix $\underline{C}$ mit $\underline{CA} = \underline{I}$
$\underline{Ax} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$
$\mathrm{Rang}(\underline{A}) = n$

4. Berechnung der Inversen Matrix mit Adjungierten-Verfahren

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} (a_{ij})^T$$

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\underline{A}_{ij})$$

$$\underline{A}_{ij} = \begin{pmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,j-1} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{m,n}
\end{pmatrix}$$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

5. Berechnung der Inversen Matrix mit Gauß-Jordan-Verfahren

$\underline{A}$			$\underline{I}$		
1	2	3	1	0	0
2	1	0	0	1	0
1	0	2	0	0	1
1	2	3	1	0	0
0	−3	−6	−2	1	0
0	−2	−1	−1	0	1
1	2	3	1	0	0
0	−3	−6	−2	1	0
0	0	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
1	2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	−1
0	1	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{3}$
0	0	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	0	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$
0	1	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{3}$
0	0	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
$\underline{I}$			$\underline{A}^{-1}$		

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

- **Determinanten von $n \times n$ Matrizen**

1. Entwicklungssatz für $n \geq 3$

$$|\underline{A}| = \det \underline{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\underline{A}_{ij})$$

2. Entwicklungssatz für $n = 2$

$$\det \underline{A} = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3. Entwicklungssatz für $n = 3$

$$\begin{aligned} \det \underline{A} &= \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

4. Rechenregeln

$$\begin{aligned} &\det(\underline{A}^T) = \det \underline{A} \\ &\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B} \\ &\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det(\underline{B} \cdot \underline{A}) \\ &\text{existiert} \underline{A}^{-1} \Leftrightarrow \det \underline{A} \neq 0 \\ &\text{Rang}(\underline{A}) < n \Leftrightarrow \det \underline{A} = 0 \end{aligned}$$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

- **Lineare Gleichungssysteme**

1. Lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

2. Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

3. Kurzschreibweise

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

4. Das Gauß'sche Lösungsverfahren

$$(\underline{A} \mid \underline{b}) := \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right).$$

   (a) Elementare Zeilenumformungen an $(\underline{A} \mid \underline{b})$
      - Vertauschen zweier Zeilen
      - Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\alpha \neq 0$
      - Addition bzw. Subtraktion des α-fachen einer Zeile zu einer anderen

   (b) Vorwärtselimination

   (c) Ziel: Zeilen-Stufen-Form von $(\underline{A} \mid \underline{b})$

   (d) Rückwärtssubstitution

5. Lösbarkeit
   Das lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn

$$\text{Rang}(\underline{A} \mid \underline{b}) = \text{Rang}(\underline{A})$$

   gilt.

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

- **Eigenwerte und Eigenvektoren**

1. Definition
   Eine Zahl $\lambda \in C$ heißt Eigenwert einer Matrix $\underline{A} \in I\!R^{n \times n}$, wenn es wenigstens einen Spaltenvektor $\underline{v} \in I\!R^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, gibt mit

   $$\underline{A}\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v}.$$

   Jeder Vektor $\underline{v} \neq \underline{0}$, der diese Gleichung erfüllt, heißt Eigenvektor von $\underline{A}$ zum Eigenwert λ.

2. Berechnung von Eigenwerten
   Zur Berechnung der Eigenwerte einer $n \times n$ Matrix betrachtet man das charakteristische Polynom von $\underline{A}$

   $$p_{\underline{A}}(\lambda) \;\; := \;\; \det(\lambda \underline{I} - \underline{A})$$

   Es ist $\lambda \in C$ genau dann ein Eigenwert von $\underline{A}$, wenn λ eine Nullstelle von $p_{\underline{A}}(\lambda)$ ist.

3. Berechnung von Eigenvektoren

   (a) Berechnung der Eigenwerte von $\underline{A}$ durch Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms.
   (b) Charakteristisches Polynom

   $$p_{\underline{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

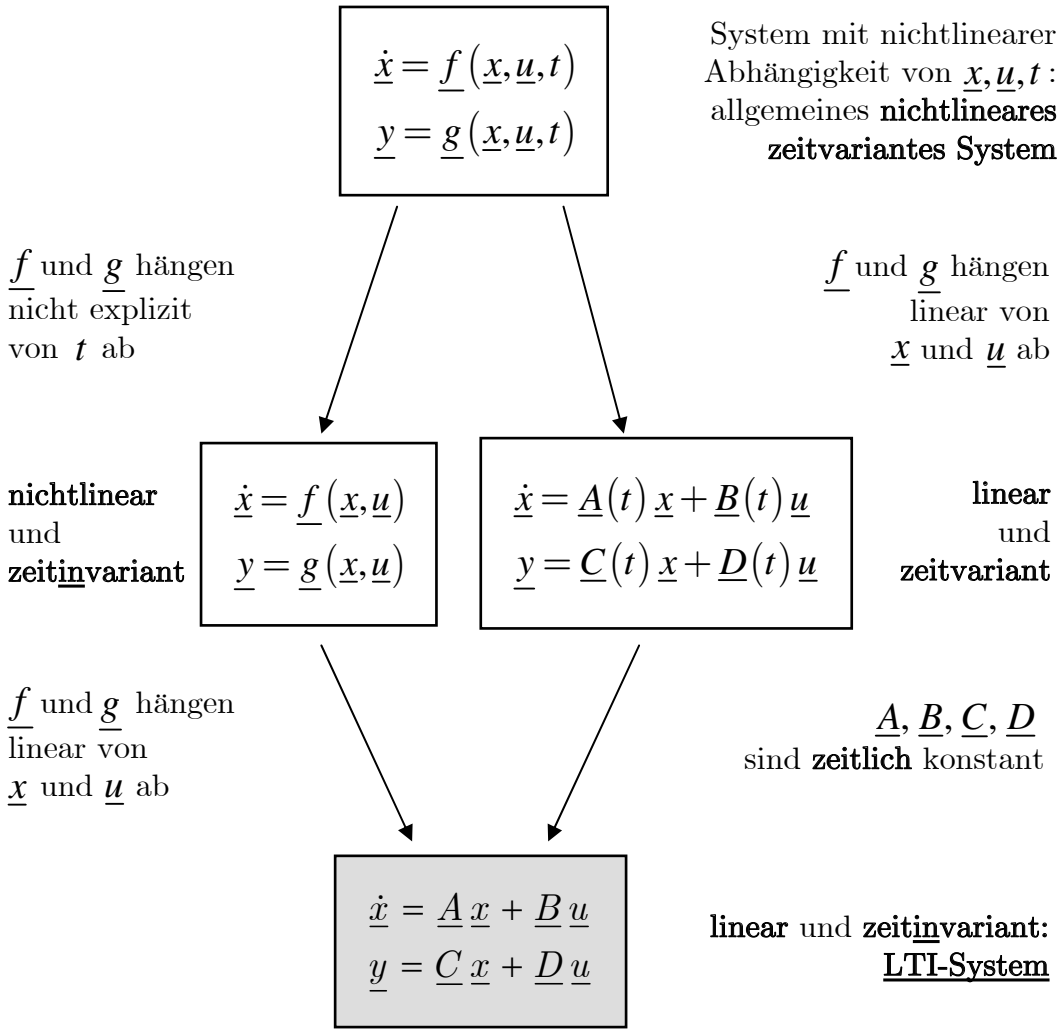
   (c) Die Vielfachheit k_i der Nullstelle λ_i heißt algebraische Vielfachheit
   (d) Zu jedem Eigenwert λ_i, $1 \leq i \leq r$, berechnet man den Lösungsraum des linearen Gleichungssystem $(\underline{A} - \lambda_i \underline{I})\underline{v} = \underline{0}$. Jede Lösung $\underline{v} \neq \underline{0}$ ist Eigenvektor zu λ_i;

   $$V(\lambda_i) := \{\underline{v} \in C^n \mid (\underline{A} - \lambda_i \underline{I})\underline{v} = \underline{0}\}$$

   heißt Eigenraum zum Eigenwert λ_i. Man nennt $\mathrm{Dim}(V(\lambda_i))$ (die Dimension des Eigenraumes) die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ_i.
   (e) Algebraische und geometrische Vielfachheit stimmen im allgemeinen nicht überein.

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Systemklassen im Zustandsraum



Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Lineare zeitinvariante Systeme im Zustandsraum

1. Zustandraumdarstellung (Zustandsgleichungen)

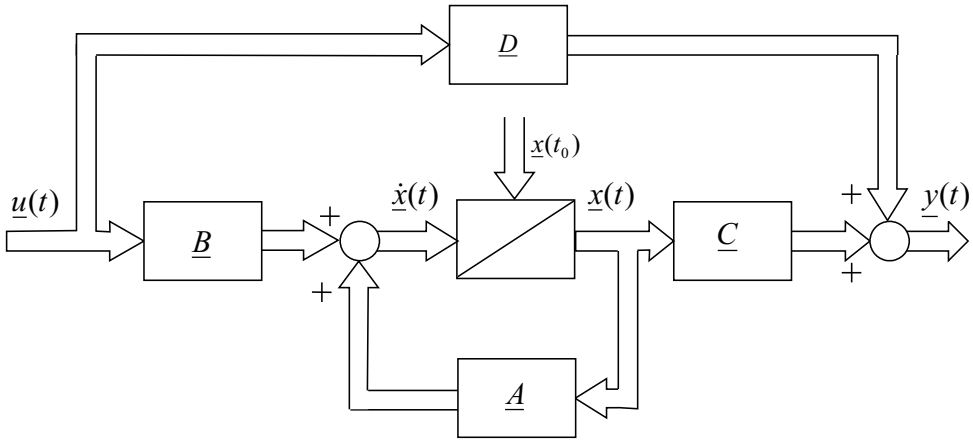
$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t), \qquad \text{Zustandsdifferentialgleichung}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,u(t). \qquad \text{Ausgangsgleichung}$$

Hierbei sind:

$\underline{x}(t)$	Zustandsvektor,	$\underline{x} \in R^{(nx1)}$
$\underline{u}(t)$	Eingangsvektor,	$\underline{u} \in R^{(px1)}$
$\underline{y}(t)$	Ausgangsvektor,	$\underline{y} \in R^{(qx1)}$
$\underline{A}(t)$	Systemmatrix,	$\underline{A} \in R^{(nxn)}$
$\underline{B}(t)$	Eingangsmatrix, bzw. Stelleingriffsmatrix	$\underline{B} \in R^{(nxp)}$
$\underline{C}(t)$	Ausgangsmatrix,	$\underline{C} \in R^{(qxn)}$
$\underline{D}(t)$	Durchgangsmatrix,	$\underline{D} \in R^{(qxp)}$

2. Blockschaltbild



Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit

Definition der Beobachtbarkeit:

- Ein Zustand $\underline{x}(t_0)$ eines dynamischen Systems Σ heißt zum Zeitpunkt t_0 *beobachtbar*, wenn sich allein aus Kenntnis des Eingangs $\underline{u}(t)$ und des Ausgangs $\underline{y}(t)$ über ein endliches Zeitintervall $[t_0, t_e]$ der Zustand $\underline{x}(t_0)$ bestimmen läßt.

- Ist Σ für alle Anfangszustände $\underline{x}(t_0)$ beobachtbar, so heißt Σ *vollständig beobachtbar*.

Definition der Steuerbarkeit:

- Ein Zustand $\underline{x}(t_0)$ eines dynamischen Systems Σ heißt zum Zeitpunkt t_0 *steuerbar*, wenn sich durch passende Wahl einer Steuerung $\underline{u}(t)$ der Zustand $\underline{x}(t_0)$ in einem endlichen Zeitintervall $[t_0, t_e]$ $(t_0 < t_e < \infty)$ in den vorgegebenen Endzustand $\underline{x}_e(t_e)$ Überführen lässt.

- Ist Σ für alle Anfangszustände $\underline{x}_0(t_0)$ steuerbar, so heißt Σ *vollständig steuerbar*.

Im folgenden beschränken wir uns auf lineare zeitinvariante Systeme $\Sigma : \{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}\}$.
Es sei $\underline{A}$ eine $(n,n)-$Matrix, $\underline{B}$ eine $(n,p)-$Matrix, $\underline{C}$ eine $(q,n)-$Matrix und $\underline{D}$ eine $(q,p)-$Matrix.

Kriterium für vollständige Beobachtbarkeit (Kalman):

Ein zeitinvariantes System mit der Zustandsdifferentialgleichung $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{u}$ und der Messgleichung $\underline{y} = \underline{C}\ \underline{x} + \underline{D}\ \underline{u}$ ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Matrix

$$\underline{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\ \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C}\ \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (n \cdot q, n) - \text{Matrix}$$

den Rang n besitzt. (D. h. n Zeilen von $\underline{Q}_B$ müssen linear unabhängig sein.)
$\underline{Q}_B$ heißt *Beobachtbarkeitsmatrix*.

Kriterium für vollständige Steuerbarkeit (Kalman):

Ein zeitinvariantes System mit der Zustandsdifferentialgleichung $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{u}$ ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Matrix

$$\underline{Q}_S = [\underline{B} \vdots \underline{A}\ \underline{B} \vdots \underline{A}^2\ \underline{B} \vdots \cdots \vdots \underline{A}^{n-1}\ \underline{B}] \qquad (n, n \cdot p) - \text{Matrix}$$

den Rang n besitzt. (D. h. n Spalten von $\underline{Q}_S$ müssen linear unabhängig sein.)
$\underline{Q}_S$ heißt *Steuerbarkeitsmatrix*.

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Lineare Zustandsraumtransformationen

1. **Durchführung einer linearen Zustandsraumtransformation**

   (a) Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes Eingrößensystem mit der Zustandsraumdarstellung

   $$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0, \\ y(t) &= \underline{c}^T\,\underline{x}(t). \end{aligned}$$

   (b) Es werden neue Zustände $\underline{\tilde{x}}$ eingeführt, indem der ursprüngliche Zustandsvektor $\underline{x}$ von links mit einer nichtsingulären Matrix $\underline{T}$ multipliziert wird, also

   $$\underline{\tilde{x}} = \underline{T}\,\underline{x}$$

   gebildet wird.

   (c) Die Systemdarstellung in den neuen Zuständen $\underline{\tilde{x}}$ ist dann durch

   $$\begin{aligned} \dot{\underline{\tilde{x}}}(t) &= \underline{\tilde{A}}\,\underline{\tilde{x}}(t) + \underline{\tilde{b}}\,u(t), \quad \underline{\tilde{x}}(0) = \underline{\tilde{x}}_0, \\ y(t) &= \underline{\tilde{c}}^T\,\underline{\tilde{x}}(t) \end{aligned}$$

   gegeben. Hierbei gelten für die neuen Systemmatrizen bzw. -vektoren die Beziehungen

   $$\underline{\tilde{A}} = \underline{T}\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1} \quad , \quad \underline{\tilde{b}} = \underline{T}\,\underline{b} \quad , \quad \underline{\tilde{c}}^T = \underline{c}^T\,\underline{T}^{-1} \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{x}}_0 = \underline{T}\,\underline{x}_0.$$

2. **Transformation auf Steuerung- bzw. Beobachtungsnormalform**
   In der nachfolgenden Tabelle sind die Transformationsmatrizen angegeben, mit deren Hilfe ein gegebenes System in Steuerungsnormalform erster bzw. zweiter Art (SNF1 bzw. SNF2) oder in Beobachtungsnormalform erster bzw. zweiter Art (BNF1 bzw. BNF2) transformiert werden kann.

Von \ Nach ↓ →	Original	SNF1	SNF2	BNF1	BNF2
Original	$\underline{I}$	$\underline{Q}_S^{-1}$	$\underline{\bar{\bar{Q}}}_S\underline{Q}_S^{-1}$	$\underline{Q}_B$	$\underline{\hat{\hat{Q}}}_B^{-1}\underline{Q}_B$
SNF1	$\underline{Q}_S$	$\underline{I}$	$\underline{\bar{\bar{Q}}}_S$	$\underline{Q}_B\underline{Q}_S$	$\underline{\hat{\hat{Q}}}_B^{-1}\underline{Q}_B\underline{Q}_S$
SNF2	$\underline{Q}_S\underline{\bar{\bar{Q}}}_S^{-1}$	$\underline{\bar{\bar{Q}}}_S^{-1}$	$\underline{I}$	$\underline{Q}_B\underline{Q}_S\underline{\bar{\bar{Q}}}_S^{-1}$	$\underline{\hat{\hat{Q}}}_B^{-1}\underline{Q}_B\underline{Q}_S\underline{\bar{\bar{Q}}}_S^{-1}$
BNF1	$\underline{Q}_B^{-1}$	$\underline{Q}_S^{-1}\underline{Q}_B^{-1}$	$\underline{\bar{\bar{Q}}}_S\underline{Q}_S^{-1}\underline{Q}_B^{-1}$	$\underline{I}$	$\underline{\hat{\hat{Q}}}_B^{-1}$
BNF2	$\underline{Q}_B^{-1}\underline{\hat{\hat{Q}}}_B$	$\underline{Q}_S^{-1}\underline{Q}_B^{-1}\underline{\hat{\hat{Q}}}_B$	$\underline{\bar{\bar{Q}}}_S\underline{Q}_S^{-1}\underline{Q}_B^{-1}\underline{\hat{\hat{Q}}}_B$	$\underline{\hat{\hat{Q}}}_B$	$\underline{I}$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

3. **Systemmatrizen in Steuerungsnormalform**

(a) Steuerungsnormalform 1. Art

$$\underline{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{\bar{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\bar{c}}^T = \underline{c}^T \underline{T}^{-1} = \underline{c}^T \underline{Q}_S.$$

Steuerbarkeitsmatrix in den ursprünglichen Zuständen

$$\underline{Q}_S = \begin{pmatrix} \underline{b} & \vdots & \underline{A}\,\underline{b} & \vdots & \cdots & \vdots & \underline{A}^{n-1}\underline{b} \end{pmatrix}$$

Steuerbarkeitsmatrix in SNF1

$$\underline{\bar{Q}}_S = \underline{I}_n$$

(b) Steuerungsnormalform 2. Art

$$\underline{\bar{\bar{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{\bar{\bar{b}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\bar{\bar{c}}}^T = \underline{c}^T \underline{T}^{-1} = \underline{c}^T \underline{Q}_S \underline{\bar{\bar{Q}}}_S^{-1}.$$

Steuerbarkeitsmatrix in SNF2

$$\underline{\bar{\bar{Q}}}_S = \begin{pmatrix} \underline{\bar{\bar{b}}} & \vdots & \underline{\bar{\bar{A}}}\,\underline{\bar{\bar{b}}} & \vdots & \cdots & \vdots & \underline{\bar{\bar{A}}}^{\,n-1}\underline{\bar{\bar{b}}} \end{pmatrix}$$

4. **Systemmatrizen in Beobachtungsnormalform**

(a) Beobachtungsnormalform 1. Art

$$\hat{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\underline{b}} = \underline{T}\,\underline{b} = \underline{Q}_B \underline{b}, \quad \hat{\underline{c}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Beobachtbarkeitsmatrix in den ursprünglichen Zuständen

$$\underline{Q}_B = \begin{pmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} \end{pmatrix}$$

(b) Beobachtungsnormalform 2. Art

$$\hat{\hat{\underline{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\hat{\underline{b}}} = \underline{T}\,\underline{b} = \hat{\hat{\underline{Q}}}_B^{-1} \underline{Q}_B \underline{b}, \quad \hat{\hat{\underline{c}}}^T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beobachtbarkeitsmatrix in BNF2

$$\hat{\hat{\underline{Q}}}_B = \begin{pmatrix} \hat{\hat{\underline{c}}}^T \\ \hat{\hat{\underline{c}}}^T \hat{\hat{\underline{A}}} \\ \vdots \\ \hat{\hat{\underline{c}}}^T \hat{\hat{\underline{A}}}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Umwandlung einer rationalen Übertragungsfunktion in Steuerungsnormalform 2. Art (Regelungsnormalform)

Gegeben: Eine rationale Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

bzw. die zugehörige Differentialgleichung:

$$a_n \; y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \; \dot{y}(t) + a_0 \; y(t) = b_0 \; u(t) + b_1 \; \dot{u}(t) + \cdots + b_n \; u^{(n)}(t)$$

Voraussetzungen:
Es sei $a_n \neq 0$, mindestens ein $b_\nu \neq 0$, Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion besitzen keine gemeinsamen Wurzeln. Im folgenden wird $a_n = 1$ gesetzt.
Lösung:
Mit Hilfe eines Ansatzes für die Ausgangsgröße.
Es sei die Zustandsgröße $\bar{\bar{x}}_1$ gerade so gewählt, daß gilt

$$\begin{aligned} y &= b_0 \; \bar{\bar{x}}_1 + b_1 \; \dot{\bar{\bar{x}}}_1 + \cdots + b_{n-1} \; \bar{\bar{x}}_1^{(n-1)} + b_n \; \bar{\bar{x}}_1^{(n)} \\ &=: \underbrace{\left[b_0 + b_1 \; \frac{d}{dt} + \cdots + b_{n-1} \; \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + b_n \; \frac{d^n}{dt^n} \right]}_{\text{Differentialoperator}} \bar{\bar{x}}_1 \end{aligned}$$

damit folgt aus der Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + a_1 \; \frac{d}{dt} + a_0 \right] \cdot \left[b_0 + b_1 \; \frac{d}{dt} + \cdots + b_n \; \frac{d^n}{dt^n} \right] \; \bar{\bar{x}}_1 = \left[b_0 + b_1 \; \frac{d}{dt} + \cdots + b_n \; \frac{d^n}{dt^n} \right] u$$

Vertauschen der links stehenden Differentialoperatoren und Zusammenfassen

$$\left[b_0 + b_1 \; \frac{d}{dt} + \cdots + b_n \; \frac{d^n}{dt^n} \right] \cdot \left\{ \underbrace{\frac{d^n \bar{\bar{x}}_1}{dt^n}}_{\dot{\bar{\bar{x}}}_n} + a_{n-1} \; \underbrace{\frac{d^{n-1} \bar{\bar{x}}_1}{dt^{n-1}}}_{\bar{\bar{x}}_n} + \cdots + a_1 \; \underbrace{\frac{d \bar{\bar{x}}_1}{dt}}_{\bar{\bar{x}}_2} + a_0 \; \bar{\bar{x}}_1 - u \right\} = 0$$

Diese Beziehung ist erfüllt für $\{ \ldots \} = 0$. Daraus folgen die Zustandsgleichungen

$$\dot{\bar{\bar{x}}}_1 = \bar{\bar{x}}_2 \; , \quad \dot{\bar{\bar{x}}}_2 = \bar{\bar{x}}_3 \; , \ldots , \; \dot{\bar{\bar{x}}}_{n-1} = \bar{\bar{x}}_n \; , \quad \dot{\bar{\bar{x}}}_n = -a_{n-1} \; \bar{\bar{x}}_n - \cdots - a_1 \; \bar{\bar{x}}_2 - a_0 \; \bar{\bar{x}}_1 + u$$

und (nach Ansatz) die Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} y &= b_0 \; \bar{\bar{x}}_1 + b_1 \; \bar{\bar{x}}_2 + \cdots + b_{n-1} \; \bar{\bar{x}}_n + b_n \; \dot{\bar{\bar{x}}}_n \\ &= b_0 \; \bar{\bar{x}}_1 + b_1 \; \bar{\bar{x}}_2 + \cdots + b_{n-1} \; \bar{\bar{x}}_n + b_n \; [-a_{n-1} \; \bar{\bar{x}}_n - \cdots - a_1 \; \bar{\bar{x}}_2 - a_0 \; \bar{\bar{x}}_1 + u] \\ &= (b_0 - a_0 \; b_n) \; \bar{\bar{x}}_1 + (b_1 - a_1 \; b_n) \; \bar{\bar{x}}_2 + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1} \; b_n) \; \bar{\bar{x}}_n + b_n \; u \end{aligned}$$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

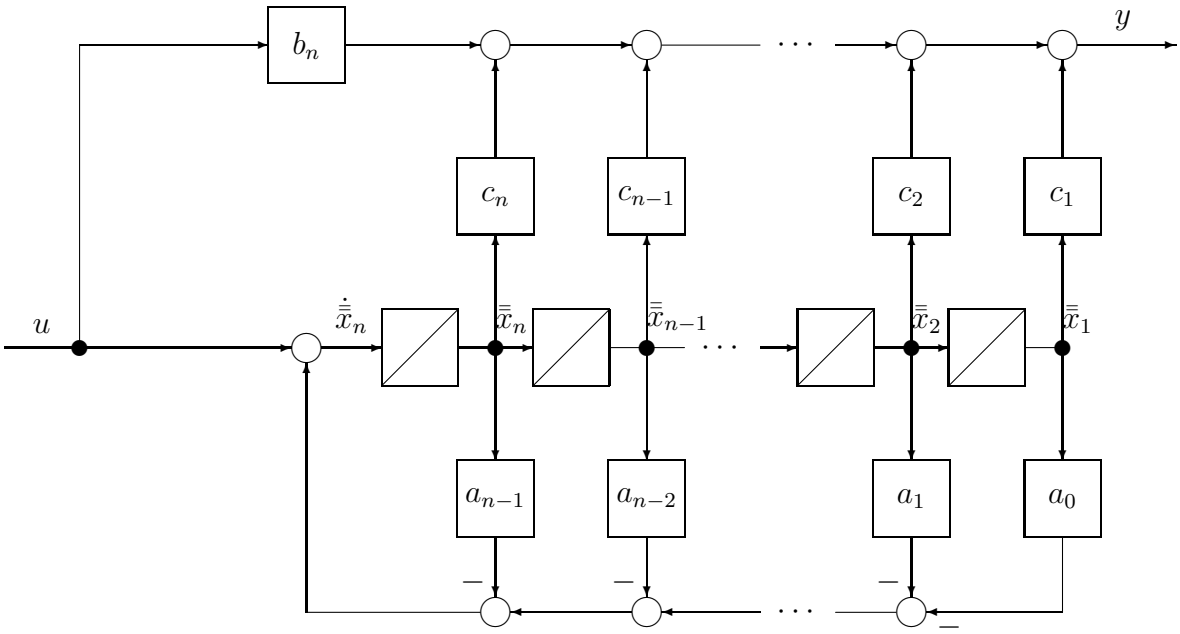
Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\underline{\bar{x}}} = \underline{\bar{A}}\,\underline{\bar{x}} + \underline{\bar{b}}\,u\,, \qquad y = \underline{\bar{c}}^T\,\underline{\bar{x}} + \bar{d}\,u,$$

mit den Matrizen

$$\underline{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{\bar{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\bar{c}} = \begin{bmatrix} \underbrace{b_0 - a_0\ b_n}_{c_1} \\ \underbrace{b_1 - a_1\ b_n}_{c_2} \\ \vdots \\ \underbrace{b_{n-1} - a_{n-1}\ b_n}_{c_n} \end{bmatrix}, \quad \bar{d} = b_n$$

Blockschaltbild:



Gegenüberstellung:

	Beobachtungsnormalform 2.Art:		Steuerungsnormalform 2.Art:
Setzt man	$\dot{\hat{\underline{x}}} = \hat{\underline{A}}\,\hat{\underline{x}} + \hat{\underline{b}}\,u$	und	$\dot{\bar{\underline{x}}} = \bar{\underline{A}}\,\bar{\underline{x}} + \bar{\underline{b}}\,u\,,$
	$y = \hat{\underline{c}}^T\,\hat{\underline{x}} + \hat{d}\,u$	und	$y = \bar{\underline{c}}^T\,\bar{\underline{x}} + \bar{d}\,u\,,$

so ist

$$\hat{\underline{A}} = \bar{\underline{A}}^T\,,$$
$$\hat{\underline{b}} = \bar{\underline{c}}\,,$$
$$\hat{\underline{c}} = \bar{\underline{b}}\,,$$
$$\hat{d} = \bar{d}\,.$$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Umwandlung einer rationalen Übertragungsfunktion in Beobachtungsnormalform (Beobachtungsnormalform 2. Art)

Gegeben: Eine rationale Übertragungsfunktion

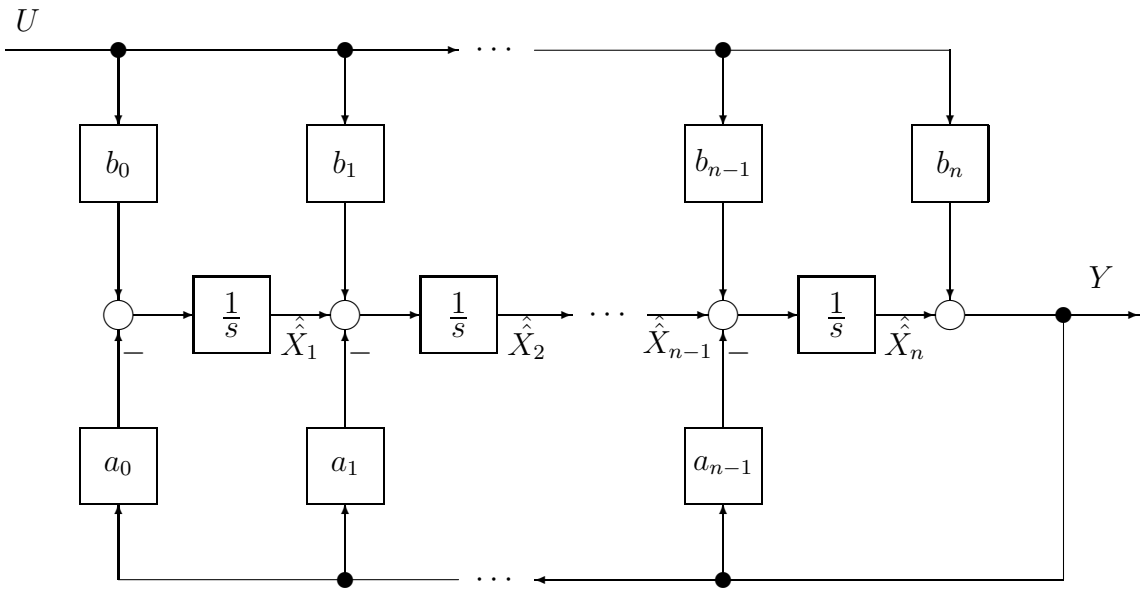
$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

bzw. die zugehörige Differentialgleichung:

$$a_n \; y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \; \dot{y}(t) + a_0 \; y(t) = b_0 \; u(t) + b_1 \; \dot{u}(t) + \cdots + b_n \; u^{(n)}(t)$$

Voraussetzungen:
Es sei $a_n \neq 0$, mindestens ein $b_\nu \neq 0$, Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion besitzen keine gemeinsamen Wurzeln. Im folgenden wird $a_n = 1$ gesetzt.

Lösung:
Mit Hilfe des Strukturbildes rationaler Übertragungsfunktionen



Definition der Zustandsvariablen:
Man liest ab

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{X}}_1 &= \frac{1}{s}\,(\; b_0\; U \quad -a_0\; Y) \\
\hat{\hat{X}}_2 &= \frac{1}{s}\,(\; b_1\; U \quad -a_1\; Y \quad +\hat{\hat{X}}_1) \\
&\;\;\vdots \\
\hat{\hat{X}}_n &= \frac{1}{s}\,(\; b_{n-1}\; U \quad -a_{n-1}\; Y \quad +\hat{\hat{X}}_{n-1}) \\
\text{sowie} & \\
Y &= \quad b_n\; U \quad +\hat{\hat{X}}_n
\end{aligned}$$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Transformation in den Zeitbereich

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\hat{x}}}_1 &= b_0\, u \quad -a_0\, y \\
\dot{\hat{\hat{x}}}_2 &= b_1\, u \quad -a_1\, y \quad +\hat{\hat{x}}_1 \\
&\vdots \\
\dot{\hat{\hat{x}}}_n &= b_{n-1}\, u \quad -a_{n-1}\, y \quad +\hat{\hat{x}}_{n-1}
\end{aligned}
$$

sowie

$$
y = b_n\, u \quad +\hat{\hat{x}}_n
$$

Damit

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\hat{x}}}_1 &= \quad -a_0\, \hat{\hat{x}}_n \quad + (b_0 - a_0\, b_n)\, u \\
\dot{\hat{\hat{x}}}_2 &= \hat{\hat{x}}_1 \quad -a_1\, \hat{\hat{x}}_n \quad + (b_1 - a_1\, b_n)\, u \\
&\vdots \\
\dot{\hat{\hat{x}}}_n &= \hat{\hat{x}}_{n-1} \quad -a_{n-1}\, \hat{\hat{x}}_n \quad + (b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n)\, u
\end{aligned}
$$

Zustandsraumdarstellung:

$$
\dot{\hat{\hat{\underline{x}}}} = \hat{\hat{\underline{A}}}\, \hat{\hat{\underline{x}}} + \hat{\hat{\underline{b}}}\, u\,, \qquad y = \hat{\hat{\underline{c}}}^T\, \hat{\hat{\underline{x}}} + \hat{\hat{d}}\, u
$$

mit den Matrizen

$$
\hat{\hat{\underline{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\hat{\underline{b}}} = \begin{bmatrix} b_0 - a_0\, b_n \\ b_1 - a_1\, b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\hat{\underline{c}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\hat{d}} = b_n
$$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Reglerentwurf

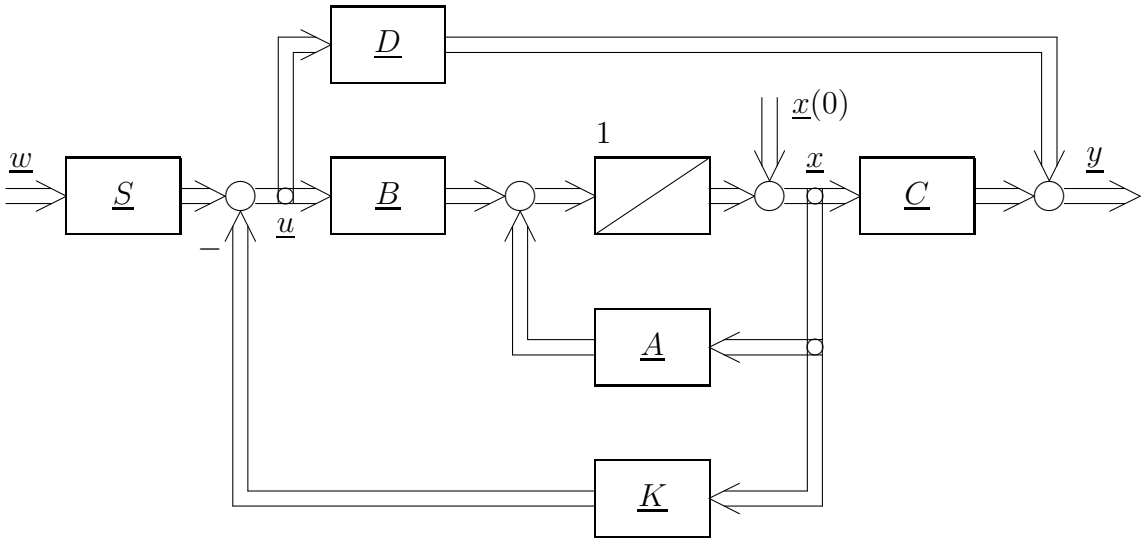
Darstellung des geschlossenen Systems mit Zustandsregler:

$$\begin{aligned}
\text{Zustandsdifferentialgleichung:} \quad & \underline{\dot{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \\
\text{Messgleichung:} \quad & \underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t) \\
\text{Gleichung von Zustandsregler und Vorfilter:} \quad & \underline{u}(t) = -\underline{K} \cdot \underline{x}(t) + \underline{S} \cdot \underline{w}(t)
\end{aligned}$$

wobei

Führungsvektor	Reglermatrix	Vorfiltermatrix
$\underline{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_p(t) \end{bmatrix}$	$\underline{K} = [k_{ij}]$ $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, n$ $(m,n)-$Matrix	$\underline{S} = [s_{ij}]$ $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, p$ $(m,p)-$Matrix
p Führungsgrößen ($= q =$ Anzahl der Ausgangsgrößen)		

Zugehöriges Strukturbild:



1. Schritt: Bestimmung der Reglermatrix $\underline{K}$

Die Systemmatrix des geschlossenen Systems ist durch $\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}$ gegeben. Die Reglermatrix $\underline{K}$ muß nun so gewählt werden, dass

- das geschlossene System asymptotisch stabil ist, d. h. alle Eigenwerte von $\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}$ haben negativen Realteil.
- das geschlossene System die gewünschten dynamischen Eigenschaften besitzt.

Reglerentwurf durch Polvorgabe für Eingrößensysteme:

Voraussetzung: Das System muss vollständig steuerbar sein.

1. Steuerbarkeitsmatrix $\underline{Q}_S$ berechnen

$$\underline{Q}_S = [\underline{b},\, \underline{A}\,\underline{b},\, \cdots,\, \underline{A}^{n-1}\,\underline{b}]\,,$$

2. charakteristisches Polynom von $\underline{A}$ berechnen

$$p(s) = \det(s\,\underline{I} - \underline{A}) = a_0 + a_1\,s + \cdots + a_{n-1}\,s^{n-1} + s^n\,,$$

3. mit

$$\underline{\bar{\bar{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{\bar{\bar{b}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{\bar{\bar{Q}}}_S = [\underline{\bar{\bar{b}}},\, \underline{\bar{\bar{A}}}\,\underline{\bar{\bar{b}}}, \cdots,\, \underline{\bar{\bar{A}}}^{n-1}\,\underline{\bar{\bar{b}}}]$$

berechnen,

4. die gewünschten Pole $s_1, \cdots, s_n$ vorgeben und

$$p_R(s) = (s - s_1)\,(s - s_2) \cdots (s - s_n) = p_0 + p_1\,s + \cdots + p_{n-1}\,s^{n-1} + s^n$$

ausrechnen,

5. schließlich die Reglerverstärkungen als

$$\underline{k}^T = [p_0 - a_0, \cdots, p_{n-1} - a_{n-1}]\,\underline{\bar{\bar{Q}}}_S\,\underline{Q}_S^{-1}$$

berechnen.

2. Schritt: Bestimmung der Vorfiltermatrix $\underline{S}$

Die Vorfiltermatrix $\underline{S}$ wird nun so gewählt, dass das System für einen Führungssprung stationär genau ist

$$\lim_{t \to \infty}\ \underline{y}(t) = \underline{\hat{w}}, \quad \text{für} \quad \underline{w}(t) = \underline{\hat{w}}\ \sigma(t).$$

Hieraus folgt die für $\underline{D} = \underline{0}$ gültige Beziehung

$$\underline{S} = -[\underline{C}\ (\underline{A} - \underline{B}\ \underline{K})^{-1}\ \underline{B}]^{-1}.$$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Beobachterentwurf

Darstellung des geschlossenen Systems mit Regler und Beobachter:

Es sei im folgenden $\underline{D} = \underline{0}$ vorausgesetzt.

Zustandsdifferentialgleichung der Strecke :	$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$
Messgleichung:	$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t)$
Gleichung von Zustandsregler und Vorfilter:	$\underline{u} = -\underline{K} \cdot \hat{\underline{x}}(t) + \underline{S} \cdot \underline{w}(t)$
Zustandsdifferentialgleichung des Beobachters:	$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \underline{A} \cdot \hat{\underline{x}}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) + \underline{H}\ (\underline{y} - \underline{C}\ \hat{\underline{x}}),$ $\hat{\underline{x}}(0) = \underline{0}$

wobei:

Schätzwert des Zustandsvektors

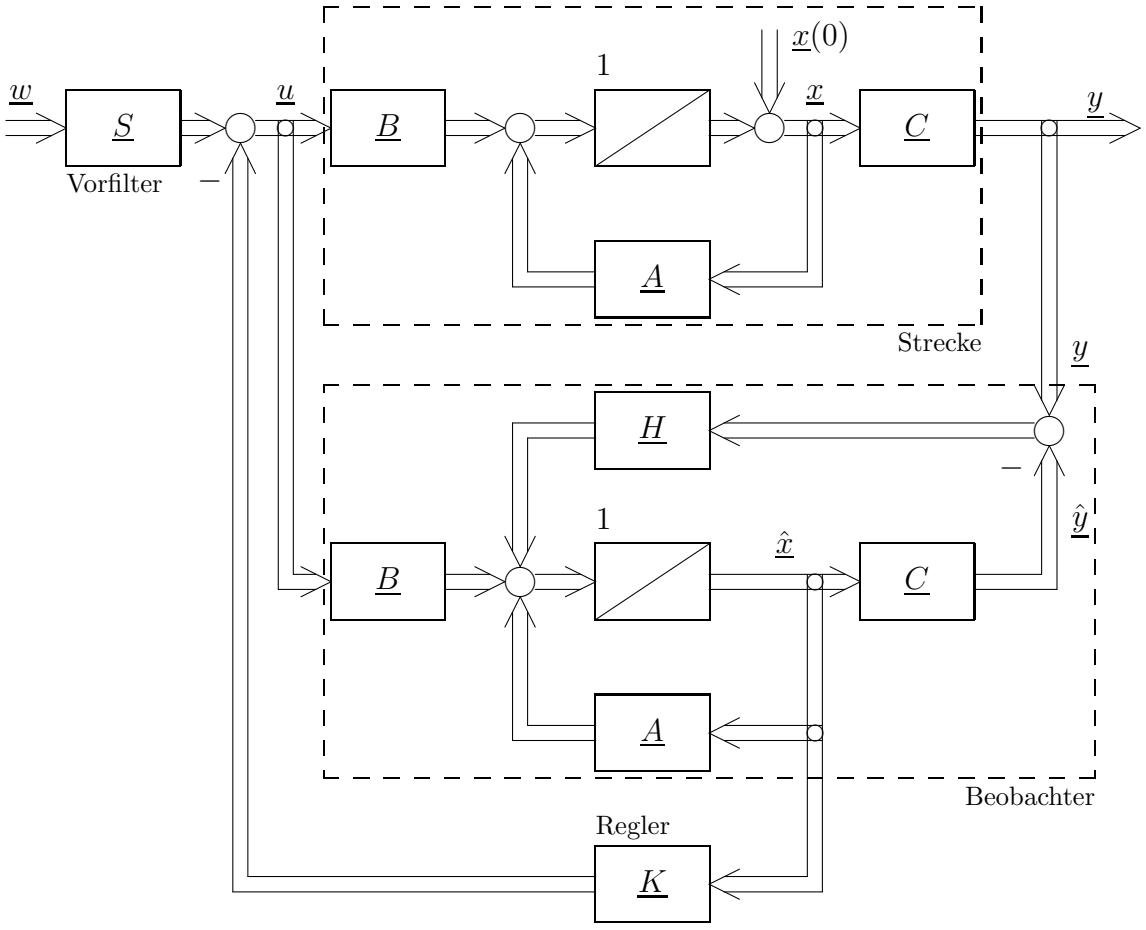
$$\hat{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

n Schätzwerte

Beobachtermatrix

$\underline{H} = [h_{ij}]$
$i = 1, \ldots, n$
$j = 1, \ldots, p$
$(n, p)-$Matrix

Zugehöriges Strukturbild:



Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM
Universität Ulm

Beobachterentwurf durch Polvorgabe für Eingrößensysteme:

Voraussetzung: Das System muss vollständig beobachtbar sein.

1. Beobachtbarkeitsmatrix $\underline{Q}_B$ berechnen
$$\underline{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T\,\underline{A} \\ \vdots \\ \underline{c}^T\,\underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$
2. charakteristisches Polynom von $\underline{A}$ berechnen
$$p(s) = \det(s\,\underline{I} - \underline{A}) = a_0 + a_1\,s + \cdots + a_{n-1}\,s^{n-1} + s^n\,,$$
3. mit
$$\hat{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{c}}^T = [0, \cdots, 0, 1]$$
die Beobachtbarkeitsmatrix
$$\hat{\underline{Q}}_B = \begin{bmatrix} \hat{\underline{c}}^T \\ \hat{\underline{c}}^T\,\hat{\underline{A}} \\ \vdots \\ \hat{\underline{c}}^T\,\hat{\underline{A}}^{n-1} \end{bmatrix}$$
berechnen,
4. die gewünschten Pole $s_1, \cdots, s_n$ vorgeben und
$$p_B(s) = (s - s_1)\,(s - s_2) \cdots (s - s_n) = p_0 + p_1\,s + \cdots + p_{n-1}\,s^{n-1} + s^n$$
ausrechnen,
5. die Beobachterverstärkungen als
$$\underline{h} = \underline{Q}_B^{-1}\,\hat{\underline{Q}}_B \begin{bmatrix} p_0 - a_0 \\ p_1 - a_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$
berechnen.

Für den Beobachter gilt
$$\lim_{t \to \infty} [\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)] \;=\; \underline{0}.$$

Separationsprinzip:
Die Eigenwerte des ohne Beobachter geschlossenen Regelkreises werden durch die Einführung des Beobachters nicht verschoben. Zu ihnen treten lediglich die Eigenwerte des Beobachters hinzu.