

ulm university universität
uulm

Regelungstechnik 2

Zeitdiskrete und zeitkontinuierliche nichtlineare und optimale Regelungen

— Sommersemester 2008 —

Teil I: Lineare zeitdiskrete Systeme
Michael A. Danzer

Teil II: Nichtlineare zeitkontinuierliche Systeme
Andreas Rauh

Teil III: Optimale Systeme
Eberhard P. Hofer



Dozent: Dipl.-Ing. Andreas Rauh

Institut für Mess–, Regel– und Mikrotechnik

Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik

Universität Ulm

Danksagung

Die Autoren dieses Vorlesungsskriptums danken Tobias Mödl und Matthias Weber für das Überlassen einer elektronischen Vorlesungsmitschrift. Diese Vorlesungsmitschrift diente einschließlich einiger Grafiken als Grundlage für die Erstellung der Teile I und II dieses Skriptums. Sie orientiert sich an der von Prof. Dr.-Ing. Harald Aschemann bis zum Sommersemester 2006 an der Universität Ulm angebotenen Vorlesung *Regelungstechnik 2*. Der Teil III dieses Skriptums stellt einen Auszug aus der Vorlesung *Optimale Steuerungen und Regelungen* von Prof. Dr. Eberhard P. Hofer dar.

Regelungstechnik II

Teil I

Zeitdiskrete Regelsysteme

Sommersemester 2008

Dipl.-Ing. Michael A. Danzer
Dipl.-Ing. Andreas Rauh

Universität Ulm
Fakultät für
Ingenieurwissenschaften und Informatik

Institut für
Mess-, Regel- und Mikrotechnik

Stand 12. August 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der diskreten Regelungstechnik **1**
- 1.1 Reihen . . . 1
  - 1.1.1 Potenzreihe und Laurent-Reihe . . . 1
  - 1.1.2 Geometrische Reihe . . . 1
- 1.2 z-Transformation . . . 2
  - 1.2.1 Definition der z-Transformation . . . 2
  - 1.2.2 Beispiele von z-transformierten Abtastsignalen . . . 2
  - 1.2.3 Konvergenz der z-Transformation . . . 3
  - 1.2.4 Rechenregeln der z-Transformation . . . 3
  - 1.2.5 z-Transformation spezieller Funktionen . . . 6
  - 1.2.6 Inverse z-Transformation . . . 8

2 Transformation zeitkontinuierlicher Systeme in zeitdiskrete Darstellung **9**
- 2.1 Digitaler Regelkreis . . . 9
- 2.2 δ-Abtastung und Halteglied . . . 9
  - 2.2.1 δ-Abtastung und Abtastsignal . . . 9
  - 2.2.2 Halteglied und Treppenfunktion . . . 10
  - 2.2.3 z-Übertragungsfunktion des Abtast-Halteglieds . . . 10
- 2.3 z-Übertragungsfunktion des Abtastregelkreises und des offenen Kreises . . . 10
  - 2.3.1 z-Übertragungsfunktion des Halteglieds und der kontinuierlichen Strecke . . . 11
  - 2.3.2 z-Übertragungsfunktion des offenen Kreises . . . 11
  - 2.3.3 z-Übertragungsfunktion des Abtastregelkreises . . . 12
  - 2.3.4 Charakteristische Gleichung des Abtastregelkreises . . . 12
- 2.4 Transformation zeitkontinuierlicher Systeme im Zustandsraum . . . 13
  - 2.4.1 Exakte Lösung der zeitkontinuierlichen Zustandsdifferentialgleichung . . . 13
  - 2.4.2 Exakte Lösung der Zustandsdifferentialgleichung bei stückweise konstantem Eingang . . . 13
  - 2.4.3 Zustandsraumdarstellung zeitdiskreter Systeme . . . 14
  - 2.4.4 Berechnung der Systemmatrizen des zeitdiskreten Systems . . . 14
  - 2.4.5 Charakteristische Gleichung eines zeitdiskreten Systems in Zustandsraumdarstellung . . . 15
  - 2.4.6 z-Übertragungsfunktion eines SISO-Systems . . . 15
  - 2.4.7 Lösung der Zustandsdifferenzengleichung, Gewichtsfolge und Übergangsfolge . 16

3 Stabilität zeitdiskreter Systeme **18**
- 3.1 Definition der Stabilität im Zeitbereich . . . 18
  - 3.1.1 z-Transformierte der Gewichtsfolge . . . 18
  - 3.1.2 Definition der Ein-Ausgangs-Stabilität im Zeitbereich . . . 19
- 3.2 Stabilität im z-Bereich . . . 19
  - 3.2.1 Grundlegendes Stabilitätskriterium bei Beschreibung mit z-Transformation . . 19
  - 3.2.2 Querverbindung zur Laplace-Transformation . . . 19

3.2.3 Stabilitätsuntersuchung eines Abtastregelkreises . . . 20
3.3 Algebraische Stabilitätskriterien . . . 21
3.3.1 Hurwitz-Kriterium für Pole in der linken s-Halbebene . . . 21
3.3.2 Bilinear-Transformation (w-Transformation) . . . 21
3.3.3 Hurwitz-Kriterium zur Untersuchung von Polen im Einheitskreis . . . 22
3.3.4 Kriterium von Schur-Cohn-Jury für Polynome höheren Grades . . . 22

4 Zeitdiskreter Reglerentwurf **25**
4.1 Diskrete Ein-Ausgangsregelung . . . 25
4.1.1 Wahl der Abtastzeit T bzw. der Abtastkreisfrequenz ω_T . . . 25
4.1.2 Quasikontinuierlicher Reglerentwurf . . . 25
4.1.3 Entwurf der Regelung auf Basis einer zeitdiskreten Systembeschreibung . . . 32
4.2 Diskreter Reglerentwurf im Zustandsraum . . . 34
4.2.1 Steuerbarkeit . . . 34
4.2.2 Zustandsregler . . . 35
4.2.3 Entwurf der Vorsteuermatrix . . . 35
4.2.4 Reglerentwurf durch Polvorgabe . . . 36
4.2.5 Polvorgabeentwurf für SISO-Systeme mit der Ackermann-Formel . . . 36
4.2.6 Eigenwertvorgabe und Zeitverhalten . . . 38
4.2.7 Reglerentwurf auf endliche Einstellzeit . . . 38
4.2.8 Vollständige modale Synthese nach Roppenecker . . . 41

5 Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf **43**
5.1 Beobachtbarkeit . . . 43
5.1.1 Definition der Beobachtbarkeit . . . 43
5.1.2 Kalman'sches Beobachtbarkeitskriterium . . . 43
5.2 Luenberger-Beobachter . . . 44

6 Realisierung digitaler Regelkreise **48**
6.1 Idealisierung, Auswirkungen und Maßnahmen . . . 48
6.2 Normierung . . . 49
6.3 Vorwegrechnen . . . 50

1 Grundlagen der diskreten Regelungstechnik

1.1 Reihen

1.1.1 Potenzreihe und Laurent-Reihe

Potenzreihe um die Entwicklungsstelle 0

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot q^k = \ldots + a_{-k}\, q^{-k} + \ldots + a_{-1}\, q^{-1} + a_0 + a_1\, q + \ldots\,, \quad k \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R}$$

oder Potenzreihe um die Entwicklungsstelle z_0 mit $q = z - z_0$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k = \ldots + a_{-k}\, (z - z_0)^{-k} + \ldots + a_{-1}\, (z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1\, (z - z_0) + \ldots$$

1.1.2 Geometrische Reihe

Die unendliche geometrische Reihe konvergiert gegen einen Grenzwert für $|q| < 1$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} = 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}; \qquad |q| < 1$$

1.2 z-Transformation

1.2.1 Definition der z-Transformation

z-Transformierte des Abtastsignals
komplexe Variable der Laplace-Transformation: $s = \sigma + j\omega$
komplexe Variable der z-Transformation: $z = e^{Ts}$
Die z-Transformation entspricht der Substitution der komplexen Variable s in der Laplace-Transformierten $F^*(s) = \mathscr{L}\{f^*(t)\}$ des Abtastsignals durch die komplexe Variable der z-Transformation. Dadurch wird die unendliche Summe der Exponentialterme in eine Potenzreihe in z^{-1} ohne Potenzen mit positivem Exponenten überführt (entspricht einer speziellen Laurent-Reihe um $z_0 = 0$ ohne Potenzen mit positivem Exponenten).

$$F_z(z) = \mathfrak{Z}\{f^*(t)\} = \mathscr{L}\{f^*(t)\}\Big|_{e^{Ts}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} = f_0 + f_1\, z^{-1} + f_2\, z^{-2} + \dots$$

1.2.2 Beispiele von z-transformierten Abtastsignalen

Impulsfolge der Sprungfunktion $\sigma(t)$

Sprungfunktion

$$f(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

z-Transformierte der abgetasteten Sprungfunktion

$$F_z(z) = \mathfrak{Z}\{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

mit der Zahlenfolge der Sprungfolge $f_k = (1, 1, 1, 1, ...)$ für $k \geq 0$.
Die geometrische Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu} = \frac{1}{1-q}$$

konvergiert für $|q| < 1$. Mit $q = z^{-1}$ kann die z-Transformierte der Sprungfunktion geschlossen angegeben werden:

$$F_z(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{für } |z| > 1$$

Damit lautet die Korrespondenz der Sprungfunktion im z-Bereich

$$\sigma(t) \quad \overset{\mathfrak{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \frac{z}{z-1} \quad \text{für } |z| > 1$$

Impulsfolge von $f(t) = e^{-at}$

$$F_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(e^{-aT} z^{-1}\right)}_{q}{}^{k} = \frac{e^{aT} z}{e^{aT} z - 1} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

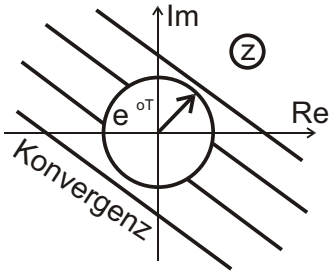
mit der Zahlenfolge $f_k = e^{-akT}$ und dem Konvergenzbereich $|z| > e^{-aT}$.

1.2.3 Konvergenz der z-Transformation

Die z-Transformierte ist eine Laurent-Reihe um $z = 0$ ohne positive Potenzen. Diese Reihe konvergiert, wenn gilt:

$$|f_k| \leq a e^{\delta_0 T k} \quad \text{bzw.} \quad |z| > e^{\delta_0 T}$$

a und δ_0 sind positive Konstanten.



Somit darf die Folge f_k nicht stärker wachsen als eine e-Funktion. Dies ist in regelungstechnischen Anwendungen stets erfüllt.
Damit ist

$$F_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} a \underbrace{\left(\frac{e^{\delta_0 T}}{|z|}\right)^k}_{<1}$$

eine obere Schranke für die unendliche Reihe, die somit konvergiert.
In der Praxis gilt: Die z-Transformation kann als eine Funktion aufgefasst werden, die über die gesamte z-Ebene definiert ist, da $F_z(z)$ analytisch fortgesetzt werden kann.

1.2.4 Rechenregeln der z-Transformation

Linearität

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \overset{\mathfrak{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} c_1 F_{1z}(z) + c_2 F_{2z}(z)$$

Rechtsverschiebung

Zahlenfolge $\quad f_k = (f_0, f_1, f_2, ...)$

Verschieben um m Abtastschritte

$$\begin{aligned} f_{k-m} &= (f_{-m}, f_{1-m}, ...) \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ \mathfrak{Z}\{f(t - mT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - mT) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f[\underbrace{(k-m)}_{=:i \;\Rightarrow\; k=i+m} T] z^{-k} = \sum_{i=-m}^{\infty} f(iT) z^{-(i+m)} \end{aligned}$$

$$= z^{-m}\left[\sum_{i=-m}^{-1} f(iT)z^{-i} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} f(iT)z^{-i}}_{F_z(z)}\right]$$

$$= z^{-m}\left[\underbrace{\sum_{\nu=1}^{m} f_{-\nu}z^{\nu}}_{=0 \text{ für } f(t)=0 \text{ für } t<0} + F_z(z)\right]$$

Linksverschiebung

analog zur Rechtsverschiebung

$$f(t+mT) \overset{\mathfrak{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} z^m\left[F_z(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f_\nu z^{-\nu}\right]$$

Dämpfungsregel

$f(t)$ mit $e^{\alpha t}$ multipliziert

$$\mathfrak{Z}\left\{f(t)e^{\alpha t}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{\alpha kT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \underbrace{\left(e^{-\alpha T}z\right)}_{\widetilde{z}}^{-k}$$

allgemein mit $e^{-\alpha T} =: \gamma$

$$f_k\gamma^{-k} \overset{\mathfrak{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F_z(\gamma z)\,,\ \gamma \neq 0$$

Differenzbildung

$$\mathfrak{Z}\{f(t) - \underbrace{f(t-T)}_{\text{Rechtsversch.}}\} = F_z(z) - z^{-1}\left[f_{-1}z + F_z(z)\right] = \frac{z-1}{z}F_z(z) - f_{-1}$$

Summenbildung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f(t-\nu T) \overset{\mathfrak{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{z}{z-1}F_z(z) \quad \text{mit } f(t)=0 \text{ für } t<0$$

Differentiation der Bildfunktion

$$f(t)=\sigma(t) \overset{\mathfrak{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{z}{z-1} = F_z(z)$$

$$t \overset{\mathfrak{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} -TzF_z'(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Faltungsregel

Die Anwendung der Faltungsregel ist nur dann möglich, wenn mindestens eine der beiden Funktionen eine Impulsfolge darstellt.

$$\begin{aligned} \text{Impulsfolge} \quad g^*(t) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \, \delta(t-\nu T) \\ f(t) * g^*(t) &= f(t) * \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \, \delta(t-\nu T) \end{aligned}$$

mit dem Distributivgesetz der Faltung:

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$$

Anwendung auf alle Summanden

$$f(t) * g^*(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \underbrace{f(t) * \delta(t-\nu T)}_{f(t-\nu T)}$$

zugehörige z-Transformation unter der Voraussetzung $f(t)$, $g(t) = 0$ für $t < 0$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}\{f(t) * g^*(t)\} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [g_\nu f(kT-\nu T)] \, z^{-k} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_\nu f[\underbrace{(k-\nu)}_{=:\mu} T] z^{-k} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} g_\nu f(\mu T) z^{-(\mu+\nu)} \\ &\quad \text{mit } f(\mu T) = 0 \text{ für } \mu < 0 \text{ folgt:} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\nu f(\mu T) z^{-\mu} z^{-\nu} \\ &= \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \, z^{-\nu}}_{\mathfrak{Z}\{g^*(t)\}} \cdot \underbrace{\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu \, z^{-\mu}}_{\mathfrak{Z}\{f(t)\}} = F_z(z) \cdot G_z(z) \end{aligned}$$

$$f(t) * g^*(t) \overset{\mathfrak{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F_z(z) \cdot G_z(z)$$

1.2.5 z-Transformation spezieller Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen

Der Zählergrad der gebrochen rationalen Funktionen sei kleiner als der Nennergrad. Durchführung einer Partialbruchzerlegung (PBZ)

Gebrochen rationale Funktion mit einfachen Polen

$$F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \overset{\text{PBZ}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu}{s - a_\nu}$$

mit der z-Transformierten

$$\mathfrak{Z}\Big\{\underbrace{\frac{1}{s-a}}_{G(s)}\Big\} = \mathfrak{Z}\Big\{\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}_{t=kT}}_{g^*(t)}\Big\} = \mathfrak{Z}\left\{e^{a\,t}|_{t=kT}\right\} = \frac{z}{z - e^{a\,T}} \quad \text{folgt}$$

$$\mathfrak{Z}\left\{F(s)\right\} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu}{z - e^{a_\nu\,T}} = z \cdot \frac{M(z)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (z - e^{a_\nu\,T})}$$

Gebrochen rationale Funktionen mit zweifachen Polen

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{r_1}{s-a} + \frac{r_2}{(s-a)^2} \\ \mathfrak{Z}\{F(s)\} &= \mathfrak{Z}\left\{\frac{r_1}{s-a}\right\} + \mathfrak{Z}\left\{\frac{r_2}{(s-a)^2}\right\} = \mathfrak{Z}\left\{r_1 e^{akT}\right\} + \mathfrak{Z}\left\{r_2 kT e^{akT}\right\} \end{aligned}$$

Mit der Dämpfungsregel

$$\mathfrak{Z}\left\{f(t)\,e^{at}\right\} = F_z\left(z \cdot e^{-aT}\right)$$

und Korrespondenz Nr. 2

$$t \circ\!\!-\!\!\bullet^{\,\mathfrak{Z}} \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

folgt Korrespondenz Nr.13

$$\mathfrak{Z}\left\{te^{a\,t}\right\} = \frac{Tze^{-a\,T}}{\left(ze^{-a\,T}-1\right)^2}\frac{e^{2a\,T}}{e^{2a\,T}} = \frac{Tze^{a\,T}}{\left(z-e^{a\,T}\right)^2}$$

und letztlich

$$\mathfrak{Z}\left\{F(s)\right\} = \frac{r_1 z}{z - e^{a\,T}} + \frac{r_2 T z e^{a\,T}}{\left(z - e^{a\,T}\right)^2} = \frac{z \cdot M(z)}{\left(z - e^{a\,T}\right)^2}\,.$$

Verallgemeinerte gebrochen rationale Funktionen mit mehrfachen Polen

$$F(s) = \frac{Z(s)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(s - a_\nu)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet^{\,\mathfrak{Z}} \quad F_z(z) = \frac{z \cdot M(z)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(z - e^{a_\nu T})}$$

Fazit: Aus einer gebrochen rationalen Funktion $F(s)$ wird wieder eine gebrochen rationale Funktion $F_z(z)$, wobei ein q-facher Pol a_ν zu einem q-fachen Pol $e^{a_\nu T}$ wird.

Gebrochen rationale Funktionen in e^{Ts}

Eine allgemeine Differenzengleichung

$$a_n y(t-nT) + \ldots + a_1 y(t-T) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + \ldots + b_m u(t-mT)$$

korrespondiert im Laplace-Bereich mit der rationalen Funktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-Ts} + \ldots b_m e^{-mTs}}{a_0 + a_1 e^{-Ts} + \ldots + a_n e^{-nTs}} = R\left(e^{-Ts}\right) = \tilde{R}\left(e^{Ts}\right)$$

in e^{-Ts} bzw. e^{Ts}.
Die Potenzreihenentwicklung liefert

$$R\left(e^{-Ts}\right) = r_0 + r_1 e^{-Ts} + r_2 e^{-2Ts} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu \cdot e^{-\nu Ts}$$

Im Zeitbereich korrespondiert diese unendliche Summe mit

$$r(t) = r_0\delta(t) + r_1\delta(t-T) + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu \delta(t-\nu T) = r^*(t)$$

Daraus wird ersichtlich, dass die zugehörige Originalfunktion eine Impulsfolge ist.
Die z-Transformierte einer rationalen Funktion in e^{Ts} erhält man direkt durch eine Substitution von e^{Ts} durch z.

$$\mathfrak{Z}\left\{r^*(t)\right\} = R\left(e^{-Ts}\right)\Big|_{e^{Ts}=z} = \tilde{R}\left(e^{Ts}\right)\Big|_{e^{Ts}=z}$$

Produkt einer s-Übertragungsfunktion mit einer rationalen Funktion in e^{Ts}

$R_1(s)$ sei ein System in s, $R_2\left(e^{Ts}\right)$ die Laplace-Transformierte eines durch Differenzengleichungen dargestellten Systems, z.B. ein Regelalgorithmus. Da die Originalfunktion von $R_2\left(e^{Ts}\right)$ eine Impulsfolge $r_2^*(t)$ ist, gilt hier die Faltungsregel.

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}\left\{R_1(s)\cdot R_2\left(e^{-Ts}\right)\right\} &= \mathfrak{Z}\left\{r_1(t) * r_2^*(t)\right\} = \mathfrak{Z}\left\{r_1(t)\right\}\cdot\mathfrak{Z}\left\{r_2^*(t)\right\} \\ &= \mathfrak{Z}\left\{R_1(s)\right\}\cdot R_2\left(e^{-Ts}\right)\Big|_{e^{Ts}=z} = R_{1z}(z)\cdot R_2\left(z^{-1}\right)\end{aligned}$$

Bsp.: Halteglied

$$\begin{aligned}H_0(s) &= \frac{1}{s}\cdot\left(1-e^{-Ts}\right) = R_1(s)\cdot R_2\left(e^{-Ts}\right) \\ \mathfrak{Z}\left\{H_0(s)\right\} &= R_{1z}(z)\cdot R_2\left(e^{-Ts}\right)\Big|_{e^{Ts}=z} = \frac{z}{z-1}\cdot\left(1-z^{-1}\right) = 1 \\ &\quad \text{mit } \mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}\end{aligned}$$

1.2.6 Inverse z-Transformation

mittels Residuensatz

$$f(k) = \sum_{i=1}^{n} \underset{z=z_i}{Res} \underbrace{\left\{ F_z(z) \cdot z^{k-1} \right\}}_{=G_z(z)}$$

$$\text{mit } \underset{z=z_i}{Res} \{G_z(z)\} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(G_z(z) \cdot (z - z_i)^m \right) \Big|_{z=z_i}$$

mittels Partialbruchzerlegung und Korrespondenztabelle oder mittels der geometrischen Reihe

Darstellung einer gebrochen rationalen Funktion als Summe von Partialbrüchen
(falls Zählergrad $<$ Nennergrad):

$$F_z(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_i \underbrace{\frac{r_i}{z - \alpha_i}}_{\text{einfacher Pol}} + \sum_i \sum_j^{n_i} \underbrace{\frac{r_{ij}}{(z - \alpha_i)^{n_i}}}_{n_i\text{-facher Pol}}$$

$$+ \sum_i \underbrace{\frac{p_i z + q_i}{z^2 + \beta_i z + \gamma_i}}_{\text{komplexes Polpaar}} + \sum_i \sum_j^{n_i} \underbrace{\frac{p_i z + q_i}{(z^2 + \beta_i z + \gamma_i)^{n_i}}}_{n_i\text{-faches komplexes Polpaar}}$$

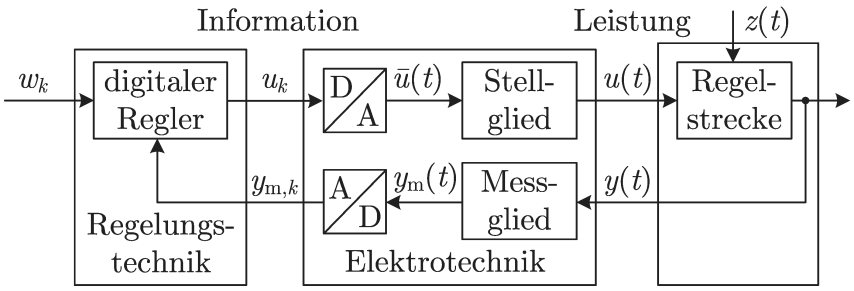
mittels Laurent-Reihenentwicklung

Die Koeffizienten der Potenzreihe der z-Transformierten ergeben die Zahlenfolge f_k des Abtastsignals.

$$F_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} = f_0 + f_1\, z^{-1} + f_2\, z^{-2} + \ldots$$

2 Transformation zeitkontinuierlicher Systeme in zeitdiskrete Darstellung

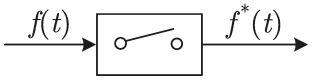
2.1 Digitaler Regelkreis



2.2 δ-Abtastung und Halteglied

2.2.1 δ-Abtastung und Abtastsignal

Die A/D-Wandlung im digitalen Regelkreis wird über eine δ-Abtastung realisiert.



Zeitfunktion:

$$f^*(t) = f(t) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)}_{\delta\text{-Abtastung}} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \delta(t-kT)$$

$f^*(t)$	Impulsfolge (Zeitfunktion)
$f_k = f(kT)$	Zahlenfolge

Laplace-Transformierte des Abtastsignals:

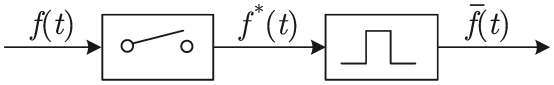
$$F^*(s) \quad = \quad \mathscr{L}\{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot e^{-kTs}$$

z-Transformierte des Abtastsignals mit $z := e^{Ts}$:

$$F_z(z) \quad = \quad \mathfrak{Z}\{f^*(t)\} = \mathfrak{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

2.2.2 Halteglied und Treppenfunktion

Die D/A-Wandlung im digitalen Regelkreis wird über ein Halteglied realisiert.
Der Abtastwert $f^*(t)$ wird über eine Periodendauer T konstant gehalten ($\rightarrow$ Halteglied). Die resultierende Treppenfunktion $\overline{f}(t)$ entspricht der Faltung des Abtastsignals mit der Differenz zweier um T verschobener Sprungfunktionen.



Zeitfunktion:

$$\begin{aligned}\overline{f}(t) &= f^*(t)\underbrace{*[\sigma(t)-\sigma(t-T)]}_{\text{Halteglied}} = f(t)\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)}_{\delta\text{-Abtastung}} *[\sigma(t)-\sigma(t-T)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k\cdot\delta(t-kT)*[\sigma(t)-\sigma(t-T)] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\cdot[\sigma(t-kT)-\sigma(t-(k+1)T)]\end{aligned}$$

Laplace-Transformierte der Treppenfunktion:

$$\begin{aligned}\overline{F}(s) &= \mathscr{L}\{\overline{f}(t)\} = \mathscr{L}\{f^*(t)\}\cdot\mathscr{L}\{\sigma(t)-\sigma(t-T)\} \\ &= F^*(s)\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-Ts}\right] = F^*(s)\cdot\frac{1}{s}\left(1-e^{-Ts}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\cdot e^{-kTs}\cdot\frac{1}{s}\left(1-e^{-Ts}\right)\end{aligned}$$

z-Transformierte der Treppenfunktion:

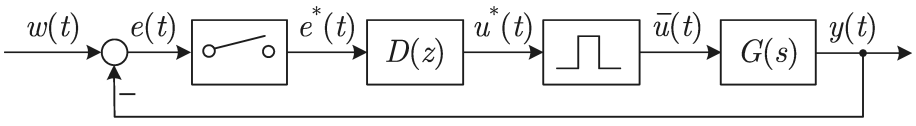
$$\begin{aligned}\overline{F}_z(z) &= \mathfrak{Z}\{\overline{f}(t)\} = \mathfrak{Z}\{f^*(t)\}\cdot\mathfrak{Z}\{\sigma(t)-\sigma(t-T)\} = F_z(z)\cdot\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s}\left(1-e^{-Ts}\right)\right\} \\ &= F_z(z)\cdot\left(1-z^{-1}\right)\cdot\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} = F_z(z)\cdot\frac{z-1}{z}\cdot\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\}\end{aligned}$$

2.2.3 z-Übertragungsfunktion des Abtast-Halteglieds

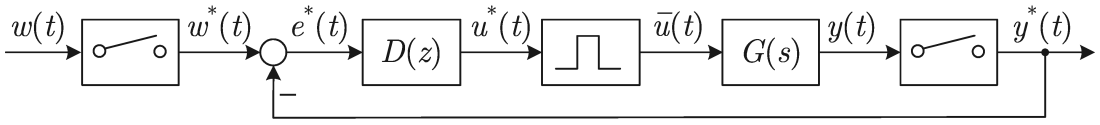
$$G_{\mathrm{AH},z}(z) = \frac{\overline{F}_z(z)}{F_z(z)} = \frac{z-1}{z}\cdot\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

2.3 z-Übertragungsfunktion des Abtastregelkreises und des offenen Kreises

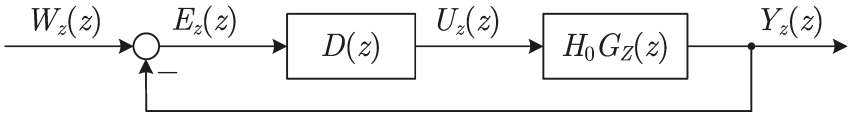
Blockschaltbild des Abtastregelkreises mit kontinuierlicher Streckenübertragungsfunktion $G(s)$ und diskretem Regelalgorithmus $D(z)$



Alternative Darstellung des Abtastregelkreises (Vertauschbarkeit von Summation und Abtastung)

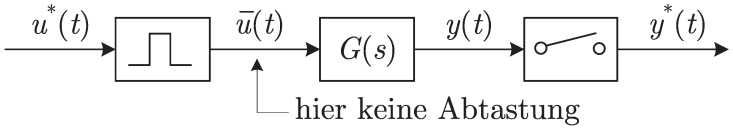


Gewünschte Darstellung des Abtastregelkreises im z-Bereich



2.3.1 z-Übertragungsfunktion des Halteglieds und der kontinuierlichen Strecke

Halteglied und kontinuierliche Strecke



Zeitfunktion:

$$y(t) \quad = \quad \overline{u}(t) * g(t) = u^*(t) * [\sigma(t) - \sigma(t-T)] * g(t)$$

Laplace-Transformierte:

$$Y(s) \quad = \quad \overline{U}(s) \cdot G(s) = U^*(s) \cdot (1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{1}{s} \cdot G(s)$$

z-Transformierte:

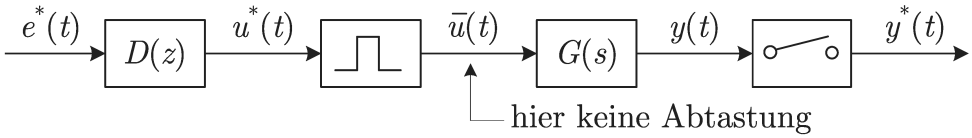
$$\begin{aligned} Y_z(z) \quad &\neq \quad \overline{U}_z(z) \cdot G_z(z) \; ; \qquad \overline{u}(t) \text{ ist keine Impulsfolge} \\ Y_z(z) \quad &= \quad U_z(z) \cdot \mathfrak{Z}\{H_0(s) \cdot G(s)\} \end{aligned}$$

Das Halteglied muss zusammen mit der kontinuierlichen Strecke in den z-Bereich transformiert werden:

$$\begin{aligned} H_0G_z(z) \quad &= \quad \mathfrak{Z}\{H_0(s) \cdot G(s)\} \\ &= \quad \frac{z-1}{z} \cdot \mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s} \cdot G(s)\right\} \end{aligned}$$

2.3.2 z-Übertragungsfunktion des offenen Kreises

Für den aufgeschnittenen Abtastregelkreis muss im Vorwärtszweig zusätzlich der digitale Regelalgorithmus $D(z)$ berücksichtigt werden.



Damit berechnet sich die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Abtastregelkreises zu

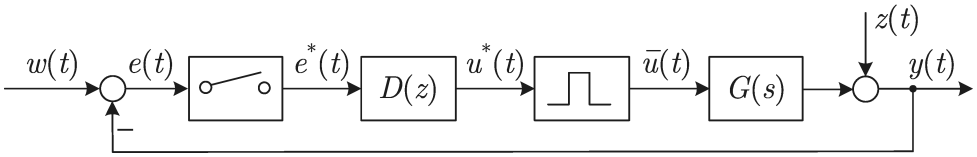
$$F_{0z}(z) = D(z) \cdot H_0G_z(z) = D(z) \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s} \cdot G(s)\right\}$$

2.3.3 z-Übertragungsfunktion des Abtastregelkreises

Damit berechnet sich der Ausgang des Abtastregelkreises mit der Führungsgröße $W_z(z)$ über die Führungsübertragungsfunktion $F_{wz}(z)$ zu

$$Y_z(z) = \underbrace{\frac{F_{0z}(z)}{1+F_{0z}(z)}}_{=:F_{wz}(z)} \cdot W_z(z)$$

Blockschaltbild des Abtastregelkreis mit kontinuierlicher Streckenübertragungsfunktion $G(s)$, diskretem Regelalgorithmus $D(z)$ und kontinuierlicher Störgröße $z(t)$



Wird zudem eine kontinuierliche, additive Störgröße am Ausgang berücksichtigt, berechnet sich der Ausgang im z-Bereich zu

$$Y_z(z) = \underbrace{\frac{F_{0z}(z)}{1+F_{0z}(z)}}_{=:F_{wz}(z)} \cdot W_z(z) + \underbrace{\frac{1}{1+F_{0z}(z)}}_{=:F_{zz}(z)} \cdot Z_z(z)$$

mit der Führungsübertragungsfunktion $F_{wz}(z)$ und der Störübertragungsfunktion $F_{zz}(z)$.

2.3.4 Charakteristische Gleichung des Abtastregelkreises

Die charakteristische Gleichung des Systems (Nennerpolynom der Führungsübertragungsfunktion $F_{wz}(z)$) lautet:

$$\begin{aligned} N(z) &= 1 + F_{0z}(z) = 0 \\ \text{mit} \quad F_{0z}(z) &= \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{folgt:} \\ N(z) &= 1 + F_{0z}(z) = 1 + \frac{P(z)}{Q(z)} = 0 \\ \Leftrightarrow P(z) + Q(z) &= 0 \end{aligned}$$

2.4 Transformation zeitkontinuierlicher Systeme im Zustandsraum

Die Zustandsdifferentialgleichung und die Ausgangsgleichung eines linearen, zeitinvarianten, zeitkontinuierlichen Systems lauten

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)$$
$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t)\,.$$

2.4.1 Exakte Lösung der zeitkontinuierlichen Zustandsdifferentialgleichung

Die allgemeine Lösung der Zustandsdifferentialgleichung des kontinuierlichen Systems lautet

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)}\,\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

mit der Fundamentalmatrix $e^{\underline{A}t}$.

2.4.2 Exakte Lösung der Zustandsdifferentialgleichung bei stückweise konstantem Eingang

Im Falle eines digitalen Regelkreises ist die im Digitalrechner generierte Stellgröße nach dem D/A-Wandler (Halteglied 0. Ordnung) stückweise konstant.

$$\overline{\underline{u}}(t) = \underline{u}_k \quad \text{für} \quad kT \le t \le (k+1)T$$

Im Folgenden wird die Lösung der Zustandsdifferentialgleichung bei stückweise konstantem Eingang über ein Intervall $kT < t < (k+1)T$ betrachtet. Als Integrationsgrenzen werden die Intervallgrenzen eingesetzt: $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$. Der Anfangszustand entspricht dem Zustandsvektor zu Beginn des Intervalls: $\underline{x} = \underline{x}_k$. Der Zustandsvektor $\underline{x}_{k+1}$ am Ende des Intervalls ($t = (k+1)T$) berechnet sich folglich zu

$$\underline{x}_{k+1} = e^{\underline{A}\,T}\underline{x}_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\underline{A}((k+1)T-\tau)}d\tau \cdot \underline{B}\,\underline{u}_k\,,$$

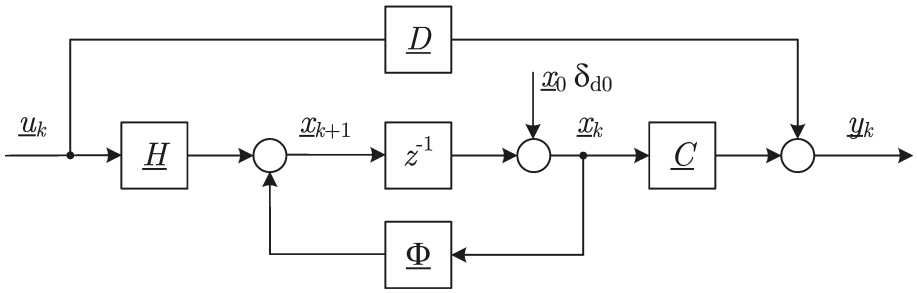
wobei die konstanten Anteile des Integranden ($\underline{B}\,\underline{u}_k$) aus dem Integral heraus gezogen werden.
Mit der Substitution $(k+1)T-\tau =: v$ bzw. $d\tau = -dv$ und einer Vertauschung der Integrationsgrenzen folgt

$$\underline{x}_{k+1} = e^{\underline{A}\,T}\underline{x}_k + \int_{0}^{T} e^{\underline{A}v}dv \cdot \underline{B}\,\underline{u}_k\,,$$

wobei festzuhalten ist, dass die Matrizen $\underline{\Phi} := e^{\underline{A}\,T}$ und $\underline{H} := \int_0^T e^{\underline{A}v}dv \cdot \underline{B}$ auf Grund der Zeitinvarianz des kontinuierlichen Systems nicht vom diskreten Zeitindex k abhängen und somit konstant sind.

2.4.3 Zustandsraumdarstellung zeitdiskreter Systeme

Mit der exakten Lösung der Zustandsdifferentialgleichung bei stückweise konstantem Eingang lässt sich eine der kontinuierlichen Beschreibung äquivalente Darstellung zeitdiskreter Systeme im Zustandsraum angeben.



Die Zustandsdifferenzengleichung und die Ausgangsgleichung lauten

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{\Phi}\,\underline{x}_k + \underline{H}\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= \underline{C}\,\underline{x}_k + \underline{D}\,\underline{u}_k\,. \end{aligned}$$

Dabei entspricht die Systemmatrix des diskretisierten Systems $\underline{\Phi}$ der Fundamentalmatrix des kontinuierlichen Systems, $\underline{\Phi} = e^{\underline{A}T}$, mit $t = T$. Die Eingangsmatrix (Stelleingriffsmatrix) des diskretisierten Systems $\underline{H}$ berechnet sich zu

$$\underline{H} = \int_0^T e^{\underline{A}v} dv \cdot \underline{B}\,.$$

An der Berechnung des Ausgangsvektors $\underline{y}_k$ hat sich durch die Diskretisierung nichts geändert, und damit bleiben die Ausgangsmatrix (Messmatrix) $\underline{C}$ und die Durchgangsmatrix $\underline{D}$ unverändert:

$$\underline{C} = \underline{C}\,, \quad \underline{D} = \underline{D}\,.$$

Diese zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung gilt für lineare zeitinvariante Systeme bei stückweise konstantem Eingang.

2.4.4 Berechnung der Systemmatrizen des zeitdiskreten Systems

Die Fundamentalmatrix des kontinuierlichen Systems kann mithilfe der aus der Systemtheorie bekannten Verfahren berechnet werden (direkte Auswertung über unendliche Summe, Ähnlichkeitstransformation, Satz von Cayley-Hamilton). Im Folgenden sind Berechnungen der Systemmatrix $\underline{\Phi}$ und der Eingangsmatrix $\underline{H}$ des diskretisierten Systems angegeben, die über eine Laplace-Transformation mit anschließender Rücktransformation hergeleitet werden können.

$$\underline{\Phi} = e^{\underline{A}T} = \mathscr{L}^{-1}\left\{(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\right\}\Big|_{t=T}$$

$$\underline{H} = \int_0^T e^{\underline{A}v}\,\underline{B}\,dv = \left[\underline{A}^{-1} e^{\underline{A}v}\right]_0^T \underline{B} = \underline{A}^{-1}\left(e^{\underline{A}T} - \underline{I}\,\right)\underline{B}$$

Die Berechnung kann nur unter der Voraussetzung der Existenz der Inversen $\underline{A}^{-1}$ durchgeführt werden. Anhand der direkten Auswertung der Fundamentalmatrix über die unendliche Summe kann ebenfalls eine approximative Lösung durch Abbruch nach dem n-ten Glied angegeben werden:

$$e^{\underline{A}T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n\,\underline{A}^n}{n!} \approx \underline{I} + T\,\underline{A} + \frac{T^2\,\underline{A}^2}{2} + \ldots$$

2.4.5 Charakteristische Gleichung eines zeitdiskreten Systems in Zustandsraumdarstellung

Lösung der homogenen Zustandsdifferenzengleichung über einen Ansatz für $\underline{x}_k$

Für $\underline{u}_k = \underline{0}$ ergibt sich die homogene Zustandsdifferenzengleichung zu

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}\ \underline{x}_k\,.$$

Wird für $\underline{x}_k$ der Ansatz $\underline{x}_k = z^k \cdot \underline{v}$ gewählt und wird dieser in die homogene Zustandsdifferenzengleichung eingesetzt

$$\begin{aligned} & z^{k+1} \cdot \underline{v} = \underline{\Phi}\ \underline{z}^k\ \underline{v} \\ \Leftrightarrow\ & z^k\ (z\underline{I} - \underline{\Phi})\ \underline{v} = \underline{0}\,, \end{aligned}$$

so existiert mit $z = 0$ bzw. $\underline{x}_k = \underline{0}$ eine triviale Lösung des Gleichungssystems und die nichttriviale, entscheidende Lösung $(z\underline{I} - \underline{\Phi})\ \underline{v} = \underline{0}$. Voraussetzung für die Existenz der nichttrivialen Lösung ist, dass die Matrix $(z\underline{I} - \underline{\Phi})$ nicht den vollen Rang hat bzw. die Determinante $\det(z\underline{I} - \underline{\Phi}) = 0$ ist. Das Polynom n-ten Grades in z

$$p(z) = \det(z\underline{I} - \underline{\Phi}) = 0$$

stellt die charakteristische Gleichung des zeitdiskreten Systems in Zustandsraumdarstellung dar. $p(z)$ besitzt n Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_n$, die Eigenwerte des zeitdiskreten Systems. Das Einsetzen eines Eigenwerts λ_i in $(z\underline{I} - \underline{\Phi})\ \underline{v} = \underline{0}$ führt auf den zugehörigen Eigenvektor $\underline{v}_i \neq 0$ des zeitdiskreten Systems, dessen Betrag frei wählbar ist.

2.4.6 z-Übertragungsfunktion eines SISO-Systems

Im Allgemeinen gilt, dass die Rechenregeln der z-Transformation elementweise auf Vektoren anzuwenden sind.

$$\underline{X}_z(z) := \mathfrak{Z}\{\underline{x}_k\} = \begin{bmatrix} \mathfrak{Z}\{x_{k,1}\} \\ \mathfrak{Z}\{x_{k,2}\} \\ \vdots \\ \mathfrak{Z}\{x_{k,n}\} \end{bmatrix}$$

So gilt z.B. für die zeitliche Verschiebung um einen Abtastschritt

$$\mathfrak{Z}\{\underline{x}_1\} = z\,\underline{X}_z(z) - z\,\underline{x}_0\,.$$

Wird diese Regel auf die Zustandsdifferenzengleichung eines SISO-Systems, $\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}\ \underline{x}_k + \underline{h}\ u_k$, angewendet, ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\begin{aligned} & z\,\underline{X}_z(z) - z\,\underline{x}_0 = \underline{\Phi}\ \underline{X}_z(z) + \underline{h}\ U_z(z) \\ & \quad \Leftrightarrow\ \underline{X}_z(z) = \underline{x}_0 + z^{-1}\,[\underline{\Phi}\ \underline{X}_z(z) + \underline{h}\ U_z(z)] \end{aligned}$$

Für $\underline{x}_0 = \underline{0}$ folgt

$$\underline{X}_z(z) = (z\underline{I} - \underline{\Phi})^{-1}\underline{h}\ U_z(z)\,.$$

Mit der Ausgangsgleichung im SISO-Fall $Y_z(z) = \underline{c}^T\ \underline{X}_z(z)$ ergibt sich die z-Übertragungsfunktion $G_z(z) = \frac{Y_z(z)}{U_z(z)}$ des diskreten Systems zu

$$G_z(z) = \underline{c}^T(z\underline{I} - \underline{\Phi})^{-1}\underline{h}\,.$$

Die z-Übertragungsfunktion $G_z(z)$ beschreibt das Ein-/Ausgangsverhalten im z-Bereich. Mit der Adjungierten lässt sich die z-Übertragungsfunktion auch schreiben als

$$G_z(z) = \frac{\underline{c}^T \mathrm{adj}(\mathrm{z}\underline{\mathrm{I}} - \underline{\Phi})\,\underline{\mathrm{h}}}{\det(z\underline{I} - \underline{\Phi})}\,,$$

wobei auch hier der Nenner der Übertragungsfunktion dem charakteristischen Polynom $p(z)$ entspricht.

2.4.7 Lösung der Zustandsdifferenzengleichung, Gewichtsfolge und Übergangsfolge

Lösung der homogenen Zustandsdifferenzengleichung

Für $\underline{u}_k = \underline{0}$ gilt

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}\ \underline{x}_k\,.$$

Für einen gegebenen Anfangszustand $\underline{x}_0$ berechnen sich die diskreten Folgezustände zu

$$\begin{aligned}
\underline{x}_1 &= \underline{\Phi}\ \underline{x}_0 \\
\underline{x}_2 &= \underline{\Phi}\ \underline{x}_1 = \underline{\Phi}^2\ \underline{x}_0 \\
&\vdots \\
\underline{x}_k &= \underline{\Phi}^k \cdot \underline{x}_0\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Lösung der Zustandsdifferenzengleichung für $\underline{u}_k \neq \underline{0}$

$$\begin{aligned}
\underline{x}_1 &= \underline{\Phi}\ \underline{x}_0 + \underline{H}\ \underline{u}_0 \\
\underline{x}_2 &= \underline{\Phi}\ \underline{x}_1 + \underline{H}\ \underline{u}_1 \\
&= \underline{\Phi}^2\ \underline{x}_0 + \underline{\Phi}\ \underline{H}\ \underline{u}_0 + \underline{H}\ \underline{u}_1 \\
\underline{x}_3 &= \underline{\Phi}^3\ \underline{x}_0 + \underline{\Phi}^2\ \underline{H}\ \underline{u}_0 + \underline{\Phi}\ \underline{H}\ \underline{u}_1 + \underline{H}\ \underline{u}_2 \\
&\vdots \\
\underline{x}_k &= \underline{\Phi}^k \underline{x}_0 + \underline{\Phi}^{k-1} \underline{H}\ \underline{u}_0 + \underline{\Phi}^{k-2} \underline{H}\ \underline{u}_1 + \ldots + \underline{H}\ \underline{u}_{k-1}
\end{aligned}$$

Damit gilt für die allgemeine Lösung der Zustandsdifferenzengleichung

$$\underline{x}_k = \underbrace{\underline{\Phi}^k\ \underline{x}_0}_{\text{freie Bewegung}} + \underbrace{\sum_{\nu=0}^{k-1} \underline{\Phi}^{k-1-\nu} \underline{H}\ \underline{u}_\nu}_{\text{erzwungene Bewegung}}$$

Gewichtsfolge und Übergangsfolge eines SISO-Systems

Das Ein-/Ausgangsverhalten eines SISO-Systems im Zeitbereich wird für $\underline{x}_0 = \underline{0}$ durch

$$y_k = \underline{c}^T \underline{x}_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} \underline{c}^T \underline{\Phi}^{k-1-\nu} \underline{h}\ u_\nu$$

beschrieben.

Ist das Eingangssignal u eine diskrete Sprungfolge

$$u_k = \sigma_{d,k} = \begin{cases} 0 \text{ für } k < 0 \\ 1 \text{ für } k \geq 0 \end{cases},$$

so entspricht der Ausgang y_k der Übergangsfolge h_k

$$y_k = h_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} \underline{c}^T \underline{\Phi}^{k-1-\nu} \underline{h} \;, \quad k \geq 1 \,.$$

Ist das Eingangssignal u ein diskreter Impuls

$$u_k = \delta_{d,k} = \begin{cases} 1 \text{ für } k = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases},$$

so entspricht die Systemantwort im Zeitbereich der Gewichtsfolge g_k

$$y_k = g_k = \underline{c}^T \underline{\Phi}^{k-1} \underline{h} \;, \quad k \geq 1 \,.$$

Der Zusammenhang von Übergangs- und Gewichtsfolge lautet

$$h_k = \sum_{\nu=1}^{k} g_\nu \quad \text{bzw.} \quad g_k = h_k - h_{k-1} \geq 1 \,.$$

3 Stabilität zeitdiskreter Systeme

3.1 Definition der Stabilität im Zeitbereich

3.1.1 z-Transformierte der Gewichtsfolge

Ausgangspunkt: Differenzengleichung (normiert auf $\alpha_0 = 1$)

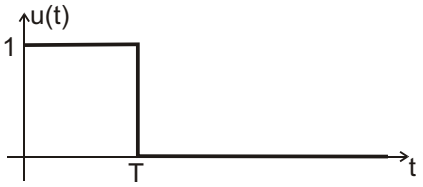
$$\alpha_n\, y_{k-n} + \ldots + \alpha_1\, y_{k-1} + y_k = \beta_0\, u_k + \beta_1\, u_{k-1} + \ldots + \beta_m\, u_{k-m}$$

Auflösen nach y_k liefert

$$y_k = \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu\, u_{k-\nu} - \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu\, y_{k-\mu}$$

jetzt: Gewichtsfolge g_k als Antwort auf den diskreten Impuls: $u_k = \delta_d(k)$ mit

$$\delta_d(k) = \begin{cases} 1 \text{ für } k = 0 \\ 0 \text{ für } k \neq 0 \end{cases}$$



Voraussetzung analog zu zeitkontinuierlichen Systemen $g_k = 0$ für $k < 0$: Dies entspricht dem linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{t \to 0-} g\,(t) = 0$$

als Anfangsbedingung für die Gewichtsfunktion eines zeitkontinuierlichen Systems. Mit der Differenzengleichung resultiert aus dem Einzelimpuls $u(0) = \delta_d(0)$ die Gewichtsfolge g_k

$$\begin{aligned} g(0) &= \beta_0 \cdot 1 = \beta_0 \\ g(1) &= \beta_1 - \alpha_1\beta_0 \\ g(2) &= \beta_2 - \alpha_1(\beta_1 - \alpha_1\beta_0) - \alpha_2\beta_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

jetzt: Überlagerung mehrerer diskreter Impulse mit den Gewichtungen u_ν

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \delta_d(k-\nu) \\ \Rightarrow y_k &= \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu g_{k-\nu} = g_k * u_k \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit $g(t) = 0$ für $t < 0$ die diskrete *Faltungssumme*

$$y_k = \sum_{\nu=0}^{k} u_\nu \cdot g_{\underbrace{k-\nu}_{\geq 0}} = \sum_{\nu=0}^{k} u_\nu \cdot g_{k-\nu}$$

Zusammenhang mit der z-Übertragungsfunktion

$$G_z(z) = \mathfrak{Z}\{g_k\}$$

D.h. $G_z(z)$ ist die z-Transformierte der Gewichtsfolge.

3.1.2 Definition der Ein-Ausgangs-Stabilität im Zeitbereich

Ein zeitdiskretes dynamisches System ist stabil, wenn zu jeder beschränkten Eingangsfolge $u_k = u(kT)$ eine beschränkte Ausgangsfolge $y_k = y(kT)$ gehört.
Diese Forderung nach Ein-Ausgangs-Stabilität bzw. BIBO-Stabilität lässt sich im Zeitbereich mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{\nu=0}^{k} u_\nu \cdot g_{k-\nu} \right| \leq \sum_{\nu=0}^{k} |u_\nu| \cdot |g_{k-\nu}| \quad \text{als} \quad |y_k| \leq \sum_{\nu=0}^{k} |u_\nu| \cdot |g_{k-\nu}| < \infty$$

darstellen.
$\Rightarrow$ y_k ist genau dann beschränkt, falls u_k beschränkt ist und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty$ gilt.
Problem: Das Stabilitätskriterium im Zeitbereich ist recht unhandlich, da die Gewichtsfolge über einen unendlichen Zeitbereich betrachtet werden muss. In der Praxis kann man hierzu bei einigen Systemen auf die Werte bekannter unendlicher Reihen (z.B. geometrische Reihe) zurückgreifen.

3.2 Stabilität im z-Bereich

3.2.1 Grundlegendes Stabilitätskriterium bei Beschreibung mit z-Transformation

Ein zeitdiskretes System mit rationaler z-Übertragungsfunktion ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Pole z_i von $G_z(z)$ innerhalb des Einheitskreises liegen, d.h.

$$|z_i| < 1\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

wobei die Anzahl der Pole der Systemordnung n entspricht.
Das System ist instabil, wenn mindestens ein Pol außerhalb des Einheitskreises liegt, bzw. wenn mindestens ein Doppelpol auf dem Kreisrand liegt.
Das System ist grenzstabil, wenn Einfachpole auf dem Kreisrand auftreten, alle restlichen aber innerhalb liegen.

3.2.2 Querverbindung zur Laplace-Transformation

$$z = e^{Ts} \quad \text{mit} \quad s = \delta + j\omega$$
$$\Longrightarrow \quad z = e^{\delta T} \cdot e^{j\omega T} = e^{\delta T} \cdot (\cos(\omega T) + j \sin(\omega T))$$

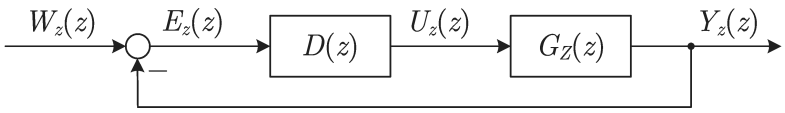
asymptotische Stabilität für Pole in linker s-Halbebene, d.h. für $\delta < 0$ und positive Abtastzeit T

$$|z| = \underbrace{\left| e^{\delta T} \right|}_{<1} \cdot \underbrace{|(\cos(\omega T) + j \sin(\omega T))|}_{=1}$$

Übertragung in den z-Bereich: aus der linken Halbebene wird das Innere des Einheitskreises

$$\begin{aligned} |z| &= e^{T\delta} \\ \phi &= \arg z = \omega T\,, \quad \underbrace{-\frac{\pi}{T} < \omega < \frac{\pi}{T}}_{\text{Primärstreifen}} \end{aligned}$$

3.2.3 Stabilitätsuntersuchung eines Abtastregelkreises



$$\begin{aligned} D(z) &= K_R \frac{z}{z-1} \quad z\text{-Übertragungsfunktion des Reglers} \\ G_z(z) &= K_S\, z^{-2} \quad z\text{-Übertragungsfunktion der Strecke} \end{aligned}$$

z-Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises

$$F_{0z}(z) = D(z) \cdot G_z(z) = \frac{K_R K_S z}{z^2(z-1)} = \frac{K_0}{z(z-1)} = \frac{Z_0(z)}{N_0(z)}$$

z-Führungs-Übertragungsfunktion

$$F_{wz}(z) = \frac{Y_z(z)}{W_z(z)} = \frac{F_{0z}(z)}{1+F_{0z}(z)} = \frac{Z_0(z)}{N_0(z)+Z_0(z)} = \frac{K_0}{z^2 - z + K_0} = \frac{K_0}{N(z)}$$

mit der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Kreises

$$N(z) = z^2 - z + K_0 = 0$$

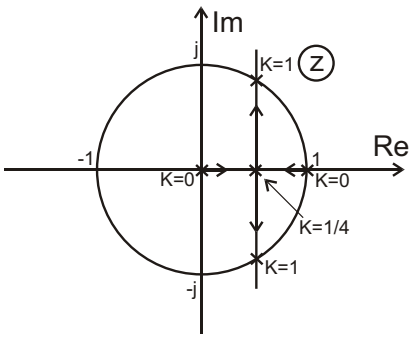
und den beiden Eigenwerten

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - K_0}\,, \quad \text{mit } K_0 = K_R \cdot K_S$$

K_0	0	$\frac{1}{4}$	1
$z_{1,2}$	$z_1 = 0$ $z_2 = 1$	$z_{1,2} = \frac{1}{2}$	$\lvert z\rvert = 1 \Rightarrow$ Stabilitätsgrenze

$\Rightarrow |z| < 1$, wenn $0 < K_0 < 1$ gilt

Darstellung als Wurzelortskurve des zeitdiskreten Systems



3.3 Algebraische Stabilitätskriterien

3.3.1 Hurwitz-Kriterium für Pole in der linken s-Halbebene

Zur Erinnerung sei hier nochmal das Hurwitz-Kriterium zur Stabilitätsuntersuchung linearer zeitkontinuierlicher Systeme für Pole in der linken s-Halbebene aufgeführt.
Ein Polynom

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

mit rein reellen Koeffizienten besitzt genau dann ausschließlich Polstellen

$$N(\lambda_i) = 0 \quad \text{mit } \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$$

in der linken s-Halbebene, wenn die notwendige Bedingung

$$a_i > 0\ , \quad i = 0, \ldots, n$$

erfüllt ist und Polynome bis zum Grad 4 zusätzlich folgende hinreichende Bedingungen erfüllen:

Grad 2: keine weiteren Bedingungen

Grad 3: $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$

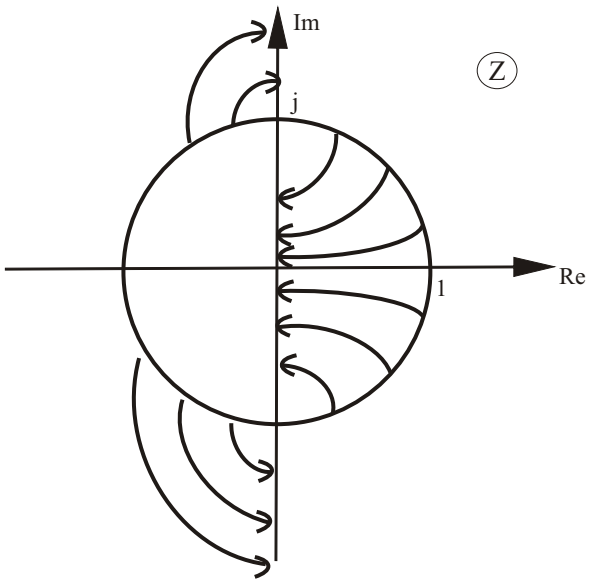
Grad 4: $a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 {a_3}^2 > 0$

Für Polynome höherer Ordnung müssen sämtliche Hurwitz-Determinanten für asymptotische Stabilität linearer zeitkontinuierlicher Systeme ($\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$) positiv sein.

3.3.2 Bilinear-Transformation (w-Transformation)

$$w = \frac{z-1}{z+1} \qquad \text{bzw.} \qquad z = \frac{1+w}{1-w}$$

Allgemeine Eigenschaft einer bilinearen (Möbius-) Transformation:
(i) Abbildung von Kreis $\longrightarrow$ Kreis oder Gerade
(ii) Abbildung von Gerade $\longrightarrow$ Kreis oder Gerade



Transformation ausgewählter Punkte der z-Ebene:

$$\begin{aligned} z = -1 &\Rightarrow w \to \pm\infty \\ z = 1 &\Rightarrow w = 0 \\ z = j &\Rightarrow w = j \\ z = -j &\Rightarrow w = -j \end{aligned}$$

Das Innere des Einheitskreises wird in die linke w-Halbebene abgebildet.

3.3.3 Hurwitz-Kriterium zur Untersuchung von Polen im Einheitskreis

Das in der Systemtheorie eingeführte Hurwitz-Kriterium zur Untersuchung von Polen in der linken Halbebene wurde umgerechnet für die Stabilitätsuntersuchung von zeitdiskreten Systemen mit Polen im Einheitskreis. Die folgende Anwendung des Hurwitz-Kriteriums für Polynome bis zum Grad 4 entspricht den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das ausschließliche Auftreten von Polen im Inneren des Einheitskreises (asymptotische Stabilität eines linearen zeitdiskreten Systems).
Ein Polynom

$$N(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad \text{mit} \quad a_n > 0$$

mit rein reellen Koeffizienten besitzt genau dann ausschließlich Polstellen

$$N(\lambda_i) = 0 \quad \text{mit } |\lambda_i| < 1$$

innerhalb des Einheitskreises, wenn die notwendige und hinreichenden Bedingungen für die Polynome entsprechend ihres Grades erfüllt sind:
Grad 2:

$$\begin{aligned} N(z) &= a_2\, z^2 + a_1\, z + a_0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit } a_2 > 0 \\ \Leftrightarrow &\quad N(1) > 0\,; \quad N(-1) > 0\,; \quad a_2 > |a_0|\ ; \end{aligned}$$

Grad 3:

$$\begin{aligned} N(z) &= a_3\, z^3 + a_2\, z^2 + a_1\, z + a_0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit } a_3 > 0 \\ \Leftrightarrow &\quad N(1) > 0\,; \quad N(-1) < 0\,; \quad a_3 > |a_0|\ ; \\ &\quad a_1 \cdot a_3 - a_0 \cdot a_2 < {a_3}^2 - {a_0}^2 \end{aligned}$$

Grad 4:

$$\begin{aligned} N(z) &= a_4\, z^4 + a_3\, z^3 + a_2\, z^2 + a_1\, z + a_0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit } a_4 > 0 \\ \Leftrightarrow &\quad N(1) > 0\,; \quad N(-1) > 0; \quad a_4 > |a_0|\ ; \\ &\quad |a_1\, a_4 - a_0\, a_3| < {a_4}^2 - {a_0}^2\,; \\ &\quad (a_4 - a_0)^2 \cdot (a_4 - a_2 + a_0) + (a_3 - a_1) \cdot (a_1\, a_4 - a_0\, a_3) > 0 \end{aligned}$$

3.3.4 Kriterium von Schur-Cohn-Jury für Polynome höheren Grades

$$N(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad \text{mit} \quad a_n > 0$$

Matrizen für $k = 1, 2, \ldots, n$ bilden

$$\underline{A}_k = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{k-1} \\ \cdot & a_0 & a_1 & \ldots & a_{k-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \ldots & \ldots & \ldots & a_0 \end{bmatrix}, \quad (k \times k)\text{-Matrix}$$

$$\underline{B}_k = \begin{bmatrix} a_{n-(k-1)} & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_{n-(k-2)} & \cdots & a_n & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \\ a_n & & & \underline{0} \end{bmatrix}, \quad (k \times k)\text{-Matrix}$$

Determinante bilden

$$C_k = \det\left(\underline{A}_k + \underline{B}_k\right)$$
$$D_k = \det\left(\underline{A}_k - \underline{B}_k\right)$$

Notwendige und hinreichende Bedingung, dass alle Pole im Einheitskreis liegen

$$N(1) > 0$$
$$(-1)^n N(-1) > 0$$

n gerade	n ungerade
$C_2 < 0,\ D_2 < 0$	$C_1 > 0,\ D_1 < 0$
$C_4 > 0,\ D_4 > 0$	$C_3 < 0,\ D_3 > 0$
$C_6 < 0,\ D_6 < 0$	$C_5 > 0;\ D_5 < 0$
$\vdots$	$\vdots$
bis Index n	bis Index n

Beispiel: Für den Abtastregelkreises aus Abschnitt 3.2.3 soll eine algebraische Stabilitätsuntersuchung durchgeführt werden.

1. Direkte Untersuchung mittels des Hurwitz-Kriteriums für Pole im Einheitskreis
   notwendige und hinreichende Bedingung anhand $N(z)$ untersuchen

$$\begin{aligned} N(z) &= z^2 - z + K_0 = \underbrace{1\cdot}_{a_2} z^2 \underbrace{-1\cdot}_{a_1} z + \underbrace{K_0}_{a_0} \\ & a_2 = 1 > 0 \\ & N(1) = K_0 > 0 \\ & N(-1) = 2 + K_0 > 0 \Leftrightarrow K_0 > -2 \\ & a_2 > |a_0| \Leftrightarrow K_0 < 1 \end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ asymptotische Stabilität für $0 < K_0 < 1$

2. w-Trasformation und anschließende Hurwitz-Stabilitätsuntersuchung für Pole in der linken Halbebene
   $z = \frac{1+w}{1-w}$ in $N(z) = 0$ einsetzen

$$\begin{aligned} N(z)\Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} &= \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 - \left(\frac{1+w}{1-w}\right) + K_0 = 0 \\ \tilde{N}(w) &= (1+w)^2 - (1+w)(1-w) + K_0(1-w)^2 = 0 \\ \tilde{N}(w) &= \underbrace{(2+K_0)}_{\tilde{a}_2} w^2 + \underbrace{2(1-K_0)}_{\tilde{a}_1} w + \underbrace{K_0}_{\tilde{a}_0} = 0 \end{aligned}$$

Hurwitz-Kriterium (System 2. Ordnung): $a_i > 0 \; \forall \; i$

$$\tilde{a}_2 = 2 + K_0 > 0 \;\Leftrightarrow\; K_0 > -2$$
$$\tilde{a}_1 > 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - K_0 > 0 \;\Rightarrow\; K_0 < 1$$
$$\tilde{a}_0 = K_0 > 0$$
$$\Rightarrow\; 0 < K_0 < 1$$

4 Zeitdiskreter Reglerentwurf

4.1 Diskrete Ein-Ausgangsregelung

4.1.1 Wahl der Abtastzeit T bzw. der Abtastkreisfrequenz ω_T

theoretische Grenze: Shannon'sches Abtasttheorem:

$$\omega_T = \frac{2\,\pi}{T} > 2\,\omega_{\text{Gr}} \quad \text{bzw.} \quad T < \frac{\pi}{\omega_{\text{Gr}}}\,,$$

wobei ω_{Gr} die größte im Regelkreis auftretende Kreisfrequenz ist:

1. Störsignal (Rauschen)
2. Führungssignal
3. Bandbreite der Regelung

Bemerkung: Um unnötig kleine Abtastzeiten bei hochfrequenten Störsignalen zu vermeiden, können analoge Anti-Aliasing-Filter eingesetzt werden.

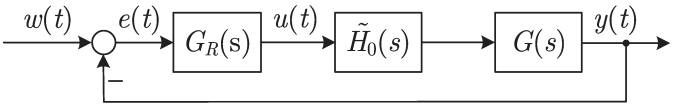
4.1.2 Quasikontinuierlicher Reglerentwurf

Quasi-kontinuierlicher Entwurf falls die Abtastzeit im Vergleich zur Systemdynamik sehr klein gewählt werden kann.

$$\omega_T \geq 30\,\omega_{Gr} \quad \text{bzw.} \quad T \leq \frac{\pi}{15\,\omega_{Gr}}$$

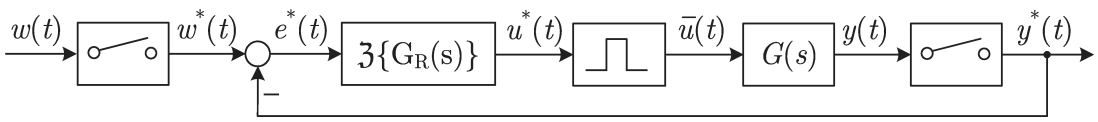
Entwurfsmethodik

1. Der Regler $G_R(s)$ wird basierend auf der zeitkontinuierlicher Darstellung mit Methoden aus der RT1-Vorlesung (WOK, Frequenzkennlinie, Kompensation von Streckenzeitkonstanten) entworfen.



   Das Abtast-Halteglied kann entweder vernachlässigt ($H_0(s) = 1$) oder — vorteilhaft — durch ein kontinuierliches Übertragungsglied $\tilde{H}_0(s)$ approximiert werden.

2. Die (approximative) Diskretisierung des zeitkontinuierlichen Regelgesetzes $G_R(s)$ führt zum diskreten Regelalgorithmus $D(z) = \mathfrak{Z}\{G_R(s)\}$.



Approximation für das Abtast-Halteglied

Für die Impulsfolge $u^*(t)$ gilt:

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \, e^{-kTs}$$

Für das Originalsignal $u(t)$ gilt

$$U(s) = \mathscr{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} \, dt$$

Somit kann das Laplace-Integral für $t = k\,T$ durch eine Rechtecksumme angenähert werden

$$U(s) \approx \sum_{k=0}^{\infty} u_k \, e^{-kTs} \, T = U^*(s) \, T$$

Mögliche Approximationen für das Abtast-Halteglied:

1. Näherung als Totzeitglied

   $$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \frac{e^{-\frac{Ts}{2}} \left(e^{\frac{Ts}{2}} - e^{-\frac{Ts}{2}} \right)}{s} = e^{\frac{-Ts}{2}} \; \frac{2 \sinh\left(\frac{Ts}{2}\right)}{s} = T \, e^{\frac{-Ts}{2}} \; \frac{\sinh\left(\frac{Ts}{2}\right)}{\left(\frac{Ts}{2}\right)}$$

   $$\Rightarrow \; H_0(s) \approx T \cdot e^{-\frac{Ts}{2}}$$

   mit $\frac{\sinh(x)}{x} \approx 1$ für kleine x und insgesamt

   $$H_0(s) \cdot U^*(s) \approx T \cdot e^{-\frac{Ts}{2}} \cdot \frac{U(s)}{T} \quad \Rightarrow \; \tilde{H}_0(s) \approx e^{-\frac{Ts}{2}}$$

2. Näherung als PT_1-System

   $$e^{-Ts} = \frac{e^{-\frac{Ts}{2}}}{e^{\frac{Ts}{2}}} \approx \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}}$$

   Allpassglied (Padé-Approximation 1. Ordnung) Einsetzen resultiert in

   $$H_0(s) \cdot U^*(s) \approx H_0(s) \cdot \frac{U(s)}{T} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{U(s)}{T} \approx$$

   $$\frac{1 - \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}}}{s} \cdot \frac{U(s)}{T} = \frac{1}{1 + \frac{T}{2}s} \cdot U(s) \quad \Rightarrow \; \tilde{H}_0(s) = \frac{1}{1 + \frac{T}{2}s}$$

Digitale Realisierung analoger Regler

Zur digitalen Realisierung auf einem Prozessrechner soll ein bekannter zeitkontinuierlichen Regler in einen äquivalenten digitalen Regler überführt werden. Dazu wird die s-Übertragungsfunktion des Reglers $G_R(s)$ bzw. die zugehörige Differentialgleichung durch Approximation in die z-Übertragungsfunktion des digitalen Reglers $D(z)$ bzw. die zugehörige Differenzengleichung überführt. Im Folgenden werden fünf Möglichkeiten der approximativen Transformation vorgestellt.

α) **Rückwärtsdifferenzenquotient**

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta T} \approx \frac{x(kT) - x\left((k-1)T\right)}{T}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathscr{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} s\,X(s)$$

$$\frac{x(kT) - x\left((k-1)T\right)}{T} \overset{\mathfrak{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \left(1 - z^{-1}\right) \frac{X(z)}{T}$$

resultierende Äquivalenzbeziehung:

$$s \mathrel{\widehat{=}} \frac{\left(1 - z^{-1}\right)}{T} = \frac{z-1}{Tz}$$

resultierender Regelalgorithmus

$$D(z) = G_R(s)\Big|_{s = \frac{z-1}{Tz}}$$

β) **Vorwärtsdifferenzenquotient**

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta T} \approx \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathscr{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} s\,X(s)$$

$$\frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T} \overset{\mathfrak{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{z-1}{T} X(z)$$

resultierende Äquivalenzbeziehung

$$s \mathrel{\widehat{=}} \frac{z-1}{T}$$

resultierender Regelalgorithmus

$$D(z) = G_R(s)\Big|_{s = \frac{z-1}{T}}$$

γ) **Bilineare Transformation (Tustin)**
$z = e^{sT}$, bzw. $s = \frac{1}{T} \ln z$
Die Reihenentwicklung für $\ln z$ (mit $z = 1$ als Entwicklungspunkt) liefert

$$s = \frac{2}{T} \left\{ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \ldots \right\}$$

Abbruch nach dem ersten Glied liefert Tustin-Formel

$$s \mathrel{\widehat{=}} \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

resultierender Regelalgorithmus

$$D(z) = G_R(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

Hinweis: entspricht Integration mit Trapezregel

δ) **Diskretes Äquivalent** Grundidee: direkte Abbildung der Pol- und Nullstellen von der s-Ebene in die z-Ebene

$$\begin{aligned} G_R(s) &= \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n} \\ &= \underbrace{\frac{b_m}{a_n}}_{K} \frac{(s - s_{N1}) \cdot \ldots \cdot (s - s_{Nm})}{(s - s_{P1}) \cdot \ldots \cdot (s - s_{Pn})} \end{aligned}$$

Vorgehen:

a) Alle Polstellen s_{Pi} werden abgebildet auf $z_{Pi} = e^{s_{Pi}T}$

b) Alle m endlichen Nullstellen s_{Ni} werden abgebildet auf $z_{Ni} = e^{s_{Ni}T}$; $i = 1, \ldots, m$

c) Falls $n > m$ gilt, existieren $n - m$ Nullstellen im Unendlichen. Diese werden abgebildet auf $z = -1$
$z_{Ni} = -1$, $i = m + 1, \ldots, n$

d) Die Verstärkung K_z wird derart angepasst, dass gilt

$$\left|D(z)\right|\Big|_{z=e^{j\omega^* T}} = \left|G_R(s)\right|\Big|_{s=j\omega^*}$$

ω^* kann zum Beispiel sein: statische Verstärkung $\omega^* = 0$,
Durchtrittsfrequenz mit $\left|G_R(j\omega_D)\right| = 1$, d.h. $\omega^* = \omega_D$

Resultat

$$\begin{aligned} D(z) &= K_z \frac{(z - z_{N1}) \cdot \ldots \cdot (z - z_{Nn})}{(z - z_{P1}) \cdot \ldots \cdot (z - z_{Pn})} \\ &= \frac{c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n}{d_0 + d_1 z + \ldots + d_n z^n} \end{aligned}$$

ϵ) **Halteglied-Äquivalent** Grundidee: Übergangsfolge und Übergangsfunktion sollen zu den Abtastzeitpunkten übereinstimmen

$$Y_z(z) = D(z) \frac{z}{z-1} \stackrel{!}{=} \mathfrak{Z}\left\{\frac{G_R(s)}{s}\right\}$$

Auflösen nach $D(z)$ liefert

$$D(z) = \frac{z-1}{z} \mathfrak{Z}\left\{\frac{G_R(s)}{s}\right\}$$

Bemerkung: entspricht dem Vorgehen bei der z-Übertragungsfunktion $H_0 G_z(z) = \mathfrak{Z}\{H_0(s)G(s)\}$ gemäß Abschnitt 2.3.1 für Reihenschaltung von Halteglied und Strecke.

Beispiel: PI-Regler mit $K_R = 1$, $T_I = 1$, $T = 0.1$

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s}$$

α) Rückwärtsdifferenzenquotient

$$D(z) = \frac{U_z(z)}{E_z(z)} = G_R(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = 1 + \frac{T}{1-z^{-1}} = \frac{(1+T) - z^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad = \frac{1.1 - z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

β) Vorwärtsdifferenzenquotient

$$D(z) = G_R(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = 1 + \frac{T}{z-1} = \frac{z-1+T}{z-1} = \frac{1-(1-T)z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1-0.9\,z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

γ) Tustin

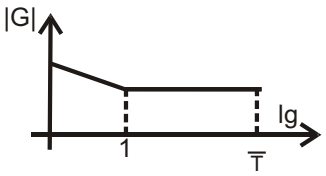
$$D(z) = G_R(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = 1 + \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{2}\frac{(2+T)-(2-T)z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1.05-0.95\,z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

δ) Diskretes Äquivalent

$$\begin{aligned} s_{P1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad z_{P1} = e^{0T} = 1 \\ s_{N1} = -1 \quad &\Rightarrow \quad z_{N1} = e^{-T} \end{aligned}$$

$$D(z) = K_z \frac{z-e^{-T}}{z-1}$$

Bestimmung von K_z



Die Wahl von ω^* stellt einen Freiheitsgrad dar. Hier: ω^* Rand des Primärstreifens

$$\begin{aligned} &\omega^* = \frac{\pi}{T} \\ \Rightarrow\ &z^* = e^{j\omega^* T} = e^{j\pi} = -1 \end{aligned}$$

$$\left|D(z^*)\right| = K_z \left|\frac{(-1)-e^{-0,1}}{-1-1}\right| \stackrel{!}{=} \left|G_R(j\omega^*)\right| = \left|\frac{j\omega^*+1}{j\omega^*}\right| \quad \Leftrightarrow\ K_z = 1.051$$

$$D(z) = 1.051\,\frac{z-0.9048}{z-1} = \frac{1.051-0.951\,z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

ϵ) Halteglied-Äquivalent

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{z-1}{z}\,\mathfrak{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\,\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right\} \\ &= \frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1}+\frac{Tz}{(z-1)^2}\right] = 1+\frac{T}{z-1} = \frac{z-1+T}{z-1} \qquad = \frac{1-0.9\,z^{-1}}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

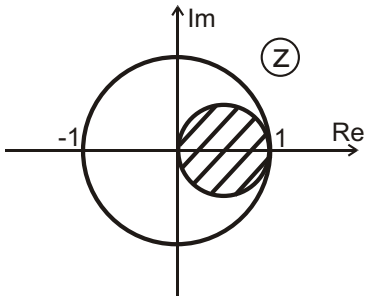
hier identisch zu β).

Stabilitätsbetrachtung der Diskretisierungsverfahren

Interessant ist die Frage, ob aus einer stabilen s-Übertragungsfunktion auch wieder eine stabile z-Übertragungsfunktion resultiert.
Dazu wird das Stabilitätsgebiet des s-Bereiches mit den diskutierten Approximationen in die z-Ebene transformiert.

α) Rückwärtsdifferenzenquotient

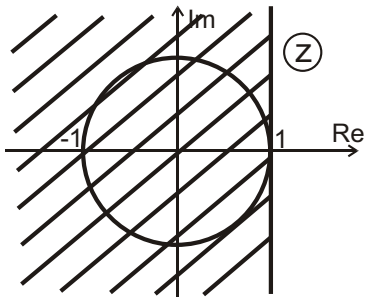
$$s = \frac{z-1}{Tz} = \frac{1-z^{-1}}{T} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{1}{1-Ts}$$



Die linke s-Halbebene wird in einen Kreis mit dem Mittelpunkt bei $z = 0.5$ und einem Radius von $r = 0.5$ abgebildet.
$\Rightarrow$ Eine stabile s-Übertragungsfunktion führt auf eine stabile z-Übertragungsfunktion,
$\Rightarrow$ aber auch eine instabile s-Übertragungsfunktion kann in den Einheitskreis abgebildet werden.

β) Vorwärtsdifferenzenquotient

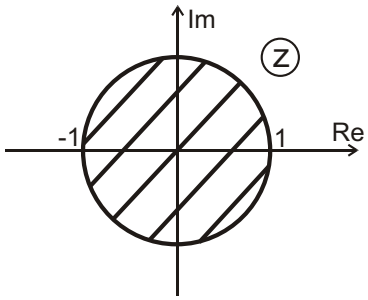
$$s = \frac{z-1}{T} \;\Leftrightarrow\; z = 1 + Ts$$



Konjugiert komplexe Pole $s = \pm j\omega$ werden auf $z = 1 \pm j\omega T$ abgebildet. Außerhalb des Einheitskreises ist die z-Übertragungsfunktion instabil.
$\Rightarrow$ Eine stabile s-Übertragungsfunktion kann auf eine instabile z-Übertragungsfunktion abgebildet werden.

γ) Bilineare Transformation (Tustin)

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{1+\frac{sT}{2}}{1-\frac{sT}{2}}$$



$\Rightarrow$ Die linke s-Halbebene wird in den Einheitskreis abgebildet.
$\Rightarrow$ Eine stabile (instabile) s-Übertragungsfunktion wird auf eine stabile (instabile) z-Übertragungsfunktion abgebildet.

Diskretisierung des realen PID-Reglers $(PIDT_1)$

Die s-Übertragungsfunktion des kontinuierlichen PID-Reglers lautet

$$G_{\mathrm{PID}}(s) = K_R \left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_V s}\right] .$$

Näherung für I-Anteil nach Tustin

$$\left.\frac{1}{T_I s}\right|_{s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{T}{2T_I}\frac{z+1}{z-1}$$

Näherung für D-Anteil mit Rückwärtsdifferenzenquotient

$$\left.\frac{T_D s}{1 + T_V s}\right|_{s = \frac{z-1}{Tz}} = \frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z\left(1 + \frac{T_V}{T}\right) - \frac{T_V}{T}}$$

Die resultierende z-Übertragungsfunktion lautet

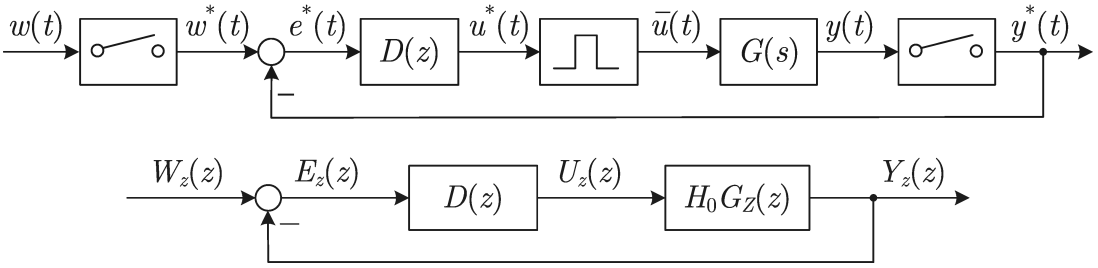
$$G_{\mathrm{PID,z}}(z) = K_R \left[1 + \frac{T}{2T_I}\frac{z+1}{z-1} + \frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z\left(1 + \frac{T_V}{T}\right) - \frac{T_V}{T}}\right] = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - a_1 z^{-1})} ,$$

mit
$$b_0 = \frac{K_R}{1 + \frac{T_V}{T}}\left[1 + \frac{T + T_V}{2T_I} + \frac{T_D + T_V}{T}\right]$$
$$b_1 = \frac{K_R}{1 + \frac{T_V}{T}}\left[-1 + \frac{T}{2T_I} - \frac{2(T_D + T_V)}{T}\right]$$
$$b_2 = \frac{K_R}{1 + \frac{T_V}{T}}\left[\frac{T_D + T_V}{2T_I} - \frac{T_V}{2T_I}\right]$$
$$a_1 = -\frac{T_V}{T + T_V} .$$

Bei Verwendung dieses quasistetigen Regelalgorithmus' sollte die Abtastzeit im Vergleich zur kleinsten Streckenzeitkonstante sehr klein gewählt werden.

4.1.3 Entwurf der Regelung auf Basis einer zeitdiskreten Systembeschreibung

Beim Entwurf der Regelung auf Basis einer zeitdiskreten Systembeschreibung werden die Besonderheiten einer nicht-analogen Reglerimplementierung beim Entwurf berücksichtigt.



Das Entwurfsverfahren kann auch angewendet werden, falls das Systemmodell bereits zeitdiskret ist (Bsp. Bankkonto), falls keine kontinuierlichen Messungen vorliegen (Bsp. Radar-Entfernungsmessung, chem. Labormessung), falls gutes Führungsverhalten und schnelle Störunterdrückung unter Verwendung zeitdiskreter Entwurfsmethoden eine Reduktion von T bzgl. Shannon erfordern.

$$6\,\omega_{\text{Gr}} \leq \omega_T \leq 20\,\omega_{\text{Gr}}\,, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi}{10\,\omega_{Gr}} \leq T \leq \frac{\pi}{3\,\omega_{\text{Gr}}}$$

Diskreter Regelalgorithmus für PID-ähnliches Verhalten

Ansatz für Regler mit freien Parametern b_i:

$$G_R(z) = \frac{b_0 + b_1\,z^{-1} + b_2\,z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{U_z(z)}{E_z(z)}$$

bzw. als Differenzengleichung

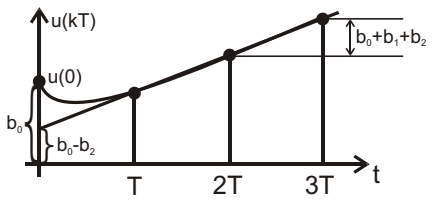
$$u(kT) = u\,[(k-1)T] + b_0\,e(kT) + b_1\,e\,[(k-1)T] + b_2\,e\,[(k-2)T]$$

Ziel: Die drei Parameter b_0, b_1, b_2 so festlegen, dass PID-ähnliches Verhalten erreicht wird.
Annahme: sprungförmige Eingangsgröße

$$e(kT) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ 1 & \text{für } k \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad & u(0) = b_0 \\
k = 1 \quad & u(T) = b_0 + b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 1 = 2\,b_0 + b_1 \\
k = 2 \quad & u(2T) = 2\,b_0 + b_1 + b_0 + b_1 + b_2 \\
\vdots \quad & u(kT) = u\,[(k-1)T] + b_0 + b_1 + b_2 \\
& \qquad = (k+1)\,b_0 + k\,b_1 + (k-1)\,b_2
\end{aligned}$$

Bedingung für PID-ähnliches Verhalten



Forderungen:

1. $u(T) < u(0)$
2. $u(kT) > u\left[(k-1)T\right]\ ,\ k \geq 2$

zu 1.

$$u(T) = 2\,b_0 + b_1 < u(0) = b_0 \quad \Leftrightarrow\ b_1 < -b_0$$

zu 2.

$$u(kT) = (k+1)\,b_0 + k\,b_1 + (k-1)\,b_2 > k\,b_0 + (k-1)\,b_1 + (k-2)\,b_2 = u((k-1)T)$$
$$\Leftrightarrow\ b_0 + b_1 + b_2 > 0 \quad \Leftrightarrow\ b_2 > -(b_0 + b_1)$$

Umrechnung in die Verstärkungen des zeitkontinuierlichen Reglers

Vergleich mit der Sprungantwort eines zeitkontinuierlichen Systems

$$h(t) = K_R \cdot \left[\left(1 + \frac{t}{T_I}\right)\sigma(t) + T_D \cdot \delta(t)\right]$$

$$\begin{aligned} K_R &= b_0 - b_2 \\ K_R \cdot T_D + K_R &= b_0 \\ \frac{K_R}{T_I} &= \frac{b_0 + b_1 + b_2}{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_R &= b_0 - b_2 \\ T_D &= (b_0 - K_R) \cdot \frac{1}{K_R} \\ T_I &= \frac{K_R \cdot T}{b_0 + b_1 + b_2} \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} b_0 &= K_R + T_D \cdot K_R \\ b_1 &= \frac{T \cdot K_R}{T_I} - K_R - 2 \cdot T_D \cdot K_R \\ b_2 &= T_D \cdot K_R \end{aligned}$$

4.2 Diskreter Reglerentwurf im Zustandsraum

Den folgenden Betrachtungen liege ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System der Form

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{\Phi}\,\underline{x}_k + \underline{H}\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= \underline{C}\,\underline{x}_k + \underline{D}\,\underline{u}_k \end{aligned}$$

mit stückweise konstantem Eingang zu Grunde.

4.2.1 Steuerbarkeit

Definition der Steuerbarkeit

Ein diskretes System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn eine endliche Steuerfolge $\underline{u}_k$ existiert, die das System in endlich vielen Schritten von einem beliebigen Anfangszustand $\underline{x}_0$ in einen beliebigen Endzustand $\underline{x}_e$ überführt.

Allgemeine Lösung der Zustandsdifferenzengleichung

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &= \underline{\Phi}\,\underline{x}_0 + \underline{H}\,\underline{u}_0 \\ \underline{x}_2 &= \underline{\Phi}^2\,\underline{x}_0 + \underline{\Phi}\,\underline{H}\,\underline{u}_0 + \underline{H}\,\underline{u}_1 \\ &\vdots \\ \underline{x}_N &= \underline{\Phi}^N\underline{x}_0 + \underline{\Phi}^{N-1}\underline{H}\,\underline{u}_0 + \underline{\Phi}^{N-2}\underline{H}\,\underline{u}_1 + \ldots + \underline{H}\,\underline{u}_{N-1} \end{aligned}$$

Für $\underline{x}_e = \underline{x}_N$ gilt folglich

$$\begin{aligned} \underline{x}_e - \underline{\Phi}^N\,\underline{x}_0 &= \underline{\Phi}^{N-1}\,\underline{H}\,\underline{u}_0 + \underline{\Phi}^{N-2}\,\underline{H}\,\underline{u}_1 + \ldots + \underline{H}\,\underline{u}_{N-1} \\ &= \begin{bmatrix}\underline{H} & \underline{\Phi}\,\underline{H} & \ldots & \underline{\Phi}^{N-1}\,\underline{H}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\underline{u}_{N-1} \\ \underline{u}_{N-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0\end{bmatrix} = \underline{Q}_S \begin{bmatrix}\underline{u}_{N-1} \\ \underline{u}_{N-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

mit $\underline{Q}_S := \begin{bmatrix}\underline{H} & \underline{\Phi}\,\underline{H} & \ldots & \underline{\Phi}^{N-1}\,\underline{H}\end{bmatrix}$.

Kalman'sches Steuerbarkeitskriterium

Das Systems $\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}\,\underline{x}_k + \underline{H}\,\underline{u}_k$ ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\underline{Q}_S = \begin{bmatrix}\underline{H} & \underline{\Phi}\,\underline{H} & \ldots & \underline{\Phi}^{n-1}\underline{H}\end{bmatrix}$ den Höchstrang $\mathrm{rang}(\underline{Q}_S) = n$ besitzt.

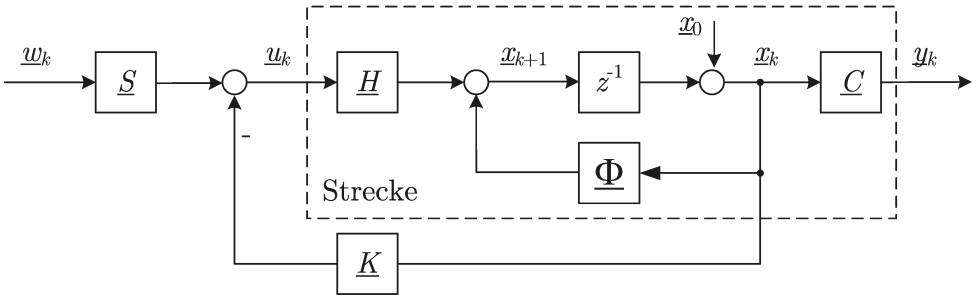
Für den Sonderfall eines SISO-Systems ($p = q = 1$) ist die Forderung nach dem Höchstrang für

$$\det(\underline{Q}_S) = \begin{bmatrix}\underline{h} & \underline{\Phi}\,\underline{h} & \ldots & \underline{\Phi}^{n-1}\underline{h}\end{bmatrix} \neq 0$$

erfüllt.

4.2.2 Zustandsregler

Blockdiagramm eines diskreten Mehrgrößensystems mit Zustandsrückführung und Vorsteuerung



Das diskrete Regelgesetz im Zustandsraum mit Vorsteueranteil $\underline{u}_{V,k}$ und Regelanteil $\underline{u}_{R,k}$ lautet dementsprechend

$$\underline{u}_k = \underline{u}_{V,k} + \underline{u}_{R,k} = \underline{S}\,\underline{w}_k - \underline{K}\,\underline{x}_k\,.$$

Für ein quadratisches Problem ($\dim(\underline{w}_k) = \dim(\underline{u}_k) = \dim(\underline{y}_k) = p$) hat die Vorsteuermatrix $\underline{S}$ die Dimension (p, p) und die Reglermatrix $\underline{K}$ die Dimension (p, n). Die Zustandsdifferenzengleichung des geschlossenen Regelkreises mit $\underline{u}_k = \underline{S}\,\underline{w}_k - \underline{K}\,\underline{x}_k$ berechnet sich folglich zu

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}\,\underline{x}_k + \underline{H}\,(\underline{S}\,\underline{w}_k - \underline{K}\,\underline{x}_k) = \underbrace{(\underline{\Phi} - \underline{H}\,\underline{K})}_{=:\underline{\Phi}_R}\,\underline{x}_k + \underline{H}\,\underline{S}\,\underline{w}_k\,,$$

Die Dynamik und Stabilität des geregelten Systems wird dabei durch die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises $\underline{\Phi}_R = \underline{\Phi} - \underline{H}\;\underline{K}$ festgelegt und kann durch die Wahl der Parameter $k_{i,j}$ der Reglermatrix $\underline{K}$ beeinflusst werden ($i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, n$). Durch eine geeignete Wahl der Vorsteuermatrix $\underline{S}$ kann stationäre Genauigkeit bzw. ein gewünschtes Folgeverhalten des geregelten Systems erreicht werden.

4.2.3 Entwurf der Vorsteuermatrix

Mit dem Einsatz einer Vorsteuerung soll stationäre Genauigkeit erreicht werden. Das bedeutet, dass sich der Systemzustand ab einem diskreten Zeitpunkt $k > k^*$ nicht mehr ändern soll:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k = \underline{x}_s\ , \quad \forall\ k > k^*\,.$$

Bei einem konstanten bzw. sprungförmigen Führungssignal

$$\underline{w}_k = \underline{w}_s\ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gilt für $k > k^*$ für den stationären Zustands- bzw. Ausgangsvektor mit $\underline{D} = \underline{0}$

$$\underline{x}_s = (\underline{\Phi} - \underline{H}\,\underline{K})\,\underline{x}_s + \underline{H}\,\underline{S}\,\underline{w}_s \text{ und}$$
$$\underline{y}_s = \underline{C}\,\underline{x}_s\ .$$

Wird die Identität von Führungsgröße und Ausgangsgröße, $\underline{w}_s = \underline{y}_s$, gefordert, berechnet sich die Vorfiltermatrix mit

$$\underline{y}_s = \underline{C}\,(\underline{I} - \underline{\Phi} + \underline{H}\,\underline{K})^{-1}\underline{H}\,\underline{S}\,\underline{w}_s$$

und unter der Voraussetzung der Invertierbarkeit von $(\underline{I} - \underline{\Phi} + \underline{H}\,\underline{K})$ zu

$$\underline{S} = \left[\underline{C}\,(\underline{I} - \underline{\Phi} + \underline{H}\;\underline{K})^{-1}\underline{H}\right]^{-1}\ .$$

$(\underline{I} - \underline{\Phi} + \underline{H}\;\underline{K})$ ist invertierbar, falls keine Eigenwerte bei $\lambda_i = 1$ vorliegen.

4.2.4 Reglerentwurf durch Polvorgabe

Für den Entwurf des Reglers wird vor allem asymptotische Stabilität des Regelkreises gefordert. Darüber hinaus kann über die Wahl der Reglermatrix $\underline{K}$ das transiente Führungsverhalten (Schnelligkeit $\leftrightarrow$ Dämpfung) des geschlossenen Regelkreises beeinflusst werden. Weitere Punkte, die durch die Reglerauslegung festgelegt werden, sind das Störverhalten und die Robustheit gegenüber Unsicherheiten. Die charakteristische Gleichung des geregelten Systems mit der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises $\underline{\Phi}_R = \underline{\Phi} - \underline{H}\ \underline{K}$ lautet

$$p(z) = \det(z\underline{I} - \underline{\Phi}_R) = \det(z\,\underline{I} - \underline{\Phi} + \underline{H}\ \underline{K}) \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Für den geschlossenen Regelkreis kann die Pollage in Form eines Wunschpolynoms $p_d(z)$ mit den Polen λ_i, $i = 1, \ldots, n$, vorgegeben werden:

$$p_d(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - \lambda_i) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)\,.$$

Für die Reglermatrix $\underline{K}$ wird ein Ansatz mit $p \cdot n$ Reglerparametern gewählt:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p1} & \cdots & k_{pn} \end{bmatrix}$$

Die Reglerparameter (Matrixelemente von $\underline{K}$) können über einen Koeffizientenvergleich der charakteristischen Gleichung des geregelten Systems mit dem Wunschpolynom bestimmt werden:

$$\begin{aligned} &\det(z\underline{I} - \underline{\Phi} + \underline{H}\ \underline{K}) \stackrel{!}{=} p_d(z) \\ \Leftrightarrow\ &z^n + a_{n-1}(\underline{K})z^{n-1} + \ldots + a_0(\underline{K}) \stackrel{!}{=} z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \ldots + p_0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{n-1}(\underline{K}) &= p_{n-1} \\ &\vdots \\ a_0(\underline{K}) &= p_0 \end{aligned}\right\} n \text{ Gleichungen für } p \cdot n \text{ Unbekannte}$$

Für den SISO-Fall ($p = 1$) ist das Gleichungssystem unter der Voraussetzung, dass das System vollständig steuerbar ist, eindeutig lösbar.
Im MIMO-Fall ($p > 1$) ist das Gleichungssystem unterbestimmt, es existieren unendlich viele Lösungen. Damit ergeben sich Freiheitsgrade, die für den Reglerentwurf genutzt werden können.

4.2.5 Polvorgabeentwurf für SISO-Systeme mit der Ackermann-Formel

Beim Reglerentwurf mittels Polvorgabe wird für die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises eines SISO-Systems folgende Forderung gestellt

$$\det(z\,\underline{I} - \underline{\Phi}_R) = \det(z\,\underline{I} - \underline{\Phi} + \underline{h}\ \underline{k}^T) \stackrel{!}{=} \prod_{i=1}^{n}(z - \lambda_i) = p_0 + p_1\,z + \ldots + p_{n-1}\,z^{n-1} + z^n$$

Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass auch $\underline{\Phi}_R$ der charakteristischen Gleichung gehorcht:

$$p_0\,\underline{I} + p_1\,\underline{\Phi}_R + \ldots + p_{n-1}\,\underline{\Phi}_R^{n-1} + \underline{\Phi}_R^n = \underline{0}$$

Für die Potenzen von $\underline{\Phi}_R$ gilt

$$\begin{aligned}
\underline{\Phi}_R^2 &= (\underline{\Phi} - \underline{h}\,\underline{k}^T)\underline{\Phi}_R = \underline{\Phi}\,\underline{\Phi}_R - \underline{h}\,\underline{k}^T\underline{\Phi}_R = \underline{\Phi}^2 - \underline{\Phi}\,\underline{h}\,\underline{k}^T - \underline{h}\,\underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R \\
\underline{\Phi}_R^3 &= \underline{\Phi}^3 - \underline{\Phi}^2\,\underline{h}\,\underline{k}^T - \underline{\Phi}\,\underline{h}\,\underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R - \underline{h}\,\underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R^2 \\
&\vdots \\
\underline{\Phi}_R^n &= \underline{\Phi}^n - \underline{\Phi}^{n-1}\,\underline{h}\,\underline{k}^T - \ldots - \underline{\Phi}\,\underline{h}\,\underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R^{n-2} - \underline{h}\,\underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R^{n-1}
\end{aligned}$$

Damit lässt sich die charakteristische Gleichung in $\underline{\Phi}_R$ umsortieren

$$\begin{aligned}
&p_0\,\underline{I} + \\
&p_1\,\underline{\Phi} - p_1\,\underline{h}\,\underline{k}^T + \\
&p_2\,\underline{\Phi}^2 - p_2\,\underline{\Phi}\,\underline{h}\,\underline{k}^T - p_2\,\underline{h}\,\underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R + \\
&\quad\vdots \\
&p_n\,\underline{\Phi}^n - \underline{\Phi}^{n-1}\,\underline{h}\,\underline{k}^T - \ldots - \underline{\Phi}\,\underline{h}\,\underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R^{n-2} - \underline{h}\,\underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R^{n-1} = \underline{0}
\end{aligned}$$

Werden die negativen Summanden auf die rechte Seite gebracht, folgt

$$p_0\,\underline{I} + p_1\,\underline{\Phi} + \ldots + p_n\,\underline{\Phi}^n = p(\underline{\Phi})\,,$$

$$\begin{aligned}
\text{mit}\quad p(\underline{\Phi}) &= \underline{h}\,(p_1\,\underline{h}\,\underline{k}^T + p_2\,\underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R + \ldots + \underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R^{n-1}) + \\
&\quad\ \underline{\Phi}\,\underline{h}\,(p_2\,\underline{k}^T + \ldots + \underline{k}^T\,\underline{\Phi}_R^{n-2}) + \\
&\quad\ \vdots \\
&\quad\ \underline{\Phi}^{n-1}\,\underline{h}\,\underline{k}^T \\
&= \underbrace{\left[\underline{h}\ \underline{\Phi}\,\underline{h}\ \ldots\ \underline{\Phi}^{n-1}\,\underline{h}\right]}_{=\underline{Q}_S} \begin{bmatrix} * \\ \cdots\cdots \\ \underline{k}^T \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

wobei $\left[\underline{h}\ \ \underline{\Phi}\,\underline{h}\ \ \ldots\ \ \underline{\Phi}^{n-1}\,\underline{h}\right] = \underline{Q}_S$ die Steuerbarkeitsmatrix des ungeregelten Systems ist. Durch eine Multiplikation mit der inversen Steuerbarkeitsmatrix ${\underline{Q}_S}^{-1}$ ergibt die letzte Zeile die Bestimmungsgleichung für die Reglerverstärkung $\underline{k}^T$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * \\ \cdots\cdots \\ q_n^T \end{bmatrix}}_{\underline{Q}_S^{-1}} p(\underline{\Phi}) = \begin{bmatrix} * \\ \cdots\cdots \\ \underline{k}^T \end{bmatrix}$$

Damit berechnet sich die Reglerverstärkung $\underline{k}^T$ eines SISO-Systems in Abhängigkeit der Koeffizienten $p_0, \ldots, p_{n-1}$ des Wunschpolynom $p_d(z)$ zu

$$\underline{k}^T = \underline{q}_n^T p(\Phi) = p_0\,\underline{q}_n^T + p_1\,\underline{q}_n^T\,\underline{\Phi} + \ldots + p_{n-1}\,\underline{q}_n^T\,\underline{\Phi}^{n-1} + \underline{q}_n^T\,\underline{\Phi}^n\,,$$

wobei $\underline{q}_n^T = [0\ \ldots\ 0\ 1]\,\underline{Q}_S^{-1}$ die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix ist.

4.2.6 Eigenwertvorgabe und Zeitverhalten

Wie sind die Pole in der z-Ebene zu wählen, dass ein erwünschtes Zeitverhalten resultiert?
Für den Zusammenhang zwischen der Wahl der Pole in der s-Ebene und der Entsprechung in der z-Ebene s. Beiblatt.
komplexe Variable der Laplace-Transformation: $s = \delta + j\,\omega$
komplexe Variable der z-Transformation: $z = e^{T\,s} = e^{\delta\,T + j\,\omega\,T} = e^{\delta\,T} \cdot e^{j\,\omega\,T} = r\,e^{j\,\varphi}$
mit $r = |e^{\delta\,T}|$ und $\varphi = \arg\{z\} = \omega\,T$
Für Kurven mit konstantem Lehr'schen Dämpfungsmaß D wird ein schwingungsfähiges PT_2-Systems ($0<D<1$) betrachtet:

$$G(s) = \frac{K}{T_s^2 s^2 + 2DT_s s + 1} \quad \text{mit } \delta = -\frac{D}{T_s} \text{ und } \omega = \frac{\sqrt{1-D^2}}{T_s}$$

4.2.7 Reglerentwurf auf endliche Einstellzeit

Ziel des Reglerentwurfs auf endliche Einstellzeit ist es, eine Stellfolge $\underline{u}_k = -\underline{K}\,\underline{x}_k$ zu finden, so dass $\underline{x}_k$ ausgehend von $\underline{x}_0$ in endlich vielen Schritten ($k = N$) in einen stationären Zustand $\underline{x}_s$ überführt wird.
Für die allgemeine Lösung der Zustandsdifferenzengleichung eines SISO-Systems gilt

$$\underline{x}_N = \underline{\Phi}^N\,\underline{x}_0 + \underline{\Phi}^{N-1}\,\underline{h}\,u_0 + \underline{\Phi}^{N-1}\,\underline{h}\,u_1 + \ldots + \underline{h}\,u_{N-1}\,.$$

Mit $\underline{x}_N = \underline{x}_s$ und der Wahl der Anzahl der Schritte gleich der Systemordnung $N = n$ folgt

$$\begin{aligned}\underline{x}_s - \underline{\Phi}^n\,\underline{x}_0 &= \underline{\Phi}^{n-1}\,\underline{h}\,u_0 + \underline{\Phi}^{n-1}\,\underline{h}\,u_1 + \ldots + \underline{h}\,u_{n-1} \\ &= \begin{bmatrix}\underline{h} & \underline{\Phi}\,\underline{h} & \ldots & \underline{\Phi}^{n-1}\,\underline{h}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} = \underline{Q}_S \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

wobei $\underline{Q}_S$ die Steuerbarkeitsmatrix des Systems ist. Löst man diese Gleichung nach dem Vektor der Stellgrößen

$$\begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} = \underline{Q}_s^{-1}[\underline{x}_s - \underline{\Phi}^n \underline{x}_0]$$

auf, ergibt sich ein vom aktuellen Zustandsvektor $\underline{x}_k$ unabhängiges Steuergesetz mit dem Anfangszustand $\underline{x}_0$ und dem stationären Endzustand $\underline{x}_s$.
Mit $\underline{Q}_s^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{q}_1^T \\ \vdots \\ \underline{q}_n^T \end{bmatrix}$ liefert eine zeilenweise Betrachtung

$$\begin{aligned} u_0 &= \underline{q}_n^T[\underline{x}_s - \underline{\Phi}^n \underline{x}_0] \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= \underline{q}_1^T[\underline{x}_s - \underline{\Phi}^n \underline{x}_0] \end{aligned}$$

Für den Übergang zum Regelgesetz stellen wir ein Gedankenexperiment an, mit $\underline{x}_s$ als stationärem Zustand und zugehöriger stationärer Stellgröße u_s.

$$\underline{x}_0 \overset{u_0}{\rightarrow} \underline{x}_1 \overset{u_1}{\rightarrow} \underline{x}_2 \overset{u_2}{\rightarrow} \ldots \overset{u_{n-1}}{\rightarrow} \underline{x}_s \overset{u_s}{\rightarrow} \underline{x}_s \overset{u_s}{\rightarrow}$$
$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0^* \overset{u_0^*}{\rightarrow} \underline{x}_1^* \overset{u_1^*}{\rightarrow} \underline{x}_2^* \overset{u_2^*}{\rightarrow} \ldots \overset{u_{n-1}^*}{\rightarrow} \underline{x}_{n-1} \overset{u_{n-1}^*}{\rightarrow} \underline{x}_s \overset{u_s}{\rightarrow}$$

Man kann mit zwei Folgen in n Schritten von $\underline{x}_1$ nach $\underline{x}_s$ gelangen

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_s \quad \text{und}$$
$$u_0^*, u_1^*, \ldots, u_{n-2}^*, u_{n-1}^* \,.$$

Die Stellgrößenfolge, die vom gleichen Startwert zum stationären Endwert führt, ist aber eindeutig bestimmt, somit gilt

$$u_1 = u_0^*, u_2 = u_1^*, \ldots$$
$$\underline{x}_1^* = \underline{x}_2, \ldots$$

$$\text{Aus} \quad u_0^* = \underline{q}_n^T \, [\underline{x}_s - \underline{\Phi}^n \underline{x}_0]$$
$$\text{wird} \quad u_1 = \underline{q}_n^T \, [\underline{x}_s - \underline{\Phi}^n \underline{x}_1] \,.$$

Ebenso ergibt sich bei einem Start von $\underline{x}_2 = \underline{x}_0^{**}$

$$u_2 = \underline{q}_n^T \, [\underline{x}_s - \underline{\Phi}^n \underline{x}_2]$$

Eine Fortsetzung des Gedankenexperiments und eine Verallgemeinerung liefert

$$u_k = \underline{q}_n^T \, [\underline{x}_s - \underline{\Phi}^n \underline{x}_k] \,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \,,$$

wobei die Stellgröße u_k nun explizit vom aktuellen Zustand $\underline{x}_k$ abhängt.

Damit lautet das Regelgesetz für eine Regelung auf endliche Einstellzeit

$$u_k = u_{R,k} + u_{V,k} = -\underline{q}_n^T \, \underline{\Phi}^n \, \underline{x}_k + \underline{q}_n^T \, \underline{x}_s$$

mit der Reglerverstärkung $\underline{k}^T = \underline{q}_n^T \underline{\Phi}^n$ und dem skalaren Vorsteuerwert $u_{V,k} = \underline{q}_n^T \, \underline{x}_s$,
wobei $\underline{q}_n^T$ wiederum die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix ist.

Vergleicht man die resultierende Verstärkung des Reglers auf endliche Einstellzeit mit der Reglerverstärkung für ein SISO-System mit der Ackermann-Formel bei Polvorgabe

$$\underline{k}^T = p_0 \, \underline{q}_n^T + p_1 \, \underline{q}_n^T \, \underline{\Phi} + \ldots + p_{n-1} \, \underline{q}_n^T \, \underline{\Phi}^{n-1} + \underline{q}_n^T \, \underline{\Phi}^n \,,$$

entspricht das einem Wunschpolynom in der Form

$$p_d(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i) = p_0 + p_1 \, z + \ldots + p_{n-1} \, z^{n-1} + z^n = z^n$$
$$\Leftrightarrow p_i = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1 \;\; \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \,, \quad i = 1, \ldots, n \,,$$

d.h. der Regler auf endliche Einstellzeit hat einen n-fachen Eigenwert in $z = 0$.

Erweiterung bei mehreren Stellgrößen

Der stationäre Zustand soll in m Schritten erreicht sein. Im Mehrgrößenfall ($p > 1$) lautet die umgeformte allgemeine Lösung der Zustandsdifferenzengleichung

$$\underline{x}_s - \underline{\Phi}^m \underline{x}_0 = \underline{H} \cdot \underline{u}_{m-1} + \ldots + \underline{\Phi}^{m-1} \underline{H} \cdot \underline{u}_0$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{H} & \underline{\Phi} \cdot \underline{H} & \ldots & \underline{\Phi}^{m-1} \cdot \underline{H} \end{bmatrix}}_{(n,m\cdot p) \quad =:\underline{Q}_m} \begin{bmatrix} \underline{u}_{m-1} \\ \underline{u}_{m-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix},$$

mit der Eingangsmatrix $\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{h}_1 & \underline{h}_2 & \ldots & \underline{h}_p \end{bmatrix}$ bei p Stellgrößen.
Das Gleichungssystem ist lösbar, wenn $\underline{Q}_m$ den n-dimensionalen Raum aufspannt, d.h. $\mathrm{rang}(\underline{Q}_m) = n$.
Bei $m \cdot p$ Spaltenvektoren gilt $m \cdot p \geq n$ bzw. $m \geq \frac{n}{p}$.

Bestimmung von m: $\mathrm{rang}(\underline{Q}_m)$ für $m = \frac{n}{p}$ überprüfen. m schrittweise um 1 erhöhen, bis die Bedingung $\mathrm{rang}(\underline{Q}_m) = n$ erfüllt ist.

1. Fall: $m \cdot p = n$ und $\mathrm{rang}(\underline{Q}_m) = n$
   $\underline{Q}_m$ ist eine quadratische (n, n)-Matrix

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{m-1} \\ \underline{u}_{m-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix} = \underline{Q}_m^{-1} \left[\underline{x}_s - \underline{\Phi}^m \, \underline{x}_0 \right]$$

2. Fall: $m \cdot p > n$ und $\mathrm{rang}(\underline{Q}_m) = n$
   $\underline{Q}_m$ ist eine liegende $(m \cdot p, n)$-Rechteckmatrix. Da mehr Unbekannte als Gleichungen auftreten, gibt es unendlich viele Lösungen der Gleichung.
   Lösungsansatz für den 2. Fall: Da die Inverse von $\underline{Q}_m$ nicht existiert, wird die Steuerfolge mittels der Pseudoinversen $\underline{\Psi} = \underline{Q}_m^T \, (\underline{Q}_m \, \underline{Q}_m^T)^{-1}$ berechnet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u}_{m-1} \\ \underline{u}_{m-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix}}_{(m\cdot p,1)} = \underbrace{\underline{Q}_m^T}_{(m\cdot p,n)} \underbrace{(\underline{Q}_m \cdot \underline{Q}_m^T)^{-1}}_{(n,n)} \underbrace{(\underline{x}_s - \underline{\Phi}^m \underline{x}_0)}_{(n,1)}$$

Sowohl die Lösung im ersten Fall, als auch die Lösung über die Pseudoinverse im zweiten Fall entsprechen wiederum einer Steuerung, da die Steuerfolge lediglich vom Anfangszustand $\underline{x}_0$ und vom stationären Endwert $\underline{x}_s$, aber nicht vom aktuellen Zustand $\underline{x}_k$ abhängen.

Für den Übergang auf ein Regelgesetz wird das Originalsystem um r fiktive Zustandsgrößen $\underline{x}_f$ erweitert, so dass $m \cdot p = n + r$ gilt.
Für die fiktiven Zustände $\underline{x}_f$ gelte folgende Zustandsdifferenzengleichung:

$$\underline{x}_{f,k+1} = \underbrace{\underline{F}}_{(r,n)} \cdot \underbrace{\underline{x}_k}_{(n,1)} + \underbrace{\underline{E}}_{(r,p)} \cdot \underbrace{\underline{u}_k}_{(p,1)}$$

Damit lautet die Zustandsdifferenzengleichung des erweiterten Systems

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}_{k+1}\\ \underline{x}_{f,k+1}\end{bmatrix}}_{\widehat{\underline{x}}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{\Phi} & \underline{0}\\ \underline{F} & \underline{0}\end{bmatrix}}_{\widehat{\underline{\Phi}}} \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}_k\\ \underline{x}_{f,k}\end{bmatrix}}_{\widehat{\underline{x}}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{H}\\ \underline{E}\end{bmatrix}}_{\widehat{\underline{H}}} \underline{u}_k$$

Mit $m \cdot r = n + r$ ergibt sich für das erweiterte System eine quadratische Steuerbarkeitsmatrix

$$\widehat{\underline{Q}}_m = \left[\widehat{\underline{H}} \quad \widehat{\underline{\Phi}}\,\widehat{\underline{H}} \quad \dots \quad \widehat{\underline{\Phi}}^{m-1}\widehat{\underline{H}}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}\underline{H} & \underline{\Phi}\,\underline{H} & \cdots & \underline{\Phi}^{m-1}\underline{H}\\ \underline{E} & \underline{F}\,\underline{H} & \cdots & \underline{F}\,\underline{\Phi}^{m-2}\underline{H}\end{array}\right]}_{(n+r,m\cdot p)}$$

$\underline{E}$ und $\underline{F}$ sind derart zu wählen, dass $\widehat{\underline{Q}}_m$ regulär wird und den Rang $n + r$ hat (sonst beliebig).
Die Zustandsrückführung lautet damit

$$\underline{u}_k = -\underline{Q}_p\,\widehat{\underline{\Phi}}^m\,\widehat{\underline{x}}_k = -\underline{Q}_p \begin{bmatrix}\underline{\Phi}^m & \underline{0}\\ \underline{F}\,\underline{\Phi}^{m-1} & \underline{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}_k\\ \underline{x}_{f,k}\end{bmatrix} = -\underline{Q}_p\begin{bmatrix}\underline{\Phi}\\ \underline{F}\end{bmatrix}\underline{\Phi}^{m-1}\,\underline{x}_k\,,$$

wobei $\underline{Q}_p$ die letzten p Zeilen der inversen Steuerbarkeitsmatrix des erweiterten Systems $\widehat{\underline{Q}}_m^{-1}$ bezeichnet. Die fiktiven Zustände $\underline{x}_f$ werden bei der Berechnung des Regelgesetzes nicht benötigt.

4.2.8 Vollständige modale Synthese nach Roppenecker

Im Mehrgrößenfall (MIMO) ergeben sich aus der Vorgabe der Eigenwerte n Gleichungen für $p \cdot n$ Unbekannte. Das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar. Es bleiben Freiheitsgrade für den Reglerentwurf offen.

Allgemeine Bestimmungsgleichung für die Reglermatrix $\underline{K}$

Ziel: Es wird eine Bestimmungsgleichung für die Reglermatrix $\underline{K}$ gesucht, die alle Lösungen bei einer bestimmten, festen Eigenwertlage umfasst.

$$\left.\begin{array}{c}\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}\,\underline{x}_k + \underline{H}\,\underline{u}_k\\ \underline{u}_k = -\underline{K}\,\underline{x}_k\end{array}\right\}\ \underline{x}_{k+1} = (\underline{\Phi} - \underline{H}\,\underline{K})\,\underline{x}_k$$

Es werden zunächst n paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_{R1}, \dots, \lambda_{Rn}$ für das geregelte System vorgegeben. Diese sollen sich von den Eigenwerten des ungeregelten Systems (d.h. die Eigenwerte λ_i von $\underline{\Phi}$) unterscheiden: $\lambda_{Ri} \neq \lambda_i$.
Für das geregelte System mit den Eigenvektoren $\underline{v}_{Ri}$ gilt:

$$\begin{aligned}&[\lambda_{Ri}\,\underline{I} - \underline{\Phi} + \underline{H}\,\underline{K}]\,\underline{v}_{Ri} = \underline{0}\\ \Leftrightarrow\qquad &[\lambda_{Ri}\,\underline{I} - \underline{\Phi}]\,\underline{v}_{Ri} = -\underline{H}\,\underbrace{\underline{K}\,\underline{v}_{Ri}}_{=:\underline{p}_i}, \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

Durch das Produkt der Reglermatrix $\underline{K}$ und den n Eigenvektoren $\underline{v}_{Ri}$ sind n Parametervektoren $\underline{p}_i$ definiert:

$$\underline{p}_i = \underline{K}\,\underline{v}_{Ri}\,, \quad i = 1, \dots, n$$

Das Auflösen nach dem Eigenvektor $\underline{v}_{Ri}$ führt zu

$$\underline{v}_{Ri} = -\left[\lambda_{Ri}\,\underline{I} - \underline{\Phi}\right]^{-1} \underline{H}\;\underline{p}_i\,.$$

Werden alle Parametervektoren $\underline{p}_i$ in einer Matrix zusammengefasst, lässt sich eine Bestimmungsgleichung für $\underline{K}$ herleiten:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \dots & \underline{p}_n\end{bmatrix} &= \underline{K}\begin{bmatrix}\underline{v}_{R1} & \underline{v}_{R2} & \dots & \underline{v}_{Rn}\end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \qquad \underline{K} &= \begin{bmatrix}\underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \dots & \underline{p}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{v}_{R1} & \underline{v}_{R2} & \dots & \underline{v}_{Rn}\end{bmatrix}^{-1} \\
\Leftrightarrow \qquad \underline{K} &= \begin{bmatrix}\underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \dots & \underline{p}_n\end{bmatrix}\left[\left[\underline{\Phi} - \lambda_{Ri}\,\underline{I}\right]^{-1}\underline{H}\;\underline{p}_1 \quad \dots \quad \left[\underline{\Phi} - \lambda_{Rn}\,\underline{I}\right]^{-1}\underline{H}\;\underline{p}_n\right]^{-1}
\end{aligned}$$

Dies entspricht der allgemeinen Lösung für $\underline{K}$ mit der festen Eigenwertlage $\lambda_{R1}, \dots, \lambda_{Rn}$.
Dabei müssen die Eigenwerte λ_{Ri} und die Parametervektoren $\underline{p}_i$ so gewählt werden, dass die Matrix der Eigenvektoren $\begin{bmatrix}\underline{v}_{R1} & \underline{v}_{R2} & \dots & \underline{v}_{Rn}\end{bmatrix}$ vollen Rang besitzt und damit regulär und invertierbar ist.

Eigenschaften der Parametervektoren und Reglerentwurf

- Der Betrag der Parametervektoren $\underline{p}_i$ ist wie auch der Betrag der Eigenvektoren beliebig.
- Wird ein Eigenwert λ_i komplex gewählt, so muss auch der zugehörige konjugiert komplexe Eigenwert $\overline{\lambda}_i$ vorgegeben werden.
- Soll ein Eigenwert λ_i des ungeregelten Systems beibehalten werden, so ist der entsprechende Parametervektor $\underline{p}_i = \underline{0}$ zu wählen:

  ungeregelt: $\left[\lambda_i\,\underline{I} - \underline{\Phi}\right]\underline{v}_i = \underline{0}$

  geregelt: $\left[\lambda_i\,\underline{I} - \underline{\Phi}\right]\underline{v}_{Ri} = -\underline{H}\;\underline{p}_i \stackrel{!}{=} -\underline{H}\;\underline{0}$

  Somit ist $\underline{v}_{Ri} = \underline{v}_i$ als Eigenvektor in der Bestimmungsgleichung einzusetzen.
- Die Parametervektoren $\underline{p}_i$ beschreiben $(p-1)\cdot n$ Freiheitsgrade, da sie beliebig normierbar sind.
- Die Parametervektoren können nach zusätzlichen Entwurfsforderungen (Robustheit, evtl. Verzicht auf Messung von Zustandsgrößen,...) gewählt werden.

Vollständige modale Synthese für SISO-Systeme

SISO-Systeme bilden einen Sonderfall, da für $p = q = 1$ die Parametervektoren skalar sind.

$$\begin{aligned}
\underline{k}^T &= \begin{bmatrix}p_1 & \dots & p_n\end{bmatrix}\left[\left[\underline{\Phi} - \lambda_{R1}\,\underline{I}\right]^{-1}\underline{h}\;\underline{p}_1 \quad \dots \quad \left[\underline{\Phi} - \lambda_{Rn}\,\underline{I}\right]^{-1}\underline{h}\;\underline{p}_n\right]^{-1} \\
&= \begin{bmatrix}p_1 & \dots & p_n\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}\left[\underline{\Phi} - \lambda_{R1}\,\underline{I}\right]^{-1}\underline{h} & \dots & \left[\underline{\Phi} - \lambda_{Rn}\,\underline{I}\right]^{-1}\underline{h}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & p_n\end{bmatrix}\right]^{-1} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix}p_1 & \dots & p_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & p_n\end{bmatrix}^{-1}}_{=\begin{bmatrix}1 & \dots & 1\end{bmatrix}}\left[\left[\underline{\Phi} - \lambda_{R1}\,\underline{I}\right]^{-1}\underline{h} \quad \dots \quad \left[\underline{\Phi} - \lambda_{Rn}\,\underline{I}\right]^{-1}\underline{h}\right]^{-1}
\end{aligned}$$

D.h. der Reglervektor $\underline{k}^T$ hängt nur von den Eigenwerten ab, die paarweise verschieden vorgegeben werden müssen.

5 Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf

Den folgenden Betrachtungen liege ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System mit der Zustandsdifferenzengleichung

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}\ \underline{x}_k + \underline{H}\ \underline{u}_k$$

und der Messgleichung

$$\underline{y}_k = \underline{C}\ \underline{x}_k$$

mit stückweise konstantem Eingang zu Grunde.

5.1 Beobachtbarkeit

5.1.1 Definition der Beobachtbarkeit

Ein diskretes System ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn der Anfangszustand $\underline{x}_0$ der Zustandsvariablen in einer endlichen Schrittanzahl aus dem Ausgangsvektor $\underline{y}_k$ (Messgrößen) und dem bekannten Eingangsvektor $\underline{u}_k$ bestimmt werden kann.

5.1.2 Kalman'sches Beobachtbarkeitskriterium

Homogene Lösung der Zustandsdifferenzengleichung

Bei einem SISO-System berechnen sich der Zustandsvektor $\underline{x}_k$ und die Ausgangsgröße y_k für $u = 0$ zu

$$\begin{aligned}
&\underline{x}_0 && y_0 = \underline{c}^T\ \underline{x}_0\\
&\underline{x}_1 = \underline{\Phi}\ \underline{x}_0 && y_1 = \underline{c}^T\ \underline{x}_1 = \underline{c}^T\ \underline{\Phi}\ \underline{x}_0\\
&\underline{x}_2 = \underline{\Phi}\ \underline{x}_1 = \underline{\Phi}^2\ \underline{x}_0 && y_2 = \underline{c}^T\ \underline{x}_2 = \underline{c}^T\ \underline{\Phi}^2\ \underline{x}_0\\
&\quad\vdots && \quad\vdots\\
&\underline{x}_N = \underline{\Phi}^N \cdot \underline{x}_0 && y_N = \underline{c}^T\ \underline{\Phi}^N\ \underline{x}_0
\end{aligned}$$

Werden die Ausgangsgrößen zusammengefasst, lautet die Gleichung

$$\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}^T\\ \underline{c}^T\ \underline{\Phi}\\ \underline{c}^T\ \underline{\Phi}^2\\ \vdots\\ \underline{c}^T\ \underline{\Phi}^{n-1}\end{bmatrix}}_{=\underline{Q}_B} \underline{x}_0$$

bzw. aufgelöst nach $\underline{x}_0$

$$\underline{x}_0 = \underline{Q}_B^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Der Anfangszustand $\underline{x}_0$ lässt sich für die homogene Betrachtung des SISO-Systems genau dann aus den Ausgangsgrößen berechnen, wenn $\underline{Q}_B$ invertierbar ist.

Kalman'sches Beobachtbarkeitskriterium

Das Abtastsystem

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{\Phi} \underline{x}_k + \underline{H}\, \underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= \underline{C}\, \underline{x}_k \end{aligned}$$

ist genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\underline{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{\Phi} \\ \vdots \\ \underline{C}\,\underline{\Phi}^{n-1} \end{bmatrix}$ den Höchstrang $\mathrm{rang}(\underline{Q}_B) = n$ besitzt.

5.2 Luenberger-Beobachter

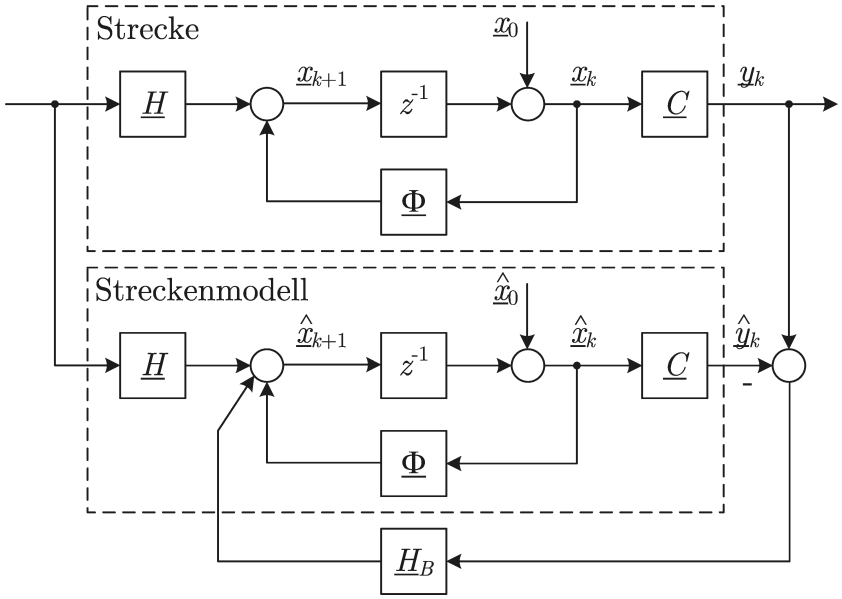
Ziel des Beobachterentwurfs

Das Ziel des Einsatzes eines Beobachters ist es, den vollständigen Zustandsvektor $\underline{x}_k$ aus den verfügbaren Messgrößen $\underline{y}_k$ zu rekonstruieren. Dazu wird die Zustandsdifferenzengleichung als ein Parallelmodell abgebildet und um eine Rückführung der Fehlergröße

$$\underline{y}_k - \underline{\hat{y}}_k = \underline{C}\,(\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k)$$

über eine Verstärkungsmatrix $\underline{H}_B$ erweitert. Letztlich soll über die Angleichung von $\underline{\hat{y}}_k$ an $\underline{y}_k$ ein Schätzwert $\underline{\hat{x}}_k$ für den Originalzustandsvektor $\underline{x}_k$ erhalten werden.

Blockdiagramm eines diskreten Systems mit Luenberger-Beobachter



Zustandsdifferenzengleichung des Schätzfehlers

Zustandsdifferenzengleichung des Parallelmodells (Gleichung des vollständigen Zustandsbeobachters)

$$\hat{\underline{x}}_{k+1} = \underline{\Phi}\ \hat{\underline{x}}_k + \underline{H}\ \underline{u}_k + \underline{H}_B\ (\underline{y}_k - \hat{\underline{y}}_k)$$

Als Startwert des geschätzten Zustandsvektors $\hat{\underline{x}}_0$ wird, sofern dieser nicht bekannt ist, oft $\hat{\underline{x}}_0 = \underline{0}$ angenommen.
Mathematisch kann das Ziel des Beobachterentwurfs folgendermaßen geschrieben werden:

$$\lim_{k\to\infty} \hat{\underline{x}}_k \stackrel{!}{=} \underline{x}_k$$

Für den Schätzfehler $\Delta\underline{x}_k = \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k$ lässt sich anhand des Originalsystems und des Parallelmodells eine homogene Differenzengleichung

$$\begin{aligned}
\Delta\underline{x}_{k+1} &= \underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1} \\
&= \left[\underline{\Phi}\ \underline{x}_k + \underline{H}\ \underline{u}_k\right] \ - \ \left[\underline{\Phi}\ \hat{\underline{x}}_k + \underline{H}\ \underline{u}_k + \underline{H}_B\ (\underline{y}_k - \hat{\underline{y}}_k)\right] \\
&= \underline{\Phi}\ (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k) - \underline{H}_B\ \underline{C}\ (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k) \\
&= (\underbrace{\underline{\Phi} - \underline{H}_B\ \underline{C}}_{=\ \underline{\Phi}_B})\ \Delta\underline{x}_k
\end{aligned}$$

herleiten.
Erinnerung: Die homogene Differenzengleichung $\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}\ \underline{x}_k$ hat die Lösung $\underline{x}_k = \underline{\Phi}^k\ \underline{x}_0$.
Für den Schätzfehler gilt folglich: $\Delta\underline{x}_k = \underline{\Phi}_B^k\ \Delta\underline{x}_0$.
Der Fehler $\Delta\underline{x}_k$ zwischen dem Schätzwert $\hat{\underline{x}}_k$ und dem tatsächlichen Zustandsvektor $\underline{x}_k$ strebt genau dann gegen $\underline{0}$, wenn das System stabil ist, d.h. wenn alle Eigenwert von $\underline{\Phi}_B = \underline{\Phi} - \underline{H}_B\ \underline{C}$ im Einheitskreis liegen.

Polvorgabe für den Beobachter

Für das Parallelmodell mit Fehlerrückführung kann die Dynamik in Form eines Wunschpolynoms $p_d(z)$ mit den Polen des Beobachters $\lambda_{B1}, \ldots, \lambda_{Bn}$ vorgegeben werden:

$$p_d(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - \lambda_{Bi}) = (z - \lambda_{B1})(z - \lambda_{B2}) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_{Bn})$$

Für die Beobachtermatrix $\underline{H}_B$ wird ein Ansatz mit $n \cdot q$ Parametern gewählt:

$$\underline{H}_B = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nq} \end{bmatrix}$$

Die Beobachterparameter (Matrixelemente von $\underline{H}_B$) können über einen Koeffizientenvergleich der charakteristischen Gleichung des Parallelmodells mit Fehlerrückführung $p_B(z)$ mit dem Wunschpolynom $p_d(z)$ bestimmt werden:

$$p_B(z) = det(z\underline{I} - \underline{\Phi} + \underline{H}_B\ \underline{C}) \stackrel{!}{=} p_d(z)$$
$$\Leftrightarrow\ z^n + b_{n-1}(\underline{H}_B)\, z^{n-1} + \ldots + b_0(\underline{H}_B) \stackrel{!}{=} z^n + p_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + p_0$$

$$\left.\begin{array}{r} b_{n-1}(\underline{H}_B) = p_{n-1} \\ \vdots \\ b_0(\underline{H}_B) = p_0 \end{array}\right\} n \text{ Gleichungen für } q \cdot n \text{ Unbekannte}$$

Für den SISO-Fall ($q = 1$) ist das Gleichungssystem, unter der Voraussetzung, dass das System vollständig beobachtbar ist, eindeutig lösbar.
Im MIMO-Fall ($q > 1$) ist das Gleichungssystem unterbestimmt, es existieren unendlich viele Lösungen. Damit ergeben sich Freiheitsgrade, die für den Beobachterentwurf genutzt werden können.

Beobachterentwurf mit der Ackermann-Formel

Im SISO-Fall, wenn also nur eine Messgröße vorliegt ($q = 1$), kann die Beobachtermatrix $\underline{h}_B$ auch über die Ackermann-Formel

$$\underline{h}_B = p(\Phi)\ \underline{q}_{Bn} = p_0\, \underline{q}_{Bn} + p_1\, \underline{\Phi}\ \underline{q}_{Bn} + \cdots + p_{n-1}\, \underline{\Phi}^{n-1}\ \underline{q}_{Bn} + \underline{\Phi}^n\ \underline{q}_{Bn}$$

berechnet werden, wobei $\underline{q}_{Bn}$ die letzte Spalte der invertierten Beobachtbarkeitsmatrix $\underline{Q}_B^{-1}$ ist:

$$\underline{q}_{Bn} = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T\ \underline{\Phi} \\ \vdots \\ \underline{c}^T\ \underline{\Phi}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Werte $p_0, \ldots p_{n-1}$ sind die Koeffizienten des Wunschpolynoms $p_d(z)$.

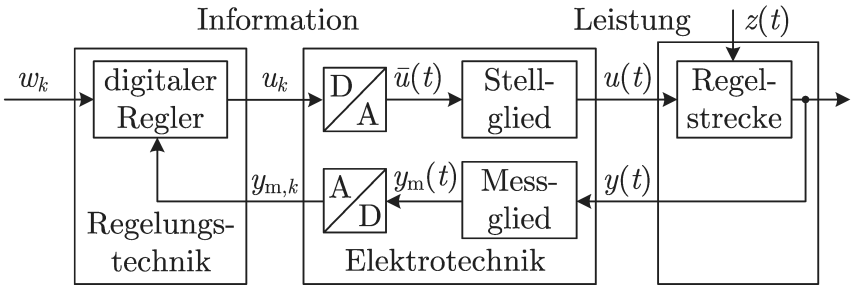
Abschließende Bemerkungen

- Die Beobachterdynamik wird normalerweise schneller als die Regelung gewählt, d.h. $|\lambda_{iB}| < |\lambda_{iR}|$.
- Auch Filterung ist mittels Beobachter möglich (Kalman-Filter).
- Das Separationsprinzip gilt, d.h. die Eigenwerte des Beobachters treten zu den Eigenwerten des Reglers hinzu. Die Eigenwerte der Regelung werden durch den Beobachter nicht verändert.
- Analogie des Beobachterentwurfs zum Reglerentwurf. Mit den folgenden Substitutionen lässt sich der Beobachterentwurf auf den Reglerentwurf zurückführen:

Reglerentwurf	Beobachterentwurf
$\underline{\Phi}$	$\underline{\Phi}^T$
$\underline{H}$	$\underline{C}^T$
$\underline{K}$	$\underline{H}_B^T$

6 Realisierung digitaler Regelkreise

Die folgende Abbildung zeigt einen typischen digitalen Regelkreis mit der Ausgangsgröße y, der Führungsgröße w, der Stellgröße u und der Störgröße z. Die Indizierung einer Variablen gemäß u_k bezeichnet dabei die Folge von Abtastwerten, d.h. $u_k = u(kT)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, mit der Abtastzeit T.



Bei linearen zeitinvarianten Abtastregelkreisen führt der Reglerentwurf zu einer Reglerübertragungsfunktion $G_R(z)$, die letztlich in Form eines Systems von Differenzengleichungen auf einem Mikroprozessor implementiert wird.

6.1 Idealisierung, Auswirkungen und Maßnahmen

Beim Reglerentwurf wurden einige Idealisierungen (I) angenommen, die Auswirkungen (A) auf den Regelkreis haben. Ziel ist es daher, den Regler so zu realisieren, dass man diesen idealisierten Forderungen möglichst nahe kommt. Daher werden Maßnahmen (M) angeführt, die eine gezielte Beeinflussung dieser unerwünschten Effekte ermöglichen.

1. I: Exakte Synchronisation der A/D- und D/A-Wandler mit zeitlich äquidistanter Abtastung
   A: Synchronisationsfehler bei den A/D- und D/A-Wandlern verändern das mathematische Modell der Strecke.
   M: Wahl eines geeigneten Echtzeitbetriebssystems

2. I: Keine Quantisierungsfehler, keine Begrenzungseffekte und keine zeitlichen Verzögerungen in den A/D- und D/A-Wandlern
   A: Quantisierungsfehler und zeitliche Verzögerungen treten aufgrund der endlichen Auflösung bzw. der endlichen Umsetzzeit immer auf. Begrenzungseffekte können das Verhalten des Regelkreises prinzipiell verändern.
   M: Wahl geeigneter A/D- und D/A-Wandler mit einer Auflösung von > 12 bit und einer Wandlungszeit < 1 μs. Begrenzungen können beim Reglerentwurf durch Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen erfasst werden.

3. I: Keine Quantisierungsfehler, keine Begrenzungseffekte und keine zeitlichen Verzögerungen in den Mess- und Stellgliedern
   A: Mess- und Stellglieder haben immer eine Eigendynamik und insbesondere die Stellglieder weisen im Allgemeinen Beschränkungen auf.

M: Wenn die Dynamik der Mess- und Stellglieder nicht sehr viel schneller als die Streckendynamik ist, müssen diese beim Reglerentwurf mit berücksichtigt werden.

4. I: Rundungsfehlerfreie Arithmetik

A: Rundungsfehler in der Arithmetik verursachen Störungen im Regler.

M: Verwendung von Fließkommaarithmetik mit großer Wortlänge oder Normieren bei Fixkommaarithmetik.

5. I: Unendlich hohe Rechengeschwindigkeit

A: Die endliche Rechenzeit bedingt eine Verzögerung zwischen dem Einlesen der Messgröße und der Ausgabe der Stellgröße.

M: Geeignete Programmierung durch Vorwegrechnen

6. I: Fehlerfreie Realisierung der Parameter der Differenzengleichung (Koeffizienten, Pol- und Nullstellen, etc.)

A: Durch die begrenzte Wortlänge entstehen, insbesondere bei Fixkommaarithmetik sowie Differenzengleichungen höherer Ordnung, Abschneidefehler der Koeffizienten, die die Lage der Pol- und Nullstellen verändern.

M: Geeignete Realisierung der Reglerübertragungsfunktion in Standardformen oder Kaskadenform.

6.2 Normierung

Wird das mathematische Modell von n Differenzengleichungen erster Ordnung

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}\,\underline{x}_k + \underline{h}\,u_k$$

und das Regelgesetz

$$u_k = -\underline{k}^T\,\underline{x}_k + S\,w_k$$

auf einem Mikroprozessor mit Fixkommaarithmetik implementiert, muss man darauf achten, den Rechenbereich möglichst gut auszunutzen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im Folgenden das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ als beschränkter Rechenbereich angesehen. Die Zustandsdifferenzengleichung muss dazu folgendermaßen normiert werden

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{T}\,\underline{x} \quad \text{und} \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \tilde{w} = \frac{w}{w_{\max}}$$

mit der Transformationmatrix

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{1,\max}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{2,\max}} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x_{n,\max}} \end{bmatrix}.$$

Daraus resultiert das normierte System

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{x}}_{k+1} &= \underline{T}\,\underline{\Phi}\,\underline{T}^{-1}\,\underline{x}_k + \underline{T}\,\underline{h}\,u_{\max}\,\tilde{u}_k \\ \tilde{u}_k &= -\frac{1}{u_{\max}}\,\underline{k}^T\,\underline{T}^{-1}\,\underline{\tilde{x}}_k + \frac{w_{\max}}{u_{\max}}\,S\,\tilde{w}_k\,, \end{aligned}$$

wobei angenommen wird, dass für alle $k \geq 0$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} &- x_{i,\mathsf{max}} \leq x_{i,k} \leq x_{i,\mathsf{max}} \quad \text{mit } i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \\ &- w_{\mathsf{max}} \leq w_k \leq w_{\mathsf{max}} \qquad \text{bzw.} \quad - u_{\mathsf{max}} \leq u_k \leq u_{\mathsf{max}} \end{aligned}$$

gelten.
Die Werte $x_{i,\mathsf{max}}$, w_{max} und u_{max} müssen dabei so gewählt werden, dass keine Bereichsüberschreitung in der Fixkommaarithmetik auftreten.

6.3 Vorwegrechnen

Bei der Herleitung der z-Übertragungsfunktion wurde eine beliebig große Rechengeschwindigkeit vorausgesetzt. Diesem Ziel kommt man möglichst nahe, wenn man die Zeitspanne τ zwischen Messung der Ausgangsgröße y_k und Ausgabe der Stellgröße u_k so klein wie möglich hält. Werden z.B. nicht alle Zustände gemessen, sondern für die Zustandsrückführung ein Beobachter eingesetzt, kann direkt nach der Ausgabe der aktuellen Stellgröße u_k der Schätzwert des Folgezustands

$$\underline{\hat{x}}_{k+1} = \underline{\Phi}\ \underline{\hat{x}}_k + \underline{h}\ u_k + \underline{h}_B\ (y_k - \hat{y}_k)\,,$$

der lediglich von Vergangenheitswerten abhängt, und damit der Rückführanteil der nächsten Stellgröße

$$u_{R,k+1} = -\underline{k}^T\ \underline{x}_{k+1}$$

vorab berechnet werden. Zum Zeitpunkt $k+1$ ist dann lediglich eine Multiplikation des Vorfilters mit der aktuellen Führungsgröße und eine Addition des Rückführanteils und des Vorsteueranteils durchzuführen:

$$u_{k+1} = u_{R,k+1} + S \cdot w_{k+1}\,.$$

Als Faustregel gilt, dass $\tau \leq \frac{T}{10}$ sein soll.

Inhaltsverzeichnis

II Nichtlineare Systeme 1

1 Grundlagen der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme 1

1.1 Klassifikation zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme im Zustandsraum . . . 1
1.2 Zustandsraumdarstellung spezieller nichtlinearer Systeme . . . 1
1.3 Beispiele für einfache nichtlineare dynamische Systeme . . . 2
1.3.1 Fremderregter Gleichstrommotor . . . 2
1.3.2 Einfachpendel ohne Reibung . . . 3
1.3.3 Einfachpendel mit Reibung . . . 4
1.3.4 Häufig auftretende nichtlineare Kennlinienglieder . . . 4
1.3.5 Physikalische Beispiele für nichtlineare Kennlinien-Glieder . . . 6
1.4 Gegenüberstellung spezieller Eigenschaften linearer und nichtlinearer dynamischer Systeme 7
1.4.1 Existenz und Eindeutigkeit von Ruhelagen . . . 7
1.4.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen . . . 8
1.4.3 Unterscheidung zwischen lokaler und globaler Stabilität und Instabilität . . . 9
1.4.4 Unterschiedliche Ausprägungen instabilen Systemverhaltens . . . 10

2 Stabilität dynamischer Systeme: Direkte Methode nach Ljapunow 11

2.1 Definition der Stabilität eines dynamischen Systems . . . 11
2.2 Grundlegende Überlegungen zur Stabilität an Hand von Energiebetrachtungen . . . 11
2.2.1 Einführendes Beispiel 1: Einfachpendel ohne Reibung . . . 12
2.2.2 Einführendes Beispiel 2: Einfachpendel mit Reibung . . . 12
2.3 Stabilitätskriterien . . . 13
2.3.1 Kriterium der Stabilität im Kleinen . . . 13
2.3.2 Kriterium der asymptotischen Stabilität im Kleinen . . . 14
2.3.3 Kriterium der asymptotischen Stabilität im Großen (Kriterium für globale asymptotische Stabilität) . . . 14
2.3.4 Geometrische Plausibilitätsprüfung für $n = 2$ . . . 15
2.3.5 Anwendung des Kriteriums für asymptotische Stabilität im Großen zur Bestimmung des Einzugsbereichs einer asymptotisch stabilen Ruhelage . . . 16
2.4 Kriterium für Instabilität . . . 16
2.5 Konstruktion von Ljapunow-Funktionen . . . 18
2.5.1 Kriterium von Sylvester für den Nachweis der positiven Definitheit . . . 18
2.5.2 Beispiel . . . 19
2.6 Ljapunow-Funktionen für lineare Systeme . . . 20
2.7 Ljapunow-Funktionen für die Stabilitätsanalyse linearer zeitvarianter Systeme . . . 21
2.8 Methode von Aizerman zur Bestimmung von Ljapunow-Funktionen . . . 22
2.9 Methode der ersten Näherung . . . 24
2.9.1 Stabilitätskriterium nach der Methode der ersten Näherung . . . 24
2.9.2 Herleitung der Bedingung für asymptotische Stabilität nach der Methode der ersten Näherung mittels einer Ljapunow-Funktion . . . 25
2.10 Popov-Kriterium für absolute Stabilität . . . 26

3 Robustheit linearer Systeme mit Parameterunsicherheiten 28

3.1 Definition einer Polynomfamilie . . . 28

3.2 Grenzüberschreitungssatz nach Frazer und Duncan . . . 28
3.3 Stabilitätsbedingungen nach Mikhailov und Erweiterungen auf lineare Systeme mit wertebereichsbeschränkten Parameterunsicherheiten . . . 29
3.3.1 Stabilitätsbedingung nach Mikhailov, Leonhard und Cremer . . . 29
3.3.2 Formulierung der Stabilitätsbedingungen nach Mikhailov für robuste Stabilität . . . 30
3.3.3 Beispiel zur Konstruktion der Wurzelmenge und zur Stabilitätsanalyse eines linearen Systems mit Parameterunsicherheiten . . . 30
3.4 Nullstellenausschlusssatz . . . 32
3.5 Der Satz von Kharitonov . . . 32
3.6 Γ–Stabilität . . . 35
3.7 Parameterraumverfahren nach Ackermann und Kaesbauer (1991) . . . 35
3.7.1 Abbildung der reellen Grenze (Real Root Boundary RRB) . . . 35
3.7.2 Abbildung der Grenzen im Unendlichen (Infinite Root Boundary IRB) . . . 36
3.7.3 Abbildung der komplexen Grenzen (Complex Root Boundary CRB) . . . 36

4 Synthese nichtlinearer Regelungen im Zustandsraum 38
4.1 Entwurf von Regelungen für nichtlineare Systeme mittels exakter Ein-/ Ausgangslinearisierung . . . 38
4.1.1 Eingrößensysteme . . . 38
4.1.2 Betrachtete Systemklasse . . . 38
4.1.3 Ziele der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung . . . 38
4.1.4 Verfahren der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung . . . 39
4.1.5 Beispiel zur Berechnung der Differenzordnung δ . . . 40
4.1.6 Beispiel zum Reglerentwurf mittels der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung . . . 41
4.1.7 Weitere Betrachtungen zum Reglerentwurf mittels exakter Ein-/ Ausgangslinearisierung für SISO-Systeme . . . 42
4.2 Stabilität des nichtlinearen Regelkreises . . . 43
4.3 Untersuchung der interne Dynamik (Nulldynamik) für $\delta < n$ . . . 44
4.4 Entwurf von Regelungen für nichtlineare Mehrgrößensysteme durch Kompensation und Entkopplung . . . 45
4.5 Nichtlinearer Reglerentwurf durch erweiterte Linearisierung . . . 49
4.6 Kompensation statischer Eingangsnichtlinearitäten . . . 50
4.7 Flachheitsbasierter Regelungsentwurf . . . 51
4.7.1 Differentielle Flachheit als Eigenschaft eines dynamischen Systems . . . 51
4.7.2 Beispiel zur differentiellen Parametrisierung eines dynamischen Systems . . . 52
4.7.3 Flachheitsbasierte Steuerung . . . 52
4.7.4 Flachheitsbasierte Folgeregelung . . . 53
4.7.5 Vergleich des flachheitsbasierten Reglerentwurfs mit der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung . . . 53

5 Entwurf nichtlinearer Beobachter 55
5.1 Herleitung eines Beobachteransatzes für nichtlineare Systeme . . . 55
5.2 Beispiel für den Beobachterentwurf eines nichtlinearen Systems . . . 56

Teil II
Nichtlineare Systeme

1 Grundlagen der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme

1.1 Klassifikation zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme im Zustandsraum

Nachfolgend ist die aus früheren Vorlesungen (Grundlagen der Regelungstechnik/ Systemtheorie) bereits bekannte Klassifikation dynamischer Systeme hinsichtlich Linearität und Zeitvarianz nochmals zusammengefasst:

1. Lineare **zeitinvariante** Systeme (LTI)

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

2. Lineare **zeitvariante** Systeme

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{B}(t) \cdot \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{D}(t) \cdot \underline{u}(t) \end{aligned} \tag{2}$$

3. Nichtlineare **zeitinvariante** Systeme

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \\ \underline{y}(t) &= \underline{h}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \end{aligned} \tag{3}$$

4. Nichtlineare **zeitvariante** Systeme

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{h}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) \end{aligned} \tag{4}$$

Schwerpunktmäßig werden in dieser Vorlesung nichtlineare **zeitinvariante** Systeme behandelt. An einigen Stellen werden Verallgemeinerungen von Stabilitätskriterien für nichtlineare sowie lineare **zeitvariante** Systeme angegeben. Zusätzlich erfolgt die Betrachtung von linearen dynamischen Systemen mit Parameterunsicherheiten. Kriterien für die Stabilität linearer Systeme mit Parameterunsicherheiten sowie Kriterien für den Entwurf robuster Regelungen werden hergeleitet.

1.2 Zustandsraumdarstellung spezieller nichtlinearer Systeme

1. Zustandsdifferentialgleichung eingangsaffiner Systeme

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) + \underline{G}(\underline{x}(t)) \cdot \underline{u}(t) \tag{5}$$

2. Zustandsdifferentialgleichung bilinearer Systeme

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) + \sum_{i=1}^{m} \underline{M}_i \cdot \underline{x}(t) \cdot u_i(t) \qquad \text{mit} \qquad m = \dim\{\underline{u}\} \tag{6}$$

Bei nichtlinearen Systemen gelten die aus den Grundlagenvorlesungen bekannten Linearitätseigenschaften **nicht** mehr. Diese Eigenschaften linearer zeitinvarianter Systeme waren das

- Superpositionsprinzip (Überlagerungsprinzip) sowie das
- Verstärkungsprinzip.

1.3 Beispiele für einfache nichtlineare dynamische Systeme

1.3.1 Fremderregter Gleichstrommotor

Ankerkreis

$$u_A(t) = R_A i_A(t) + L_A \frac{di_a(t)}{dt} + u_{ind}(t) \qquad \text{mit} \qquad u_{ind} = c\Psi_f(t)\omega(t) \tag{7}$$

Erregerkreis

$$u_f(t) = R_f i_f(t) + \underbrace{\dot{\Psi}_f(t)}_{\substack{\text{induktiver} \\ \text{Spannungsabfall}}} \qquad \text{mit dem magnetischen Fluss} \qquad \Psi_f = F(i_f) \tag{8}$$

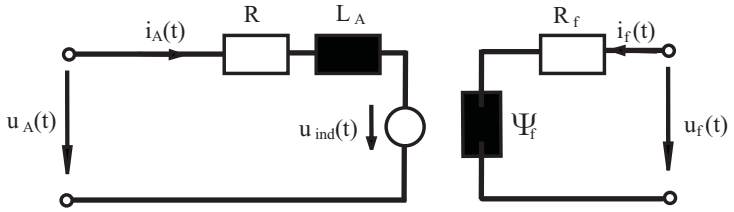


Abbildung 1: Elektrisches Ersatzschaltbild eines fremderregten Gleichstrommotors

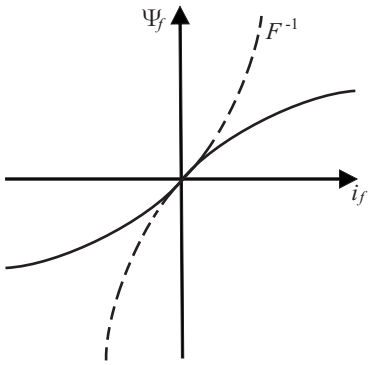


Abbildung 2: Nichtlineare Magnetisierungskennlinie (mit Sättigungscharakteristik)

Mechanischer Systemteil

- Winkelgeschwindigkeit ω
- Antriebsmoment τ_A
- Lastmoment τ_L wirkt der Drehbewegung entgegen
- Massenträgheitsmoment J

Bei der Auswertung des Drallsatzes muss berücksichtigt werden, dass die Änderung des Dralls (Drehimpuls) $J\omega(t)$ gleich der Summe der äußeren Momente ist. Damit ergibt sich für den mechanischen Systemteil die Differentialgleichung

$$\frac{d(J\omega(t))}{dt} = J\dot{\omega}(t) = \tau_A(t) - \tau_L(t) \qquad \text{mit} \qquad \tau_A(t) = c\Psi_f(t) i_A(t) \ . \tag{9}$$

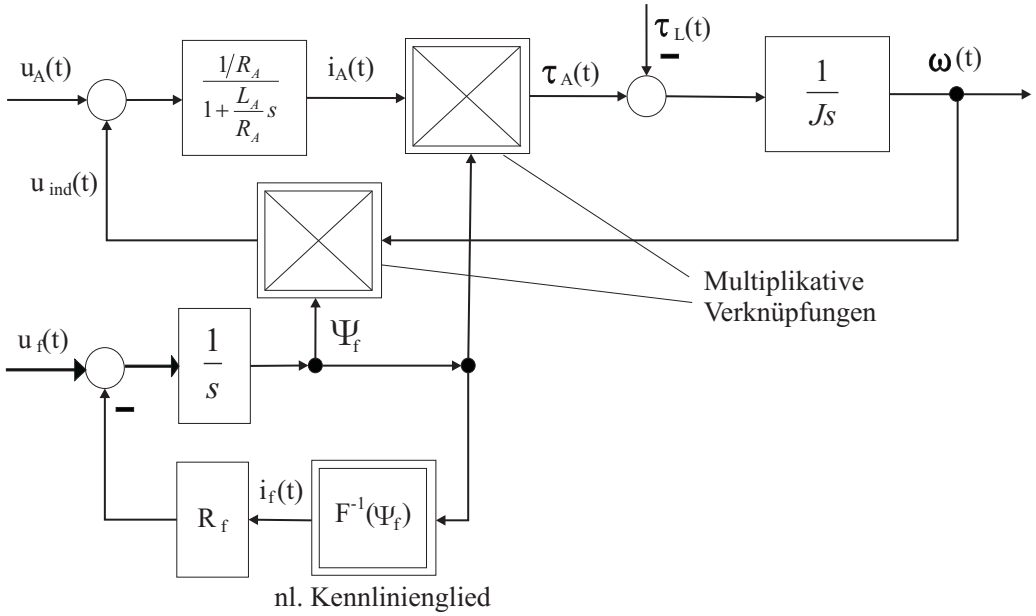


Abbildung 3: Blockschaltbild für den fremderregten Gleichstrommotor

1.3.2 Einfachpendel ohne Reibung

Für die mathematische Modellbildung des Einfachpendels wird zunächst der Einfluss von Reibung und Dämpfung auf die Dynamik des Systems vernachlässigt. Damit ergibt sich bei Anwendung des Drallsatzes mit dem Drehgelenk als Bezugspunkt die Beziehung

$$\begin{aligned} \underbrace{ml^2\ddot{\varphi}(t)}_{\text{Dralländerung}} &= \underbrace{\tau(t) - mgl\sin\varphi(t)}_{\text{Summe der äußeren Momente}} \\ \Longrightarrow \quad \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\sin\varphi(t) \quad \text{für das externe Moment} \quad \tau(t) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

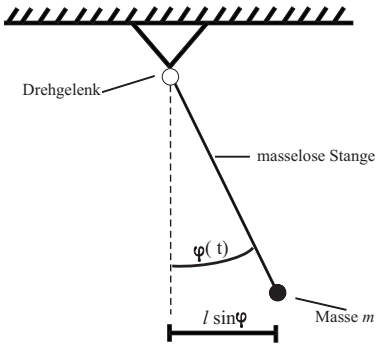


Abbildung 4: Einfachpendel ohne Reibung

Das Grundgerüst der dynamischen Systembeschreibung des Einfachpendels besteht aus zwei linearen Übertragungsgliedern (doppelt integrierendes System). Darin ist die Nichtlinearität des Modells in Form eines nichtlinearen Übertragungsgliedes eingebettet. Die zentrale Frage der mathematischen Modellbildung ist, welche nichtlinearen Systemeigenschaften in der mathematischen Darstellung des Systems auf jeden Fall berücksichtigt werden müssen, um das dynamische Verhalten möglichst realitätsnah beschreiben zu können.

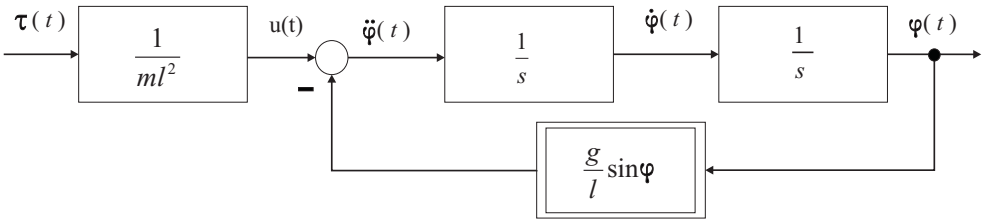


Abbildung 5: Blockschaltbild für das nichtlineare Systemmodell des Einfachpendels ohne Reibung

Aus obiger Differentialgleichung zweiter Ordnung ergibt sich für das mathematische Modell des Einfachpendels nach der Einführung der Zustandsgrößen

$$x_1(t) = \varphi(t) \qquad \text{und} \qquad x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) \tag{11}$$

die nichtlineare zeitinvariante Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

1.3.3 Einfachpendel mit Reibung

Bei zusätzlicher Berücksichtigung von (geschwindigkeitsproportionaler) Reibung ergibt sich für das Einfachpendel das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) - \frac{k}{m}x_2(t) \end{aligned} \tag{13}$$

mit der entgegen der Bewegungsrichtung wirkenden Reibungskraft $-kl\dot{\varphi}(t)$.

1.3.4 Häufig auftretende nichtlineare Kennlinienglieder

Zwei-Punkt-Kennlinie

$$y = \begin{cases} B & \text{für} \quad u > 0 \\ 0 & \text{für} \quad u = 0 \\ -B & \text{für} \quad u < 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y = B \cdot \operatorname{sign}(u) \tag{14}$$

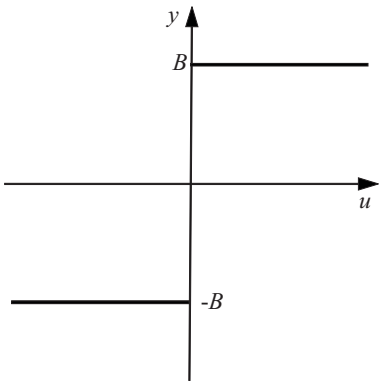


Abbildung 6: Symmetrische Zwei-Punkt-Kennlinie

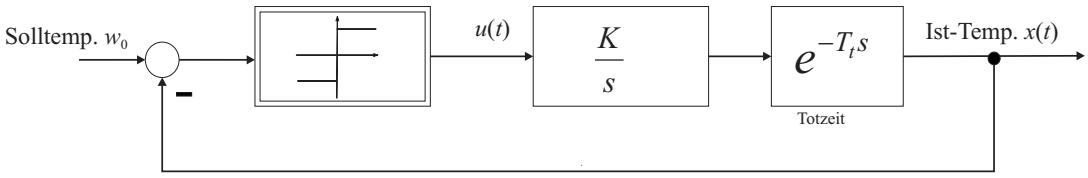


Abbildung 7: Einfacher Regelkreis mit Zwei-Punkt-Kennlinie (Temperaturregelung)

Bei obigem Regelkreis mit Zwei-Punkt-Kennlinie und Totzeit können nichtlineare Schwingungen um die vorgegebene Solltemperatur w_0 auftreten. Diese Dauerschwingung klingt zeitlich nicht ab. Es entsteht ein so genannter Grenzzyklus.

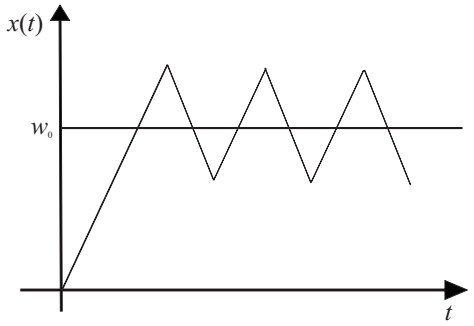


Abbildung 8: Schematische Darstellung des Zeitverhaltens des Temperaturregelkreises

Drei-Punkt-Kennlinie

$$y = \begin{cases} B & \text{für} \quad u > a \\ 0 & \text{für} \quad -a \leq u \leq a \\ -B & \text{für} \quad u < -a \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{B}{2}\left(\operatorname{sign}(u-a) + \operatorname{sign}(u+a)\right) \tag{15}$$

Ziel der Verwendung einer Drei-Punkt-Kennlinie im Stellgesetz Vermeidung einer zu starken Beanspruchung oder Abnutzung einer Stelleinrichtung

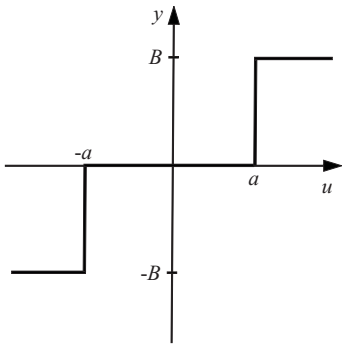


Abbildung 9: Symmetrische Drei-Punkt-Kennlinie

Zwei-Punkt-Kennlinie mit Hysterese

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} F_U(u) = B \cdot \operatorname{sign}(u-a) & \text{für} \quad \dot{u} > 0 \\ F_O(u) = -B \cdot \operatorname{sign}(u+a) & \text{für} \quad \dot{u} < 0 \end{cases} \\ \Longrightarrow \quad y &= B \cdot \operatorname{sign}\left(u - a \cdot \operatorname{sign}(\dot{u})\right) = F(u, \dot{u}) \end{aligned} \tag{16}$$

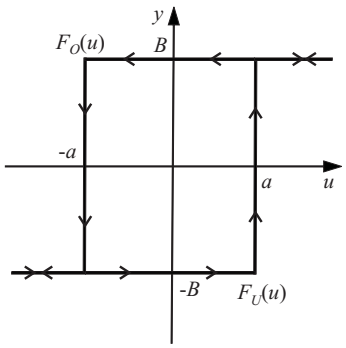


Abbildung 10: Symmetrische Zwei-Punkt-Kennlinie mit Hysterese

In obiger Systemdarstellung wurde vorausgesetzt, dass im Bereich $|u| < a$ kein Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit $\dot{u}$ auftritt.

1.3.5 Physikalische Beispiele für nichtlineare Kennlinien-Glieder

Modellierung von Haft- und Gleitreibung in mechanischen Systemen

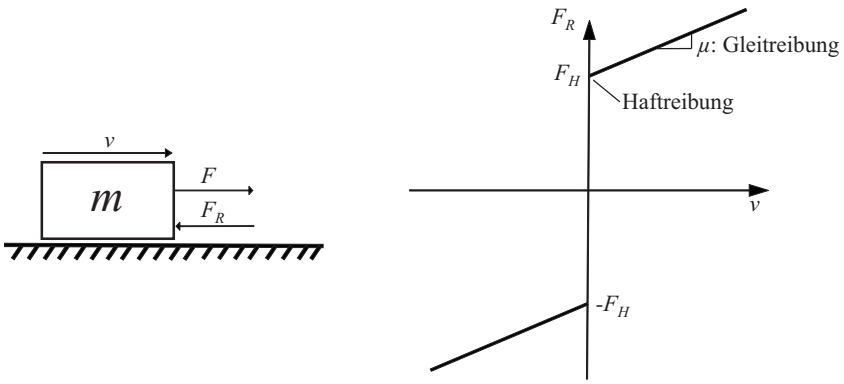


Abbildung 11: Mechanisches System mit Haft- und Gleitreibung

Modellierung der Stellgrößenbeschränkung eines realen Aktors Um zu ermöglichen, dass ein System mit Stellgrößenbeschränkungen mit linearen Methoden analysiert und entworfen werden kann, lässt sich eine Trajektorienplanung für die Soll-Zustände derart realisieren, dass das Erreichen von Stellgrößenbeschränkungen vermieden wird. Beim Erreichen der Stellgrößenbeschränkungen ist es für eine numerische Simulation des Systems essentiell, den Zeitpunkt der Umschaltung zwischen dem linearen Bereich und der Begrenzung möglichst exakt zu detektieren.

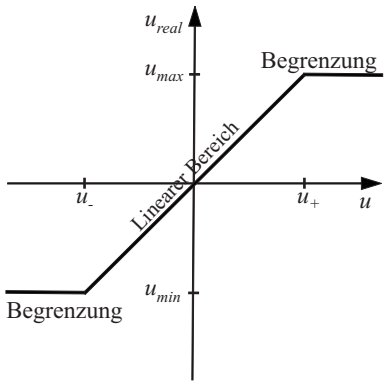


Abbildung 12: Stellgrößenbeschränkung auf den Wertebereich $u_{real} \in [u_{min}\ ;\ u_{max}]$

Totzone (Ansprechschwelle)

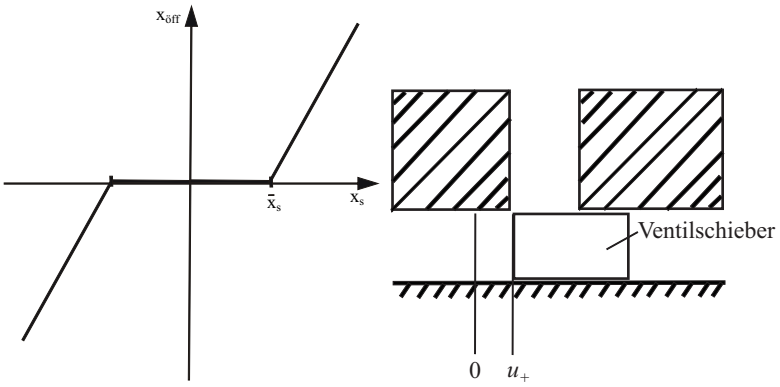


Abbildung 13: Totzone am Beispiel einer Ventilkennlinie

1.4 Gegenüberstellung spezieller Eigenschaften linearer und nichtlinearer dynamischer Systeme

1.4.1 Existenz und Eindeutigkeit von Ruhelagen für $\underline{u} = \underline{u}_s = const$

Lineare zeitinvariante Systeme Die Ruhelagen $\underline{x}_\infty$ eines linearen zeitinvarianten Systems ergeben sich durch Lösen des linearen algebraischen Gleichungssystems

$$\dot{\underline{x}}\,(t_\infty) = \underline{0} = \underline{A} \cdot \underline{x}_\infty + \underline{B} \cdot \underline{u}_s \ . \tag{17}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung

$$\underline{x}_\infty = -\underline{A}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}_s \ , \tag{18}$$

falls die Systemmatrix $\underline{A}$ regulär ist, d.h. falls $\det(\underline{A}) \neq 0$ gilt.
Für $\det(\underline{A}) = 0$ und $\underline{u}_s = \underline{0}$ sind alle Punkte in den Eigenrichtungen zum Eigenwert NULL Ruhelagen.
Beispiel: Für das lineare zeitinvariante System

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \text{mit} \qquad u = u_s = 0 \tag{19}$$

gilt

$$\begin{aligned} 0 &= x_{1,\infty} + x_{2,\infty} \\ 0 &= -x_{1,\infty} - x_{2,\infty} \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Alle Ruhelagen liegen somit auf der Geraden $x_2 = -x_1$. Dieses System besitzt einen doppelten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ mit dem Eigenvektor

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ .$$

Nichtlineare Systeme Bei nichtlinearen dynamischen Systemen muss zur Berechnung der Ruhelagen das nichtlineare Gleichungssystem

$$\dot{\underline{x}}\left(t_\infty\right) = \underline{0} = \underline{f}\left(\underline{x}_\infty, \underline{u}_s\right) \tag{21}$$

gelöst werden. Für das Einfachpendel

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) \end{aligned} \tag{22}$$

ergeben sich damit die Ruhelagen

$$\begin{aligned} x_{1,\infty} &= k\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_{2,\infty} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{23}$$

Diese Ruhelagen ändern sich nicht, wenn statt des Einfachpendels ohne Reibung ein Pendel mit Reibung untersucht wird. Anschaulich ist klar, dass bei einem realen Pendel mit Reibung die Ruhelagen, in denen das Pendel senkrecht nach unten ausgerichtet ist, stabile Ruhelagen darstellen.

Unter einem Einzugsbereich einer Ruhelage versteht man diejenigen Anfangsbedingungen (hier: Anfangsauslenkungen und Anfangsgeschwindigkeiten des Pendels), aus denen eine gewisse Ruhelage erreicht wird. Ein nichtlineares System besitzt oft mehr als eine Ruhelage, welche oft unterschiedliche Stabilitätseigenschaften und Einzugsbereiche aufweisen.

Existenz von Grenzzyklen Neben stationären Ruhelagen (wie im Fall von linearen Systemen) können nichtlineare Systeme auch Grenzzyklen aufweisen. Ein Beispiel hierfür ist der Van-der-Pol-Oszillator

$$\ddot{y}(t) + \left(y^2\left(t\right) - 1\right) \cdot \dot{y}(t) + y(t) = 0 \ , \tag{24}$$

der sich in Zustandsraumdarstellung mit $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$ wie folgt darstellen lässt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\left(x_1^2(t) - 1\right) \cdot x_2(t) - x_1(t) \ . \end{aligned} \tag{25}$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt, wie sich die Trajektorien für unterschiedliche Anfangsbedingungen (durch Punkte dargestellt) einem Grenzzyklus asymptotisch annähern.

1.4.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen

Lineare zeitinvariante Systeme Für lineare zeitinvariante Systeme existiert die Lösung des beschreibenden Differentialgleichungssystems für **alle** Zeiten (unabhängig von den Anfangsbedingungen).

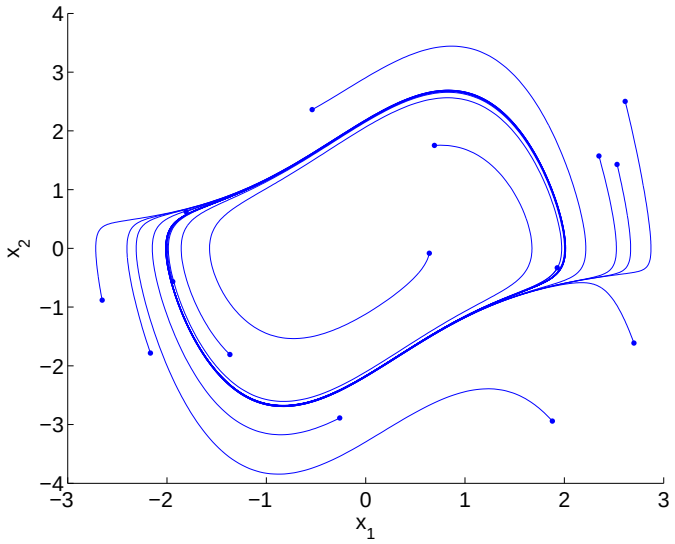


Abbildung 14: Trajektorien des Van-der-Pol-Oszillators in der $(x_1; x_2)$–Ebene

Nichtlineare Systeme Bei nichtlinearen Systemen kann der Fall einer endlichen Entweichzeit (engl. finite escape time) auftreten. Dies sei für das folgende Beispiel demonstriert:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = x^2(t) \qquad \text{mit} \qquad x(0) = x_0 \tag{26}$$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung (26) der Ausdruck

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{x^2} dx = \int_0^t d\tau \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} = t \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \ . \tag{27}$$

Für $x_0 > 0$ existiert die (instabile) Lösung nur bis zum Zeitpunkt

$$t < t^* = \frac{1}{x_0} \ . \tag{28}$$

Zusatz: Skizzieren Sie den Zeitverlauf der Lösung $x(t)$ für $x_0 < 0$ und $x_0 > 0$.

Hinweis: In der Regel ist eine analytische Lösung der Zustandsdifferentialgleichung eines nichtlinearen Systems nicht möglich. In einigen Fällen ist die Lösung nicht eindeutig! In der Praxis werden zur Bestimmung der Lösung der zugehörigen Anfangswertprobleme (Bestimmung der Trajektorien eines nichtlinearen dynamischen Systems mit gegebener Zustandsraumdarstellung sowie mit gegebenen Anfangsbedingungen) numerische Lösungsverfahren eingesetzt. Beispiele hierfür sind die Algorithmen `ode23` und `ode15s` aus `MATLAB`.

1.4.3 Unterscheidung zwischen lokaler und globaler Stabilität und Instabilität

Lineare zeitinvariante Systeme Bei linearen zeitinvarianten Systemen ist die Stabilitätseigenschaft global für den kompletten Zustandsraum gültig. Das heißt, ein lineares zeitinvariantes System ist entweder asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil. Diese Eigenschaft ist unabhängig vom aktuellen Systemzustand und damit insbesondere auch unabhängig von den Anfangsbedingungen $x\,(t = t_0)$. Zur Stabilitätsuntersuchung stehen bei linearen Systemen alle aus den Grundlagenvorlesungen (Grundlagen der Regelungstechnik/ Systemtheorie) bekannten Verfahren zur Verfügung.

Nichtlineare Systeme Bei nichtlinearen Systemen lassen sich sehr häufig nur lokale Stabilitätsaussagen treffen. Hierbei ist es insbesondere wichtig, die Einzugsbereiche von Ruhelagen zu berechnen. Ein Beispiel hierfür ist das skalare nichtlineare Systemmodell

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \tag{29}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Das System besitzt die beiden Ruhelagen

$$x_{\infty,1} = 0 \qquad \text{und} \qquad x_{\infty,2} = 1 \ . \tag{30}$$

Aufgabe: Zeigen sie grafisch, welche der beiden Ruhelagen stabil und welche instabil ist. Erklären Sie an Hand dieses Beispiels, was man unter dem Einzugsbereich einer Ruhelage versteht.

Chaotisches Verhalten nichtlinearer dynamischer Systeme Nichtlineare dynamische Systeme können sehr sensitiv auf Störungen der Anfangsbedingungen und/ oder Systemparameter reagieren. Man nennt sie dann chaotisch. Ein Beispiel hierfür ist das dynamische System

$$\ddot{y}(t) + 0.1\dot{y}(t) + y^5(t) = 6\sin(t) \ . \tag{31}$$

In Zustandsraumdarstellung mit $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$ lautet das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -0.1x_2(t) - x_1^5(t) + 6\sin(t) \ . \end{aligned} \tag{32}$$

Für die beiden Anfangsbedingungen $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ (durchgezogene Linien) und $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2.01 & 3.01 \end{bmatrix}^T$ (gestrichelte Linien) ist nachfolgend die Sensitivität der Lösung in Bezug auf eine Änderung der Anfangsbedingungen dargestellt.

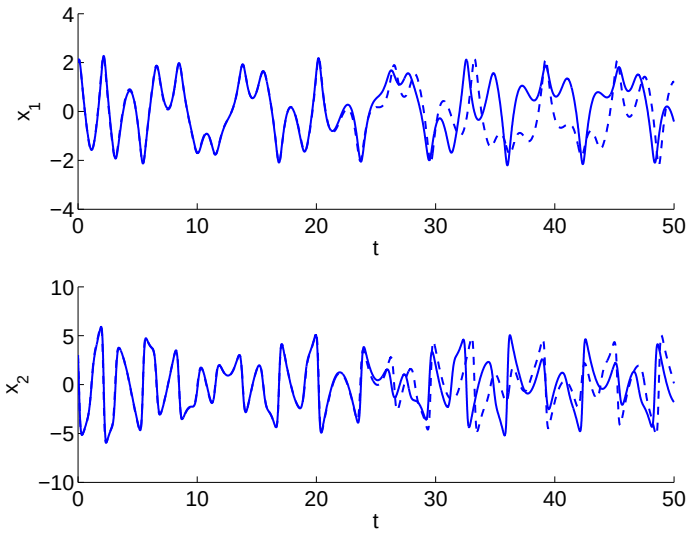


Abbildung 15: Beispiel für chaotisches Systemverhalten

1.4.4 Unterschiedliche Ausprägungen instabilen Systemverhaltens

Lineare zeitinvariante Systeme Für instabile lineare zeitinvariante Systeme gilt immer

$$\|\underline{x}(t)\| \to \infty \qquad \text{für} \qquad t \to \infty \ . \tag{33}$$

Nichtlineare Systeme Für nichtlineare Systeme ist dies *nicht* die einige Möglichkeit eines instabilen Systemverhaltens. Beispielsweise sind auch Systeme mit endlicher Entweichzeit instabil.

2 Stabilität dynamischer Systeme: Direkte Methode nach Ljapunow

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens nichtlinearer zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme in der Umgebung ihrer Ruhelagen, ohne das beschreibende nichtlineare Zustandsgleichungssystem explizit auf analytischem oder numerischem Weg zu lösen.

2.1 Definition der Stabilität eines dynamischen Systems

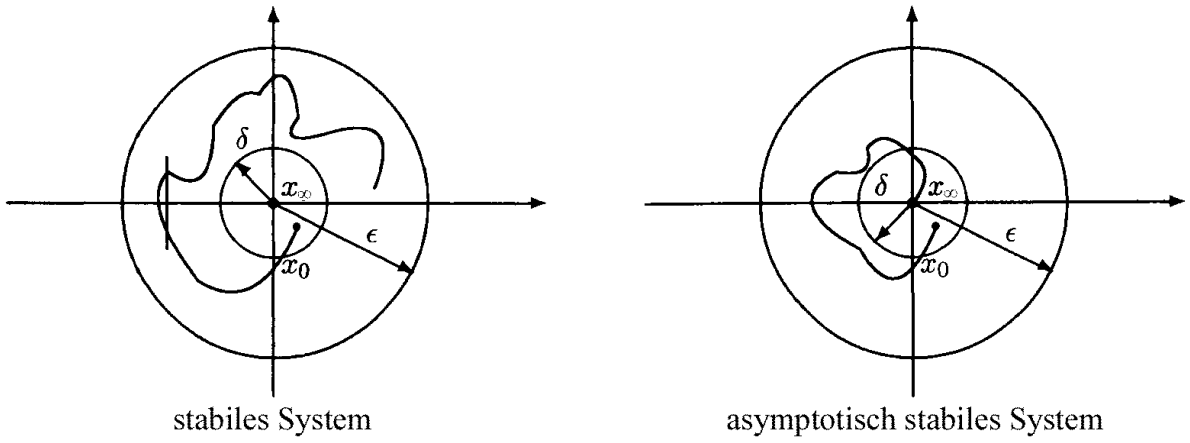


Abbildung 16: Stabiles und asymptotisch stabiles Systemverhalten

Eine Ruhelage $\underline{x}_\infty$ eines dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{f}\,(\underline{x})$ wird als **stabil** bezeichnet, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert, so dass

$$\|\underline{x}(0) - \underline{x}_\infty\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|\underline{x}(t) - \underline{x}_\infty\| < \epsilon \qquad \text{für alle} \qquad t \geq t_0 \tag{34}$$

gilt. Andernfalls ist die Ruhelage $\underline{x}_\infty$ **instabil**.
Darüber hinaus wird eine Ruhelage $\underline{x}_\infty$ als **anziehend** (d.h. konvergent) bezeichnet, falls ein $\delta_1 > 0$ existiert, so dass

$$\|\underline{x}(0) - \underline{x}_\infty\| < \delta_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} \underline{x}(t) = \underline{x}_\infty \tag{35}$$

gilt.
Eine Ruhelage $\underline{x}_\infty$ ist **asymptotisch stabil**, wenn sie sowohl stabil als auch anziehend ist.

2.2 Grundlegende Überlegungen zur Stabilität an Hand von Energiebetrachtungen

Die Stabilität eines dynamischen Systems setzt voraus, dass die resultierenden Bewegungen nicht über alle Grenzen hinweg anwachsen dürfen. Bei asymptotischer Stabilität wird darüber hinaus sogar ein Abklingen der Bewegung — hin zur Ruhelage — gefordert. Ein Maß für die Eigenschaft des Abklingens der Bewegungen eines dynamischen Systems ist die in ihm gespeicherte Gesamtenergie. Nimmt diese Energie nicht zu, verhält sich ein System stabil; klingt die Gesamtenergie sogar ab (beispielsweise durch irreversible Umwandlung von potentieller und kinetischer Energie eines mechanischen Systems in Wärme auf Grund von Reibung), ist ein System asymptotisch stabil. Diese Zusammenhänge sollen nun für zwei einfache Beispiele dargestellt werden.

2.2.1 Einführendes Beispiel 1: Einfachpendel ohne Reibung

Die Zustandsraumdarstellung eines Einfachpendels ohne Reibung lautet:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) \quad . \end{aligned} \tag{36}$$

Die Gesamtenergie E dieses Systems ergibt sich als Summe von kinetischer Energie E_{kin} und potentieller Energie E_{pot} zu

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + E_{pot} \\ &= \frac{1}{2}m\left(\omega l\right)^2 + mgh \end{aligned} \tag{37}$$

mit

$$\begin{aligned} &\omega = \dot{\varphi}(t) = x_2 \quad \text{(Winkelgeschwindigkeit)} \qquad \text{und} \\ &h = l\left(1-\cos\varphi(t)\right) = l\left(1-\cos x_1\right) \quad \text{(vertikale Auslenkung)} \quad . \end{aligned} \tag{38}$$

Für diese Gesamtenergie gilt damit

$$E = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl\left(1-\cos x_1\right) > 0 \quad . \tag{39}$$

Als zeitliche Änderung der Gesamtenergie entlang der Trajektorien des Systems ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{dE}{dt} = ml^2x_2\cdot\dot{x}_2 + mgl\sin x_1\cdot x_2 \\ &= -mglx_2\sin x_1 + mglx_2\sin x_1 = 0 \quad . \end{aligned} \tag{40}$$

Für dieses System bleibt die Gesamtenergie (wie zu erwarten war) zeitlich konstant.
Das Einfachpendel ohne Reibung ist ein stabiles (**nicht** asymptotisch stabiles) System, da die Gesamtenergie konstant bleibt. Die Amplitude der Schwingung ist also beschränkt.
Allgemein lässt sich die zeitliche Änderung der Gesamtenergie des Systems durch

$$\dot{E}\left(\underline{x}\right) = \left(\frac{\partial E}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = \left(\frac{\partial E}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \underline{f}\left(\underline{x}\right) \tag{41}$$

berechnen.

2.2.2 Einführendes Beispiel 2: Einfachpendel mit Reibung

Für die Gesamtenergie gilt wiederum wie beim Einfachpendel ohne Reibung die Beziehung

$$E = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl\left(1-\cos x_1\right) > 0 \quad . \tag{42}$$

Für die zeitliche Änderung der Gesamtenergie entlang der Trajektorien des Systems folgt nun mit dem Zustandsgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) - \frac{k}{m}x_2(t) \end{aligned} \tag{43}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \left(\frac{\partial E}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \underline{f}\left(\underline{x}\right) \\ &= \begin{bmatrix} mgl\sin x_1 \\ ml^2x_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x\frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) - \frac{k}{m}x_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -kl^2x_2^2 < 0 \qquad \text{für alle} \qquad x_2 \neq 0 \quad . \end{aligned} \tag{44}$$

Solange $x_2 \neq 0$ gilt (Winkelgeschwindigkeit ist nicht NULL) nimmt die Gesamtenergie auf Grund der geschwindigkeitsproportionalen Reibung streng monoton ab. Es liegt also asymptotische Stabilität vor. Da die zeitliche Ableitung $\dot{E}(\underline{x})$ auch außerhalb der Ruhelage für einzelne Zeitpunkt mit $x_2 = 0$ verschwindet, lässt sich die asymptotische Stabilität nicht ohne weiteres über den nachfolgend vorgestellten Ansatz mittels des Stabilitätskriteriums nach Ljapunow zeigen. Der Nachweis der asymptotischen Stabilität der Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ ist hier jedoch möglich, da die Gesamtenergie direkt berechnet wurde und aus physikalischen Überlegungen gezeigt werden kann, dass die Gesamtenergie streng monoton abnimmt (bis zum Erreichen der Ruhelage für $t \to \infty$).

Anmerkung: Oft sind Stabilitätsaussagen für nichtlineare Systeme nur lokal in einer Umgebung um eine Ruhelage möglich.

2.3 Stabilitätskriterien

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die physikalische Grundidee einer Stabilitätsuntersuchung dargestellt: Nimmt die Gesamtenergie eines Systems monoton ab, kommt die Systembewegung für $t \to \infty$ zur Ruhe. Die direkte Berechnung der Gesamtenergie ist jedoch für viele nichtlineare Systeme nicht praktikabel, weil hierbei einerseits sehr komplexe Ausdrücke auftreten können und andererseits der Nachweis der Abnahme der Gesamtenergie durch komplexe Zeitverläufe dieser Funktion (z.B. Oszillationen) erschwert wird. Die Grundidee von Ljapunow war nun, statt der Energiefunktion $E(\underline{x})$ eine allgemeine Funktion $V(\underline{x})$ anzusetzen. Ebenso wie die Energiefunktion wird die Funktion $V(\underline{x})$ als positiv definit angesetzt. Nun wird überprüft, ob ihre zeitliche Ableitung $\dot{V}(\underline{x})$ entlang den Trajektorien des Systems negativ semidefinit bzw. negativ definit ist. In diesen Fällen lässt sich die Stabilität bzw. asymptotische Stabilität des Systems nachweisen. Eine Funktion $V(\underline{x})$, welche diese Bedingungen erfüllt, wird als Ljapunow-Funktion bezeichnet.

Für die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion gilt:

$$\dot{V}(\underline{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \underline{f}(\underline{x}) \quad . \tag{45}$$

Zur Vereinfachung der Stabilitätsuntersuchung wird im Folgenden angenommen, dass die zu untersuchende Ruhelage im Punkt $\underline{x} = \underline{0}$ liegt. Ist dies nicht der Fall, lässt sich eine beliebige Ruhelage $\underline{x}_\infty \neq \underline{0}$ durch die lineare Verschiebung des Koordinatensystems, in dem das dynamische System beschrieben ist, in den Koordinatenursprung verschieben. Für die Koordinatentransformation

$$\underline{x} = \tilde{\underline{x}} + \underline{x}_\infty \tag{46}$$

ergibt sich das neue Zustandsgleichungssystem

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \underline{f}(\underline{x})\big|_{\underline{x}=\tilde{\underline{x}}+\underline{x}_\infty} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{\underline{x}}_\infty = \underline{0} \quad . \tag{47}$$

2.3.1 Kriterium der Stabilität im Kleinen

Sei $\underline{x} = \underline{0}$ eine Ruhelage des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$, $\underline{f} : D \mapsto \mathbb{R}^n$, und sei $V : D \mapsto \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so ist die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ **stabil**, wenn die Bedingungen

1. $V(\underline{0}) = 0$
2. $V(\underline{x}) > 0$ für alle $\underline{x} \in D \setminus \{\underline{0}\}$ und
3. $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$ für alle $\underline{x} \in D \setminus \{\underline{0}\}$

erfüllt sind.

2.3.2 Kriterium der asymptotischen Stabilität im Kleinen

Sei $\underline{x} = \underline{0}$ eine Ruhelage des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$, $\underline{f} : D \mapsto \mathbb{R}^n$, und sei $V : D \mapsto \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so ist die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ **asymptotisch stabil**, wenn die Bedingungen

1. $V(\underline{0}) = 0$
2. $V(\underline{x}) > 0$ für alle $\underline{x} \in D \setminus \{\underline{0}\}$ und
3. $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ für alle $\underline{x} \in D \setminus \{\underline{0}\}$

erfüllt sind.

Diese beiden Sätze über die (asymptotische) Stabilität einer Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ im Kleinen liefern zunächst keine Aussage über den Einzugsbereich der (asymptotisch) stabilen Ruhelage. Weiterhin stellen diese beiden Bedingungen lediglich eine **hinreichende** Stabilitätsbedingung dar. Sind obige Bedingungen nicht erfüllt, ist es auf Grund dieser Sätze nicht möglich, auf Instabilität eines dynamischen Systems zu schließen.

Bei der für den Stabilitätsnachweis zu ermittelnden Funktion $V(\underline{x})$ muss es sich also um eine in einer Umgebung um die Ruhelage positiv definite Funktion handeln. Für Stabilität im Kleinen muss $\dot{V}(\underline{x})$ negativ semidefinit sein; für asymptotische Stabilität im Kleinen negativ definit.

2.3.3 Kriterium der asymptotischen Stabilität im Großen (Kriterium für globale asymptotische Stabilität)

Eine Ruhelage $\underline{x}_\infty$ ist **global asymptotisch stabil**, falls $\underline{x}_\infty$ *stabil* ist **und** für $t \to \infty$ sämtliche möglichen Trajektorien des Systems gegen $\underline{x}_\infty$ *konvergieren*.

Hierzu ist es nötig, dass $V : D \mapsto \mathbb{R}$ wiederum eine stetig differenzierbare Funktion[1] ist, für die nun zusätzlich $V(\underline{x}) \to \infty$ für $\|\underline{x}\| \to \infty$ gelten muss. Diese Eigenschaft wird als radiale Unbeschränktheit der Funktion $V(\underline{x})$ bezeichnet[2].

Die globale asymptotische Stabilität eines dynamischen Systems lässt sich durch den folgenden Satz nachweisen:

Sei $\underline{x} = \underline{0}$ eine Ruhelage des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$, $\underline{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, und sei $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so ist die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ **global asymptotisch stabil**, wenn die Bedingungen

1. $V(\underline{0}) = 0$
2. $V(\underline{x}) > 0$ für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
3. $V(\underline{x}) \to \infty$ für $\|\underline{x}\| \to \infty$
4. $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

erfüllt sind.

Bei der Funktion $V(\underline{x})$ muss es sich also um eine im kompletten Zustandsraum positiv definite Funktion handeln. Für globale asymptotische Stabilität muss $\dot{V}(\underline{x})$ im gesamten Zustandsraum negativ definit sein.

Beispiel 1 Das nichtlineare System $\dot{x} = -a_1 x - a_3 x^3$ sei gegeben. Dieses System besitzt für $a_1, a_3 > 0$ eine Ruhelage $x = 0$. Als Kandidat für eine Ljapunow-Funktion soll $V(x) = x^2$ untersucht werden.

1. $V(x) = 0$ für $x = 0$
2. $V(x) > 0$ für alle $x \neq 0 \quad \Longrightarrow V$ ist positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}$
3. $V(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty \quad \Longrightarrow V$ ist radial unbeschränkt

[1] engl.: stetig differenzierbare Funktion = continuously differentiable function
[2] engl.: radial unbeschränkt = radially unbounded

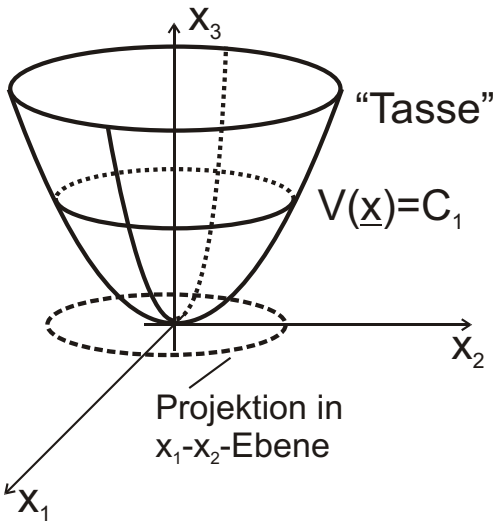


Abbildung 17: Visualisierung der Höhenlinien $V(x_1, x_2) = c = const$

4. $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x} = -2\left(a_1 x^2 + a_3 x^4\right) < 0$ für alle $x \neq 0$ wegen $a_1, a_3 > 0$
   $\Longrightarrow \dot{V}(\underline{x})$ ist negativ definit für alle $x \in \mathbb{R}$

Hieraus folgt, dass die Ruhelage $x = 0$ des Systems $\dot{x} = -a_1 x - a_3 x^3$ **global asymptotisch stabil** ist.

Beispiel 2 Das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{aligned} \tag{48}$$

sei gegeben. Dieses System besitzt die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$. Als Kandidat für eine Ljapunow-Funktion soll $V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ untersucht werden.

1. $V(\underline{x}) = 0$ für $\underline{x} = \underline{0}$
2. $V(\underline{x}) > 0$ für $\underline{x} \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow V$ ist positiv definit für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$
3. $V(\underline{x}) \to \infty$ für $\|\underline{x}\| \to \infty \quad \Longrightarrow V$ ist radial unbeschränkt
4. $\dot{V}(\underline{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \dot{\underline{x}} = -2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 < 0$ für alle $\underline{x} \neq \underline{0}$
   $\Longrightarrow \dot{V}(\underline{x})$ ist negativ definit für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$

Hieraus folgt, dass die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ dieses Systems **global asymptotisch stabil** ist.

2.3.4 Geometrische Plausibilitätsprüfung für $n = 2$

- $V(\underline{x})$ stellt eine Fläche über der Zustandsebene dar
- Für einen konstanten Wert $V(x_1, x_2) = c = const$ erhält man Höhenlinien, d.h. geschlossene Kurven in der Zustandsebene

Mögliche Typen singulärer Stellen eines Funktionsgebirges sind Punkte mit $\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$, d.h. mit verschwindendem Gradienten: (lokale) Maxima, (lokale) Minima, Sattelpunkte. Für alle diese Punkte gilt mit $\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$ auch $\dot{V}(\underline{x}) = 0$.
Modellvorstellung für Stabilität: rollende Kugel im Höhengebirge

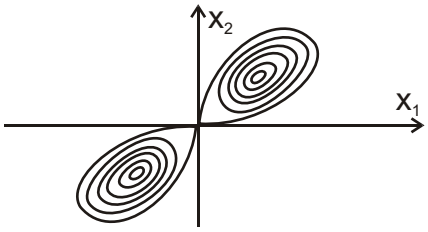


Abbildung 18: Funktion mit mehreren Kandidaten für Extremstellen

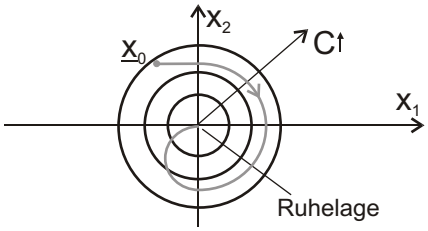


Abbildung 19: Beispiel für die Höhenlinien einer Ljapunow-Funktion eines asymptotisch stabilen Systems

2.3.5 Anwendung des Kriteriums für asymptotische Stabilität im Großen zur Bestimmung des Einzugsbereichs einer asymptotisch stabilen Ruhelage

1. $V(\underline{x})$ ist in einem Bereich S des Zustandsraums stetig differenzierbar und positiv definit. Zusätzlich ist die zeitliche Ableitung $\dot{V}(\underline{x})$ dort negativ definit.

2. In diesem Bereich S liegt ein Gebiet B, in dem $V(\underline{x}) < c$ ist und dessen Rand durch $V(\underline{x}) = c$ mit $c > 0$ beschrieben ist. Das Gebiet B sei beschränkt und enthalte die Ruhelage $\underline{x}_\infty = \underline{0}$.

Diese Ruhelage ist dann *asymptotisch stabil*. Das Gebiet B gehört garantiert zum *Einzugsbereich* dieser Ruhelage.

Anmerkung: Das Gebiet B ist meist kleiner als S.

Folgende Abschwächung des Kriteriums ist möglich: $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$ (negativ semidefinit) in S und $\dot{V}(\underline{x}) \neq 0$ längs möglicher Trajektorien der Zustandsgleichung außer in $\underline{x} = 0$.

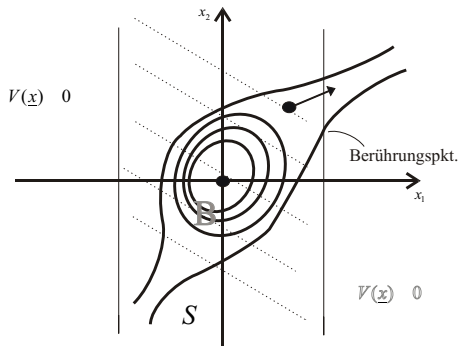


Abbildung 20: Zustände, die auf Höhenlinien ins Gebiet $\dot{V}(\underline{x}) > 0$ wandern

2.4 Kriterium für Instabilität

Eine Ruhelage ist *instabil*, wenn eine Funktion $V(\underline{x})$ mit $V(\underline{0}) = 0$ existiert, die in einer beliebig kleinen Umgebung der Ruhelage stetig differenzierbar sowie positiv definit ist und eine zeitliche Ableitung $\dot{V}(\underline{x})$ besitzt, welche ebenfalls in einer beliebig kleinen Umgebung um die Ruhelage positiv definit ist (siehe z.B. H. J. Marquez: *Nonlinear Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2003).

3.11 Instability

So far we have investigated the problem of *stability*. All the results seen so far are, however, *sufficient conditions* for stability. Thus the usefulness of these results is limited by our ability to find a function $V(\cdot)$ that satisfies the conditions of one of the stability theorems seen so far. If our attempt to find this function fails, then no conclusions can be drawn with respect to the stability properties of the particular equilibrium point under study. In these circumstances it is useful to study the opposite problem, namely; whether it is possible to show that the origin is actually *unstable*. The literature on instability is almost as extensive as that on stability. Perhaps the most famous and useful result is a theorem due to Chetaev given next.

Theorem 3.12 *(Chetaev) Consider the autonomous dynamical systems (3.1) and assume that $x = 0$ is an equilibrium point. Let $V : D \to \mathbb{R}$ have the following properties:*

(i) $V(0) = 0$

(ii) $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$, *arbitrarily close to* $x = 0$, *such that* $V(x_0) > 0$

(iii) $\dot{V} > 0 \forall x \in U$, *where the set* U *is defined as follows:*

$$U = \{x \in D : \|x\| \leq \epsilon, \text{and } V(x) > 0\}.$$

Under these conditions, $x = 0$ is unstable.

Remarks: Before proving the theorem, we briefly discuss conditions (ii) and (iii). According to assumption (ii), $V(\cdot)$ is such that $V(x_0) > 0$ for points inside the ball $B_\delta = \{x \in D : \|x\| \leq \delta\}$, where δ can be chosen arbitrarily small. No claim however was made about $V(\cdot)$ being positive definite in a neighborhood of $x = 0$. Assumptions (iii) says that $\dot{V}(\cdot)$ is positive definite in the set U. This set consists of all those points inside the ball B_ϵ (i.e., the set of points satisfying $\|x\| \leq \epsilon$), which, in addition, satisfy $V(x) > 0$.

Proof: The proof consists of showing that a trajectory initiating at a point x_0 arbitrarily close to the origin in the set U will eventually cross the sphere defined by $\|x\| = \epsilon$. Given that ϵ is arbitrary, this implies that given $\epsilon > 0$, we cannot find $\delta > 0$ such that

$$\|x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \epsilon$$

Notice first that condition (ii) guarantees that the set U is not empty. U is clearly bounded and moreover, its boundary consists of the points on the sphere $\|x\| = \epsilon$, and the surface defined by $V(x) = 0$. Now consider an interior point $x_0 \in U$. By assumption (ii) $V(x_0) > 0$, and taking account of assumption (iii) we can conclude that

$$\begin{aligned} V(x_0) &= \xi > 0 \\ \dot{V}(x_0) &> 0 \end{aligned}$$

but then, the trajectory $x(t)$ starting at x_0 is such that $V(x(t)) > \xi, \forall t > 0$. This conditions must hold *as long as $x(t)$ is inside the set U*. Define now the set of points Q as follows:

$$Q = \{x \in U : \|x\| \leq \epsilon \text{ and } V(x) \geq \xi\}.$$

This set is compact (it is clearly bounded and is also closed since it contains its boundary points $\|x\| = \epsilon$ and $V(x) = \xi$). It then follows that $V(x)$, which is a continuous function in a compact set Q, has a minimum value and a maximum value in Q. This argument also shows that $V(x)$ is bounded in Q, and so in U. Define

$$\gamma = \min\{\dot{V}(x) : x \in Q\} > 0.$$

This minimum exists since $\dot{V}(x)$ is a continuous function in the compact set Q. Thus, for the trajectory starting at x_0, we can write

$$\begin{aligned} V(x(t) &= V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau))\, \mathrm{d}\tau \\ &\geq V(x_0) + \int_0^t \gamma\, \mathrm{d}\tau = V(x_0) + \gamma t. \end{aligned}$$

It then follows that $x(t)$ cannot stay forever inside the set U since $V(x)$ is bounded in U. Thus a trajectory $x(t)$ initiating arbitrarily close to the origin must intersect the boundary of U. The boundaries of this set are $\|x\| = \epsilon$ and the surface $V(x) = 0$. However, the trajectory $x(t)$ is such that $V(x) > \xi$, and we thus conclude that $x(t)$ leaves the set U through the sphere $\|x\| = \epsilon$. Thus, $x = 0$ is unstable since given $\epsilon > 0$, we cannot find $\delta > 0$ such that

$$\|x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \epsilon.$$

This completes the proof. □

Example 3.23 *Consider again the system of Example 3.20*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

We showed in Section 3.8 that the origin of this system is an unstable equilibrium point. We now verify this result using Chetaev's result. Let $V(x) = 1/2(x_1^2 + x_2^2)$. Thus we have that $V(0) = 0$, and moreover $V(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^2 \neq 0$, i.e., $V(\cdot)$ is positive definite. Also

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (x_1, x_2) f(x) \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2). \end{aligned}$$

Defining the set U by

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq \epsilon,\ 0 < \epsilon < \beta\}$$

we have that $V(x) > 0 \forall x \in U, x \neq 0$, and $\dot{V} > 0 \forall x \in U, x \neq 0$. Thus the origin is unstable. by Chetaev's result.

□

2.5 Konstruktion von Ljapunow-Funktionen

Bei der Konstruktion geeigneter Ljapunow-Funktionen für den Nachweis lokaler beziehungsweise globaler (asymptotischer) Stabilität wird von einer möglichst im gesamten Zustandsraum positiv definiten Funktion $V(\underline{x})$ ausgegangen. Um diese Funktion $V(\underline{x})$ an das zu untersuchende dynamische System bestmöglich anpassen zu können, sollte sie freie Parameter enthalten. Daran anschließend bildet man die zeitliche Ableitung $\dot{V}(\underline{x})$ dieser Funktion (entlang den Trajektorien des zu untersuchenden Systems) und versucht, die freien Parameter von $V(\underline{x})$ so zu wählen, dass $\dot{V}(\underline{x})$ in einem möglichst großen Bereich um die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ negativ definit (beziehungsweise negativ semidefinit) ist. Schließlich wendet man auf diesen Bereich die Kriterien der (asymptotischen) Stabilität im Kleinen beziehungsweise im Großen an, die in den vorhergehenden Abschnitten besprochen wurden.

Der einfachst mögliche Ansatz für eine im gesamten n-dimensionalen Zustandsraum positiv definite Funktionen $V(\underline{x})$ ist

$$V(\underline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu^2 \qquad \text{mit} \qquad \lambda_\nu \neq 0 \tag{49}$$

Der allgemeine Ansatz für eine **quadratische Form** ist

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} x_i x_j \tag{50}$$

mit der symmetrischen Matrix $\underline{P} = \underline{P}^T$.

Die freien, noch festzulegenden Parameter der Funktion $V(\underline{x})$ sind nun die Werte λ_ν beziehungsweise die Einträge der Matrix $\underline{P}$.

2.5.1 Kriterium von Sylvester für den Nachweis der positiven Definitheit

Eine quadratische Form

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{x} \tag{51}$$

ist positiv definit, wenn die Determinante und alle nordwestlichen Unterdeterminanten ihrer symmetrischen Gewichtungsmatrix

$$\underline{P} = \underline{P}^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \tag{52}$$

positiv sind. Das heißt es gilt:

$$\begin{aligned} p_{11} &> 0 \\ \det \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = p_{11}\, p_{22} - p_{12}^2 &> 0 \\ &\vdots \\ \det \underline{P} &> 0 \ . \end{aligned} \tag{53}$$

Bemerkung: Das Sylvester-Kriterium gilt auch für zustandsabhängige quadratische Formen des Typs

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{P}(\underline{x}) \cdot \underline{x} \quad \text{mit} \quad P_{ij} = P_{ji} \ . \tag{54}$$

Siehe hierzu auch das Arbeitsblatt "Grundlagen der Matrix-Vektor-Rechnung".

2.5.2 Beispiel

Gegeben sei das dynamische System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^3 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \ . \end{aligned} \tag{55}$$

Für den Stabilitätsnachweis werden nun die folgenden Schritte durchgeführt:

1. Ansatz einer Ljapunow-Funktion mit den freien Parametern λ_1 und λ_2

$$V(\underline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \tag{56}$$

2. Berechnung der zeitlichen Ableitung der Ljapunow-Funktion

$$\begin{aligned} \dot{V}(\underline{x}) &= \left[\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T \cdot \underline{f}(\underline{x}) \\ &= 2\lambda_1 \, x_1 \, \dot{x}_1 + 2\lambda_2 \, x_2 \, \dot{x}_2 \\ &= 2\lambda_1 \, x_1 \, (-x_1 + 2x_1^3 \, x_2) + 2\lambda_2 \, x_2 \, (-x_2) \\ &= -2\lambda_1 \, x_1^2 \underbrace{(1 - 2x_1^2 \, x_2)}_{\overset{!}{>}0} - 2\lambda_2 \, x_2^2 \end{aligned} \tag{57}$$

3. Anwendung des Kriteriums der asymptotischen Stabilität im Großen:

$$2x_1^2 x_2 < 1 \ \Leftrightarrow \ x_2 < \frac{1}{2x_1^2} \quad \rightarrow \ S \tag{58}$$

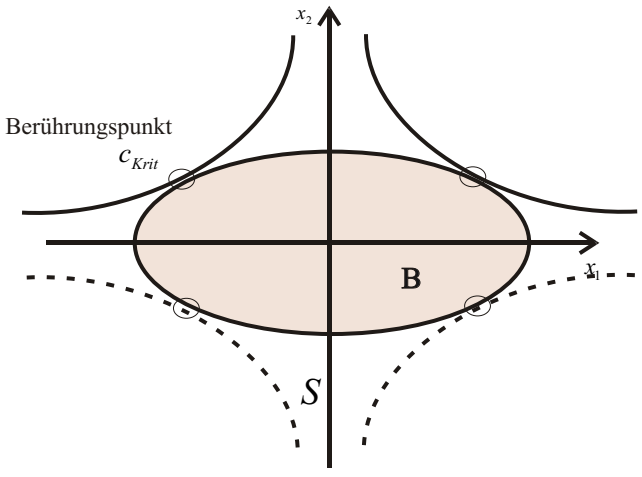


Abbildung 21: Einzugsbereichsbestimmung der asymptotisch stabilen Ruhelage

Der Bereich S wird durch Hyperbeläste begrenzt. Für $x_2 < 0$ wurden die gestrichelt eingezeichneten Grenzen des Bereichs aus Symmetriegründen gewählt. Für den Einzugsbereich B der Ruhelage gilt

$$V(\underline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 < c \ . \tag{59}$$

Dieser Bereich wird durch eine Höhenlinie des Paraboloids $V(\underline{x})$ in Form einer Ellipse ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) oder in Form eines Kreises ($\lambda_1 = \lambda_2$) berandet. Der Wert c hängt vom Verhältnis λ_1/λ_2 ab.

- Das Verfahren kann mehrfach mit unterschiedlichen Halbachsenverhältnissen λ_1/λ_2 angewendet werden; somit wird die Abhängigkeit der Ljapunow-Funktion von λ_1 und λ_2 genutzt. Der gesamte nachweisbare Einzugsbereich ergibt sich aus der **Vereinigungsmenge aller Ellipsen-Innenbereiche**.
- **Wichtig:** Mit anderen Ansätzen (z.B. bei Berücksichtigung gemischter Terme unterschiedlicher Zustandsgrößen in der Funktion $V(\underline{x})$) ist eventuell eine Erweiterung des Bereichs B möglich, da die Stabilitätsaussagen, die aus der direkten Methode von Ljapunow resultieren, nur *hinreichend* sind.

2.6 Ljapunow-Funktionen für lineare Systeme

Betrachtet wird nun ein lineares System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} \tag{60}$$

mit der Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$.
Durch den Ansatz einer quadratische Form

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{x} \tag{61}$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\underline{P}$ ergibt sich als zeitliche Ableitung der Ausdruck

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{P} \cdot \dot{\underline{x}} + \dot{\underline{x}}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{x} \ . \tag{62}$$

Das Ersetzen von $\dot{\underline{x}}$ durch die Zustandsdifferentialgleichung ergibt

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{P} \cdot (\underline{A} \cdot \underline{x}) + (\underline{A} \cdot \underline{x})^T \underline{P} \cdot \underline{x} = \underline{x}^T \cdot \left(\underline{P} \cdot \underline{A} + \underline{A}^T \cdot \underline{P}\right) \cdot \underline{x} \ . \tag{63}$$

Für asymptotische Stabilität muss diese Zeitableitung negativ definit sein, also

$$\dot{V}(\underline{x}) \stackrel{!}{=} -\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} \tag{64}$$

mit einer symmetrischen positiv definiten Matrix $\underline{Q}$ gelten.
Ein Vergleich der beiden Ausdrücke, die für alle Werte von $\underline{x}$ identisch sein müssen, liefert die so genannte **Ljapunow-Gleichung**

$$\underline{P} \cdot \underline{A} + \underline{A}^T \cdot \underline{P} = -\underline{Q} \ . \tag{65}$$

Die Ljapunow-Gleichung ist eine algebraische Matrixgleichung zur Bestimmung von $\underline{P}$.
Vorgehensweise zur Lösung der Ljapunow-Gleichung:

1. $\underline{Q}$ als symmetrische, positiv definite Matrix vorgeben, z.B. $\underline{Q} = \underline{I}$; dann Lösungen $\underline{P}$ der Ljapunow-Gleichung bestimmen: Das lineare System ist asymptotisch stabil, falls eine symmetrische, positiv definite Lösung $\underline{P}$ existiert.
2. $\underline{P}$ als konstante, positiv definite, symmetrische Matrix vorgeben, dann

   $$\underline{Q} = -(\underline{P} \cdot \underline{A} + \underline{A}^T \cdot \underline{P}) \tag{66}$$

   bestimmen.
   Asymptotische Stabilität liegt vor, falls $\underline{Q}$ positiv definit bzw. $-\underline{Q}$ negativ definit ist.

2.7 Ljapunow-Funktionen für die Stabilitätsanalyse linearer zeitvarianter Systeme

Statt des **linearen zeitinvarianten** Systemmodells, das im vorhergehenden Abschnitt betrachtet wurde, soll nun ein **lineares zeitvariantes** System

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t) \cdot \underline{x}(t) \tag{67}$$

auf seine Stabilität untersucht werden.
Man setze nun als Ljapunow-Funktion den zeitvarianten Ausdruck

$$V(\underline{x}, t) = \underline{x}^T \cdot \underline{P}(t) \cdot \underline{x} \tag{68}$$

an. Folgende Voraussetzungen sollen für die Matrix $\underline{P}(t)$ erfüllt sein:

1. $\underline{P}(t)$ sei stetig differenzierbar nach der Zeitvariablen t
2. $\underline{P}(t) = \underline{P}^T(t)$ sei eine symmetrische Matrix
3. $\underline{P}(t)$ sei beschränkt
4. $\underline{P}(t)$ sei positiv definit für alle Zeiten t

Damit existieren Werte $k_1 \in \mathbb{R}^+$ und $k_2 \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$k_1 \underline{x}^T \underline{x} \leq \underline{x}^T \cdot \underline{P}(t) \cdot \underline{x} \leq k_2 \underline{x}^T \underline{x} \tag{69}$$

für alle t und alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt.
Die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion lässt sich nun zu

$$\begin{aligned} \dot{V}(\underline{x}, t) &= \underbrace{\dot{\underline{x}}^T}_{(\underline{A}(t)\underline{x})^T} \cdot \underline{P}(t) \cdot \underline{x} + \underline{x}^T \cdot \underline{P}(t) \cdot \underbrace{\dot{\underline{x}}}_{\underline{A}(t)\underline{x}} + \underline{x}^T \cdot \dot{\underline{P}}(t) \cdot \underline{x} \\ &= \underline{x}^T \cdot \underline{A}^T(t) \cdot \underline{P}(t) \cdot \underline{x} + \underline{x}^T \cdot \underline{P}(t) \cdot \underline{A}(t) \cdot \underline{x} + \underline{x}^T \cdot \dot{\underline{P}}(t) \cdot \underline{x} \\ &= \underline{x}^T \left(\underline{P}(t) \cdot \underline{A}(t) + \underline{A}^T(t) \cdot \underline{P}(t) + \dot{\underline{P}}(t) \right) \underline{x} \\ &= -\underline{x}^T \cdot \underline{Q}(t) \cdot \underline{x} \qquad \text{mit} \qquad \underline{Q}(t) = \underline{Q}^T(t) = \text{ positiv definit} \end{aligned} \tag{70}$$

angeben.
Für zeitvariante Systeme lautet damit die Ljapunow-Gleichung

$$-\underline{Q}(t) = \underline{P}(t) \cdot \underline{A}(t) + \underline{A}^T(t) \cdot \underline{P}(t) + \dot{\underline{P}}(t) \ . \tag{71}$$

Diese Gleichung ist nun statt einer algebraischen Gleichung eine Matrix-Differentialgleichung.
Ein wichtiger, häufig anwendbarer Spezialfall ist die Existenz einer positiv definiten Matrix $\underline{Q}(t)$ für $\underline{P}(t) = const = \underline{I}$, d.h. $\dot{\underline{P}}(t) = \underline{0}$. In diesem Fall muss $\underline{A}^T(t) + \underline{A}(t)$ negativ definit sein[3].
Dies ist lediglich eine hinreichende Stabilitätsbedingung, die mittels des Sylvester-Kriteriums oder mittels der Eigenwertlage (siehe Arbeitsblatt "Grundlagen der Matrix-Vektor-Rechnung") überprüft werden kann. Ein Beispiel, welches demonstriert, dass für lineare zeitvariante Systeme aus der Lage der Eigenwerte von $\underline{A}(t)$ **keine** Stabilitätsaussagen abgeleitet werden können, kann der Übungsaufgabe 21 entnommen werden.

[3] Da die Matrix $\underline{A}^T(t) + \underline{A}(t)$ immer reell und symmetrisch ist, kann sie nur reelle Eigenwerte besitzen.

2.8 Methode von Aizerman zur Bestimmung von Ljapunow-Funktionen

Statt des nichtlinearen Systems

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \tag{72}$$

wird nun die **quasi-lineare** Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \stackrel{!}{=} \underline{A}(\underline{x})\underline{x} \tag{73}$$

mit der zustandsabhängigen Systemmatrix $\underline{A}(\underline{x})$ betrachtet, die sich gemäß

$$\underline{A}(\underline{x}) = \underline{A}_L + \underline{A}_{NL}(\underline{x}) \tag{74}$$

in einen linearen (zustandsunabhängigen) und einen nichtlinearen (zustandsabhängigen) Anteil aufspalten lässt.
Die Bestimmung eines Kandidaten für eine Ljapunow-Funktion mittels der Methode von Aizerman erfolgt nun in zwei Schritten:

1. Für den linearen Anteil $\underline{A}_L$ und eine positiv definite Matrix $\underline{Q}_L > 0$, beispielsweise $\underline{Q}_L = \underline{I}$, wird die Lösung $\underline{P}_L$ der zugehörigen Ljapunow-Gleichung berechnet.

2. Ist die im Schritt 1 bestimmte Matrix $\underline{P}_L$ positiv definit, wird für das Gesamtsystem die Ljapunow-Funktion

   $$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{P}_L \cdot \underline{x} \tag{75}$$

   angesetzt. Diese wird nun mit $\underline{A}(\underline{x})$ ausgewertet. Für die Matrix $\underline{Q}$ gilt damit

   $$\underline{Q}(\underline{x}) = \underline{Q}_L + \underline{Q}_{NL}(\underline{x}) \ , \tag{76}$$

   wobei $\underline{Q}(\underline{x})$ für asymptotische Stabilität in einer Umgebung um die Ruhelage positiv definit sein muss. Abschließend wird der Bereich S sowie das Gebiet B mit $V(\underline{x}) < c$ berechnet, um den gesicherten Einzugsbereich einer asymptotisch stabilen Ruhelage zu ermitteln.

Beispiel Gegeben sei das nichtlineare System 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + F(x_1) \end{aligned} \tag{77}$$

mit der nichtlinearen Kennlinie

$$F(x_1) = f(x_1) \cdot x_1 \qquad \text{mit} \qquad F(0) = 0 \ . \tag{78}$$

Nun soll die Stabilität der Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ mit der Methode von Aizerman untersucht werden:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underline{A}(\underline{x}) \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ f(x_1) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{79}$$

1. Zunächst erfolgt die Unterteilung der Matrix $\underline{A}(\underline{x})$ in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil. Hierbei ist zu beachten, dass diese Aufteilung **nicht** eindeutig ist.

   $$\underline{A}_L = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{A}_{NL}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ f(x_1) & 0 \end{bmatrix} \tag{80}$$

2. Wahl einer positiv definiten Matrix $\underline{Q}_L$; hier mit einem zusätzlichen freien Parameter $\alpha > 0$

   $$\underline{Q}_L = \begin{bmatrix} 4\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{81}$$

3. Lösung der Ljapunow-Gleichung für den linearen Anteil $\underline{A}_L$: Ansatz einer positiv definiten, symmetrischen Matrix $\underline{P}_L$:

$$\underline{P}_L = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \tag{82}$$

Mit der Ljapunow-Gleichung

$$\begin{aligned} &\underline{P}_L \cdot \underline{A}_L + \underline{A}_L^T \cdot \underline{P}_L = -\underline{Q}_L \\ &\begin{bmatrix} -4p_{11} & -3p_{12} \\ -3p_{12} & -2p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{83}$$

ergeben sich die Matrixeinträge $p_{11} = \alpha$, $p_{12} = 0$ und $p_{22} = 1$ für die positiv definite Matrix

$$\underline{P}_L = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0 \ . \tag{84}$$

Dies bedeutet, dass der lineare Anteil $\underline{A}_L$ asymptotisch stabil ist.

4. Nun wird für das Gesamtsystem die Ljapunow-Funktion

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{P}_L \cdot \underline{x} = \alpha x_1^2 + x_2^2 \tag{85}$$

angesetzt.

5. Im Folgenden wird nun die zustandsabhängige Matrix $\underline{Q}(\underline{x})$ berechnet:

$$\begin{aligned} &\underline{P}_L \cdot \underline{A}(\underline{x}) + \underline{A}^T(\underline{x}) \cdot \underline{P}_L = -\underline{Q}(\underline{x}) \\ &\underbrace{[\underline{P}_L \cdot \underline{A}_L + \underline{A}_L \cdot \underline{P}_L]}_{-\underline{Q}_L} + [\underline{P}_L \cdot \underline{A}_{NL}(\underline{x}) + \underline{A}_{NL}^T(\underline{x})\underline{P}_L] = -\underline{Q}(\underline{x}) = -\underline{Q}_L - \underline{Q}_{NL}(\underline{x}) \\ &\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ f(x_1) & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_{NL}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & f(x_1) \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_{NL}^T(\underline{x})} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\underline{Q}_{NL}(\underline{x}) \end{aligned} \tag{86}$$

Hieraus ergibt sich $\underline{Q}_{NL}(\underline{x})$ zu

$$\underline{Q}_{NL}(\underline{x}) = -\begin{bmatrix} 0 & f(x_1) - \alpha \\ f(x_1) - \alpha & 0 \end{bmatrix} \ . \tag{87}$$

Für das Gesamtsystem gilt

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \underline{Q}_L + \underline{Q}_{NL}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 4\alpha & \alpha - f(x_1) \\ \alpha - f(x_1) & 2 \end{bmatrix} \ . \tag{88}$$

Wegen $\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T \cdot \underline{Q}(\underline{x}) \cdot \underline{x}$ muss $\underline{Q}(\underline{x})$ für asymptotische Stabilität in einer Umgebung um die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ positiv definit sein. Für jedes $\alpha > 0$ muss somit für die positive Definitheit der Matrix $\underline{Q}(\underline{x})$ die Bedingung

$$\det(\underline{Q}(\underline{x})) = 8\alpha - [\alpha - f(x_1)]^2 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{8\alpha} > |\alpha - f(x_1)| \tag{89}$$

erfüllt sein. Diese Bedingung lässt sich zu

$$\alpha - \sqrt{8\alpha} < f(x_1) < \alpha + \sqrt{8\alpha} \tag{90}$$

vereinfachen.

Unter Berücksichtigung von $V(\underline{x}) \to \infty$ für $\underline{x} \to \infty$ wurden mit obiger Rechnung Grenzen für die nichtlineare Funktion $f(x_1)$ ermittelt, innerhalb derer die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ **global asymptotisch stabil** ist (siehe auch die nachfolgende Abbildung 22).

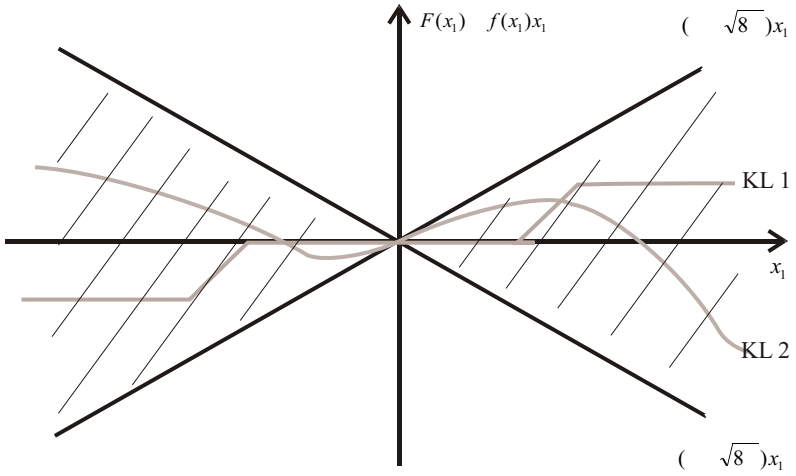


Abbildung 22: Visualisierung des Bereichs asymptotisch stabiler Kennlinien $F(x_1) = f(x_1) \cdot x_1$

2.9 Methode der ersten Näherung

Die Stabilität der Ruhelage eines nichtlinearen Systems lässt sich in einer kleinen Umgebung dieses Punktes auch nach einer Ersetzung des ursprünglichen nichtlinearen Systemmodells durch eine Linearisierung in diesem Arbeitspunkt untersuchen. Die Grundidee hierbei ist: Ist ein linearisiertes System asymptotisch stabil, so ist auch das nichtlineare System in einer gewissen Umgebung der Ruhelage asymptotisch stabil. Hieraus sind jedoch keine Aussagen über die Größe des Einzugsbereichs der asymptotisch stabilen Ruhelage möglich.

Der Ausgangspunkt für die Stabilitätsanalyse ist die nichtlineare Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \tag{91}$$

mit der Ruhelage $\underline{x}_\infty$. In komponentenweiser Darstellung gilt die Beziehung $\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ mit der Ruhelage $x_{i\infty}$.

Nun wird das System mittels der Abweichungen $\Delta x_i = x_i - x_{i\infty}$ von der Ruhelage im Anschluss an eine Taylor-Reihenentwicklung ($\underline{f}(\underline{x})$ sei hierzu stetig differenzierbar) durch

$$\Delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \Delta x_k + \underbrace{\varrho_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}_{\text{Glieder ab 2. Ordnung}} \quad \text{mit} \quad a_{ik} = \left.\frac{\partial f_i(\underline{x})}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}=\underline{x}_\infty} \quad \text{und} \quad i = 1, \ldots, n \tag{92}$$

beziehungsweise

$$\Delta\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \Delta\underline{x} + \underline{\varrho}(\Delta\underline{x}) \tag{93}$$

dargestellt.

Werden nur Terme 1. Ordnung berücksichtigt, ergibt sich die lineare Systemdarstellung $\Delta\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \Delta\underline{x}$.

2.9.1 Stabilitätskriterium nach der Methode der ersten Näherung

1. Besitzt die Systemmatrix $\underline{A}$, die sich durch Linearisierung eines nichtlinearen zeitinvarianten Systems in einer Ruhelage ergibt, **nur** Eigenwerte links der imaginären Achse, so ist die Ruhelage des **nichtlinearen** Systems **asymptotisch stabil**.
2. Liegt mindestens ein Eigenwert von $\underline{A}$ rechts der imaginären Achse, so ist die Ruhelage des **nichtlinearen** Systems **instabil**.
3. Liegt mindestens ein Eigenwert von $\underline{A}$ auf der imaginären Achse, so ist nach der Methode der ersten Näherung **keine Stabilitätsaussage** möglich.

Beispiel 1 Gegeben sei das dynamische System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^3 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \tag{94}$$

mit der Ruhelage $\underline{x}_\infty = \underline{0}$. Die Matrix $\underline{A}$ ergibt sich dann zu

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{\varrho}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1^3 x_2 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{95}$$

Mit

$$\det(s\underline{I} - \underline{A}) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix} = (s+1)^2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{96}$$

ergeben sich die Eigenwerte zu $s_1 = s_2 = -1$. Somit ist die Ruhelage $\underline{x}_\infty = 0$ des nichtlinearen Systems **asymptotisch stabil**.

Beispiel 2 Für das nichtlineare System

$$\dot{x} = ax + bx^5 \tag{97}$$

soll die Ruhelage $x_\infty = 0$ mittels der Methode der ersten Näherung auf (asymptotische) Stabilität untersucht werden. Das linearisierte Systemmodell ergibt sich zu

$$\Delta\dot{x} = a \cdot \Delta x \ . \tag{98}$$

Es ergibt sich die folgende Fallunterscheidung:

- $\underline{a > 0}$: Der Eigenwert ist $s = a > 0$ (reell). Die Ruhelage $x = 0$ ist damit **instabil**.
- $\underline{a < 0}$: Der Eigenwert ist $s = a < 0$ (reell). Die Ruhelage $x = 0$ ist damit **asymptotisch stabil**.
- $\underline{a = 0}$: Der Eigenwert ist $s = 0$. Da der Eigenwert auf der imaginären Achse liegt, ist keine Stabilitätsaussage mit der Methode der ersten Näherung möglich.
  Dieser Fall soll nun mittels der quadratischen Ljapunow-Funktion $V(x) = x^2$ genauer untersucht werden. Für $a = 0$ ergibt sich die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion zu

  $$\dot{V}(x) = 2x \cdot \dot{x} = 2x \cdot bx^5 = 2b \underbrace{x^6}_{>0} \ . \tag{99}$$

  Dieser Ausdruck ist für $b < 0$ für alle $x \neq 0$ negativ definit. Da die Ljapunow-Funktion radial unbeschränkt ($V(x) \to \infty$ für $x \to \infty$) und für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv definit ist, ist die Ruhelage $x_\infty = 0$ **global asymptotisch stabil**.

2.9.2 Herleitung der Bedingung für asymptotische Stabilität nach der Methode der ersten Näherung mittels einer Ljapunow-Funktion

- Annahme: Die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\underline{A}$ seien reell und einfach.
  Das nichtlineare Systemmodell lässt sich nach einer Taylor-Reihenentwicklung durch

  $$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{\varrho} \qquad \text{mit der Ruhelage} \qquad \underline{x}_\infty = 0 \tag{100}$$

  beschreiben. Sei $\underline{V}$ die Matrix der Eigenvektoren von $\underline{A}$. Mit der Substitution $\underline{x} = \underline{V} \cdot \underline{z}$ gilt

  $$\begin{aligned} \dot{\underline{z}} &= \underbrace{\underline{V}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{V}}_{\tilde{\underline{A}}} \cdot \underline{z} + \underline{V}^{-1} \cdot \underline{\varrho}(\underline{V} \cdot \underline{x}) \\ \dot{\underline{z}} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix} \underline{z} + \tilde{\underline{\varrho}}(\underline{z}) \quad \text{mit der Ruhelage} \quad \underline{z} = \underline{0} \ . \end{aligned} \tag{101}$$

- Nun wird ein in $\underline{z}$ quadratischer Ansatz

$$V(\underline{z}) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 \tag{102}$$

für die Ljapunow-Funktion angenommen.

- Für ihre Zeitableitung gilt

$$\begin{aligned} \dot{V}(\underline{z}) &= 2z_1\dot{z}_1 + \ldots + 2z_n\dot{z}_n = 2\underline{z}^T\dot{\underline{z}} \\ \dot{V}(\underline{z}) &= 2\underline{z}^T \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix} \underline{z} + \tilde{\underline{\varrho}}(\underline{z}) \right\} \\ &= \underbrace{2\underline{z}^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\underline{z}}_{<0 \text{ für } \underline{z} \neq \underline{0}, \text{ falls alle } \lambda_i < 0} + \underbrace{2\underline{z}^T \tilde{\underline{\varrho}}(\underline{z})}_{\text{Skalar, Terme 3. Ordnung in } \underline{z}} \end{aligned} \tag{103}$$

- In einer hinreichend engen Umgebung der Ruhelage $\underline{z} = \underline{0}$ kann der Anteil $2\underline{z}^T\tilde{\underline{\varrho}}(\underline{z})$ (aus den nichtlinearen Anteilen der Zustandsgleichung resultierend) gegenüber dem ersten (aus den linearen Gliedern resultierend) vernachlässigt werden. Die zeitliche Ableitung $\dot{V}(\underline{z})$ ist dann in dieser kleinen Umgebung negativ definit. Damit wurde **asymptotische Stabilität** der Ruhelage des nichtlinearen Systems nach dem Kriterium der asymptotischen Stabilität im Kleinen nachgewiesen.

2.10 Popov-Kriterium für absolute Stabilität

Für Systeme mit einer statischen nichtlinearen Kennlinie

$$x = f(u) \tag{104}$$

und einer rationalen, asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen

$$G(s) = -\frac{U(s)}{X(s)} \ , \tag{105}$$

deren Zählergrad kleiner als deren Nennergrad ist, lässt sich mittels des Popov-Kriteriums ein Nachweis der absoluten Stabilität des Systems führen, wenn sich die Struktur des Systems gemäß Abbildung 23 darstellen lässt.

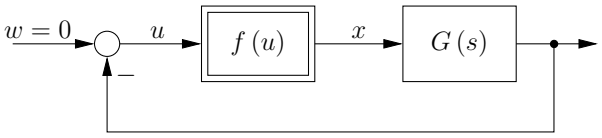


Abbildung 23: Blockschaltbild eines Systems mit *einer* statischen sektorbeschränkten Nichtlinearität $f(u)$ und einer linearen Strecke $G(s)$

Bei der nichtlinearen Kennlinie muss es sich um eine stetige sektorbeschränkte Funktion handeln, die der Funktionenklasse

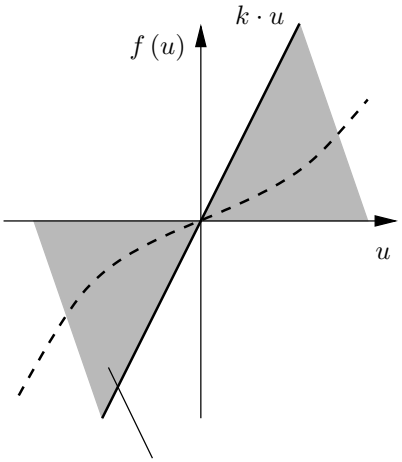
$$\mathcal{F}_k := \left\{ f(u) \middle| f(0) = 0,\ 0 \leq uf(u) \leq ku^2 \right\} \quad , \quad 0 < k < \infty \tag{106}$$

angehört. Diese Funktionenklasse beschränkt die zulässigen nichtlinearen Kennlinien auf Funktionen, die in einem von der u-Achse und einer Ursprungsgeraden $k \cdot u$ mit positiver Steigung k eingeschlossenen Sektor liegen.

Hierzu wird bei einer grafischen Auswertung in der $(\Re\{G(j\omega)\}; \omega \cdot \Im\{G(j\omega)\})$–Ebene die Ortskurve von $G(j\omega)$ des Systems angetragen. Falls diese Ortskurve für alle $\omega \geq 0$ unterhalb der Geraden $S_{k,\theta}$ verläuft,

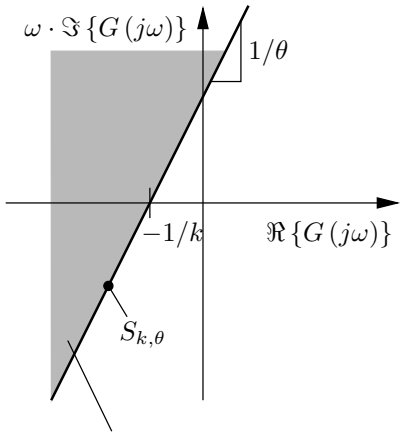
ist das System unter Berücksichtigung der nichtlinearen Kennlinie asymptotisch stabil. Dabei ist $\theta \in \mathbb{R}$, der Parameter k ein beliebiger fester Wert mit $0 < k < \infty$ und $S_{k,\theta}$ die Gerade

$$\begin{aligned} S_{k,\theta} &:= \frac{1}{k} + \Re\left\{(1 + j\omega\theta)\, G\left(j\omega\right)\right\} \\ &= \frac{1}{k} + \Re\left\{G\left(j\omega\right)\right\} - \omega\theta\Im\left\{G\left(j\omega\right)\right\} \quad , \quad \text{für alle} \quad \omega \geq 0 \ . \end{aligned} \tag{107}$$



Bereich aller sektorbeschränkten Nichtlinearitäten der Funktionenklasse $\mathcal{F}_k$

(a) Definition der Funktionenklasse $\mathcal{F}_k$



Bereich, in dem bei festgelegtem k und θ bei absoluter Stabilität keine Popov-Ortskurve liegen darf

(b) Stabilitätsuntersuchung mittels Popov-Ortskurve

Abbildung 24: Popov-Kriterium bei Systemen mit *einer* sektorbeschränkten Nichtlinearität

In diesem Zusammenhang bedeutet **absolute Stabilität**, dass nicht nur für eine spezielle Funktion $f(u)$ sondern für eine gesamte Klasse $\mathcal{F}_k$ von Funktionen asymptotische Stabilität nachgewiesen werden kann.

3 Robustheit linearer Systeme mit Parameterunsicherheiten

In diesem Kapitel werden Methoden zur Stabilitätsanalyse und zum Reglerentwurf für lineare Systeme mit wertebereichsbeschränkten Parameterunsicherheiten betrachtet. Die Darstellung in diesem Abschnitt ist an J. Ackermann: *Robuste Regelung* (Springer–Verlag, 1993) und *Robust Control* (Springer–Verlag, 2002) angelehnt.

3.1 Definition einer Polynomfamilie

Bei linearen Systemen mit unsicheren Parametern $\underline{q}$ spiegeln sich diese Unsicherheiten in Form von Unsicherheiten der Koeffizienten a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, des charakteristischen Polynoms wider.
Sämtliche möglichen charakteristischen Polynome eines derartigen Systems lassen sich dann in der Form

$$p\left(s, \underline{q}\right) = a_0\left(\underline{q}\right) + a_1\left(\underline{q}\right) \cdot s + a_2\left(\underline{q}\right) \cdot s^2 + \ldots + a_n\left(\underline{q}\right) \cdot s^n \tag{108}$$

darstellen. Wird der Wertebereich aller unsicheren Parameter $\underline{q}$ als Q bezeichnet, gehören alle Polynome $p\left(s, \underline{q}\right)$ der Polynomfamilie

$$P\left(s, Q\right) = \left\{ p\left(s, \underline{q}\right) \middle| \, \underline{q} \in Q \right\} \tag{109}$$

an. Zusätzlich wird angenommen, dass die Koeffizienten $a_i\left(\underline{q}\right)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, reell sind und stetig von den reellen Parametern q_i abhängen, welche in dem Parametervektor

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_l \end{bmatrix}^T \tag{110}$$

zusammengefasst werden. Für die unsicheren Parameter sollen Wertebereichsbeschränkungen in Form von voneinander unabhängigen Intervallen

$$q_i \in \left[q_i^- \; ; \; q_i^+ \right] \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, l \quad , \tag{111}$$

vorliegen. Die Menge aller möglichen Parametervektoren ist damit durch den Hyperquader

$$Q := \left\{ \underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_l \end{bmatrix}^T \middle| \, q_i \in \left[q_i^- \; ; \; q_i^+ \right], i = 1, 2, \ldots, l \right\} \tag{112}$$

gegeben. Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Vorzeichenbedingung

$$a_n\left(\underline{q}\right) > 0 \qquad \text{für alle} \qquad \underline{q} \in Q \tag{113}$$

erfüllt ist.
Eine Polynomfamilie wird als *robust asymptotisch stabil* bezeichnet, wenn ihre Wurzelmenge

$$\text{Roots}\left[P(s, Q)\right] := \left\{ v \in \mathbb{C} \middle| \, p\left(v, \underline{q}\right) = 0, p\left(s, \underline{q}\right) \in P(s, Q) \right\} \tag{114}$$

vollständig in der offenen linken komplexen Halbebene enthalten ist, d.h. wenn

$$\text{Roots}\left[P(s, Q)\right] \subset \mathbb{C}^- \tag{115}$$

gilt.

3.2 Grenzüberschreitungssatz nach Frazer und Duncan

Eine Polynomfamilie $P(s, Q)$ erfülle die im vorhergehenden Abschnitt getroffenen Annahmen. Falls Parametervektoren $\underline{q}_1 \in Q$ und $\underline{q}_2 \in Q$ existieren, so dass das charakteristische Polynom

$$p\left(s, \underline{q}_1\right) = a_0\left(\underline{q}_1\right) + a_1\left(\underline{q}_1\right) \cdot s + a_2\left(\underline{q}_1\right) \cdot s^2 + \ldots + a_n\left(\underline{q}_1\right) \cdot s^n \tag{116}$$

asymptotisch stabil und das Polynom

$$p\left(s, \underline{q}_2\right) = a_0\left(\underline{q}_2\right) + a_1\left(\underline{q}_2\right) \cdot s + a_2\left(\underline{q}_2\right) \cdot s^2 + \ldots + a_n\left(\underline{q}_2\right) \cdot s^n \tag{117}$$

instabil ist, enthält die Wurzelmenge von $P(s,Q)$ mindestens einen Punkt auf der imaginären, nicht negativen $j\omega$–Achse, d.h. es existiert mindestens ein $\omega > 0$, so dass

$$j\omega \in \text{Roots}\left[P(s,Q)\right] \tag{118}$$

gilt.

Eine Polynomfamilie $P(s,Q)$ ist dann und nur dann **robust asymptotisch stabil**, wenn

1. ein asymptotisch stabiles Polynom $p\left(s, \underline{q}\right) \in P(s,Q)$ existiert **und**
2. $j\omega \notin \text{Roots}\left[P(s,Q)\right]$ für alle $\omega \leq 0$ gilt.

3.3 Stabilitätsbedingungen nach Mikhailov und Erweiterungen auf lineare Systeme mit wertebereichsbeschränkten Parameterunsicherheiten

3.3.1 Stabilitätsbedingung nach Mikhailov, Leonhard und Cremer

Ein Polynom

$$p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n \qquad \text{mit} \qquad a_n > 0 \tag{119}$$

und exakt bekannten Parametern a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, ist dann und nur dann asymptotisch stabil, wenn seine Frequenzkennlinie $p\left(j\omega\right)$, $0 \leq \omega < \infty$, in der $\left(\Re\left\{p\left(j\omega\right)\right\}, \Im\left\{p\left(j\omega\right)\right\}\right)$–Ebene die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $p\left(j0\right) = a_0 > 0$ (d.h. die Ortskurve beginnt auf der positiv reellen Achse) **und**
2. für wachsendes ω umschlingt die Ortskurve von $p\left(j\omega\right)$ den Ursprung entgegen des Uhrzeigersinns und die Phase von $p\left(j\omega\right)$ strebt für $\omega \to \infty$ gegen $n\frac{\pi}{2}$.

Für asymptotisch stabile Polynome nimmt die Phase der Mikhailov-Ortskurve streng monoton zu, d.h. es gilt

$$\frac{\partial \arg\left\{p\left(j\omega\right)\right\}}{\partial \omega} > 0 \quad \text{für alle} \quad \omega \ . \tag{120}$$

Die maximale Phasenänderung eines Polynoms beträgt immer

$$\left(n - 2m\right)\frac{\pi}{2} \ . \tag{121}$$

Dabei ist die Differenz $n - m$ die Anzahl der Wurzeln des Polynoms in der linken komplexen Halbebene und m die Anzahl der Wurzeln in der rechten Halbebene.
Somit beträgt die maximale Phase eines Polynoms mit mindestens einem instabilen Eigenwert

$$\left(n - 1\right)\frac{\pi}{2} \ . \tag{122}$$

Durch diese Bedingung erhält man für die Frequenz ω eine obere Schranke ω^+, bis zu der die Mikhailov-Bedingung für Stabilität eines linearen Systems untersucht werden muss. Diese Frequenz ω^+ ergibt sich aus der Phasenbeziehung

$$\arg\left\{p\left(j\omega^+\right)\right\} = \left(n - 1\right)\frac{\pi}{2} \ . \tag{123}$$

Sobald eine Ortskurve diesen Phasenwert erreicht hat, ist sichergestellt, dass das auf Stabilität zu untersuchende System auf jeden Fall asymptotisch stabil ist.

Es ist zu beachten, dass der minimale Abstand einer Mikhailov-Ortskurve zum Ursprung der komplexen Ebene kein *absolutes Maß* für die Stabilitätsreserve eines Polynoms darstellt. Dies liegt daran, dass jedes Polynom $p(s)$ (und damit auch seine Ortskurve) mit einem beliebigen Faktor skaliert werden kann, ohne die Lage der Wurzeln zu ändern.

Aus den obigen Stabilitätsbedingungen nach Mikhailov lässt sich nun eine von Hermite und Biehler angegebene alternative Formulierung der Stabilitätsbedingungen formulieren:
Die Ortskurve eines asymptotisch stabilen Systems muss die Koordinaten-Achsen in der komplexen Ebene immer in der folgenden Reihenfolge schneiden:

- positive reelle Achse (für $\omega = 0$)
- positive imaginäre Achse
- negative reelle Achse
- negative imaginäre Achse
- positive reelle Achse, ..., bis insgesamt genau n Schnittpunkte erreicht sind.

3.3.2 Formulierung der Stabilitätsbedingungen nach Mikhailov für robuste Stabilität

Robuste asymptotische Stabilität einer Polynomfamilie $P(s,Q)$ ist dann und nur dann gegeben, wenn

1. ein asymptotisch stabiles Polynom $p\left(s,\underline{q}\right) \in P(s,Q)$ existiert **und**
2. kein $\underline{q} \in Q$ existiert, so dass die Ortskurve $p\left(j\omega,\underline{q}\right)$ für ein $\omega \geq 0$ den Koordinaten-Ursprung in der $(\Re\{p(j\omega)\}, \Im\{p(j\omega)\})$–Ebene durchläuft.

3.3.3 Beispiel zur Konstruktion der Wurzelmenge und zur Stabilitätsanalyse eines linearen Systems mit Parameterunsicherheiten

Gegeben sei eine lineare Regelstrecke

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \ , \tag{124}$$

welche mittels eines linearen Zustandsreglers

$$u = -\underline{k}^T \underline{x} = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{125}$$

stabilisiert werden soll.
Als Systemmatrix für das geregelte System ergibt sich damit

$$\underline{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \ . \tag{126}$$

Das charakteristische Polynom des Systems lautet

$$\begin{aligned} p(s,\alpha) &= \det\left(s\underline{I} - \underline{A}_R\right) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -\alpha \\ k_1 & a + k_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= s^2 + k_2 s + k_1 \alpha \ . \end{aligned} \tag{127}$$

Dieses Polynom $p(s,\alpha)$ ist dann und nur dann asymptotisch stabil, wenn

$$\begin{aligned} &k_1 = \operatorname{sign}(\alpha) \neq 0 \qquad \text{mit} \qquad \alpha \neq 0 \qquad \text{sowie} \\ &k_2 > 0 \end{aligned} \tag{128}$$

gelten.
Nun werden für $\alpha = \alpha_{nom} = +1$ beide Eigenwerte zu $s_1 = s_2 = -1$ festgelegt. In diesem Fall ergeben sich die Reglerparameter zu $k_1 = 1$ und $k_2 = 2$.

Untersuchung der Veränderung der Lage der Eigenwerte bei Unsicherheit von α

$$\begin{aligned} s_{1/2} &= \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1\alpha}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{1-\alpha} \qquad \text{für} \qquad k_1 = 1 \text{ und } k_2 = 2 \end{aligned} \tag{129}$$

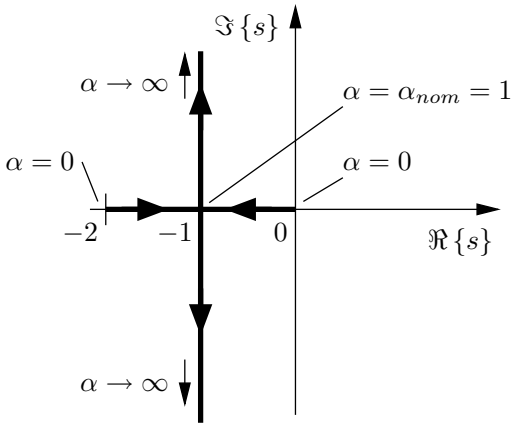


Abbildung 25: Abhängigkeit der Eigenwerte vom Parameter α

Analytische Auswertung der Stabilitätsbedingungen nach Mikhailov
Für die zugehörige Mikhailov-Ortskurve gilt

$$p(j\omega) = -\omega^2 + j\omega k_2 + k_1\alpha \ . \tag{130}$$

Durch eine getrennte Betrachtung von Real- und Imaginärteil von $p(j\omega)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} &\Re\{p(j\omega)\} = k_1\alpha - \omega^2 =: p_R \quad \text{und} \\ &\Im\{p(j\omega)\} = \omega k_2 =: p_I \ . \end{aligned} \tag{131}$$

Es ist zu erkennen, dass die Phase für wachsendes ω streng monoton zunimmt. Der Schnittpunkt der Ortskurve mit der imaginären Achse ergibt sich aus $p_R = 0$ zu $\omega^* = +\sqrt{k_1\alpha}$. Da die Ortskurve für $\alpha k_1 > 0$ auf der positiven reellen Achse startet, ist beim Erreichen einer Phase von $\frac{\pi}{2}$ bei der Frequenz ω^+ asymptotische Stabilität nachgewiesen. Da es sich um ein System 2. Ordnung handelt, sind ω^+ und ω^* hier identisch. Für die gegebenen Reglerparameter $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ ist das System für alle $\alpha > 0$ asymptotisch stabil.

Aus p_R und p_I ergibt sich, dass die Ortskurven dieses Systems Parabeln

$$p_R = k_1\alpha - \frac{p_I^2}{k_2^2} \tag{132}$$

mit dem Scheitel $p_I = 0$ und $p_R = k_1\alpha$ darstellen und für $k_1\alpha > 0$ nie einen Durchlauf durch den Koordinatenursprung besitzen.

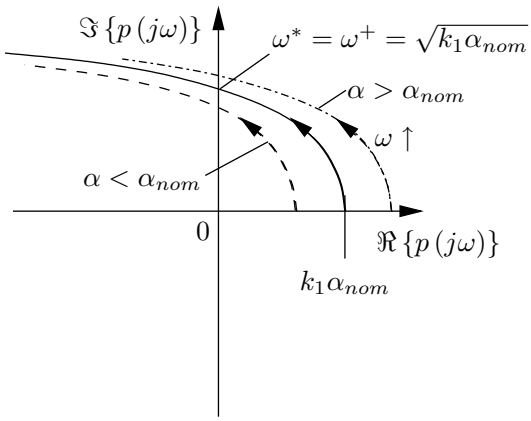


Abbildung 26: Mikhailov-Ortskurve für unterschiedliche Parameterwerte

3.4 Nullstellenausschlusssatz

Für die folgenden Betrachtungen wird die für jede Frequenz $\omega \geq 0$ definierte **Wertemenge**

$$\mathcal{P}(j\omega, Q) := \left\{ p(j\omega) \in \mathbb{C} | \, \underline{q} \in Q \right\} \tag{133}$$

für jedes Polynom $p\left(s, \underline{q}\right)$ aus der Polynomfamilie $P(s, Q)$ betrachtet.
Eine Entscheidung über robuste asymptotische Stabilität beziehungsweise über Instabilität einer Polynomfamilie kann nun mit Hilfe des folgenden Nullstellenausschlusssatzes erfolgen:

Eine Polynomfamilie $P(s, Q)$ ist dann und nur dann **robust asymptotisch stabil**, wenn

1. ein asymptotisch stabiles Polynom $p\left(s, \underline{q}\right) \in P(s, Q)$ existiert **und**
2. $0 \notin \mathcal{P}(j\omega, Q)$ für alle $\omega \geq 0$ gilt.

3.5 Der Satz von Kharitonov

Eine Polynomfamilie

$$P(s, \mathcal{A}) := \left\{ p(s, \underline{a}) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n | \, \underline{a} \in \mathcal{A} \right\}, a_n > 0 \tag{134}$$

mit

$$\underline{a} := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \end{bmatrix}^T \quad , \qquad a_i \in \left[a_i^- \; ; \; a_i^+ \right] \tag{135}$$

ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die vier Polynome

$$\begin{aligned} p^{+-}(s) &= a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5 + \ldots \\ p^{++}(s) &= a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5 + \ldots \\ p^{-+}(s) &= a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + a_5^+ s^5 + \ldots \\ p^{--}(s) &= a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + a_5^- s^5 + \ldots \end{aligned} \tag{136}$$

asymptotisch stabil sind. Diese vier Polynome werden auch als Kharitonov-Polynome bezeichnet.

Für eine feste Frequenz $\omega = \omega^* \geq 0$ lässt sich die Wertemenge $\mathcal{P}(j\omega^*, \mathcal{A})$ durch ein von den vier Kharitonov-Polynomen beschriebenes Rechteck mit den Eckpunkten $p^{+-}(j\omega^*)$, $p^{++}(j\omega^*)$, $p^{-+}(j\omega^*)$

und $p^{--}(j\omega^*)$ angeben. Diese Eigenschaft lässt sich nachweisen, indem obere und untere Schranken der Wertebereiche von Real- und Imaginärteil von $p(j\omega^*)$ getrennt voneinander berechnet werden:

$$\begin{aligned}\Re\{p(j\omega)\} &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \ldots \\ \Im\{p(j\omega)\} &= \omega\left(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - a_7\omega^6 + \ldots\right)\end{aligned} \tag{137}$$

Für die Wertebereiche gilt dann:

$$\begin{array}{rcccl} a_0^- - a_2^+\omega^2 + a_4^-\omega^4 - \ldots & \leq & \Re\{p(j\omega,\underline{a})\} & \leq & a_0^+ - a_2^-\omega^2 + a_4^+\omega^4 - \ldots \\ \omega\left(a_1^- - a_3^+\omega^2 + a_5^-\omega^4 - \ldots\right) & \leq & \Im\{p(j\omega,\underline{a})\} & \leq & \omega\left(a_1^+ - a_3^-\omega^2 + a_5^+\omega^4 - \ldots\right) \quad . \end{array} \tag{138}$$

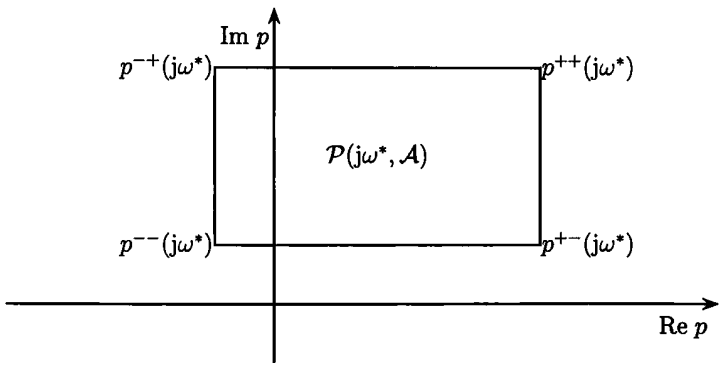


Abbildung 27: Darstellung der Wertemenge $\mathcal{P}(j\omega^*, \mathcal{A})$

Da der Wertebereich des Realteils nur von Koeffizienten mit geraden Indizes und der Imaginärteil nur von Koeffizienten mit ungeraden Indizes abhängt, ergibt sich der komplette Wertebereich durch alle vier möglichen Kombinationen der obigen Grenzen. Diese entsprechen genau einer Auswertung der vier Kharitonov-Polynome für $s = j\omega$.

Unter der Voraussetzung, dass die vier Kharitonov-Polynome asymptotisch stabil sind, beginnen sie immer auf der positiven reellen Achse. Zudem umschlingen sie den Ursprung immer entgegen des Uhrzeigersinns bis die Phase den Wert $n\frac{\pi}{2}$ annimmt. Da die Kanten der Wertemengen auf Grund der obigen Eigenschaft immer parallel zu den Koordinatenachsen sind und sämtliche Eckpolynome stabil sind, kann der Koordinatenursprung nie auf einer der Kanten der Wertemenge $\mathcal{P}$ liegen. Daher sind auch sämtliche Mikhailov-Ortskurven der Polynomfamilie $P(s, \mathcal{A})$ asymptotisch stabil, d.h. es gibt keinen Parameterwert $\underline{a} \in \mathcal{A}$, für den der Ursprung auf einer der möglichen Ortskurven liegt.

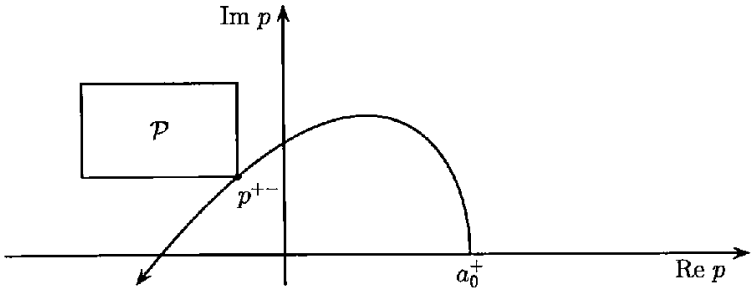
Für $n = 1$ und $n = 2$ sind die Bedingungen $a_1^- > 0$ und $a_2^- > 0$, notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingungen. Für $n = 3, 4, 5$ lässt sich das Stabilitätskriterium wie folgt vereinfachen, siehe dazu auch die folgende Abbildung 28:

$$n_x = 3: \quad p^{+-}(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3$$

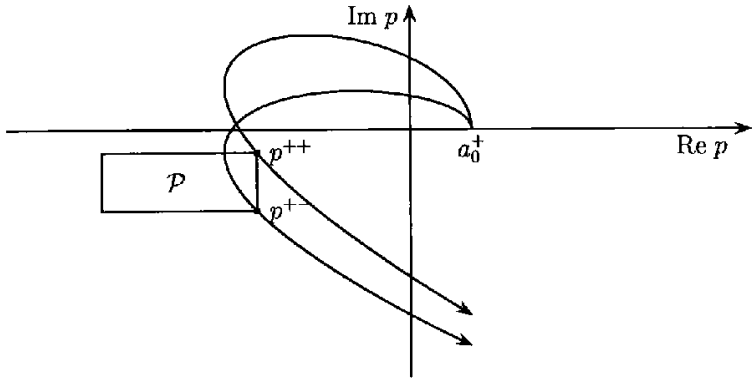
$$\begin{aligned} n_x = 4: \quad & p^{+-}(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 \qquad \text{und} \\ & p^{++}(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_x = 5: \quad & p^{+-}(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5 \qquad \text{und} \\ & p^{++}(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5 \qquad \text{und} \\ & p^{-+}(s) = a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + a_5^+ s^5 \quad . \end{aligned}$$

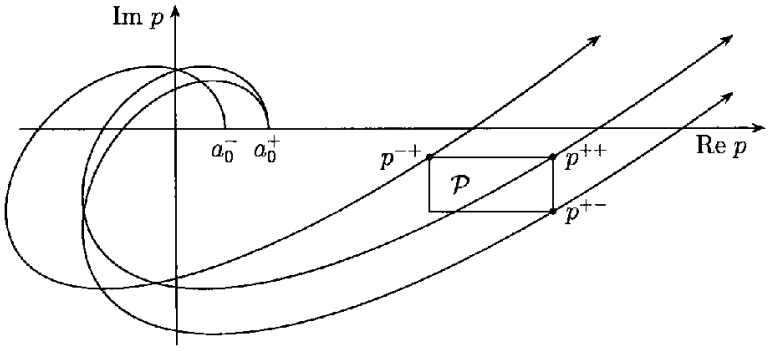
Bemerkung: Im Fall, dass die Polynomkoeffizienten a_i von mindestens einem gemeinsamen Parameter abhängen, liefert dieses Kriterium nur noch eine hinreichende Stabilitätsaussage. Die oben berechnete Wertemenge schließt neben der wahren Ortskurve weitere Punkte mit ein, wodurch der Fall auftreten kann, dass der Koordinatenursprung innerhalb dieser Wertebereichseinschließung liegt aber die Polynomfamilie trotzdem asymptotisch stabil ist. In diesem Fall lassen sich weiter gehende Stabilitätsaussagen beispielsweise direkt über das Hurwitz- oder Mikhailov-Kriterium gewinnen.



Bei Polynomen mit Grad drei muß nur $p^{+-}(s)$ geprüft werden



Bei Polynomen mit Grad vier müssen $p^{+-}(s)$ und $p^{++}(s)$ geprüft werden



Bei Polynomen mit Grad fünf müssen $p^{+-}(s), p^{++}(s)$ und $p^{-+}(s)$ geprüft werden

Abbildung 28: Vereinfachung des Stabilitätskriteriums nach Kharitonov für $n = 3, 4, 5$

3.6 Γ–Stabilität

Stabilitätsbereiche, die einen Teilbereich der linken komplexen Halbebene abdecken, werden als Γ–Stabilitätsbereiche bezeichnet. Sie lassen sich durch ihre Berandung $\partial\Gamma$ darstellen. In parametrisierter Form gilt

$$\partial\Gamma := \left\{ s |\, s = \sigma(\alpha) + j\omega(\alpha), \alpha \in \left[\alpha^- \,;\, \alpha^+\right] \right\} \quad . \tag{139}$$

Durch Verallgemeinerung des Grenzüberschreitungssatzes von Frazer und Duncan auf allgemeine Polgebiete ergibt sich folgender Satz über robuste Γ–Stabilität.

Gegeben sei eine Polynomfamilie $P(s,Q)$. Diese Polynomfamilie ist genau dann robust Γ–stabil, wenn

1. ein Γ–stabiles Polynom $p(s) \in P(s,Q)$ existiert **und**
2. $\sigma(\alpha) + j\omega(\alpha) \notin \text{Roots}\left[P(s,Q)\right]$ für alle $\alpha \in [\alpha^- \,;\, \alpha^+]$ gilt.

Beispiele für Γ–Stabilitätsbereiche sind:

- Geraden konstanter Dämpfung D: Es gilt die Parametrisierung

$$s = \sigma + j\sigma\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}, \sigma \leq 0 \quad . \tag{140}$$

  Speziell für $D = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ gilt $s = \sigma + j\sigma$ mit der reellen Grenze $s = 0$.

- Wurzeln auf einem Segment auf der negativen reellen Achse sind durch

$$s = \sigma \;, \quad \sigma \in [-b \,;\, -a] \;, \quad b > a > 0 \tag{141}$$

  charakterisiert. Hier existieren zwei reelle Grenzen $\sigma = -a$ und $\sigma = -b$.

- Linker Ast der Hyperbel

$$\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{b}\right)^2 = 1 \quad . \tag{142}$$

  Für Eigenwerte links dieser Hyperbel sind eine Mindestdämpfung $D = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und ein maximaler Realteil der Eigenwerte von $\sigma = -a$ garantiert. Die reelle Grenze ist in diesem Fall $\sigma = -a$.

- Γ–Stabilitätsbereiche lassen sich aus mehreren unterschiedlichen parametrisierten Teilberandungen zusammensetzen. Ein Beispiel hierfür ist die in der Vorlesung angesprochene Bandbreitenbegrenzung mittels einer Kreislinie mit Radius R gemäß

$$s = \sigma + j\sqrt{R^2 - \sigma^2} \;, \quad \sigma \in [-R \,;\, R] \quad . \tag{143}$$

3.7 Parameterraumverfahren nach Ackermann und Kaesbauer (1991)

Um die Menge aller Parameter $Q_{\Gamma\text{-stabil}}$ zu ermitteln, müssen die Γ–Stabilitätsbereiche in den Parameterraum übertragen werden. Sämtliche Parameterwerte in dem abgebildeten Bereich sind mit den Stabilitätsanforderungen konsistent. Für beliebige System- und Reglerparameter aus der Menge $Q_{\Gamma\text{-stabil}}$ ergeben sich nur Wurzeln der charakteristischen Gleichung, welche innerhalb des Bereichs Γ liegen.

3.7.1 Abbildung der reellen Grenze (Real Root Boundary RRB)

Es erfolgt eine Abbildung sämtlicher Schnittpunkte der Berandung $\partial\Gamma$ mit der reellen Achse in den Parameterraum. Diese Schnittpunkt $s = \sigma_0$ werden mittels

$$p\left(\sigma_0, \underline{q}\right) = 0 \tag{144}$$

abgebildet.

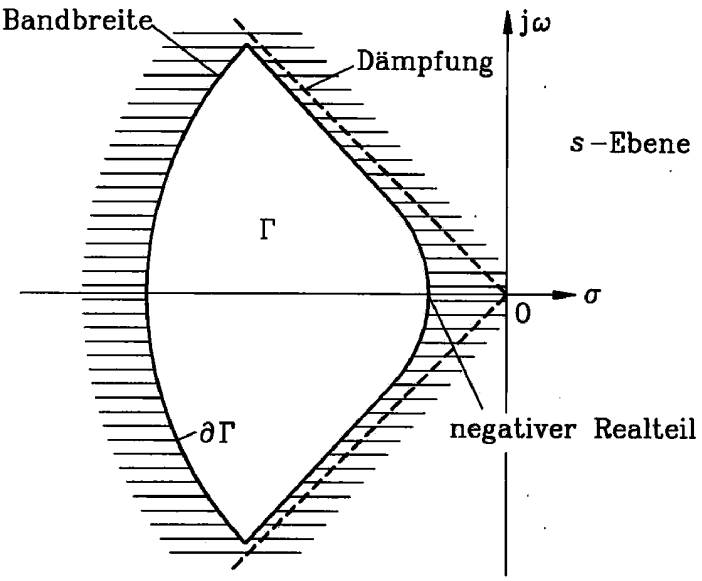


Abbildung 29: Γ–Stabilitätsbereich in der s–Ebene

3.7.2 Abbildung der Grenzen im Unendlichen (Infinite Root Boundary IRB)

Es erfolgt eine Abbildung der Grenzen

$$\lim_{\alpha\to\infty} p\Big(\sigma(\alpha)+j\omega(\alpha),\underline{q}\Big)=0\ . \tag{145}$$

Hierbei stellt $\sigma(\alpha)+j\omega(\alpha)$ die Berandung $\partial\Gamma$ des Γ–Stabilitätsbereiche dar.

3.7.3 Abbildung der komplexen Grenzen (Complex Root Boundary CRB)

Diese Grenzen des Wertebereichs

$$Q_{CRB}(\alpha):=\Big\{\underline{q}\big|\,p\Big(\sigma(\alpha)+j\omega(\alpha),\underline{q}\Big)=0,\alpha\in\left[\alpha^{-}\ ;\ \alpha^{+}\right]\Big\} \tag{146}$$

lassen sich mit Hilfe des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} d_0(\alpha) & d_1(\alpha) & d_2(\alpha) & \dots & d_n(\alpha)\\ 0 & d_0(\alpha) & d_1(\alpha) & \dots & d_{n-1}(\alpha)\end{bmatrix}\cdot\underline{a}\left(\underline{q}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{147}$$

bestimmen. Hierbei ist $\underline{a}\left(\underline{q}\right)$ der von unsicheren Parametern abhängige Vektor der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $p\left(s,\underline{q}\right)$ mit

$$p\left(s,\underline{q}\right)=\begin{bmatrix}1 & s & \dots & s^n\end{bmatrix}\cdot\underline{a}\left(\underline{q}\right)\ . \tag{148}$$

Die Matrixeinträge $d_i(\alpha)$ lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} d_0(\alpha)&=1\\ d_1(\alpha)&=2\sigma(\alpha)\\ d_{i+1}(\alpha)&=2\sigma(\alpha)\cdot d_i(\alpha)-\left(\sigma^2(\alpha)+\omega^2(\alpha)\right)\cdot d_{i-1}(\alpha)\ . \end{aligned} \tag{149}$$

Beweisskizze:
Für den Fall, dass auf der Berandung $\partial\Gamma$ des zur reellen Achse symmetrischen Γ–Stabilitätsbereichs ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar $s = \sigma(\alpha) \pm j\omega(\alpha)$ liegt, lässt sich die charakteristische Gleichung gemäß

$$\begin{aligned} p(s,\underline{q}) &= \left(\sigma^2(\alpha) + \omega^2(\alpha) - 2\sigma(\alpha)\cdot s + s^2\right)\cdot r(s,\underline{q}) \\ &= \left(\sigma^2(\alpha) + \omega^2(\alpha) - 2\sigma(\alpha)\cdot s + s^2\right)\cdot \begin{bmatrix}1 & s & \dots & s^{n-2}\end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-2}\end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{150}$$

faktorisieren.
Nach einem Koeffizientenvergleich ergeben sich die ursprünglichen Polynomkoeffizienten zu

$$\underline{a}(\underline{q}) = \begin{bmatrix} 1 & -2\sigma & \sigma^2+\omega^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sigma & \sigma^2+\omega^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\sigma & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2\sigma & \sigma^2+\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-2}\end{bmatrix} . \tag{151}$$

Diese Beziehung wird nun nach

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-2}\end{bmatrix} = \underline{\hat{D}}\cdot\underline{a}(\underline{q}) \tag{152}$$

aufgelöst. Aus den ersten zwei Zeilen dieses Gleichungssystems folgt nun

$$\begin{bmatrix} d_0(\alpha) & d_1(\alpha) & d_2(\alpha) & \dots & d_n(\alpha) \\ 0 & d_0(\alpha) & d_1(\alpha) & \dots & d_{n-1}(\alpha)\end{bmatrix}\cdot\underline{a}(\underline{q}) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} . \tag{153}$$

Durch einen weiteren Koeffizientenvergleich lassen sich die in der Gleichung (149) angegebenen Ausdrücke für alle $d_i(\alpha)$ bestimmen. ■

4 Synthese nichtlinearer Regelungen im Zustandsraum

4.1 Entwurf von Regelungen für nichtlineare Systeme mittels exakter Ein-/ Ausgangslinearisierung

4.1.1 Eingrößensysteme

Herkömmliche Linearisierungsverfahren für nichtlineare Systeme sind nur in der Lage, das dynamische Systemverhalten in der Nähe eines ausgewählten Arbeitspunktes zu approximieren. Im Gegensatz zu dieser Approximation des Kleinsignalverhaltens stellt das in diesem Abschnitt hergeleitete Verfahren der *exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung* eine Linearisierung des Großsignalverhaltens dar. Dieses Verfahren erlaubt damit eine Übertragung von Reglerentwurfsverfahren, die für lineare Systeme entwickelt wurden, auf eine bestimmte Klasse nichtlinearer Systeme. Da bei der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung eines dynamischen Systems eine Zustandsrückführung zur Linearisierung verwendet wird, bezeichnet man dieses Verfahren auch als *state feedback linearization*.

4.1.2 Betrachtete Systemklasse

Für den Reglerentwurf mittels der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung sollen eingangsaffine Systeme (nichtlinear analytische Systeme) betrachtet werden. Diese werden im MIMO-Fall durch die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{f}(\underline{x}(t)) + \underline{G}(\underline{x}(t)) \cdot \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{h}(\underline{x}(t)) \end{aligned} \tag{154}$$

beschrieben. Im SISO-Fall gilt sinngemäß

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{f}(\underline{x}(t)) + \underline{g}(\underline{x}(t)) \cdot u(t) \\ y(t) &= h(\underline{x}(t)) \ . \end{aligned} \tag{155}$$

Die Ausgangsgleichungen $h(\underline{x}(t))$ beziehungsweise $\underline{h}(\underline{x}(t))$ sollen dabei im Folgenden nicht explizit von der Steuerung $u(t)$ beziehungsweise $\underline{u}(t)$ abhängen.
Es wird angenommen, dass das betrachtete Systemmodell folgende Eigenschaften erfüllt:

- $\underline{f}(\underline{x}(t))$, $\underline{g}(\underline{x}(t))$ und $h(\underline{x}(t))$ seien hinreichend oft stetig differenzierbare Funktionen.
- Es gelte $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$, d.h. für $u = 0$ ist $\underline{x}_\infty = \underline{0}$ eine Ruhelage des Systems.
- $\underline{g}\,(\underline{x}_\infty) \neq \underline{0}$, damit Steuerbarkeit des nichtlinearen Systems gewährleistet ist.

4.1.3 Ziele der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung

Das Reglerentwurfsverfahren der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung soll sowohl

- die exakte Kompensation von Nichtlinearitäten, welche im mathematischen Systemmodell beschrieben sind,
- die Vorgabe einer Wunschdynamik als auch
- die Vorgabe eines gewünschten Führungsverhaltens

ermöglichen.
Unter Berücksichtigung eines geeigneten Regelungsgesetzes $u\,(\underline{x}(t))$ beziehungsweise $\underline{u}\,(\underline{x}(t))$ ergibt sich dann die in Abbildung 30 angegebene Systemdarstellung.

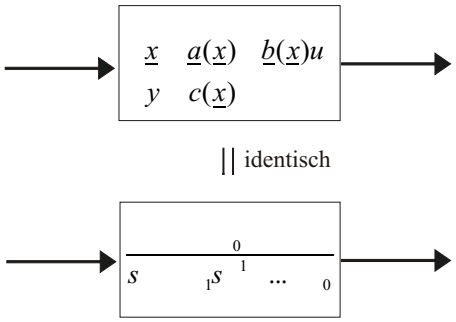


Abbildung 30: Ein-/ Ausgangslinearisierung eines nichtlinear analytischen Systems

4.1.4 Verfahren der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung

1. Differenziere $y(t) = h(\underline{x}(t))$ nach der Zeit t. Ersetze dabei $\dot{\underline{x}}$ durch das Zustandsdifferentialgleichungssystem und setze das Differenzieren so lange fort, bis die rechte Seite erstmals explizit von der Stellgröße u abhängt.

$$\begin{aligned} y &= h(\underline{x}) \\ \dot{y} &= \left(\frac{\partial h(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \dot{\underline{x}} = \underbrace{\left(\frac{\partial h(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \underline{f}(\underline{x})}_{L_f h(\underline{x})} + \underbrace{\left(\frac{\partial h(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \underline{g}(\underline{x})}_{L_g h(\underline{x})=0} \cdot u \\ &= L_f h(\underline{x}) \\ \ddot{y} &= L_f^2 h(\underline{x}) \\ &\vdots \\ y^{(\delta)} &= L_f^\delta h(\underline{x}) \quad + \underbrace{L_g L_f^{\delta-1} h(\underline{x})}_{\neq 0 \text{ in einer Umgebung um } \underline{x}_\infty} \cdot u \\ &= b(\underline{x}) + a(\underline{x}) \cdot u \end{aligned} \tag{156}$$

Anmerkungen:

- $L_f h(\underline{x})$ bezeichnet die Lie-Ableitung von $h(\underline{x})$ entlang eines Vektorfeldes $\underline{f}(\underline{x})$. Dabei gilt für die Berechnung der Lie-Ableitung die Rekursionsformel

$$L_f^i h(\underline{x}) = L_f\left(L_f^{i-1} h(\underline{x})\right) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \ldots \ . \tag{157}$$

- $L_g L_f^{\delta-1} h(\underline{x}) \neq 0$ bedeutet, dass das nichtlineare System einen relativen Grad δ besitzt. Bei LTI-Systemen entspricht δ dem Polüberschuss der Übertragungsfunktion, d.h. $\delta = n - m \geq 0$. Der relative Grad δ wird auch als Differenzordnung bezeichnet.
- Physikalisch entspricht die Differenzordnung δ derjenigen Ordnung der Ableitung der Ausgangsgröße y, auf welche die Stellgröße u erstmals direkt einwirkt.
- Obige Systemdarstellung wird oft auch als direkte *Systembeschreibung nach Freund* bezeichnet.

2. Bilde das exakt linearisierende Zustandsregelgesetz

$$u = (-b(\underline{x}) + v) \cdot a^{-1}(\underline{x}) \ . \tag{158}$$

Dabei ist v eine neue Steuergröße. Die Bedingung $a(\underline{x}) \neq 0$ stellt die Existenz des linearisierenden Zustandsregelgesetzes sicher.

3. Durch Einsetzen des linearisierenden Zustandsregelgesetzes in die direkte Systembeschreibung nach Freund ergibt sich als Ein-/ Ausgangsdarstellung des geregelten Gesamtsystems ein Integrator der Ordnung $\delta \leq n = \dim(\underline{x})$.

   Anmerkungen:

   - Bei nichtlinearen Systemen mit $\delta < n$ weist das linearisierte System eine im Ein-/ Ausgangsverhalten *nicht beobachtbare Nulldynamik* (= interne Dynamik) der Ordnung $n - \delta$ auf.
   - Für die Realisierung des Regelgesetzes muss diese interne Dynamik asymptotisch stabil sein. Ein Nachweis der asymptotischen Stabilität lässt sich über die direkte Methode von Ljapunow führen.
   - Lineare Systeme mit asymptotisch stabiler Nulldynamik heißen *minimalphasig*, d.h. alle Nullstellen liegen in der linken s–Halbebene.

4. Die exakt linearisierte Strecke kann nun mit neuen Zustandskoordinaten $\underline{z} \in \mathbb{R}^{\delta}$ in Regelungsnormalform (SNF 2) dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \underline{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \underline{z} \end{aligned} \tag{159}$$

5. Für den neu eingeführten Zustandsvektor $\underline{z}$ gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} y: &\quad z_1 = h(\underline{x}) \\ \dot{y}: &\quad z_2 = L_f h(\underline{x}) \\ &\vdots \\ y^{(\delta-1)}: &\quad z_\delta = L_f^{\delta-1} h(\underline{x}) \end{aligned} \tag{160}$$

4.1.5 Beispiel zur Berechnung der Differenzordnung δ

Gegeben sei das Zustandsgleichungssystem

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x}) \cdot u \tag{161}$$

mit

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \underline{g}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} x_2 \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{162}$$

Die Ausgangsgleichung des Systems lautet

$$y = h(\underline{x}) = 2x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 . \tag{163}$$

Nun soll die Differenzordnung dieses Systems sowie die *direkte Systembeschreibung nach Freund* bestimmt werden.
Mit $\left(\frac{\partial h(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [2 \;\; x_2]$ ergibt sich

$$L_f h(\underline{x}) = [2 \;\; x_2] \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})} = 2x_1 x_2 + x_1 x_2 = 3x_1 x_2 \tag{164}$$

und

$$L_g h(\underline{x}) = [2 \;\; x_2] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \;\; . \tag{165}$$

Damit ist $\dot{y} = L_f h(\underline{x})$ und somit nicht von u abhängig. Die Fortsetzung der Differentiation liefert

$$\ddot{y} = \left(\frac{\partial L_f h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \dot{x} = L_f^2 h(\underline{x}) + \left(\frac{\partial L_f h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \underline{g}(\underline{x}) \cdot u \tag{166}$$

mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L_f h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial L_f h}{\partial x_1} & \frac{\partial L_f h}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [3x_1 \quad 3x_2] \\ \Longrightarrow L_f^2 h(\underline{x}) &= [3x_2 \quad 3x_1] \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = 3x_1 x_2^2 + 3x_1^2 \end{aligned} \tag{167}$$

und

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L_f h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \underline{g}(\underline{x}) &= [3x_2 \quad 3x_1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{3}{2}x_2^2 + 3x_1 \neq 0 \quad \text{für} \quad x_1, x_2 \neq 0 \;\; . \end{aligned} \tag{168}$$

Somit beträgt die Differenzordnung des Systems $\delta = n = 2$.
Es gilt

$$\ddot{y} = L_f^2 h(\underline{x}) + \left(\frac{\partial L_f h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \underline{g}(\underline{x}) \cdot u = 3x_1 x_2^2 + 3x_1^2 + \left(-\frac{3}{2}x_2^2 + 3x_1 \right) \cdot u \;\; . \tag{169}$$

4.1.6 Beispiel zum Reglerentwurf mittels der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung

Nun soll ein Regler für das Zustandsgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{170}$$

entworfen werden. Betrachtet wird im Folgenden die Ruhelage $\underline{x}_\infty = \underline{0}$ und der Bereich $-\pi \leq x_1 \leq +\pi$. Nach dreimaliger zeitlicher Differentiation der Ausgangsgleichung erhält man

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -\sin x_1 + x_3 \\ \dddot{y} &= -\dot{x}_1 \cdot \cos x_1 + \dot{x}_3 = -x_2 \cdot \cos x_1 + u \;\; . \end{aligned} \tag{171}$$

Da erst die letzte Gleichung explizit von u abhängt, ergibt sich der Differenzgrad $\delta = n = 3$. Wählt man die Zustandsrückführung

$$u = +x_2 \cdot \cos x_1 + v \;\; , \tag{172}$$

ergibt sich als neue Differentialgleichung der Regelstrecke der Ausdruck

$$\dddot{y} = v \;\; . \tag{173}$$

Damit ist

$$v = K_R \cdot \left(w' - \underline{k}^T \underline{z} \right) \tag{174}$$

ein einfaches Zustandsregelgesetz für das exakt linearisierte System. Für die Realisierung dieses Zustandsreglers werden die folgenden nichtlinearen Zustandstransformationen benötigt

$$\begin{aligned} y: &\quad z_1 = x_1 \\ \dot{y}: &\quad z_2 = x_2 \\ \ddot{y}: &\quad z_3 = x_3 - \sin x_1 \ , \end{aligned} \tag{175}$$

womit sich das nichtlineare Zustandsregelgesetz zu

$$v = K_R \cdot \left(w' - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 \cdot (x_3 - \sin x_1) \right) \quad \text{mit} \quad K_R = 1 \tag{176}$$

angeben lässt.

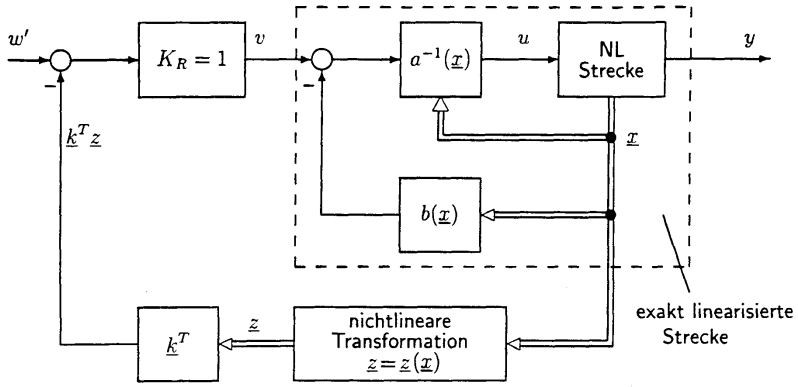


Abbildung 31: Blockschaltbild für den Reglerentwurf mittels exakter Ein-/ Ausgangslinearisierung

4.1.7 Weitere Betrachtungen zum Reglerentwurf mittels exakter Ein-/ Ausgangslinearisierung für SISO-Systeme

Der Ausgangspunkt für den Reglerentwurf mittels exakter Ein-/ Ausgangslinearisierung ist immer die *direkte Systembeschreibung nach Freund*. Diese ergibt sich für ein System mit Differenzordnung δ zu

$$\begin{aligned} y &= h(\underline{x}) \\ \dot{y} &= L_f h(\underline{x}) \\ &\vdots \\ y^{(\delta-1)} &= L_f^{\delta-1} h(\underline{x}) \\ y^{(\delta)} &= L_f^{\delta} h(\underline{x}) + \left(\frac{\partial L_f^{\delta-1} h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \underline{g}(\underline{x}) \cdot u \ . \end{aligned} \tag{177}$$

Berücksichtigung von Forderungen an die Dynamik des geschlossenen Regelkreises (Wunschdynamik): Die Übertragungsfunktion des geregelten Systems ergibt sich zu

$$Y(s) = \frac{\alpha_0}{s^\delta + \alpha_{\delta-1} s^{\delta-1} + ... + \alpha_1 s + \alpha_0} \cdot W(s) \ , \tag{178}$$

was einem linearen zeitinvarianten PT_δ–System entspricht. Durch Auswertung der Übertragungsfunktion für $s = 0$ ergibt sich $Y(0) = W(0)$, womit im Fall einer asymptotisch stabilen Reglerauslegung stationäre Genauigkeit gewährleistet ist. Eine Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

$$Y(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y^{(\delta)}(t) = -\alpha_{\delta-1} y^{(\delta-1)} + ... - \alpha_1 \dot{y} - \alpha_0 y + \alpha_0 w \ . \tag{179}$$

Wird nun die direkte Systembeschreibung eingesetzt, ergibt sich die Differentialgleichung

$$\underbrace{L_f^\delta h(\underline{x}) + \underbrace{\left(\frac{\partial L_f^{\delta-1} h(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \underline{g}(\underline{x})}_{\text{invertierbar falls} \neq 0} \cdot u}_{=y^{(\delta)}} = -\alpha_{\delta-1} \underbrace{L_f^{\delta-1} h(\underline{x})}_{y^{(\delta-1)}} - \ldots - \alpha_1 \underbrace{L_f h(\underline{x})}_{\dot{y}} - \alpha_0 \underbrace{h(\underline{x})}_{y} + \alpha_0 w \ . \tag{180}$$

Durch Auflösen nach u ergibt sich hieraus das als Zustandsrückführung zu verwendende nichtlineare Regelgesetz $u = u(\underline{x}, w)$

$$u = \frac{1}{\left(\frac{\partial L_f^{\delta-1} h(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \underline{g}(\underline{x})} \cdot \Bigg[\underbrace{-L_f^\delta h(\underline{x})}_{\substack{\text{Kompensation der} \\ \text{Nichtlinearität}}} \tag{181}$$

$$\underbrace{-\alpha_{\delta-1} L_f^{\delta-1} h(\underline{x}) - ... - \alpha_1 L_f h(\underline{x}) - \alpha_0 h(\underline{x})}_{\substack{\text{Vorgabe der Wunschdynamik} \\ \text{Hurwitz-Polynom}}} + \underbrace{\alpha_0 w}_{\substack{\text{Vorgabe des} \\ \text{Führungsverhaltens}}} \Bigg] \ .$$

Durch den Entwurf eines Vorfilters (Vorsteuerung) lässt sich eine Führungsgrößenaufschaltung realisieren, die es erlaubt, ein gewünschtes Führungsverhalten sicherzustellen. Durch obiges nichtlineares Regelgesetz ergibt sich bei Anwendung auf die nichtlineare Regelstrecke immer ein Gesamtsystem, das zu einem linearen zeitinvarianten PT_δ–System äquivalent ist.

4.2 Stabilität des nichtlinearen Regelkreises

Für die Differenzordnung gilt stets $\delta \leq n$. Im Hinblick auf die Stabilität des Gesamtsystems müssen zwei Fälle unterschieden werden:

- Fall 1:
  Die Strecke hat die maximale Differenzordnung $\delta = n$. Damit lassen sich **alle Eigenwerte** des linearisierten Systems verschieben, womit bei korrekter Polvorgabe jede Ruhelage asymptotisch stabil ist.

- Fall 2:
  Die Strecke hat nicht die maximale Differenzordnung, d.h. es gilt $\delta < n$. Somit lassen sich **nur** δ Eigenwerte vorgeben. Das verbleibende Teilsystem der Ordnung $n - \delta$ kann damit zur Instabilität des Gesamtsystems führen. Dieser Fall wird als eine *instabile interne Dynamik* bezeichnet.

Nur wenn die interne Dynamik asymptotisch stabil ist, ist das Verfahren der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung anwendbar. Zum Stabilitätsnachweis lässt sich beispielsweise die direkte Methode nach Ljapunow verwenden.

4.3 Untersuchung der interne Dynamik (Nulldynamik) für $\delta < n$

- Wenn für die Differenzordnung $\delta = n$ gilt, entspricht die Ein-/Ausgangslinearisierung einer Zustandslinearisierung, für welche n neue Zustandsgrößen bestimmt werden, so dass das ursprünglich nichtlineare System exakt — ohne Vernachlässigungen oder Vereinfachungen — durch ein lineares Zustandsdifferentialgleichungssystem beschrieben werden kann. Es ergibt sich, wie bereits dargestellt, nach der Kompensation der Nichtlinearität eine Kette aus n Integratoren.
- Wenn $\delta < n$ gilt, zerfällt die Systemdynamik durch die Ein-/ Ausgangslinearisierung in einen externen Teil (lineares Teilsystem) sowie einen internen Teil (nichtbeobachtbare Dynamik).

Systemdarstellung als Ein-/ Ausgangs-Normalform nach Byrnes/ Isidori

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{\delta-1} \\ \xi_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & & -\alpha_{\delta-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{\delta-1} \\ \xi_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} w \tag{182}$$

Beispiel

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x}) \cdot u \tag{183}$$
$$y = h(\underline{x}) = x_3$$

Die zeitliche Differentiation des Ausgangs ergibt

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_3 = x_2 \\ \ddot{y} &= \ddot{x}_3 = \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u \ . \end{aligned} \tag{184}$$

Damit beträgt die Differenzordnung $\delta = 2 < n = 3$. Die Systemdarstellung in der Byrnes/ Isidori-Normalform lautet damit

$$\begin{aligned} \xi_1 &= h(\underline{x}) = x_3 \\ \xi_2 &= L_f h(\underline{x}) = x_2 \ . \end{aligned} \tag{185}$$

Für die interne Dynamik gilt

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \underbrace{g_1}_{e^{x_2}} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \underbrace{g_2}_{1} + \frac{\partial \eta}{\partial x_3} \underbrace{g_3}_{0} = 0 \ . \tag{186}$$

Diese partielle Differentialgleichung für η besitzt die von x_3 unabhängige Lösung

$$\begin{aligned} \eta(\underline{x}) &= 1 + x_1 - e^{x_2} \\ \dot{\eta}(\underline{x}) &= \dot{x}_1 - e^{x_2}\dot{x}_2 = -x_1 + e^{x_2}u - e^{x_2}(x_1 x_2 + u) \ . \end{aligned} \tag{187}$$

Aus dem Zustandsvektor

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta \end{bmatrix} \tag{188}$$

und der regulären Jacobimatrix

$$\frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -e^{x_2} & 0 \end{bmatrix} \tag{189}$$

ergibt sich eine eindeutige inverse Transformationsvorschrift für alle $\underline{x}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \eta - 1 + e^{\xi_2} \\ x_2 &= \xi_2 \\ x_3 &= \xi_1 \ . \end{aligned} \tag{190}$$

Damit lautet die Systemdarstellung in Byrnes/ Isidori-Normalform

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= (\eta - 1 + e^{\xi_2})\xi_2 + u \end{aligned} \tag{191}$$

mit

$$u = \frac{1}{1} \left[\underbrace{-(\eta - 1 + e^{\xi_2})\xi_2}_{\text{Kompensation}} \quad \underbrace{-\alpha_0\xi_1 - \alpha_1\xi_2}_{\text{Solldynamik}} \quad \underbrace{+\alpha_0 w}_{\substack{\text{stationäre} \\ \text{Genauigkeit}}} \right] \ . \tag{192}$$

Für die Nulldynamik folgt nun mit $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ (Untersuchung der asymptotischen Stabilität im Kleinen)

$$\dot{\eta} = (1 - \eta - e^{\xi_2})(1 + \xi_2 e^{\xi_2}) = -\eta \ . \tag{193}$$

Diese Nulldynamik ist damit für das zugehörige Eingangssignal $u = u(\underline{\xi} = 0) = 0$ asymptotisch stabil.

4.4 Entwurf von Regelungen für nichtlineare Mehrgrößensysteme durch Kompensation und Entkopplung

Betrachtet wird nun das MIMO-System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{G}(\underline{x}) \cdot \underline{u} \qquad \text{mit} \qquad \underline{u} \in \mathbb{R}^p \ , \tag{194}$$

wobei angenommen wird, dass die Anzahl der Ausgangsgrößen der Stellgrößenanzahl entspricht. Für die Ausgangsgleichung gelte

$$\underline{y} = \underline{h}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} h_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ h_p(\underline{x}) \end{bmatrix} \ . \tag{195}$$

In Analogie zum SISO-Fall werden nun die zeitlichen Ableitungen von y_i, $i = 1, ..., p$, berechnet:

$$\begin{aligned} y_i &= h_i(\underline{x}) \\ \dot{y}_i &= L_f h_i(\underline{x}) = \left(\frac{\partial h_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \underline{f}(\underline{x}) \\ \ddot{y}_i &= L_f^2 h_i(\underline{x}) = \left(\frac{\partial L_f h_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \underline{f}(\underline{x}) \\ &\vdots \\ y_i^{(\delta_i)} &= L_f^{\delta_i} h_i(\underline{x}) + \underbrace{\left(\frac{\partial L_f^{\delta_i - 1} h_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \underline{G}(\underline{x})}_{\substack{\neq 0 \Rightarrow \delta_i \text{ wird dann} \\ \text{als Differenzordnung} \\ \text{der Ausgangsgröße } y_i \\ \text{bezeichnet.}}} \cdot \underline{u} \end{aligned} \tag{196}$$

Die Differenzordnung des Gesamtsystems ergibt sich dann zu

$$\delta = \sum_{i=1}^{p} \delta_i \ . \tag{197}$$

Die *direkte Systembeschreibung nach Freund* für MIMO-Systeme lautet damit

$$\left.\begin{array}{rcl} y_i & = & c_i(\underline{x}) \\ \dot{y}_i & = & L_f h_i(\underline{x}) \\ & \vdots & \\ y_i^{(\delta_i-1)} & = & L_f^{\delta_i-1} h_i(\underline{x}) \end{array}\right\} \quad \delta_i \text{ Transformationen} \tag{198}$$

mit

$$y_i^{(\delta_i)} = L_f^{\delta_i} h_i(\underline{x}) + \left(\frac{\partial L_f^{\delta_i-1} h_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \cdot \underline{G}(\underline{x}) \cdot \underline{u} \qquad \text{für} \qquad i = 1, \ldots, p \ . \tag{199}$$

Nun wird das allgemeine nichtlineare Regelungsgesetz

$$\underline{u} = -\underline{k}(\underline{x}) + \underline{S}(\underline{x})\underline{w} \tag{200}$$

angenommen. Das Einsetzen dieses Regelungsgesetzes in die direkte Systembeschreibung nach Freund liefert

$$\begin{aligned} y_i^{(\delta_i)} = {} & L_f^{\delta_i} h_i(\underline{x}) - \left(\frac{\partial L_f^{\delta_i-1} h_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \underline{B}(\underline{x})\underline{k}(\underline{x}) \\ & + \left(\frac{\partial L_f^{\delta_i-1} h_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \underline{G}(\underline{x})\underline{S}(\underline{x})\underline{w} \qquad \text{für} \qquad i = 1, ..., p \ . \end{aligned} \tag{201}$$

Nun soll einerseits eine gewünschte Solldynamik vorgegeben werden; andererseits soll wie im linearen Fall (siehe Vorlesung Systemtheorie) eine Entkopplung des Zustandgleichungssystems erreicht werden.
Hieraus folgt

$$\begin{aligned} & y_i^{(\delta_i)} = -\alpha_{i,\delta_i-1} y_i^{(\delta_i-1)} - ... - \alpha_{i,1}\dot{y} \quad \underbrace{-\alpha_{i,0} y_i + \alpha_{i,0} w_i}_{\text{für stationäre Genauigkeit}} \\ & y^{(\delta_i)} \ \multimap\!\bullet \ Y_i(s) = \frac{\alpha_{i,0}}{s^{\delta_i} + ... + \alpha_{i,1} s + \alpha_{1,0}} W_i(s) \ , \quad i = 1, ..., p \ . \end{aligned} \tag{202}$$

Die Terme y_i bis $y_i^{(\delta_i-1)}$ werden nun durch die oben hergeleiteten Transformationsbeziehungen ersetzt und mit dem Regleransatz verglichen:

$$\begin{aligned} & - \alpha_{i,\delta_i-1} L_f^{\delta_i-1} h_i(\underline{x}) - ... - \alpha_{i,1} L_f h_i(\underline{x}) - \alpha_{i,0} h_i(\underline{x}) + \alpha_{i,0} w_i \\ \stackrel{!}{=} & L_f^{\delta_i} h_i(\underline{x}) - \left(\frac{\partial L_f^{\delta_i-1} h_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \underline{G}(\underline{x})\underline{k}(\underline{x}) + \left(\frac{\partial L_f^{\delta_i-1} h_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \underline{G}(\underline{x})\underline{S}(\underline{x})\underline{W} \end{aligned} \tag{203}$$

Damit ergeben sich Bestimmungsgleichungen für

1. die Zustandsrückführung $\underline{k}(\underline{x})$

$$\begin{aligned} & - \alpha_{i,\delta_i-1} L_f^{\delta_i-1} h_i(\underline{x}) - ... - \alpha_{i,1} L_f h_i(\underline{x}) - \alpha_{i,0} h_i(\underline{x}) \\ \stackrel{!}{=} & L_f^{\delta_i} h_i(\underline{x}) - \left(\frac{\partial L_f^{\delta_i-1} h_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \underline{G}(\underline{x})\underline{k}(\underline{x}) \qquad \text{mit} \qquad i = 1, \ldots, p \end{aligned} \tag{204}$$

2. und das Vorfilter $\underline{S}(\underline{x})$

$$\alpha_{i,0} w_i \stackrel{!}{=} \left(\frac{\partial L_f^{\delta_i - 1} h_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \underline{G}(\underline{x}) \underline{S}(\underline{x}) \underline{w} \qquad \text{mit} \qquad i = 1, \ldots, p \ . \tag{205}$$

Eine Zusammenfassung der Bestimmungsgleichungen für $\underline{k}(x)$ ergibt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial L_f^{\delta_1 - 1} h_1(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \underline{G}(\underline{x}) \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial L_f^{\delta_p - 1} h_p(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^T \underline{G}(\underline{x}) \end{bmatrix}}_{=: \underline{D}^*(\underline{x})} \underline{k}(\underline{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} L_f^{\delta_1} h_1(\underline{x}) + \ldots + \alpha_{1,1} L_f h_1(\underline{x}) + \alpha_{1,0} h_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_f^{\delta_p} h_p(\underline{x}) + \ldots + \alpha_{p,1} L_f h_p(\underline{x}) + \alpha_{p,0} h_p(\underline{x}) \end{bmatrix}}_{=: \underline{\alpha}(\underline{x})} \tag{206}$$

$$\underbrace{\underline{D}^*(\underline{x})}_{(p,p)} \underbrace{\underline{k}(\underline{x})}_{(p,1)} = \underbrace{\underline{\alpha}(\underline{x})}_{(p,1)} \ .$$

Damit diese Beziehung nach der gesuchten Zustandsrückführung aufgelöst werden kann, muss die Matrix $\underline{D}^*(\underline{x})$ als Entkoppelbarkeitsbedingung vollen Rang besitzen. Es ergibt sich dann

$$\underline{k}(\underline{x}) = \left[\underline{D}^*(\underline{x}) \right]^{-1} \underline{\alpha}(\underline{x}) \ . \tag{207}$$

Für das Vorfilter $\underline{S}(\underline{x})$ gelten die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,0} w_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p,0} w_p \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1,0} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \alpha_{p,0} \end{bmatrix}}_{=: \underline{A}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{bmatrix}}_{= \underline{w}} \tag{208}$$

$$\underline{A}_0 \cdot \underline{w} \stackrel{!}{=} \underline{D}^*(\underline{x}) \underline{S}(\underline{x}) \underline{w}$$

beziehungsweise

$$\underline{S}(\underline{x}) = \left[\underline{D}^*(\underline{x}) \right]^{-1} \underline{A}_0 \ . \tag{209}$$

Wie im Fall eines SISO-Systems muss die Vorgebbarkeit von Eigenwerten in Abhängigkeit der Differenzordnung unterschieden werden.

1. $\delta = n$ alle Eigenwerte des Systems sind vorgebbar.
2. $\delta < n$ nur δ Eigenwerte sind vorgebbar. In diesem Fall ist wiederum die Stabilität der internen Dynamik zu überprüfen.

Für ideales Folgeverhalten (Übertragungsfunktion = 1) lässt sich analog zum SISO-Fall wiederum eine dynamische Vorsteuerung berechnen.

Beispiel

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\text{dyn}} = \ & \left[\underline{D}^*(\underline{x}) \right]^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{w}_{\text{dyn}} = \ & \begin{bmatrix} w_{1,\text{Soll}} \\ \dot{w}_{1,\text{Soll}} \\ \ddot{w}_{1,\text{Soll}} \\ w_{2,\text{Soll}} \\ \dot{w}_{2,\text{Soll}} \\ \ddot{w}_{2,\text{Soll}} \end{bmatrix} \quad \text{aus Trajektoriengenerator} \end{aligned} \tag{210}$$

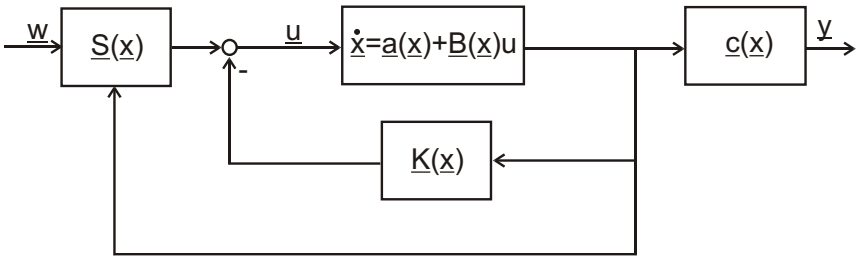


Abbildung 32: Blockschaltbild für die exakte Ein-/ Ausgangslinearisierung von MIMO-Systemen

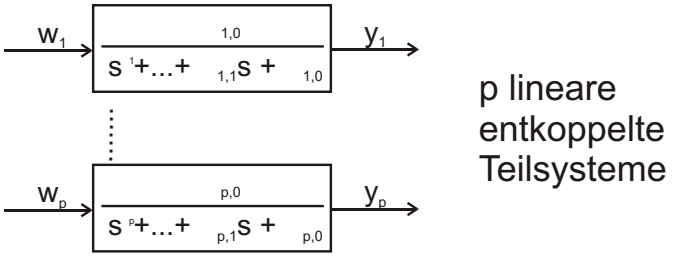


Abbildung 33: Äquivalente Darstellung mittels entkoppelter Teilsysteme

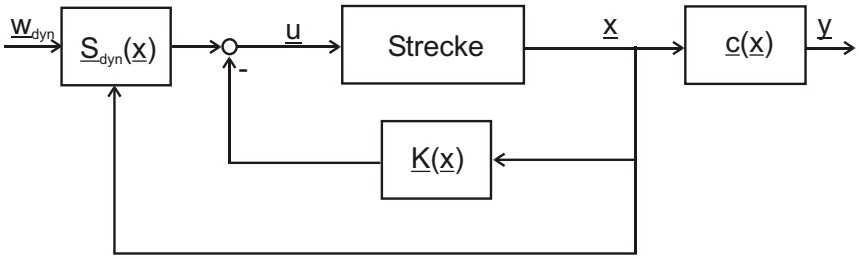


Abbildung 34: Blockschaltbild für die exakte Ein-/ Ausgangslinearisierung von MIMO-Systemen mit dynamischer Vorsteuerung

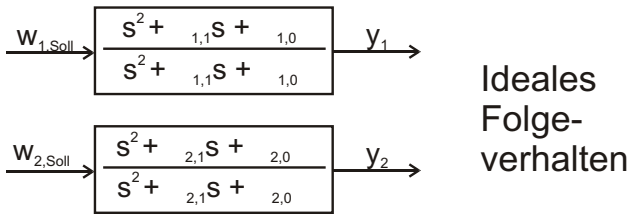


Abbildung 35: Äquivalente Darstellung der entkoppelten Teilsysteme mit idealem Folgeverhalten

4.5 Nichtlinearer Reglerentwurf durch erweiterte Linearisierung

Der Ausgangspunkt für den Reglerentwurf mittels der erweiterten Linearisierung ist wie bei der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung auch die eingangsaffine Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}) + \underline{G}(\underline{x}) \cdot \underline{u} \quad \text{(MIMO)} \quad \text{bzw.} \\ \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x}) \cdot u \quad \text{(SISO, nachfolgend betrachtet)} \ . \end{aligned} \tag{211}$$

Grundidee dieses Verfahrens ist die Anwendung linearer Entwurfsmethoden auf das nichtlineare System. Hierzu wird die rechte Seite des Differentialgleichungssystems in quasi-linearer Form dargestellt, um das System rein formal in ein lineares Schema zu pressen.
Zusätzlich werden hierbei oft nur dominierende Terme berücksichtigt; weniger bedeutende Anteile werden oft vernachlässigt. Damit gilt

$$\underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x}) \cdot u \stackrel{!}{=} \underline{A}(\underline{x}) \cdot \underline{x} + \underline{b}(\underline{x}) \cdot u \ . \tag{212}$$

Anschließend werden Verfahren für den Entwurf von Reglern für lineare Systeme angewendet. Für einen Reglerentwurf mittels Polvorgabe ergibt sich

$$\underbrace{\det(s\underline{I} - \underline{A}(\underline{x}) + \underline{b}(\underline{x})\underline{k}^T)}_{s^n + a_{n-1}(\underline{x})s^{n-1} + \ldots + a_0(\underline{x})} \stackrel{!}{=} \underbrace{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_0}_{\text{Wunschpolynom}} \ . \tag{213}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich $a_i(\underline{x}) \stackrel{!}{=} \alpha_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, der zustandsabhängigen Koeffizienten $a_i(\underline{z})$ mit den Koeffizienten α_i des Wunschpolynoms ergeben sich die Komponenten des Vektors der Reglerverstärkungen ebenfalls als zustandsabhängige Größen

$$\underline{k}^T = \underline{k}^T(\underline{x}) \ , \tag{214}$$

womit sich die nichtlineare Zustandsrückführung zu

$$u = -\underline{k}^T(\underline{x}) \cdot \underline{x} \tag{215}$$

ergibt. Für dieses Entwurfsverfahren ist eine Stabilitätsuntersuchung mittels der direkten Methode nach Ljapunow oder mittels Simulationen der Zeitantworten des Systems nötig.
Bei diesem Verfahren lassen sich sinngemäß auch messtechnisch erfassbare zeitlich veränderliche Systemparameter $\underline{p}$ berücksichtigen. In diesem Fall ändern sich die Reglerverstärkungen $\underline{k}^T = \underline{k}^T(\underline{x}, \underline{p})$ ebenfalls auf Grund der veränderlichen Parameter, die explizit in die Systemmatrix $\underline{A} = \underline{A}(\underline{x}, \underline{p})$ eingehen. Verfahren einer *gesteuerten Adaption* von Reglerparametern werden oftmals auch als *Gain-Scheduling* bezeichnet.

Einfachpendel mit Antrieb Gegeben sei die Zustandsgleichung

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \sin\Theta = u \tag{216}$$

eines Einfachpendels mit Antrieb. Die rechte Seite der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \ddot{\Theta} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ -\frac{g}{l}\sin\Theta \end{bmatrix}}_{\underline{a}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} u \tag{217}$$

wird nun auf die quasi-lineare Darstellung

$$\underline{a}(\underline{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\mathrm{si}\Theta & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}(\underline{x})} \underbrace{\begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix}}_{\underline{x}} \tag{218}$$

mit

$$\mathrm{si}\Theta = \frac{\sin\Theta}{\Theta}\ , \quad \mathrm{si}(0) = 1 \qquad \text{(Spaltsinus-Funktion)} \tag{219}$$

umgeschrieben.
Mittels

$$\begin{aligned} \det(s\underline{I} - \underline{A}(\underline{x}) + \underline{b}\cdot\underline{k}^T) &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{l}\mathrm{si}\Theta + k_1 & s + k_2 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + k_2 s + \frac{g}{l}\mathrm{si}\Theta + k_1 \stackrel{!}{=} \underbrace{s^2 + \alpha_{11}s + \alpha_{10}}_{\text{Wunschpolynom}} \end{aligned} \tag{220}$$

erfolgt nun eine Polvorgabe, welche auf die Reglerparameter

$$\begin{aligned} k_1 &= k_1(\Theta) = \alpha_{10} - \frac{g}{l}\mathrm{si}\Theta \\ k_2 &= \alpha_{11} \end{aligned} \tag{221}$$

und das nichtlineare Zustandsregelgesetz

$$u = -\underbrace{[k_1(\Theta) \quad k_2]}_{\underline{k}^T} \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} \tag{222}$$

führt.

4.6 Kompensation statischer Eingangsnichtlinearitäten

Bislang wurden lediglich lineare Abhängigkeiten der rechten Seite von der Stellgröße u gemäß $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{G}(\underline{x})\cdot u$ betrachtet. Die Behandlung statischer zeitinvarianter Eingangsnichtlinearitäten (ebenfalls auch sinngemäß für statische Ausgangsnichtlinearitäten) soll nun für das Beispiel eines Hydraulikventils demonstriert werden. Dieses sei durch die statische Kennlinie

$$v = u^4 = f(u) \tag{223}$$

charakterisiert. Die Nichtlinearität der Kennlinie lässt sich nun durch Vorschaltung der inversen Ventilkennlinie $u = f^{-1}(\bar{u}) = \bar{u}^{\frac{1}{4}}$ exakt beziehungsweise durch eine Approximation $u = \hat{f}^{-1}(\bar{u})$ der Umkehrfunktion $f^{-1}(\bar{u})$ näherungsweise kompensieren.

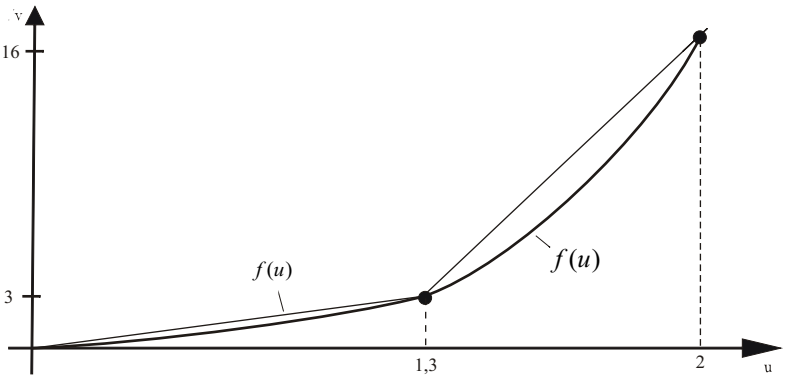


Abbildung 36: Approximation einer nichtlinearen statischen Kennlinie durch eine stückweise lineare Näherung

Zum Beispiel ergibt sich durch Verwendung der Approximation

$$\hat{f}^{-1}(\bar{u}) = \begin{cases} 0.433\bar{u} & 0 \leq \bar{u} \leq 3 \\ 0.0538\bar{u} + 1.139 & 3 \leq \bar{u} \leq 16 \end{cases} \tag{224}$$

insgesamt ein näherungsweise lineares Verhalten

$$v = f(\hat{f}^{-1}(\bar{u})) \approx \bar{u} \ . \tag{225}$$

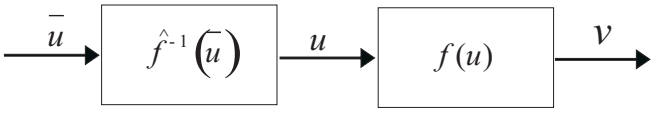


Abbildung 37: Kompensation statischer Nichtlinearitäten durch Vorschaltung der inversen Kennlinie

4.7 Flachheitsbasierter Regelungsentwurf

4.7.1 Differentielle Flachheit als Eigenschaft eines dynamischen Systems

Betrachtet werde nun ein nichtlineares Zustandsgleichungssystem (SISO-Fall)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}\,(\underline{x}, u) \ . \tag{226}$$

Dieses System wird nachfolgend als differentiell flach bezeichnet, wenn ein flacher (eventuell fiktiver) Ausgang

$$y_f = \Phi\,(\underline{x}) \tag{227}$$

existiert, so dass sich sowohl alle Zustände als auch alle Stellgrößen mittels dieses flachen Ausgangs und seiner zeitlichen Ableitungen ausrücken lassen, d.h. wenn

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \Psi_x \left(y_f, \dot{y}_f, \ldots, y_f^{(n-1)} \right) \\ u &= \Psi_u \left(y_f, \dot{y}_f, \ldots, y_f^{(n)} \right) \end{aligned} \tag{228}$$

gilt.
Werden nun die so genannten Brunovsky-Koordinaten

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y_f & \dot{y}_f & \ldots & y_f^{(n-1)} \end{bmatrix}^T \tag{229}$$

eingeführt, lässt sich das System mit dem neuen Eingang

$$v = y_f^{(n)} \tag{230}$$

in Form einer reinen Integratorkette n-ter Ordnung darstellen. Für diese Integratorkette gilt

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1} \qquad \text{mit} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \dot{z}_n &= v \ . \end{aligned} \tag{231}$$

Für eine allgemeine Darstellung des allgemeinen MIMO-Falls sei beispielsweise auf *R. Rothfuß, Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme, Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 664, 1997* verwiesen.

4.7.2 Beispiel zur differentiellen Parametrisierung eines dynamischen Systems

Betrachtet wird der in Abbildung 38 dargestellte Aufbau. Mittels eines Elektromagneten soll eine metallische Kugel in einem zeitlich variierenden Abstand x_1 (= vorgegebene zeitlich variierende Führungsgröße) positioniert werden.
Dieses System ist durch das Zustandsgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{k}{m} \frac{u^2}{(s_0 - x_1)^2} - g \end{aligned} \tag{232}$$

mit der Stellgröße u beschrieben.

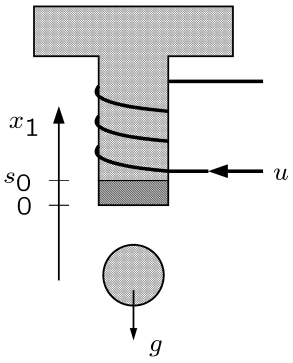


Abbildung 38: Beispiel zum Entwurf fachheitsbasierter Steuerungen und Regelungen

Für dieses System stellt die Position x_1 einen flachen Ausgang dar, welcher in diesem Fall auch messtechnisch erfasst werden kann. Mit Hilfe dieses flachen Ausgangs lassen sich die Zustandsgrößen durch

$$\begin{aligned} x_1 &= y_f \\ x_2 &= \dot{y}_f \ , \end{aligned} \tag{233}$$

also mittels einer Funktion $\underline{x} = \Psi_x \left(y_f, \dot{y}_f \right)$, in Abhängigkeit des flachen Ausgangs und seiner zeitlichen Ableitung bis zur Ordnung $n - 1 = 1$ angeben.
Ebenso gilt für die Stellgröße

$$u = \Psi_u \left(y_f, \dot{y}_f, \ddot{y}_f \right) \overset{\text{hier}}{=} \Psi_u \left(y_f, \ddot{y}_f \right) = (s_0 - y_f) \cdot \sqrt{\frac{m}{k} \cdot (\ddot{y}_f + g)} \ . \tag{234}$$

4.7.3 Flachheitsbasierte Steuerung

Der Zusammenhang $u = \Psi_u \left(y_f, \dot{y}_f, \ldots, y_f^{(n)} \right)$ zwischen dem flachen Ausgang und seinen Zeitableitungen auf der einen Seite sowie der Stellgröße auf der anderen Seite lässt sich unmittelbar zur Realisierung einer flachheitsbasierten Steuerung nutzen, indem der flache Ausgang und damit auch seine Ableitungen durch die gewünschten Sollwerte $y_{f,d}$ mit den entsprechenden Ableitungen gemäß

$$u_d = \Psi_u \left(y_{f,d}, \dot{y}_{f,d}, \ldots, y_{f,d}^{(n)} \right) \tag{235}$$

ersetzt werden.
Hiermit ergibt sich für die Trajektorien im Zustandsraum die Beziehung

$$x_d = \Psi_x \left(y_{f,d}, \dot{y}_{f,d}, \ldots, y_{f,d}^{(n-1)} \right) \ . \tag{236}$$

Es ist unmittelbar klar, dass für eine sinnvolle Verwendung des Steuerungsgesetzes u_d Konsistenz zwischen den wahren Anfangsbedingungen sowie den aus obiger differentieller Parametrisierung resultierenden Anfangsbedingungen sichergestellt sein muss, d.h.

$$x(t_0) = \Psi_x \left(y_{f,d}(t_0), \dot{y}_{f,d}(t_0), \ldots, y_{f,d}(t_0)^{(n-1)} \right) \tag{237}$$

muss gelten. Im Idealfall kompensiert die flachheitsbasierte Steuerung die Nichtlinearität des Systems exakt, so dass das Übertragungsverhalten zwischen dem neuen Eingang v und dem flachen Ausgang y_f als ein n-fach integrierendes System erscheint.

4.7.4 Flachheitsbasierte Folgeregelung

Eine reine Steuerung besitzt den Nachteil, dass kleine Störungen sowie nicht exakt bekannte Systemparameter und kleine Abweichungen im dynamischen Systemmodell zu deutlichen Abweichungen zwischen dem gewünschten Systemausgang und dem wahren Ausgang führen können. Deshalb wird nun statt einer reinen Steuerung eine flachheitsbasierte Folgeregelung realisiert.

Die gewünschte Trajektorie eines nichtlinearen Systems sei in Form des gewünschten Zeitverlaufs des flachen Ausgangs $y_{f,d}(t)$ mit den zugehörigen zeitlichen Ableitungen $y_{f,d}^{(i)}(t)$, $i = 1, \ldots, n$, gegeben.

Mit Hilfe der Brunovsky-Normalform

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v = \ddot{y}_f \stackrel{!}{=} \ddot{y}_{f,d} \end{aligned} \tag{238}$$

sowie der Definition des Folgefehlers

$$\begin{aligned} e &:= y_f - y_{f,d} = z_1 - z_{1,d} \\ \dot{e} &:= \dot{y}_f - \dot{y}_{f,d} = z_2 - z_{2,d} \end{aligned} \tag{239}$$

lässt sich für das Beispielsystem der Ausdruck

$$v = \ddot{y}_{f,d} - \lambda_1 \cdot (z_2 - z_{2,d}) - \lambda_0 \cdot (z_1 - z_{1,d}) \tag{240}$$

als Folgeregelungsgesetz verwenden.

Die Parameter des Regelungsgesetzes müssen so gewählt werden, dass die Folgefehlerdynamik

$$\begin{aligned} \ddot{e} = \ddot{y}_f - \ddot{y}_{f,d} &= -\lambda_1 \cdot (z_2 - z_{2,d}) - \lambda_0 \cdot (z_1 - z_{1,d}) \\ &= -\lambda_1 \cdot \dot{e} - \lambda_0 \cdot e \end{aligned} \tag{241}$$

asymptotisch stabil ist. Damit ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\ddot{e} + \lambda_1 \cdot \dot{e} + \lambda_0 \cdot e = 0 \ . \tag{242}$$

Zur Sicherstellung von stationärer Genauigkeit — auch im Fall von Unsicherheiten und Modellfehlern — lässt sich das Regelgesetz um einen integrierenden Anteil erweitern. Für das Beispielsystem lautet das so erweiterte Regelgesetz dann

$$v = \ddot{y}_{f,d} - \lambda_1 \cdot (z_2 - z_{2,d}) - \lambda_0 \cdot (z_1 - z_{1,d}) - \lambda_{-1} \cdot \int_{t_0}^{t} e\,(\tau)\, d\tau \ . \tag{243}$$

4.7.5 Vergleich des flachheitsbasierten Reglerentwurfs mit der exakten Ein-/ Ausgangslinearisierung

Nachfolgend ist der in diesem Kapitel ausführlich dargestellte Entwurf von Regelungen für nichtlineare Systeme mittels

- exakter Ein-/ Ausgangslinearisierung und
- flachheitsbasierten Ansätzen

in Form von Blockschaltbildern dargestellt.

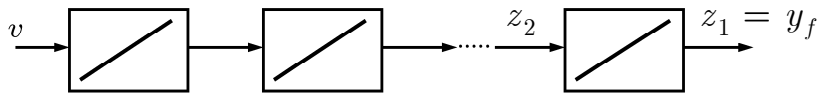


Abbildung 39: Blockschaltbild eines flachen Systems in Brunovsky-Normalform

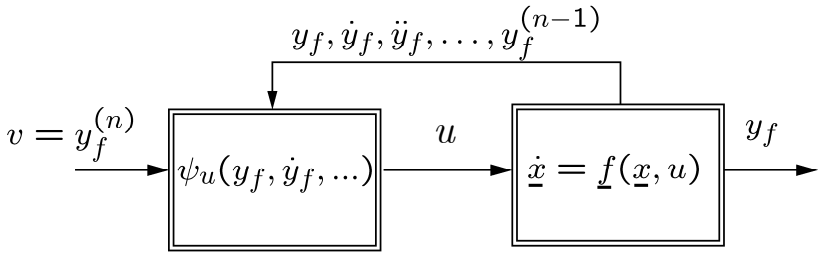


Abbildung 40: Blockschaltbild für die flache (Ausgangs-) Rückführung

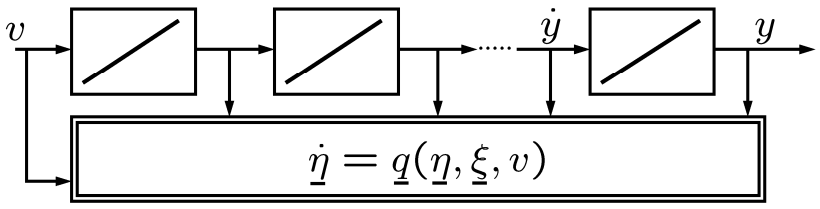


Abbildung 41: Blockschaltbild der Integratorkette und der internen Dynamik bei einer Ein-/ Ausgangslinearisierung

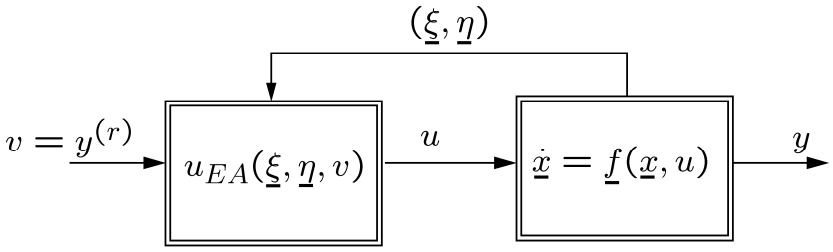


Abbildung 42: Blockschaltbild einer mittels Ein-/ Ausgangslinearisierung entworfenen Regelung

5 Entwurf nichtlinearer Beobachter

5.1 Herleitung eines Beobachteransatzes für nichtlineare Systeme

Für die im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Regelungsansätze für nichtlineare Systeme ist die Rückführung der Systemzustände $\underline{x}$ nötig. Im Allgemeinen können jedoch nicht alle Zustandsgrößen messtechnisch erfasst werden. Weiterhin soll auch häufig aus Kosten- oder Zuverlässigkeitsgründen auf die Messung einiger Zustandsgrößen verzichtet werden. In diesen Fällen sollen nun Beobachter für nichtlineare Systeme eingesetzt werden, um Schätzwerte $\hat{\underline{x}}$ für den Zustandsvektor $\underline{x}$ zu bestimmen. Diese Schätzwerte werden dann im Regelgesetz als Ersatz für die nicht messtechnisch erfassten Größen verwendet.

Der Ausgangspunkt für den Entwurf nichtlinearer Beobachter ist die Regelstrecke in der Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \tag{244}$$

mit den messtechnisch erfassten Größen

$$\underline{y}_m = \underline{c}_m(\underline{x}) \ . \tag{245}$$

Nun wird in Analogie zum Zustandsbeobachter für lineare Systeme ein Ansatz aus einen Parallelmodell der Regelstrecke und einer Korrektur für die Ausgangsfehler gemäß

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \underbrace{\underline{f}(\hat{\underline{x}}, \underline{u})}_{\text{Parallelmodell der nichtlin. Strecke}} + \underline{H}(\hat{\underline{x}}, \underline{u}) \cdot \underbrace{(\underline{y}_m - \hat{\underline{y}}_m)}_{\text{Ausgangsfehler}} \tag{246}$$

gewählt.

Für die weiteren Betrachtungen wird der Schätzfehler zwischen dem wahren Zustand und den geschätzten Größen zu

$$\tilde{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t) \tag{247}$$

definiert.

Für eine Umgebung um $\tilde{\underline{x}} = \underline{0}$ soll nun die Verstärkungsmatrix $\underline{H}(\hat{\underline{x}}, \underline{u})$ so bestimmt werden, dass der Schätzfehler mit zunehmender Zeit gegen Null strebt, d.h. es soll

$$\|\tilde{\underline{x}}(t)\| = \|\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)\| \to 0 \qquad \text{für} \qquad t \to \infty \tag{248}$$

gelten.

Hierzu wird nun die Fehlerdifferentialgleichung

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) - \left(\underline{f}(\hat{\underline{x}}, u) + \underline{H}(\hat{\underline{x}}, u) \cdot [\underline{c}_m(\underline{x}) - \underline{c}_m(\hat{\underline{x}})] \right) \tag{249}$$

aufgestellt. Nach einer Taylor-Reihenentwicklung von $\underline{f}(\underline{x}, u)$ an der Stelle $\underline{x} = \hat{\underline{x}}$ ergibt sich für das Streckenmodell der Ausdruck

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) = f(\hat{\underline{x}}, \underline{u}) + \left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} \cdot \underbrace{(\underline{x} - \hat{\underline{x}})}_{=\tilde{\underline{x}}} + \underbrace{\text{Terme höherer Ordnung}}_{\text{vernachlässigbar}} \tag{250}$$

mit der Jacobimatrix

$$\left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} = \left. \begin{bmatrix} \frac{f_1(\underline{x}, \underline{u})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{f_1(\underline{x}, \underline{u})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{f_n(\underline{x}, \underline{u})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{f_n(\underline{x}, \underline{u})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} . \tag{251}$$

In Analogie zur Regelstrecke wird auch für die Messgleichung $\underline{c}_m(\underline{x})$ eine Taylor-Reihenentwicklung an der Stelle $\underline{x} = \hat{\underline{x}}$ durchgeführt. Aus dieser Reihenentwicklung ergibt sich

$$\underline{c}_m(\underline{x}) = \underline{c}_m(\hat{\underline{x}}) + \left.\frac{\partial \underline{c}_m(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} \cdot \underbrace{(\underline{x} - \hat{\underline{x}})}_{=\tilde{\underline{x}}} \quad + \quad \underbrace{\text{Terme höherer Ordnung}}_{\text{vernachlässigbar}} \ . \tag{252}$$

Nach dem Einsetzen der Reihenentwicklungen für $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ und $\underline{c}_m(\underline{x})$ in die Fehlerdifferentialgleichung (249) ergibt sich nach Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung die quasilineare Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \left[\left.\frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} - \underline{H} \left.\frac{\partial \underline{c}_m(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} \right] \tilde{\underline{x}} = \tilde{\underline{A}}(\hat{\underline{x}}, \underline{u}) \cdot \tilde{\underline{x}} \ . \tag{253}$$

Die nächsten Schritte für den Beobachterentwurf sind nun eine

- Polvorgabe für die Matrix $\tilde{\underline{A}}(\hat{\underline{x}}, \underline{u})$ und
- die Bestimmung der zugehörigen Verstärkungsmatrix $\underline{H} = \underline{H}(\hat{\underline{x}}, \underline{u})$ des Beobachters nach einem Koeffizientenvergleich zwischen dem charakteristischen Polynom $\det\left(s \cdot \underline{I} - \tilde{\underline{A}}(\hat{\underline{x}}, \underline{u})\right)$ mit dem aus der Polvorgabe resultierenden Wunschpolynom.

5.2 Beispiel für den Beobachterentwurf eines nichtlinearen Systems

Im Folgenden soll die Vorgehensweise für den Beobachterentwurf an Hand eines Einfachpendels mit Antrieb, das in der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \underline{f}(\underline{x}, u) \tag{254}$$

mit der Messgleichung

$$y_m = c_m(\underline{x}) = x_1 \tag{255}$$

gegeben ist, veranschaulicht werden.
Als Ansatz für den Beobachter ergibt sich

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{f}(\hat{\underline{x}}, u) + \underline{h}[c_m(\underline{x}) - c_m(\hat{\underline{x}})] \tag{256}$$

mit den zu bestimmenden Beobachterverstärkungen

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^T \ . \tag{257}$$

Nach Berechnung der Jacobimatrizen

$$\left.\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \hat{x}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{258}$$

und

$$\left[\frac{\partial c_m(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T \Bigg|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{259}$$

ergibt sich die Matrix

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{A}} &= \left.\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} - \underline{h} \left[\frac{\partial c_m(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T \Bigg|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \hat{x}_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ h_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -h_1 & 1 \\ -h_2 - \frac{g}{l} \cos \hat{x}_1 & 0 \end{bmatrix} \ . \end{aligned} \tag{260}$$

Nun wird für den Beobachter eine Vorgabe der beiden gewünschten Pole s_1 und s_2 durchgeführt:

$$\begin{aligned} \det(s\underline{I} - \underline{\tilde{A}}) = \begin{vmatrix} s + h_1 & -1 \\ h_2 + \frac{g}{l}\cos\hat{x}_1 & s \end{vmatrix} &\stackrel{!}{=} (s - s_1)(s - s_2) \\ s^2 + h_1 s + h_2 + \frac{g}{l}\cos\hat{x}_1 &\stackrel{!}{=} s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2 \quad . \end{aligned} \tag{261}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert somit

$$\begin{aligned} h_1 &= -s_1 - s_2 \\ h_2 &= h_2(\hat{x}_1) = s_1 s_2 - \frac{g}{l}\cos\hat{x}_1 \quad . \end{aligned} \tag{262}$$

In diesem Fall lässt sich wegen

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} s_1 + s_2 & 1 \\ -s_1 + s_2 & 0 \end{bmatrix} = \text{const} \tag{263}$$

sogar eine lineare Fehlerdifferentialgleichung $\dot{\underline{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{A}}\underline{\tilde{x}}$ erreichen.

Inhalt

1 Einführung und Übersicht — Kapitel, Folie

Optimale Steuerung **1,1**
Optimale Regelung **1,2**
Parameteroptimierung und Strukturoptimierung - Einführendes Beispiel 1,3
Parameteroptimierung - mit Beispiel 1,4
Optimierungskriterium 1,5 … 6
Strukturoptimierung - mit Beispiel 1,7 … 10
Schaltkurve 1,11 … 13
Optimale Reglersynthese 1,14
Folgerungen aus den Beispielen **1,15**
Beschränkte und unstetige Steuerungen **1,16**
Zulässige Steuerung **1,17**
Zielmannigfaltigkeit **1,18**
Zeitdiskretisierung **1,19**
Optimierungsproblem der dynamischen Optimierung **1,20**
Allgemeines Gütekriterium **1,21**
Diskretisierung des Optimierungsproblems **1,22**
Verfahren der dynamischen Optimierung **1,23 … 24**
Schwerpunkt dieser Vorlesung **1,25**

2 Dynamische Programmierung nach BELLMAN

Dynamische Programmierung als numerisches Verfahren **2,1**
Einleitendes Beispiel **2,1 … 2**
Wegenetz **2,3**
Bezeichnungen **2,4 … 5**
N-stufiger Entscheidungsprozess **2,6**
Optimalitätsprinzip von BELLMAN **2,7**
Sukzessive Optimierung **2,8 … 10**
Optimale Trajektorien **2,11**
Zustandsbeschränkungen **2,12**
Allgemeiner Fall der Dynamischen Programmierung **2,13 … 14**
Allgemeine Rekursionsformel **2,15**
Struktogramm zur dynamischen Programmierung nach BELLMAN **2,16**
Bemerkungen zum numerischen Verfahren **2,17 … 18**
Dynamische Programmierung als analytisches Verfahren **2,19 … 20**
Rekursionsformel zur dynamischen Programmierung für nichtlineare Systeme **2,21 … 23**
HAMILTON-JACOBI-BELLMAN (HJB) Gleichung **2,24**
Beispiel zur HJB Gleichung 2,25 … 27
RICCATIsche Differentialgleichung 2,28 … 30
RICCATI Regler 2,31 … 32
Lösung der RICCATIschen Differentialgleichung für das Beispiel 2,33
Optimale Lösung für verschiedene Parameterkombinationen 2,34 … 39
Blockschaltbild der optimalen Regelung 2,40
Schema für das Vorgehen zur Berechnung optimaler Steuerungen und Regelungen aus der HJB Gleichung **2,41 … 44**
RICCATI Regler für unendliche Vorgangsdauer 2,45 … 47
Lineare Systeme mit quadratischem Gütekriterium **2,48 … 52**
Matrix-RICCATI-Differentialgleichung **2,53**
Linearer Zustandsregler **2,54**
Weiteres Beispiel zur HJB Gleichung 2,55 … 59

Satz zur Lösung einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung 2,60
Anwendung des vorherigen Satzes auf das Beispiel 2,61 … 69
Endergebnis für das Beispiel 2,70
Bemerkungen zum Beispiel 2,71 … 73
Satz von BOLTJANSKIJ **2,74 … 75**

3 Maximumprinzip von PONTRJAGIN

Vorbemerkungen zur Herleitung 3,1
HAMILTON Funktion 3,2 … 3
Herleitung aus dem Schema für die HJB Gleichung 3,4
Satz aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 3,5 … 6
Anwendung dieses Satzes auf die HJB Gleichung 3,7 … 11
Ergebnis der Anwendung des Satzes und Randwertproblem **3,12 … 15**
Beispiel zum Maximumprinzip - LQ-Problem für den Doppelintegrator 3,16
Lösung mit Hilfe des Maximumprinzips 3,17 … 19
Differentialgleichungen und Randbedingungen 3,20
Lösung des Randwertproblems 3,21 … 22
Optimale Trajektorien und minimale Kosten 3,23
Wichtige Ergänzung zur Herleitung des Maximumprinzips **3,24**
HAMILTON Funktion für zeitinvariante Systeme **3,25**
Überprüfung am vorherigen Beispiel 3,26 … 28
Maximumprinzip für zeitvariante Systeme - Strenge Formulierung nach PONTRJAGIN **3,29 … 30**
Anmerkungen zum Maximumprinzip **3,31**
Adjungiertes System **3,31**
Kanonische Gleichungen und Schema zum Maximumprinzip **3,32 … 34**
Maximumprinzip und Analogie zu mechanischen Systemen 3,35 … 36
Maximumprinzip für zeitinvariante Systeme **3,37 … 38**
Optimierung mit Endkosten **3,39**
Transversalitätsbedingungen **3,40 … 41**
Sonderfall bei freien Endbedingungen **3,42**
Optimierungsprobleme mit teilweise vorgegebenen Anfangs- und Endbedingungen **3,43 … 47**
Zeitinvariantes System mit konvexem Zielgebiet **3,48 … 49**
Häufig vorkommendes konvexes Zielgebiet **3,50**
Beispiel für konvexes Zielgebiet 3,51 … 55
Optimierungsprobleme mit nicht vorgegebener Vorgangsdauer **3,56 … 58**
Zeitoptimal gesteuerte zeitinvariante Systeme **3,59**

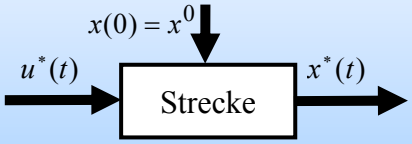
4 Zeitoptimale lineare Systeme

Optimierungsproblem **4,1 … 3**
Spezielle Steuerbereiche **4,4**
Hyperkugel 4,4
Konvexes Polyeder **4,5**
Hyperquader **4,6 … 7**
Schaltfunktion und singuläre Steuerung **4,8**
Satz von FELDBAUM **4,9**
Beispiele **4,10**
Zeitoptimal gesteuerter harmonischer Oszillator 4,11 … 12

1 Einführung und Übersicht

Grundlage: Konzept gesteuerter und geregelter Systeme im Zustandsraum

Optimale Steuerung



Zustand: $x \in \Re^n$

Steuerung: $u \in \Re^m$

Strecke: $\dot{x} = f(x, u)$

speziell linear

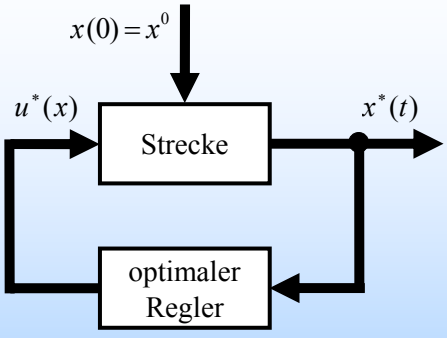
$\dot{x} = A x + B u$,

$A \in \Re^{n\,x\,n}$, $B \in \Re^{n\,x\,m}$

* bezeichnet die optimalen Größen

Was heißt optimal? In welchem Sinne? Dies muss noch präzisiert werden.
Wir führen dazu Optimierungskriterien (Gütekriterien) ein.

Optimale Regelung



Vorgehen meist in zwei Schritten:

(i) Bestimmung der optimalen Steuerung $u^*(t)$

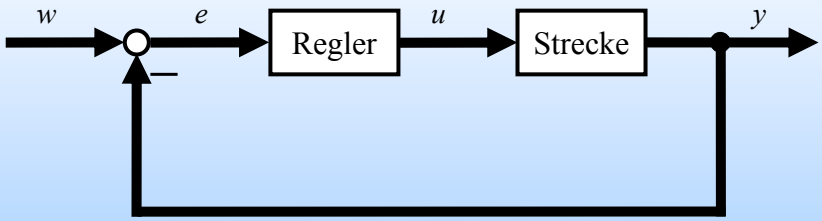
(ii) Übergang zur optimalen Regelung $u^*(x)$

Hinweis:
Es handelt sich hierbei um das Problem der optimalen Reglersynthese im Zustandsraum.

Parameteroptimierung und Strukturoptimierung

Einführendes Beispiel: Doppelintegrator $\ddot{y} = u$, $(u, y \text{ skalar})$

Standardregelkreis



Zustandsraumdarstellung der Strecke:

$$\begin{aligned} x_1 &:= y \\ x_2 &:= \dot{y} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} x_1(0) &= y(0) \\ x_2(0) &= \dot{y}(0) \end{aligned} \quad \text{gegeben}$$

$$x \in \Re^2 \quad , \quad u \in \Re^1$$

Parameteroptimierung

Reglerentwurf

Linearer Zustandsregler: $u = -\left(r_1 x_1 + r_2 x_2\right)$

Reglerparameter $r_1, r_2 > 0$

Es sei der Sollwert $w = 0$:
Daraus folgt $e = -y$ $\Longrightarrow$ $u = -\left(r_1 y + r_2 \dot{y}\right)$

$= r_1 e + r_2 \dot{e}$ PD-Regler

Geregeltes System:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -r_1 x_1 - r_2 x_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = A_R x \ , \quad A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_1 & -r_2 \end{bmatrix}$$

$x_1(0)$, $x_2(0)$ gegeben

Optimierungskriterium (Gütekriterium)

$$J = \int_0^\infty f_0\left(e(t), \dot{e}(t)\right)\, dt \overset{!}{=} \min$$

z.B. verallgemeinerte quadratische Regelfläche $f_0 = e^2 + \alpha_0 \dot{e}^2 \quad , \quad \alpha_0 > 0$

$$J = \int_0^\infty \left[x_1^2 + \alpha_0 x_2^2\right] dt \overset{!}{=} \min \qquad , \qquad \alpha_0 \text{ gegeben}$$

Damit wird

$$J = J(r_1, r_2) \overset{!}{=} \min$$

Optimierungsproblem (Parameteroptimierung):

Die Reglerentwurfsparameter r_1, r_2 sind so zu bestimmen, dass das Gütekriterium J minimal wird.

Weiteres Vorgehen:

- Lösung $x_1(r_1, r_2, t)$ und $x_2(r_1, r_2, t)$ bestimmen und in den Ausdruck für J einsetzen. Nach Integration das globale Minimum von $J(r_1, r_2)$ möglichst analytisch bestimmen.

  Oder: Allgemeiner Ansatz von AIZERMAN/ LJAPUNOV

- Ansatz: $x^T Q x \overset{!}{=} -\frac{d}{dt}\left(x^T P x\right)$ mit $P = P^T$, P unbekannt

  Ergebnis: $J(r_1, r_2) = x^T(0)\, P\, x(0)$

  Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem für die Matrix P:

  $P A_R + (P A_R)^T = -Q$, im Beispiel: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$, $A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_1 & -r_2 \end{bmatrix}$

Strukturoptimierung

Aufgabenstellung (für das einführende Beispiel):

Das System $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$ soll zeitoptimal aus dem vorgegebenen Anfangszustand $x^0 = x(0) = \left[x_1(0) \;\; x_2(0) \right]^T$ in den vorgegebenen Endzustand $x(T) = \left[0 \quad 0 \right]^T$ unter Einhaltung der Steuerungsbeschränkungen $\left| u(t) \right| \leq 1$ für alle $0 \leq t \leq T$ übergeführt werden.

Optimierungskriterium

$$J = \int_0^T dt = T \overset{!}{=} \min \;, \quad f_0 = 1 \;,$$

d.h. die Vorgangsdauer soll minimiert werden.

Wichtig:

- Bei dieser Aufgabenstellung ist die Struktur des Reglers nicht – wie im vorherigen Fall des PD-Reglers – vorgegeben. Im Mittelpunkt steht das Optimierungskriterium. System und Steuerungsbeschränkungen sind Nebenbedingungen.
- Die Lösung des Optimierungsproblems liefert die **Struktur** des Reglers mit.

Weiteres Vorgehen (für das einfache Beispiel)

- Lösung durch Plausibilität und physikalische Überlegungen: Maximale Beschleunigung bzw. maximale Verzögerung, d.h. $u = +1$ bzw. $u = -1$.
- Darstellung in der Zustandsebene.
- Später: Methoden der dynamischen Optimierung.

Ergebnis der Strukturoptimierung (am Beispiel)

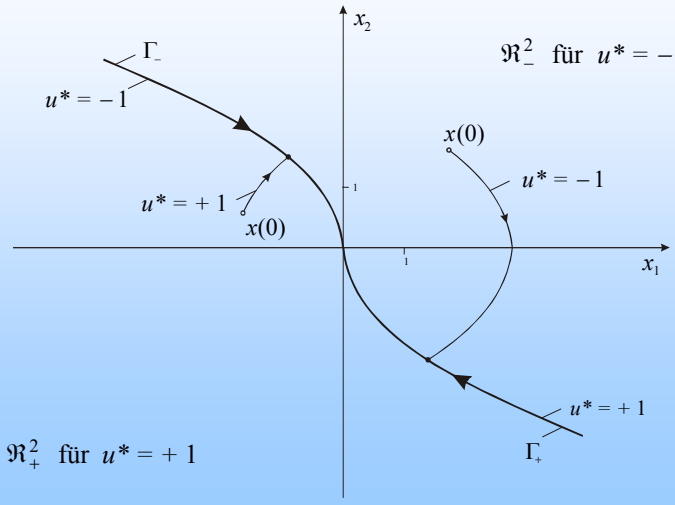
1. Schritt: Optimale Steuerung $u^*(t)$

Die physikalischen Überlegungen führen auf $u^*(t) \in \{-1,\ +1\}$. Man bezeichnet diesen Typ als **Bang-Bang Steuerung**.

Die optimale Lösung gewinnt man aus den Trajektorien für $u = +1$ und $u = -1$ in der Zustandsebene (vgl. Übungen).

Für das Beispiel gilt:
Es wird höchstens ein einziges Mal umgeschaltet.

Schaltkurve und optimale Reglersynthese



Schaltkurve Γ in der Zustandsebene: $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$

$$\Gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : \; x_1 = \frac{1}{2} x_2^{\,2} \quad , \quad x_2 \le 0 \right\}$$

$$\Gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : \; x_1 = -\frac{1}{2} x_2^{\,2} \quad , \quad x_2 \ge 0 \right\}$$

Γ_+ und Γ_- heißen Zieltrajektorien.

Γ_+ wird mit $u = +1$ und
Γ_- wird mit $u = -1$ durchlaufen.

Ergebnis:
Die Struktur der optimalen Steuerung ist vom Typ Bang-Bang.

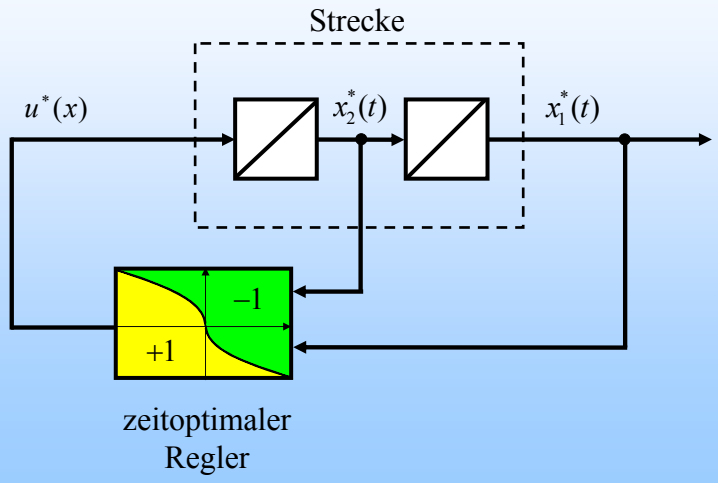
2. Schritt: Optimale Regelung $u^*(x)$

$$u^*(x_1,\ x_2) = \begin{cases} +1 \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \Gamma_+ \cup \Re_+^2 \\ \quad \text{mit } \Re_+^2 = \left\{(x_1, x_2) : x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2|\right\} \\ -1 \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \Gamma_- \cup \Re_-^2 \\ \quad \text{mit } \Re_-^2 = \left\{(x_1, x_2) : x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2|\right\} \end{cases}$$

Ergebnis:

Damit ist für jeden Punkt des Zustandsraumes (hier: Zustandsebene) das optimale Regelgesetz festgelegt. Man spricht dann auch von der **optimalen Reglersynthese** für den gesamten Zustandsraum.

Optimale Reglersynthese



zeitoptimaler Regler

Folgerungen aus den Beispielen

Parameteroptimierung:

- Zustand x nicht beschränkt ,
- Anfangszustand mit $x(0) = x^0$ vorgegeben.
- Steuerung u nicht beschränkt , $u(t)$ stetig.
- Asymptotische Stabilität des geregelten Systems wurde vorausgesetzt.

Strukturoptimierung:

- Zustand x nicht beschränkt ,
- Anfangszustand $x(0) = x^0$ **und** Endzustand $x(T) = x^T$ waren vorgegeben.
- Steuerung u beschränkt , $u(t)$ unstetig.

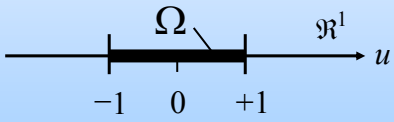
Beschränkte und unstetige Steuerungen

Beschränkte Steuerungen:

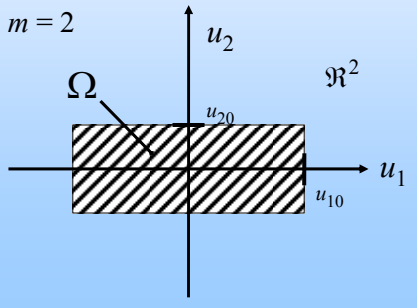
Steuerung $u \in \Omega \subset \Re^m$, Ω Steuerbereich

Beispiele:

$m = 1$



$m = 2$

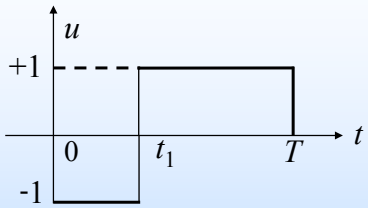


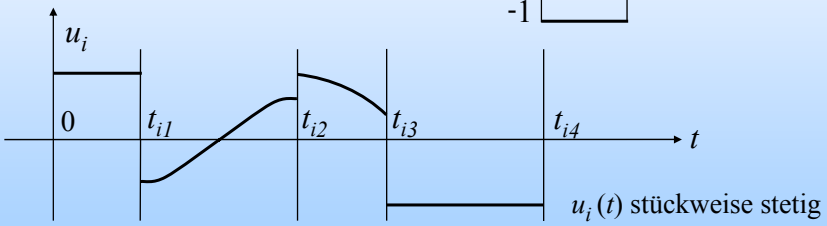
Steuerbereich Ω :

Gebiet mit Rand ohne Löcher

Unstetige Steuerungen:

Beispiele: $u \in \Omega \subset \Re^1$





$u_i(t)$ stückweise stetig

Zulässige Steuerung (Definition):

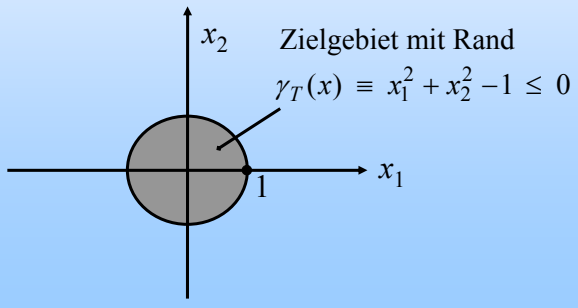
Eine stückweise stetige Steuerung $u(t)$ mit $u \in \Omega \subset \Re^m$ heißt zulässige Steuerung.

Einige Erweiterungen

Zielmannigfaltigkeit:

- Der Endzustand $x(T)$ liege auf einer $(n-1)$-dimensionalen glatten Zielmannigfaltigkeit $\gamma_T(x) = 0$, d.h. $\gamma_T(x(T)) = 0$.

  Beispiel: $n = 2$



Zeitdiskretisierung:

- Zeitdiskretes System $x^{k+1} = g\left(x^k, u^k\right)$, $x^k := x\left(t_k\right)$

Aus $\dot{x} = f(x,u)$ folgt durch Diskretisierung

$$\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = f\left[x(t_k), u(t_k)\right]$$

$$x^{k+1} = x^k + f\left(x^k, u^k\right) \cdot \Delta t \quad \text{mit} \quad \Delta t = t_{k+1} - t_k$$

Optimierungsproblem der dynamischen Optimierung

Bestimme $u \in \Omega \subset \Re^m$ derart, dass das System $\dot{x} = f(x,u)$ aus dem vorgegebenen Anfangszustand $x(0)$ in den Endzustand $x(T)$ übergeführt wird und dabei das Gütekriterium $J = J(u)$ seinen kleinstmöglichen Wert annimmt.

In Kurzdarstellung:

$$x(0) \xrightarrow[J = J(u) \overset{!}{=} \min]{\dot{x} = f(x\,,\,u)} x(T) \qquad \begin{array}{l} x \in \Re^n \\ u \in \Omega \subset \Re^m \end{array}$$

Sollen außerdem konstante Parameterwerte $w \subset \Re^r$ des Systems $\dot{x} = f(x,u,w)$ mit optimiert werden, so spricht man von simultaner Optimierung von Steuerungen und Parametern.

Allgemeines Gütekriterium

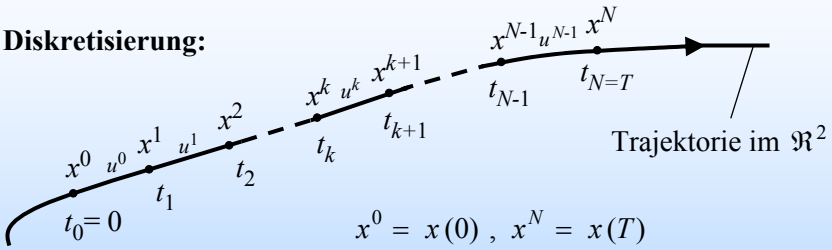
$$J(u) = h_0\left[x(T)\right] + \int_0^T f_0(x,u)\,dt \overset{!}{=} \min$$

- Vorgangsdauer T fest oder frei
- Randbedingungen: $x(0)$ vorgegeben
  $x(T)$ fest, frei oder auf Zielmannigfaltigkeit

$J(u)$ wird als Funktional bezeichnet. Für jede Strategie $u = u(t)$ liefert das Gütekriterium einen anderen Wert.

Diskretisierung des Optimierungsproblems

Diskretisierung:



$$x^0 = x(0)\,,\quad x^N = x(T)$$
$$\Delta t = t_{k+1} - t_k \quad,\ k = 0,\ \ldots,\ N-1$$

Gütekriterium: $$J(u^k) = h_0\left[x^N\right] + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x^k, u^k)\cdot\Delta t \overset{!}{=} \min$$

System: $$x^{k+1} = x^k + f(x^k, u^k)\cdot\Delta t$$

Verfahren der dynamischen Optimierung

- **Klassische Variationsrechnung (EULER)**

  - kein Konzept gesteuerter und geregelter Systeme
  - technische Anwendungen im Hintergrund
  - keine Beschränkungen der Variablen
  - sehr starke Differenzierbarkeitsvoraussetzungen

- **Dynamische Programmierung (BELLMAN)**

  - Konzept gesteuerter Systeme liegt zugrunde
  - geeignet für technische Anwendungen
  - universellstes Optimierungsverfahren
  - geeignet zur numerischen Behandlung

- **Maximumprinzip (PONTRJAGIN)**

  - ebenfalls Konzept gesteuerter Systeme
  - gebunden an gewöhnliche Differentialgleichungen
  - Beschränkungen der Variablen sind möglich
  - im Wesentlichen ein analytisches Verfahren

Anmerkung:

Dynamische Programmierung und Maximumprinzip lassen sich aus der klassischen Variationsrechnung herleiten und umgekehrt.

Schwerpunkt dieser Vorlesung

- **Dynamische Programmierung und Maximumprinzip**
  - kontinuierliche zeitinvariante Systeme $\dot{x} = f(x, u)$
  - zeitdiskrete Systeme $x^{k+1} = g(x^k, u^k)$
- **Spezielle Optimierungsprobleme**
  - lineare Systeme mit quadratischen Gütekriterien
  - zeitoptimale lineare Systeme
  - ausgewählte Anwendungen

2 Dynamische Programmierung nach BELLMAN

Vorgehen

- Zunächst als numerisches Verfahren für diskrete deterministische Systeme,
- danach Übergang zum analytischen Verfahren für kontinuierliche deterministische Systeme.

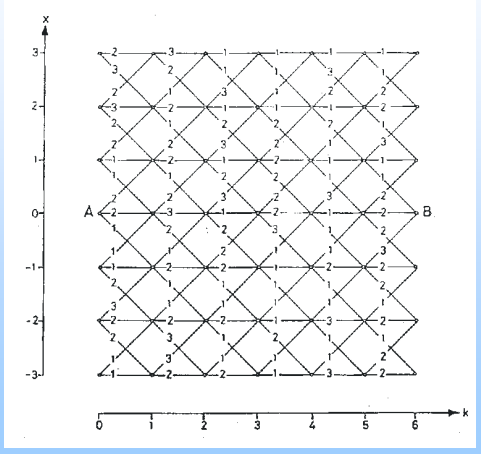
Dynamische Programmierung als numerisches Verfahren

Wegenetz als einleitendes Beispiel

Aufgabe:
Für ein vorgegebenes Wegenetz soll mit minimalen Kosten von einem vorgegebenen Anfangspunkt *A* ein vorgegebener Endpunkt *B* erreicht werden.

Vorgaben:
- Bewegung nur von links nach rechts.
- Verbindungslinien (Richtungen) entsprechen den Wegemöglichkeiten (Entscheidungen).
- Zahlen im Wegenetz entsprechen den Kosten für die einzelnen Wegstrecken.

Wegenetz (gegeben)



Zustand:

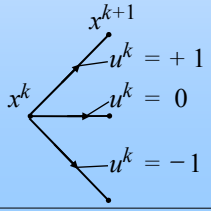
$$x^k \in \Xi \subset \Re^1$$

$$\Xi = \left\{ x^k : \left| x^k \right| \le 3 \right\}$$

Entscheidungen:

$$u^k \in \Omega \subset \Re^1$$

$$\Omega = \left\{ u^k : +1, 0, -1 \right\}$$



Bezeichnungen für die Lösung der Optimierungsaufgabe

Punkt $P := P(x^k)$, $x^k := x[k]$, k Stufe, Zeitmarkierung

Anfangszustand: $k = 0 \Rightarrow x^0$ (Punkt A)

Endzustand: $k = 6 \Rightarrow x^6$ (Punkt B)

Kosten: $G^{6-k}(x^k)$
minimale Kosten von einem Punkt $P(x^k)$
des Wegenetzes zum Endpunkt $B(x^6)$

Damit ergibt sich:

- $k = 0$: $G^6(x^0)$ gesuchte minimale Kosten
- k allgemein:

  $$G^{6-k}(x^k) = \min_{u^k} \left\{ g_0(x^k, u^k) + G^{6-(k+1)}(x^{k+1}) \right\},$$

  wobei
  $g_0(x^k, u^k)$ die Kosten von x^k nach x^{k+1} sind
- $k = 6$: $G^0(x^6) = 0$ Endkosten

  Beachte: Im Falle einer Endkostenbewertung ist $G^0(x^6) \neq 0$.

N-stufiger Entscheidungsprozess

Entscheidungen (im Beispiel ist $N = 6$):

u^k Entscheidung in der k-ten Stufe,
$u^k(x^k)$ gibt die Richtung an, um von $P(x^k)$ mit geringsten Kosten nach B zu gelangen.

System:

$$x^{k+1} = g(x^k, u^k)$$

Für das Beispiel hier gelte: $x^{k+1} = x^k + u^k$

Lösungsmöglichkeiten

- Vom Anfangspunkt *A* aus alle möglichen Wege zum Endpunkt *B* ermitteln und dann den kostengünstigsten auswählen.
- Das Problem vom Endpunkt *B* her aufrollen (BELLMAN).

Optimalitätsprinzip von BELLMAN

Jedes Endstück einer optimalen Trajektorie ist für sich optimal.

Oder:

Alle Punkte auf einer optimalen Trajektorie sind mögliche Anfangspunkte für diese Trajektorie.

Sukzessive Optimierung

Schrittweise Rückwärtsrechnung vom Endpunkt *B* aus

(1) Endkosten: $G^0(x^6) = 0$
$k = 6$

(2) Letzter Schritt: $G^1(x^5) = \min_{u^5} \left\{ g_0(x^5, u^5) \right\}$
$k = 5$

Es gibt hier keine Auswahl, da für alle Kandidaten x^5 jeweils nur eine einzige Möglichkeit zur Verfügung steht, um zum Endpunkt *B* zu gelangen. Es erfolgt also keine echte Minimierung bezüglich u^5 .

(3) Vorletzter Schritt: $k = 4$

$$G^2(x^4) = \min_{u^4} \left\{ g_0(x^4,\, u^4) + G^1(x^5) \right\}$$

Hier findet eine echte Minimierung statt.

Z.B. für $x^4 = 0$ ergibt sich:

$$\min_{u^4} \begin{Bmatrix} u^4 = +1 & : & 3+1=4 \\ u^4 = \;\; 0 & : & 1+2=3 \\ u^4 = -1 & : & 1+3=4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (i) & u^4 = 0\,, \\ (ii) & G^2(x^4) = 3 \end{matrix}$$

(4) Allgemein: $k = 0,\, 1,\, \ldots\, 5$

$$G^{6-k}(x^k) = \min_{u^k} \left\{ g_0(x^k,\, u^k) + G^{6-(k+1)}\,(x^{k+1}) \right\}$$

(5) Minimale Gesamtkosten: $k = 0$

$$G^6(x^0) = \min_{u^0,\, u^1,\, \ldots\, ,\, u^5} \left\{ g_0(x^0,\, u^0) + g_0(x^1,\, u^1) + \ldots + g_0(x^5,\, u^5) \right\}$$

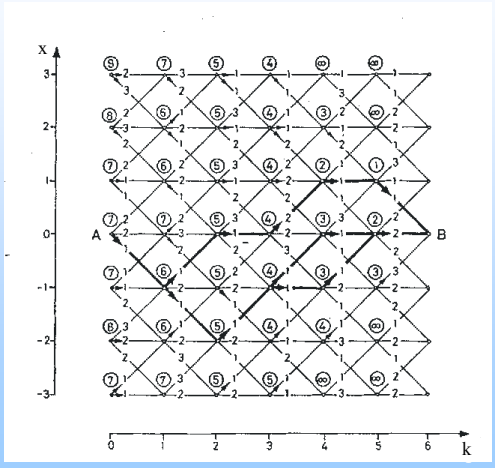
$$= \min_{u^0,\, u^1,\, \ldots\, ,\, u^5} \sum_{k=0}^{5} g_0(x^k,\, u^k)$$

Ergebnis: Es ergeben sich mehrere Lösungen mit denselben minimalen Kosten $G^6(x^0) = 7$.

(Siehe Graphik mit den optimalen Trajektorien).

Optimale Trajektorien

Ergebnis der Rückwärtsrechnung für festen Anfangspunkt *A* und festen Endpunkt *B*.



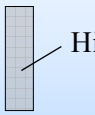
Hinweis:
Durch ○ sind die jeweiligen Kosten bis zum Endpunkt *B* angegeben; ∞ bedeutet, dass der Endpunkt *B* nicht erreichbar ist.

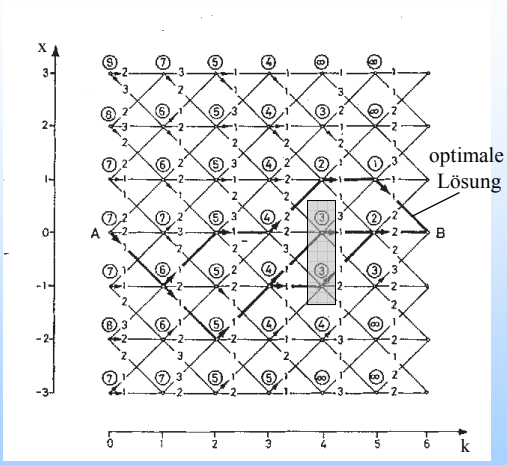
Beachte:

Die optimale Lösung ist nicht eindeutig.

Zustandsbeschränkungen

Hier: Einfügen eines Hindernisses





Ergebnis:

- Die optimale Lösung wird eindeutig.
- Die numerische Lösung wird sogar einfacher.
- Beschränkungen in Zustand und Steuerung sind für die Dynamische Programmierung eher problemlos.

Allgemeiner Fall der Dynamischen Programmierung

Allgemeine Rekursionsformel für einen N-stufigen Entscheidungsprozess.

Minimale Kosten von k bis N:

$$G^{N-k}(x^k) = \min_{u^k} \left\{ g_0(x^k,\, u^k) + \underbrace{G^{N-(k+1)}(x^{k+1})}_{\text{minimale Kosten von } k+1 \text{ bis } N} \right\},\quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1$$

mit $\quad x^{k+1} = g(x^k, u^k)$

Minimale Gesamtkosten ($k = 0$):

Die Auswertung erfolgt von Ende her (rückwärts), man beginnt mit $k = N - 1$. Damit ergibt sich

$$G^N(x^0) = \min_{u^0} \left\{ g_0(x^0, u^0) + \min_{u^1} \left\{ g_0(x^1, u^1) + \ \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + \min_{u^{N-1}} \left\{ g_0(x^{N-1}, u^{N-1}) \ \right\} \ \right\} \right\} + G^0(x^N)$$

oder

$$G^N(x^0) = \min_{u^0, u^1, \ldots, u^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} g_0(x^k,\, u^k) + G^0(x^N)$$

Allgemeine Rekursionsformel

Übergang zu den früheren Bezeichnungen:

$$G \rightarrow J \quad , \qquad g_0 \rightarrow f_0 \cdot \Delta t$$

Damit lautet die allgemeine Rekursionsformel:

$$J^{N-k}(x^k) = \min_{u^k} \left\{ f_0(x^k, u^k) \cdot \Delta t \; + \; J^{N-(k+1)}(x^{k+1}) \right\} ,$$

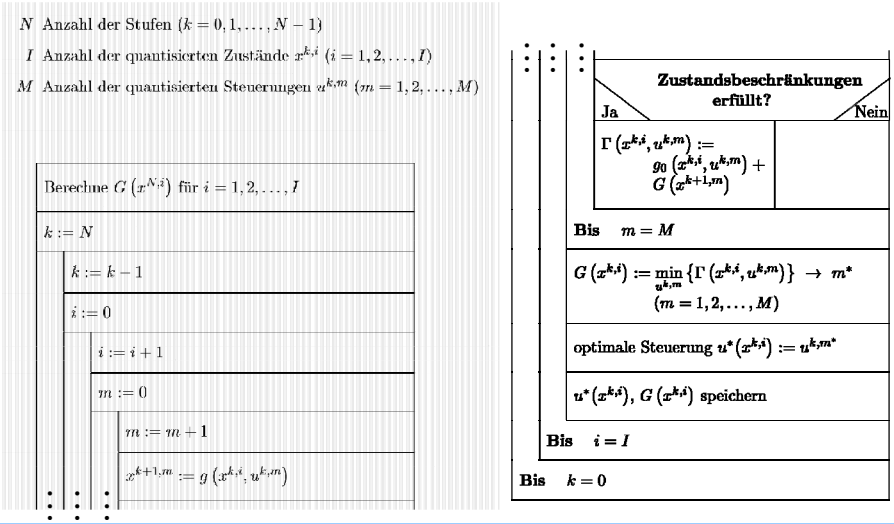
$$k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$\text{mit} \quad x^{k+1} = x^k + f(x^k, u^k) \cdot \Delta t$$

Nachfolgend ist ein Struktogramm zur Auswertung der Rekursionsformel angegeben.

Struktogramm zur dynamischen Programmierung nach Bellman

N Anzahl der Stufen $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$
I Anzahl der quantisierten Zustände $x^{k,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, I)$
M Anzahl der quantisierten Steuerungen $u^{k,m}$ $(m = 1, 2, \ldots, M)$



Bemerkungen zum numerischen Verfahren

Vorteile:

- Keine Existenz- und Eindeutigkeitsfragen sind zu beantworten, solange eine Steuerfolge u^k existiert.
- Ein direktes Suchverfahren, welches ein absolutes Minimum garantiert.
- Beschränkungen von Zustand x und Steuerung u verringern oft den Rechenaufwand.
- Die optimale Steuerfolge u^{*k} stellt eine echte Regelung $u^{*k}(x^k)$ dar.
- Die optimale Lösung ist eingebettet und macht ideales Ausregeln von Störungen möglich.

Nachteile:

- Fluch der Dimensionen (BELLMAN).
- Die Dimensionen *n* und *m* von Zustands- und Steuervektor gehen exponentiell in die Anzahl der Rechenoperationen ein.
- Eine Anpassung an das spezielle Problem ist notwendig.
- So elegant das Konzept der Dynamischen Programmierung ist, bei der Umsetzung als numerisches Verfahren stößt man rasch an Grenzen.

Dynamische Programmierung als analytisches Verfahren

Wir betrachten zeitvariante Systeme $x \in \Re^n$, $u \in \Omega \subset \Re^m$

System: $\dot{x} = f(x, u, t)$; $x(t_0) = x^0$ gegeben

Gütekriterium ohne Endkosten

Kriterium: $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)\, d\,t \overset{!}{=} \min$

Diskretisierung

- Kontinuierlich: x, t … $x + \Delta x, t + \Delta t$
- Diskret: x^k, t_k … x^{k+1}, t_{k+1}

System:

$$x^{k+1} = x^k + f(x^k, u^k, t_k) \cdot \Delta t \quad ; \quad x(t_0) = x^0, x(t_f) = x^N$$

Kriterium:

$$J^N(x^0, t_0) = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x^k, u^k, t_k) \cdot \Delta t \overset{!}{=} \min .$$

Rekursionsformel zur Dynamischen Programmierung für nichtlineare Systeme

$$J^{N-k}(x^k, t_k) = \min_{u^k} \left\{ f_0(x^k, u^k, t_k) \cdot \Delta t + J^{N-(k+1)}(x^{k+1}, t_{k+1}) \right\}$$

Übergang zum kontinuierlichen Fall:
Minimale Kosten von $(x,\ t)$ bis zum Ende (x^f, t_f)

$$J(x,t) = \min_{u} \left\{ f_0(x,\ u,\ t) \cdot \Delta t + \underbrace{J(x + \Delta x,\ t + \Delta t)}_{\text{minimale Kosten von } (x + \Delta x,\ t + \Delta t) \text{ bis zum Ende}} \right\}$$

Weiteres Vorgehen:

- Taylorreihenentwicklung von $J(x + \Delta x, t + \Delta t)$
- Grenzübergang $\Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0$

Taylorreihenentwicklung von $J(x + \Delta x,\ t + \Delta t)$

$$J(x + \Delta x,\ t + \Delta t) = J(x,\ t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial J}{\partial t}\right) \cdot \Delta t + \ldots$$

… Glieder höherer Ordnung

Definition: $$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T = \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial x_n}\right)$$

Hinweis: Der Gradient $\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)$ ist als Spaltenvektor definiert.
Durch das hochgestellte T wird die Transposition bezeichnet.

Nach Einsetzen in die Rekursionsformel ergibt sich

$$J(x,t) = \min_u \left\{ f_0(x,u,t)\cdot\Delta t + \left[J(x,t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)\cdot\Delta t + \ \ldots \right] \right\}$$

... Glieder höherer Ordnung

Jetzt:

(i) Division mit $\Delta t \neq 0$

(ii) Grenzübergang $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ ergibt $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to \dfrac{d x}{d t}$

(iii) Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

Damit ergibt sich aus der Rekursionsformel für den kontinuierlichen Fall

$$0 = \min_u \left\{ f_0(x,u,t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot \frac{d x}{d t} + \frac{\partial J}{\partial t} \right\} \quad .$$

Mit $\dot{x} = f(x,u,t)$ folgt daraus die partielle Differentialgl. für $J(x,t)$

$$\min_u \left\{ f_0(x,u,t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot f(x,u,t) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\} = 0 \quad , \quad u \in \Omega$$

oder

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \min_u \left\{ f_0(x,u,t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot f(x,u,t) \right\} \quad , \quad u \in \Omega$$

Dies ist die bekannte **HAMILTON-JACOBI-BELLMAN (HJB) Gleichung**.

Beispiel zur HJB Gleichung

Regelung einer Strecke 1. Ordnung und quadratisches Gütekriterium

Strecke: $\frac{dx}{dt} = a\,x + b\,u\ ,\ x \in \Re^1\ ,\ u \in \Re^1\ ,\ a,\ b > 0$ geg.,
d.h. keine explizit vorgegebenen Beschränkungen.

Nebenbedingungen: Randbedingungen: $x(0) = x^0$ vorgegeben ,
$x(T)$ frei
Vorgangsdauer: T fest vorgegeben

Kriterium: $J = \int_0^T (\alpha\,x^2 + u^2)\,dt \overset{!}{=} \min \quad , \quad \alpha > 0$ vorgegeben ,

Zustand und Steuerung werden quadratisch gewichtet.

Vorgehen bei der Lösung der HJB Gleichung

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ f_0(x, u, t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot f(x, u, t) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\} = 0$$

Hier: $f_0 = \alpha\,x^2 + u^2 \quad , \quad f = a\,x + b\,u \quad , \quad \Omega \equiv \Re^1$

Damit: $\min_{u \in \Re^1} \left\{ (\alpha\,x^2 + u^2) + \frac{\partial J}{\partial x}(a\,x + b\,u) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\} = 0$

Schritt 1:

- Optimale Wahl von u aus

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{(\alpha x^2 + u^2) + \frac{\partial J}{\partial x}(a x + b u) + \frac{\partial J}{\partial t}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2u + b\frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad u^* = -\frac{b}{2}\cdot\frac{\partial J}{\partial x}$$

Wegen $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left\{\ldots\right\} = 2 > 0$ liegt ein Minimum vor.

- Einsetzen von $u = u^*$ in die HJB Gleichung liefert

$$-\frac{b^2}{4}\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + a x \cdot \frac{\partial J}{\partial x} + \alpha x^2 + \frac{\partial J}{\partial t} = 0$$

Dies ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für $J = J(x, t)$.

Schritt 2: Lösung der partiellen Differentialgleichung für $J(x, t)$

(i) Ansatz: $J(x, t) = c(t) \cdot x^2$

Produktansatz mit unbekannter Funktion $c(t)$.

Mit $\left(\dfrac{\partial J}{\partial x}\right) = 2c \cdot x$, $\left(\dfrac{\partial J}{\partial t}\right) = \dot{c} \cdot x^2$ ergibt sich

$$\left(-b^2c^2 + 2ac + \alpha + \dot{c}\right) x^2 = 0$$

Diese Beziehung muss für alle x gelten, also folgt daraus

$$\dot{c}(t) = b^2c^2(t) - 2ac(t) - \alpha$$

Dies ist eine **RICCATIsche Differentialgleichung**.

Randbedingung:

Aus $J(x,t) = \int_t^T f_0(x,t)\,dt$ folgt $J(x,T) = 0$

und damit aus dem Ansatz

$$J(x(T),T) = c(T) \cdot \underbrace{x^2(T)}_{\neq 0} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad c(T) = 0$$

Damit ist die Randbedingung für die RICCATIsche Differentialgleichung bekannt.

(ii) Lösung der RICCATIschen Differentialgleichung

$$\dot{c}(t) = b^2 c^2(t) - 2\,a\,c(t) - \alpha \quad , \quad c(T) = 0$$

Ergebnis (ohne Herleitung):

$$c(t) = \alpha \cdot \frac{e^{s_1(t-T)} - e^{s_2(t-T)}}{s_2 \cdot e^{s_1(t-T)} - s_1 \cdot e^{s_2(t-T)}}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= -a + \sqrt{a^2 + \alpha b^2} > 0 \\ s_2 &= -a - \sqrt{a^2 + \alpha b^2} < 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } a > 0$$

Schritt 3: Optimale Regelung $u^* = -\frac{b}{2} \cdot \frac{\partial J}{\partial x} = -b \cdot c(t) \cdot x$

mit $c(t)$ aus Schritt 2.

Ergebnis: RICCATI Regler

Linearer Zustandsregler mit **zeitvariabler** Verstärkung.

Schritt 4: Optimale Trajektorie durch Lösung der Differentialgleichung

$\dot{x} = a\,x + b\,u$ mit u = u* aus Schritt 3.

Die Integration von

$\dot{x} = \left(a - b^2 \cdot c(t)\right) x \quad , \quad x(0) = x^0$

liefert

$x^*(t) = x^0 \cdot e^{\int_0^t \left[a - b^2 \cdot c(t)\right] dt}$

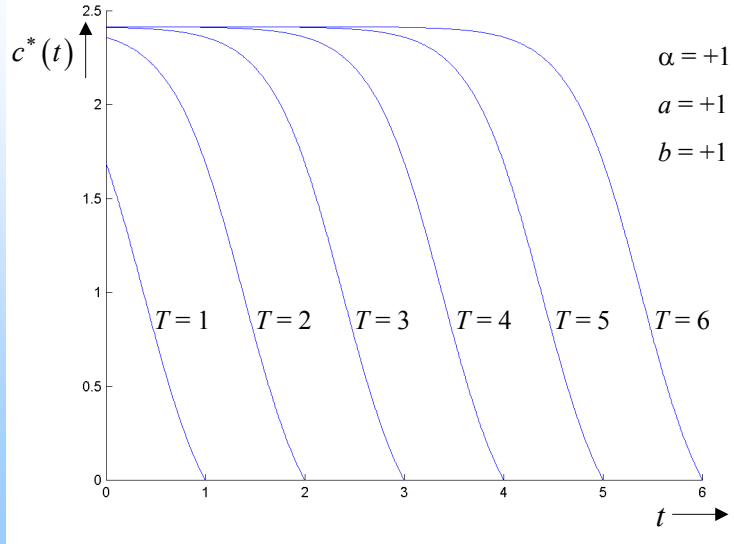
Schritt 5: Als optimale Steuerung $u^*(t)$ mit der Lösung für $x^*(t)$ aus Schritt 4 ergibt sich

$$u^*(t) = -b \cdot c(t) \cdot x^*(t) \; .$$

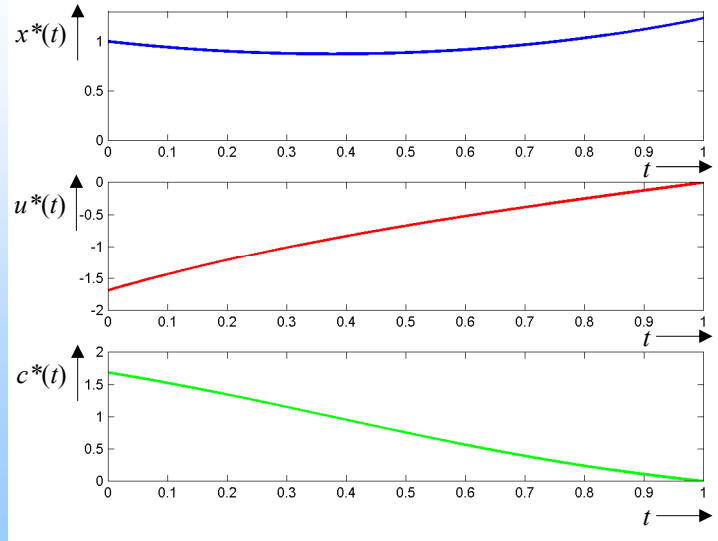
Hinweis:
Für dieses einfache Beispiel konnte eine geschlossene analytische Lösung der HJB Gleichung ermittelt werden. Dies ist nur in ganz wenigen Fällen möglich.

Nachfolgend sind die Lösungen der RICCATIschen Differentialgleichung für T = 1, 2, 3, 4, 5, 6 sowie die optimalen Lösungen $x^*(t)$ und $u^*(t)$ für ausgewählte Parameterkombinationen α sowie a und b dargestellt.

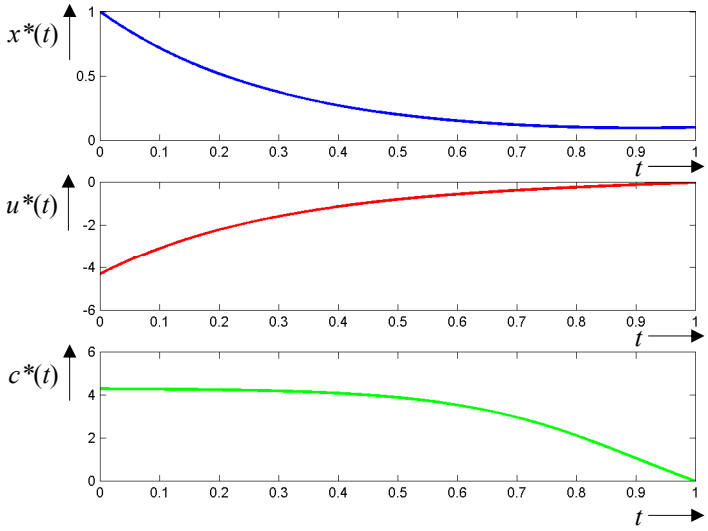
Lösung der RICCATIschen Differentialgleichung für $T < \infty$



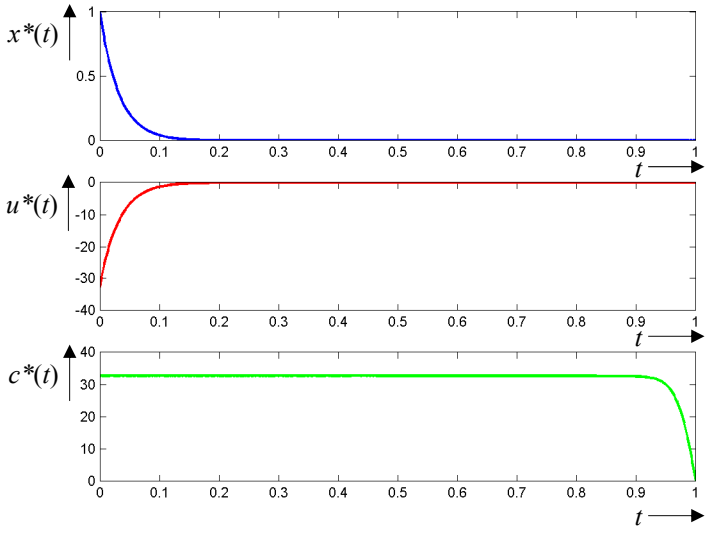
Optimale Lösung für T=1, $\alpha = 1$, a = 1, b = 1



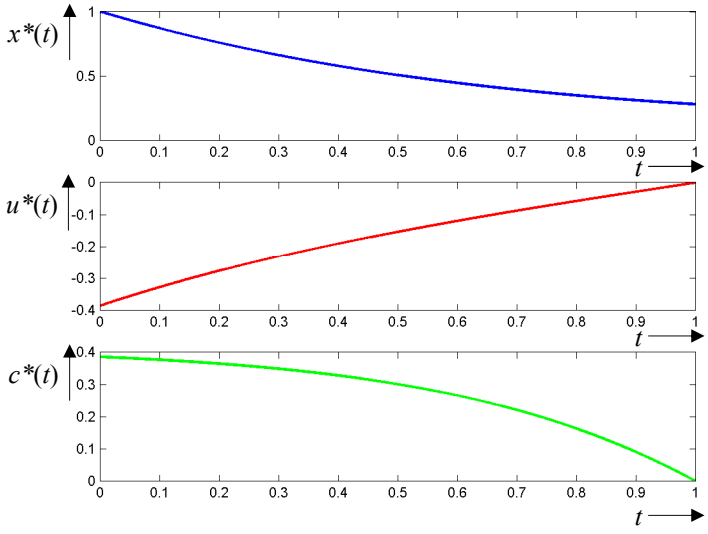
Optimale Lösung für T=1, $\alpha = 10$, a = 1, b = 1



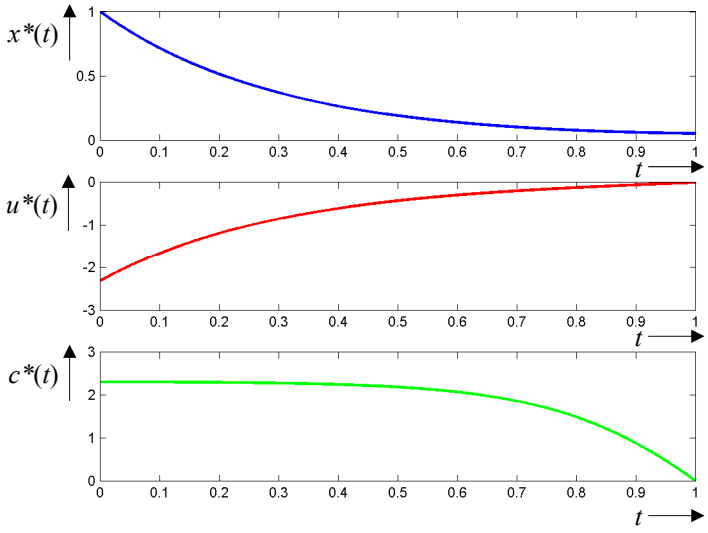
Optimale Lösung für T=1, $\alpha = 1000$, a = 1, b = 1



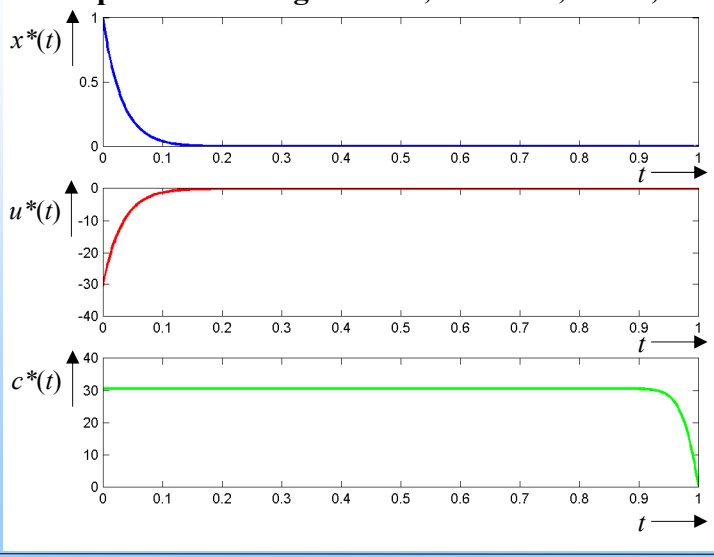
Optimale Lösung für T=1, $\alpha = 1$, $a = -1$, b = 1



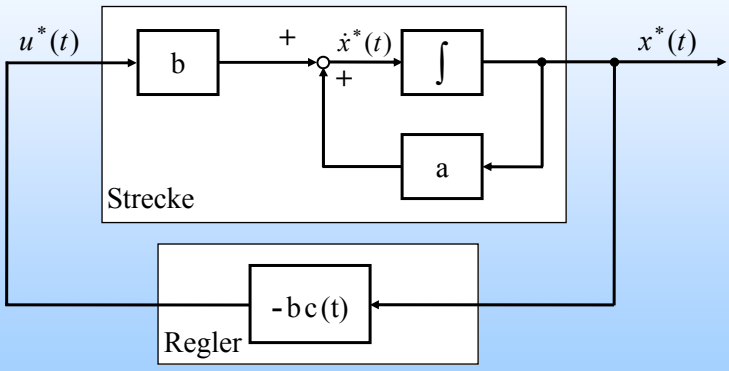
Optimale Lösung für T=1, $\alpha = 10$, a = -1, b = 1



Optimale Lösung für T=1, $\alpha = 1000$, a = -1, b = 1



Blockschaltbild der optimalen Regelung



Linearer Zustandsregler mit zeitvarianter Verstärkung

Schema für das Vorgehen zur Berechnung optimaler Steuerungen und Regelungen aus der HAMILTON-JACOBI-BELLMAN Gleichung

Gegeben: System

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad , \quad x = x(t) \, , \, x \in \Re^n$$
$$u = u(t) \, , \, u \in \Omega \subset \Re^m$$

Optimierungskriterium

$$J = h_0\left[x(t_f) \, , \, t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)\, d\, t \stackrel{!}{=} \min$$

HJB Gleichung

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ f_0(x, u, t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot f(x, u, t) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\} = 0$$

Schema

Schritt 1: Minimiere $\left\{ f_0(x, u, t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot f(x, u, t) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\}$

bezüglich $u \in \Omega$.

Dies führt auf $u^* = u^*\left(\frac{\partial J}{\partial x}, x, t\right)$.

Schritt 2: Löse die partielle Differentialgleichung für $J(x, t)$

$$f_0\left(x, u^*\left(\frac{\partial J}{\partial x}, x, t\right), t\right) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot f\left(x, u^*\left(\frac{\partial J}{\partial x}, x, t\right), t\right) + \frac{\partial J}{\partial t} = 0$$

Dies ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für

$$J(x, t) = h_0\left[x(t_f), t_f\right] + \int_t^{t_f} f_0(x, u^*, t) \cdot d\,t$$

mit der Endbedingung

(a) $J(x, t_f) = 0$ für $h_0 = 0$,

(b) $J(x, t_f) = h_0\left[x(t_f), t_f\right]$ für $h_0 \neq 0$.

Schritt 3: Setze das Ergebnis $J(x, t)$ von Schritt 2 in u^* von Schritt 1 ein, um das optimale Regelgesetz in der Form $u^* = u^*(x, t)$ zu erhalten.

Schritt 4: Setze das Ergebnis $u^*(x, t)$ von Schritt 3 in das System $\dot{x} = f\left(x, u^*(x, t), t\right)$, $x(t_0) = x^0$ ein, um durch Integration die optimale Trajektorie $x^* = x^*(t)$ zu erhalten.

Schritt 5: Einsetzen der Lösung $x^*(t)$ von Schritt 4 in $u^*\left(x^*, t\right)$ von Schritt 3 führt auf die optimale Steuerung in der Form $u^* = u^*(t)$.

RICCATI Regler für Vorgangsdauer $T \to \infty$

Spezialfall $T \to \infty$ für das Beispiel

Es ist: $c(t) = c(t\,;t_0,t_f) = c\,(t\,;0\,,T)$ Hier: $t_0 = 0$, $t_f = T$

Für $T \to \infty$ gilt $\lim\limits_{T\to\infty} c\,(t;0,T) = \lim\limits_{T\to\infty} c\,(0;0,T)$

Hier: $$c\,(0\,;0\,,T) = -\frac{s_1 \cdot s_2}{b^2} \cdot \frac{e^{-s_1 T} - e^{-s_2 T}}{s_2 \cdot e^{-s_1 T} - s_1 \cdot e^{-s_2 T}}$$

Also: $$\lim_{T\to\infty} c\,(0;0,T) = -\frac{s_1 \cdot s_2}{b^2} \cdot \frac{1}{s_1} \text{ wegen } s_1 > 0$$

$$= \frac{1}{b^2} \cdot \left(a + \sqrt{a^2 + \alpha \cdot b^2}\right) > 0$$

Damit:

Für $T \to \infty$ wird $c\,(t) = c_0 = const > 0$.

Ergebnis:

- Wir erhalten einen linearen Zustandsregler $u^* = -\,b\,c_0\,x^*$ mit **konstanter** Verstärkung.
- Die optimalen Trajektorien lauten

  $x^*(t) = x^0 \cdot e^{-\sqrt{a^2 + a\,b^2}\cdot t}$, x^0 gegeben gegeben

Weitere Folgerungen für $T \to \infty$

Aus dem Ansatz $J(x, t) = c(t)\, x^2$ wird dann $J(x) = c_0 \cdot x^2$
und damit folgendes Vorgehen möglich:

- Mit $c(t) = c_0 = const$ folgt aus der RICCATIschen Differentialgleichung

$$b^2 c_0^2 - 2\, a\, c_0 - \alpha = 0.$$

- Dies ist die bekannte **algebraische** RICCATI-Gleichung.
- Von den beiden Werten für c_0 ist derjenige zu nehmen, welcher auf eine asymptotisch stabile Lösung für $x^*(t)$ führt.

Lineare Systeme mit quadratischem Gütekriterium

Andere Bezeichnungen für dieses Optimierungsproblem:
- LQ-Problem
- Energieoptimale lineare Systeme

Optimierungsproblem

$$x(0) \xrightarrow[J = J(u) \overset{!}{=} \min]{\dot{x} = Ax + Bu} x(T)$$

$x \in \Re^n$, $u \in \Re^m$
$A \in \Re^{n\,x\,n}$, $B \in \Re^{n\,x\,m}$
$x(0)$ vorgegeben, $x(T)$ frei
T vorgegeben

Gütekriterium:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \left[x^T(t)\, Q\, x(t) + u^T(t)\, R\, u(t) \right] dt$$

$Q \in \Re^{n\,x\,n}$, $R \in \Re^{m\,x\,m}$
$Q = Q^T \geq 0$ (pos. semidefinit)
$R = R^T > 0$ (pos. definit)

Lösung des Optimierungsproblems

Vorgehen nach Schema

Schritt 1:

$$\min_{u \in \Re^m} \left\{ \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T \cdot (A x + B u) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\}$$

Wegen $u \in \Re^m$ lautet die notwendige Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial u} \{ \ldots \} = 0$$

Notwendige Optimalitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{2} u^T R u + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T \cdot B u \right\} = 0$$

Daraus folgt $$R u + \cdot B^T \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

Dies führt auf $$u = u^* = -R^{-1} B^T \cdot \frac{\partial J}{\partial x}$$

Wegen $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \{ \ldots \} = R$ und $R > 0$ liegt ein Minimum vor.

Schritt 2:

Nichtlineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für $J(x, t)$

$$\frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T \cdot B \underbrace{(R^{-1})^T}_{R^{-1}} \underbrace{R \cdot R^{-1}}_{I} B^T \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T \cdot \left(A x - B R^{-1} B^T \cdot \frac{\partial J}{\partial x} \right) + \frac{\partial J}{\partial t} = 0$$

bzw.

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T B R^{-1} B^T \frac{\partial J}{\partial x} + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T \cdot A x + \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \qquad (*)$$

Lösungsansatz: $J(x, t) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} x^T \cdot P(t) \cdot x$ mit $P(t) \stackrel{!}{=} P^T(t)$

Daraus: $\frac{\partial J}{\partial x} = P(t) x$, $\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2} x^T \cdot \dot{P}(t) \cdot x$

Eingesetzt in $(*)$ ergibt

$$-\frac{1}{2} x^T P \cdot B R^{-1} B^T \cdot P x + \underbrace{x^T P \cdot A x}_{\frac{1}{2} x^T \left(P A + A^T P \right) x} + \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} x^T \dot{P} x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^T \left\{ -P B R^{-1} B^T P + P A + A^T P + Q + \dot{P} \right\} x = 0$$

Diese Beziehung muss für alle x erfüllt sein, also gilt $\{\ldots\} = 0$.
Wegen $J\left(x(T), T\right) = 0$ folgt aus dem Ansatz $P(T) = 0$.

Damit erhält man schließlich

$$\left(P(t)\,B\right) R^{-1} \left(P(t)\,B\right)^T - \left(P(t)\,A\right) - \left(P(t)\,A\right)^T - Q = \dot{P}(t),\ P(T) = 0 .$$

Dies ist die bekannte **Matrix-RICCATI-Differentialgleichung**.

Im Spezialfall $T \to \infty$ ergibt sich daraus die algebraische Matrix-RICCATI-Gleichung für $P(t) = P_0 = const \quad , \quad P_0 = P_0^T$

$$\left(P_0 B\right) \cdot R^{-1} \left(P_0 B\right)^T - P_0 A - \left(P_0 A\right)^T - Q = 0$$

Linearer Zustandsregler

Schritt 3: Linearer Zustandsregler $u^* = -\,R^{-1}\,B^{\mathrm{T}}\,P(t) \cdot x$

Schritt 4: Geregeltes System $\dot{x} = \left[A - B\,R^{-1}B^T P(t)\right] x$

Beachte: Als RICCATI-Matrix $P(\mathrm{t})$ ist diejenige Lösung zu wählen, welche auf ein asymptotisch stabiles geregeltes System führt.

Schritt 5: Mit $x^*(t)$ aus Schritt 4 folgt die optimale Steuerung $u^*(t)$.

Weiteres Beispiel zur HJB Gleichung

- Zeitoptimal gesteuerter Doppelintegrator
- Optimierungsproblem (siehe einführendes Beispiel Kapitel 1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad , \quad |u| \le 1$$

$$x(0) = x^0 \longrightarrow x(T) = 0$$

$$J = \int_0^T d\,t = T \overset{!}{=} \min$$

HJB Gleichung

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ f_0(x, u, t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T \cdot f(x, u, t) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\} = 0 \quad , \quad J = J(x, t)$$

Hier: $f_0 = 1 \quad , \quad f = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}$

Ansatz: $J = J(x_1, x_2) = T(x_1, x_2)$,
d.h. J nicht explizit abhängig von t.

Hinweis: Die Berechnung der Vorgangsdauer zu diesem Beispiel hat gezeigt, dass dieser Ansatz gerechtfertigt ist.

Damit wird: $\frac{\partial J}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} \end{pmatrix}^T \quad , \quad \frac{\partial J}{\partial t} = 0$

Eingesetzt in die HJB Gleichung ergibt

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ 1 + \frac{\partial J}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial J}{\partial x_2} \cdot u \right\} = 0$$

Schritt 1: ● Optimale Wahl von u aus $\min_{u \in \Omega} \left\{ \frac{\partial J}{\partial x_2} \cdot u \right\}$

Daraus folgt:

Für $\frac{\partial J}{\partial x_2} < 0$ ist $u = +1$ und

für $\frac{\partial J}{\partial x_2} > 0$ ist $u = -1$ zu wählen.

$\frac{\partial J}{\partial x_2} = 0$ muss gesondert betrachtet werden.

Für das Minimum liegt u auf dem Rande von Ω.

Zusammengefasst lautet die notwendige Optimalitätsbedingung

$$u = -\operatorname{sgn} \frac{\partial J}{\partial x_2}$$

- Damit ergibt sich aus der HJB Gleichung die partielle Differentialgleichung

$$1 + \frac{\partial J}{\partial x_1} \cdot x_2 - \frac{\partial J}{\partial x_2} \cdot \operatorname{sgn} \frac{\partial J}{\partial x_2} = 0$$

Schritt 2: Lösung der partiellen Differentialgleichung.

Fallunterscheidung

Fall 1: $u = +1$, d.h. $\dfrac{\partial J}{\partial x_2} < 0$,

$$\Rightarrow \quad x_2 \cdot \frac{\partial J}{\partial x_1} + \frac{\partial J}{\partial x_2} = -1$$

Fall 2: $u = -1$, d.h. $\dfrac{\partial J}{\partial x_2} > 0$,

$$\Rightarrow \quad x_2 \cdot \frac{\partial J}{\partial x_1} - \frac{\partial J}{\partial x_2} = -1$$

Es handelt sich hierbei jeweils um eine quasilineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung.

Einschub: Zur Lösung der beiden Differentialgleichungen wird auf den folgenden Satz aus der Theorie der partiellen Dgln. zurückgegriffen.

Satz: Um $V = V(x_1, x_2)$ aus der quasilinearen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$p(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial V}{\partial x_1} + q(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial V}{\partial x_2} = r(x_1, x_2)$$

zu erhalten, bildet man

$$\frac{d x_1}{p(x_1, x_2)} = \frac{d x_2}{q(x_1, x_2)} = \frac{d V}{r(x_1, x_2)} \quad .$$

Hat dieses System zwei unabhängige Integrale

$$\varphi_1(x_1, x_2, V) = 0 \quad , \quad \varphi_2(x_1, x_2, V) = 0 \quad ,$$

so lautet die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Phi\left[\varphi_1(x_1, x_2, V), \varphi_2(x_1, x_2, V)\right] = 0 \quad .$$

Die Auflösung liefert $V = V(x_1, x_2)$.

Anwendung dieses Satzes auf die beiden vorherigen partiellen Dgln.

Fall 1 ($u = +1$): $\dfrac{d x_1}{x_2} = \dfrac{d x_2}{1} = \dfrac{d J}{-1}$

Unabhängige Integrale (spezielle Integrale genügen):

(i) $\dfrac{d x_1}{x_2} = \dfrac{d x_2}{1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{1}{2} x_2^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 \equiv 2 x_1 - x_2^2 = 0$

(ii) $\dfrac{d x_2}{1} = \dfrac{d J}{-1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -J \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 \equiv x_2 + J = 0$

Allgemeine Lösung

$$\Phi_1 \left(2 x_1 - x_2^2 , x_2 + J \right) = 0$$

oder aufgelöst nach dem zweiten Argument

$$x_2 + J = \Psi_1 \left(2 x_1 - x_2^2 \right) \qquad \text{für} \quad \frac{\partial J}{\partial x_2} < 0 \quad .$$

Fall 2 ($u = -1$):

Eine entsprechende Rechnung wie in Fall 1 führt auf

$$\Phi_2 \left(2 x_1 + x_2^2 , x_2 - J \right) = 0$$

oder

$$x_2 - J = \Psi_2 \left(2 x_1 + x_2^2 \right) \qquad \text{für} \quad \frac{\partial J}{\partial x_2} > 0 \quad .$$

Die nächste Aufgabe besteht in der Bestimmung der beiden Funktionen Ψ_1 und Ψ_2. Hierzu werden die Endbedingungen und die Stetigkeitsforderungen an $J(x_1, x_2)$ herangezogen.

Fall 1:
Es sei $J = J_1$, damit wird
$J_1 = - x_2 + \Psi_1 \left(2 x_1 - x_2^2 \right)$

Fall 2:
Es sei $J = J_2$, damit wird
$J_2 = x_2 - \Psi_2 \left(2 x_1 + x_2^2 \right)$

- Endbedingungen: $x(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

  Wegen $J(0,0) = 0$ folgt $J_1(0,0) = J_2(0,0) = 0$. Damit:

  $J_1(0,0) = 0 + \Psi_1(0) \overset{!}{=} 0 \qquad J_2(0,0) = 0 - \Psi_2(0) \overset{!}{=} 0$

  $\Rightarrow \quad \Psi_1(0) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \Psi_2(0) = 0$

- Stetigkeit:

  $J(x_1, x_2)$ muss insbesondere auf $2x_1 - x_2^2 = 0$ und $2x_1 + x_2^2 = 0$ stetig sein.

  Es muss also gelten:

$$J_1(x_1, x_2)\Big|_{2x_1 - x_2^2 = 0} \overset{!}{=} J_2(x_1, x_2)\Big|_{2x_1 - x_2^2 = 0} \qquad (1)$$

  und

$$J_1(x_1, x_2)\Big|_{2x_1 + x_2^2 = 0} \overset{!}{=} J_2(x_1, x_2)\Big|_{2x_1 + x_2^2 = 0} \qquad (2)$$

Aus (1) folgt $\quad -x_2 + \underbrace{\Psi_1(0)}_{=0} = x_2 - \Psi_2\left(2x_2^2\right)$

$$\Rightarrow \quad 2x_2 = \Psi_2\left(2x_2^2\right)$$

Mit der Substitution

$$\eta = 2x_2^2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{\eta}{2}}$$

erhält man

$$\Psi_2(\eta) = \pm 2\sqrt{\frac{\eta}{2}} = \pm\sqrt{2\eta} \ .$$

Dieser Zusammenhang gilt für jedes Argument η. Ersetzt man η durch $2x_1 + x_2^2$, so folgt aus dem Ausdruck für $J_2(x_1, x_2)$ im Fall 2

$$J_2(x_1, x_2) = x_2 \mp \sqrt{2\left(x_2^2 + 2x_1\right)}.$$

Da stets $J_2 > 0$ gelten muss, erhält man schließlich

$$J_2(x_1, x_2) = x_2 + \sqrt{2\left(x_2^2 + 2x_1\right)}, \quad \text{gültig für} \quad \frac{\partial J_2}{\partial x_2} > 0 \quad , \quad u = -1$$

Die Bedingung (2) wird durch eine entsprechende Rechnung ausgewertet. Man erhält

$$J_1(x_1, x_2) = -x_2 + \sqrt{2\left(x_2^2 - 2x_1\right)}, \quad \text{gültig für} \quad \frac{\partial J_1}{\partial x_2} < 0 \quad , \quad u = +1$$

Schritt 3:

Um das optimale Regelgesetz $u = -\operatorname{sgn}\frac{\partial J}{\partial x_2}$ angeben zu können, ist zunächst zu klären, wo $J_1(x_1, x_2)$ und wo $J_2(x_1, x_2)$ gelten.

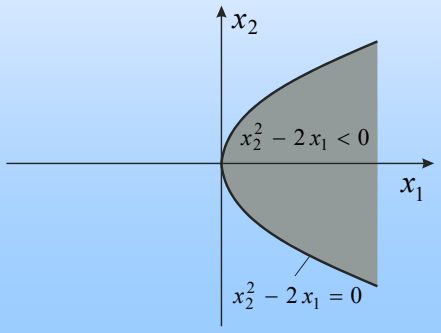
Diskussion für $J = J_1 = -x_2 + \sqrt{2\left(x_2^2 - 2x_1\right)}$ (Fall 1, $u = +1$) :

Es muss gelten

(i) $\quad x_2^2 - 2x_1 \geq 0$

(ii) $\quad \frac{\partial J_1}{\partial x_2} < 0$

(i) Das in der Skizze dunkelgrau angelegte Gebiet (ohne Rand) ist auszuschließen.



(ii) $\dfrac{\partial J_1}{\partial x_2} = -1 + \sqrt{2} \cdot \dfrac{x_2}{\sqrt[+]{x_2^2 - 2x_1}} \overset{!}{<} 0$

(a) für $x_2 < 0$ und $\sqrt{\ } \neq 0$ ist diese Bedingung erfüllt,

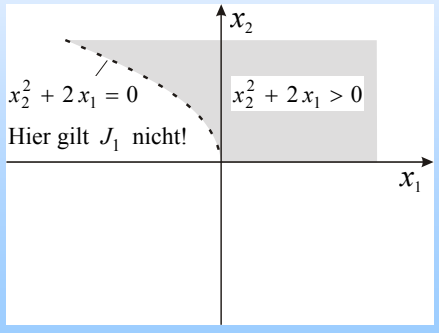
(b) für $x_2 \geq 0$:

$$\frac{\sqrt{2} \cdot x_2}{\sqrt[+]{x_2^2 - 2x_1}} \overset{!}{<} 1$$

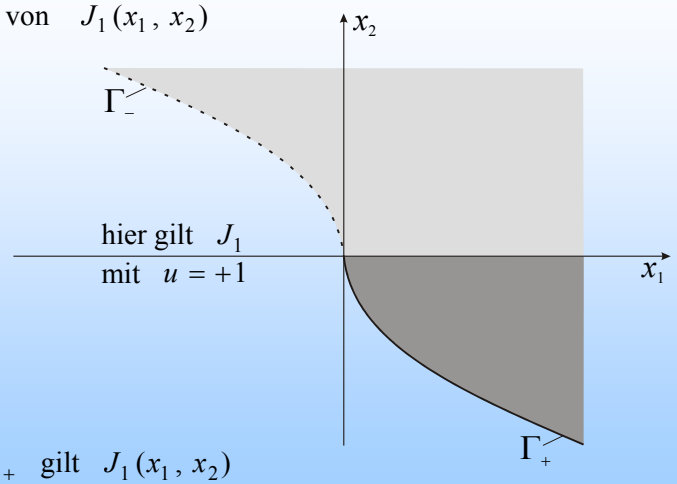
quadriert ergibt

$$x_2^2 + 2x_1 \overset{!}{<} 0.$$

Ergebnis aus (a) und (b):
Das in der Skizze hellgrau angelegte Gebiet ist auszuschließen.



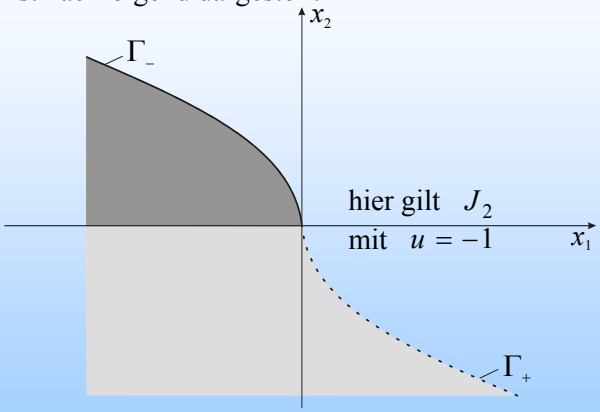
Gültigkeitsbereich von $J_1(x_1, x_2)$



Hinweis: Auf Γ_+ gilt $J_1(x_1, x_2)$

Auf Γ_- gilt $J_1(x_1, x_2)$ nicht, auf Γ_- ist $\dfrac{\partial J_1}{\partial x_2} = 0.$

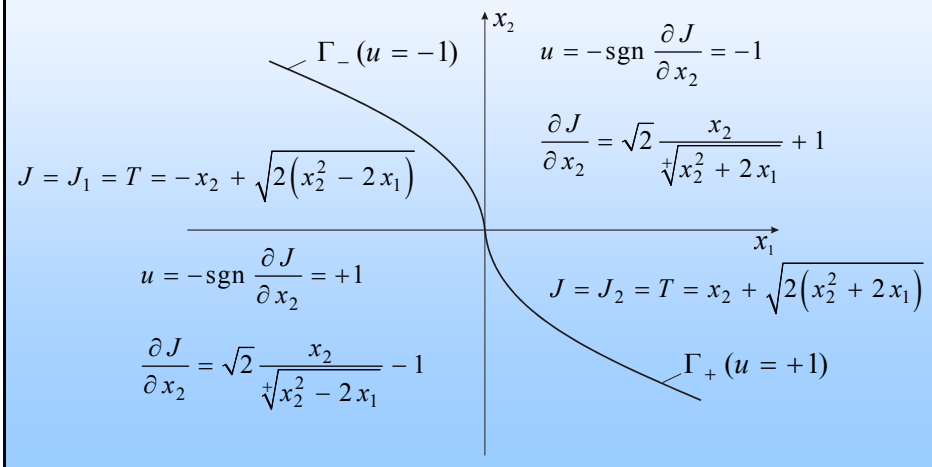
Der Gültigkeitsbereich von $J_2(x_1, x_2)$ folgt durch entsprechendes Vorgehen und ist nachfolgend dargestellt



Hinweis: Auf Γ_- gilt $J_2(x_1, x_2)$

Auf Γ_+ gilt $J_2(x_1, x_2)$ nicht, auf Γ_+ ist $\dfrac{\partial J_2}{\partial x_2} = 0$.

Endergebnis (Schritt 4 und Schritt 5):
Man erhält die aus Kapitel 1 bereits bekannte optimale Synthese.



Bemerkungen zum Beispiel

- Schaltbedingung und Schaltfunktion

  Die Umschaltung der Steuerung erfolgt beim Nulldurchgang von

  $$\frac{\partial J}{\partial x_2} \quad , \quad \text{also bei} \quad \frac{\partial J}{\partial x_2} = 0.$$

  Es sei $u = -1$. Die Umschaltung auf $u = +1$ erfolgt bei

  $$\frac{\partial J}{\partial x_2} = \frac{\partial J_2}{\partial x_2} = 0 \, ,$$

  d.h. bei

  $$\sqrt{2} \cdot \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + 2\,x_1}} + 1 = 0.$$

Die Auswertung liefert

$$\sqrt{2}\, x_2 = -\sqrt{x_2^2 + 2\,x_1} \quad \Rightarrow \quad x_2 < 0$$

und (quadriert)

$$x_2^2 - 2\,x_1 = 0$$

Durch $x_2 < 0$ und $x_2^2 - 2\,x_1 = 0$ ist aber gerade Γ_+ festgelegt.

Eine entsprechende Rechnung für das Umschalten von $u = +1$ auf $u = -1$ liefert Γ_- .

- Differenzierbarkeit der Kostenfunktionen $J(x_1, x_2)$ auf der Schaltkurve $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$

  z. B. auf Γ_+: $\dfrac{\partial J_2}{\partial x_2} = 0$ (siehe vorher)

  $$\frac{\partial J_1}{\partial x_2} = \sqrt{2} \cdot \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 2x_1}} - 1 \Bigg| \quad \rightarrow \quad -\infty$$

  $x_2 < 0$,
  $x_2^2 - 2x_1 = 0$

  Eine entsprechende Rechnung für Γ_- führt auf

  $$\frac{\partial J_1}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial J_2}{\partial x_2} \rightarrow \infty$$

  Ergebnis: $\dfrac{\partial J}{\partial x_2}$ ist auf der Schaltkurve Γ unstetig.

- **Satz von BOLTJANSKIJ**

  Vorbemerkung:
  Wir haben die HAMILTON-JACOBI-BELLMAN Gleichung unter der Voraussetzung hergeleitet, dass $J(x, t)$ nicht nur stetig, sondern auch stetig differenzierbar ist. Das Beispiel hat gezeigt, dass diese Voraussetzung nicht im gesamten $\Re^2$ erfüllt ist. Damit wäre die Herleitung der HJB Gleichung eigentlich hinfällig.

  BOLTJANSKIJ hat gezeigt (Satz):
  Die HJB-Gleichung ist auch dann gültig, wenn die stetige Differenzierbarkeit von $J(x, t)$ auf stückweise glatten Mannigfaltigkeiten der Dimension $< n$ verletzt ist.

Der Satz von BOLTJANSKIJ ist auf das Beispiel $(n = 2)$ anwendbar: $\frac{\partial J}{\partial x_2}$ ist nur auf der Schaltkurve Γ unstetig. Bei der Schaltkurve handelt es sich aber um eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 1$.

- Wir werden später sehen, dass wir die optimale Synthese für dieses Beispiel wesentlich einfacher und schneller mit Hilfe des Maximumprinzips von PONTRJAGIN erhalten können.

3 Maximumprinzip von PONTRJAGIN

- Im Wesentlichen ein analytisches Verfahren
- Hier erfolgt eine formale Herleitung aus der HAMILTON-JACOBI-BELLMAN Gleichung
- Optimierungsproblem:

$$x(t_0) = x^0 \text{ geg.} \quad \xrightarrow[J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)\, dt \overset{!}{=} \min,\ t_0,\ t_f \ geg.]{\dot{x} = f(x, u, t),\ x \in \Re^n,\ u \in \Omega \subset \Re^m} \quad x(t_f) = x^f \text{ geg.}$$

Vorgehen bei der Herleitung

- Übergang von „min“ zu „max“ im Kriterium. Die Bedingung in der HJB Gleichung $\min_{u \in \Omega} \{G(u)\}$ ist äquivalent zu $\max_{u \in \Omega} \{-G(u)\}$.

Herleitung (Fortsetzung)

- Damit lautet die HJB Gleichung

$$\max_{u \in \Omega} \left\{ -f_0(x, u, t) - \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T f(x, u, t) - \frac{\partial J}{\partial t} \right\} = 0$$

- Definition:

$$H\left(x, u, t, \frac{\partial J}{\partial x}\right) := -f_0(x, u, t) - \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot f(x, u, t)$$

Die Funktion H heißt **HAMILTON Funktion**.

Hinweis: Als Argumente sind nur die expliziten Abhängigkeiten genannt.

- Weitere Definition:

$$H_1\left(x, u, t, \frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial t}\right) := H\left(x, u, t, \frac{\partial J}{\partial x}\right) - \frac{\partial J}{\partial t}$$

- Damit lautet die HJB Gleichung

$$\max_{u \in \Omega} \left\{ H_1\left(x, u, t, \frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial t}\right) \right\} = 0$$

Weiteres Vorgehen nach Schema für die HJB Gleichung

Schritt 1: Aus $\max_{u \in \Omega} \{H_1\}$ folgt $u = u^* = u^*\left(x, t, \frac{\partial J}{\partial x}\right)$.

Dies führt auf die partielle Differentialgleichung

$$H_1^*\left(x, t, \frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial t}\right) = 0$$

mit der speziellen Bauart

$$H_1^*\left(x, t, \frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial t}\right) = H^*\left(x, t, \frac{\partial J}{\partial x}\right) - \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

Schritt 2: Lösung der partiellen Differentialgleichung aus Schritt 1.

Hierzu greifen wir auf einen Satz aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zurück:

Die allgemeine partielle Dgl. 1. Ordnung von r unabhängigen Variablen $y_i\,(i = 1\,,\ \ldots\ ,\, r)$ kann in der Form

$$F\,(y\,,\ J\,,\ q) = 0\quad , \qquad (**)$$

$$y^T = (y_1\ \ldots\ y_r)\quad ,\quad q^T = \left(\frac{\partial J}{\partial y_1}\ \ldots\ \frac{\partial J}{\partial y_r}\right)$$

geschrieben werden. Dabei ist $J = J(y)$ die gesuchte Lösung.

Hinweis: Wir setzen voraus, dass sämtliche für die Anwendung des folgenden Satzes notwendigen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt sind.

Satz:
Jeder partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung ist das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zugeordnet:

(i) $$\frac{d\,y}{d\,s} = \frac{\partial\,F}{\partial\,q}\quad ,$$

(ii) $$\frac{d\,q}{d\,s} = -\,\frac{\partial\,F}{\partial\,y} - \frac{\partial\,F}{\partial\,J}\cdot q\quad ,$$

(iii) $$\frac{d\,J}{d\,s} = q^T\cdot\frac{\partial\,F}{\partial\,q}\quad .$$

Die Differentialgleichungen (i), (ii), (iii) heißen charakteristische Gleichungen; $y = y\,(\mathrm{s})$ und $J = J\,(\mathrm{s})$ heißen Charakteristiken und s ist ein Parameter.

Anwendung des Satzes auf die spezielle Bauart $(*)$ der HJB Gleichung:

- Wir setzen

$$y^T = (x_1 \ \dots \ x_n \ t) \quad , \quad q^T = \left(\frac{\partial J}{\partial x_1} \ \dots \ \frac{\partial J}{\partial x_n} \ \frac{\partial J}{\partial t} \right)$$

- Damit wird

$$F(y, J, q) = F\left(x, t, J, \frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial t} \right)$$

$$= H^*\left(x, t, \frac{\partial J}{\partial x} \right) - \frac{\partial J}{\partial t}$$

- Für (i), (ii), (iii) benötigen wir $\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial J}$:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H^*}{\partial \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)} \\ \dots\dots\dots \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H^*}{\partial x} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial H^*}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial J} = 0$$

- Einsetzen in (i), (ii), (iii) ergibt

aus (i):

$$\frac{d\,y}{d\,s} \overset{Def.}{=} \begin{pmatrix} \frac{d\,x}{d\,s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\,t}{d\,s} \end{pmatrix} \overset{(i)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial H^*}{\partial\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

aus (ii):

$$\frac{d\,q}{d\,s} \overset{Def.}{=} \begin{pmatrix} \frac{d\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)}{d\,s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)}{d\,s} \end{pmatrix} \overset{(ii)}{=} - \begin{pmatrix} \frac{\partial H^*}{\partial x} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial H^*}{\partial t} \end{pmatrix} - 0 \cdot q$$

aus (iii):

$$\frac{d\,J}{d\,s} \overset{(iii)}{=} \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \cdot \frac{\partial H^*}{\partial\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)} + \frac{\partial J}{\partial t} \cdot (-1)$$

Weitere Auswertung von (i), (ii), (iii):

Aus der letzten Differentialgleichung von (i) folgt sofort $d\,s = -\,d\,t$.

Dies führt auf

Aus (i): $$\frac{d\,x}{d\,t} = -\frac{\partial H^*}{\partial\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)} \quad ,$$

Aus (ii): $$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right) = \frac{\partial H^*}{\partial x} \quad , \quad \frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right) = \frac{\partial H^*}{\partial t} \quad ,$$

Aus (iii): $$\frac{d\,J}{d\,t} = \frac{\partial J}{\partial t} - \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \frac{\partial H^*}{\partial\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)} \quad .$$

Jetzt: Wichtige Definition $$p := -\frac{\partial J}{\partial x}$$

Mit der Definition $p := -\frac{\partial J}{\partial x}$ erhalten wir schließlich das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \frac{\partial H^*}{\partial p} \quad (1) \quad , \quad \frac{d\,p}{d\,t} = -\frac{\partial H^*}{\partial x} \quad (2) \quad , \quad \frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right) = \frac{\partial H^*}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{d\,J}{d\,t} = \frac{\partial J}{\partial t} - p^T \frac{\partial H^*}{\partial p} \overset{(1)}{=} \frac{\partial J}{\partial t} - p^T \cdot \frac{d\,x}{d\,t} \quad , \text{d.h.}$$

$$\frac{d\,J}{d\,t} = \frac{\partial J}{\partial t} - p^T \cdot f\left(x, u, t\right) \quad (4)$$

mit

$$H^* = H^*\left(x, p, t\right)$$

$$= -f_0\left(x, u^*(x, p, t), t\right) + p^T \cdot f\left(x, u^*(x, p, t), t\right) \quad (5)$$

Folgerungen aus (1) bis (5):

- Das aus der HJB Gleichung entstandene System von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist degeneriert: Durch (1), (2) mit (5)

$$(1): \quad \dot{x} = \frac{\partial H^*}{\partial p} \qquad \text{mit} \quad H^* = H^*(x, p, t) = \max_{u \in \Omega} H(x, u, p, t)$$

$$(2): \quad \dot{p} = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$$

$$(5): \quad H^*(x, p, t) = -f_0(x, u^*, t) + p^T f(x, u^*, t) \quad ,$$

$$u^* = u^*(x, p, t)$$

ist bereits ein vollständiges System von gewöhnlichen Dgln. gegeben, aus welchem $x(t)$ und $p(t)$ berechnet werden können.

- Für unser Optimierungsproblem müssen damit 2n gewöhnliche Differentialgleichungen mit den vorgegebenen Randbedingungen

$$x(t_0) = x^0 \quad \text{und} \quad x(t_f) = x^f$$

gelöst werden.

Beachte: Es handelt sich um ein **Randwertproblem** und kein Anfangswertproblem.

- Aus (3) und (4) folgen dann

$$\text{für } \frac{\partial J}{\partial t}: \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right) = \frac{\partial H^*}{\partial t} \quad \text{und}$$

$$\text{für } J: \qquad \frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} - p^T \cdot f$$

Hinweis: Die Auswertung dieser Bezeichnungen erfolgt später an passender Stelle.

- Auf der Basis dieser Folgerungen werden wir - im Anschluss an das nachfolgende Beispiel - das Maximumprinzip von PONTRJAGIN formulieren.

Beispiel zum Maximumprinzip

LQ-Problem für den Doppelintegrator

Optimierungsproblem

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \xrightarrow[J = \int_0^T u^2(t)\, dt \overset{!}{=} \min \quad , \quad T \text{ geg.}]{\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{matrix} \quad , \quad u \in \Re^1} x(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung mit Hilfe des Maximumprinzips

- HAMILTON Funktion

$$H(x, u, p, t) = -f_0 + p^T f \quad , \quad p^T = (p_1\ p_2)\ , f^T = (f_1\ f_2)$$
$$= -f_0 + p_1 f_1 + p_2 f_2 \quad , \quad f_0 = u^2,\ f_1 = x_2\ ,\ f_2 = u$$
$$= -u^2 + p_1 x_2 + p_2 u$$

$$\max_{u \in \Re^1} H = \max_{u \in \Re^1} \left\{ -u^2 + p_1 x_2 + p_2 u \right\} \quad \overset{\text{notw. Bed.}}{\Rightarrow} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad .$$

Dies ergibt

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + p_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = u^* = \frac{p_2}{2}$$

Hinweis: Wegen $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$ liegt tatsächlich ein Maximum vor.

Damit wird nach Einsetzen von $u = u^*$ in H

$$H^*(x, p, t) = -\left(\frac{p_2}{2}\right)^2 + p_1 x_2 + p_2 \cdot \frac{p_2}{2} = \frac{1}{4} p_2^2 + p_1 x_2$$

- System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(1): \quad \dot{x} = \frac{\partial H^*}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H^*}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H^*}{\partial p_2} \end{pmatrix} \overset{(5)}{=} \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{p_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$(2): \quad \dot{p} = -\frac{\partial H^*}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial H^*}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H^*}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_1 \end{pmatrix}$$

Zusammengefasst:

Differentialgleichungen	Randbedingungen
$\dot{x}_1 = x_2$	$x_1(0) = x_{10}$
$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} p_2$	$x_2(0) = x_{20}$
$\dot{p}_1 = 0$	$x_1(T) = 0$
$\dot{p}_2 = -p_1$	$x_2(T) = 0$

Lösung des Randwertproblems

Vorbemerkung: Das Differentialgleichungssystem für $p_1(t)$ und $p_2(t)$ spielt die Rolle eines Hilfesystems. Es ist mit dem Ausgangssystem gekoppelt. Ziel der Lösung sind die Trajektorien $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Für die Integration des Differentialgleichungssystems setzen wir

$$p_1(0) = p_{10} \qquad \text{und} \qquad p_2(0) = p_{20}$$

Damit lautet die Lösung

$$p_1(t) = p_{10}$$

$$p_2(t) = -p_{10}\,t + p_{20}$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{4}p_{10}\,t^2 + \frac{1}{2}p_{20}\,t + x_{20}$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{12}p_{10}\,t^3 + \frac{1}{4}p_{20}\,t^2 + x_{20}\,t + x_{10}$$

Aus den Endbedingungen $x_1(T) = x_2(\mathrm{T}) = 0$ erhält man

$$p_{10} = -\frac{12}{T^3}\left(x_{20}\,T + 2\,x_{10}\right)$$

$$p_{20} = -\frac{4}{T^2}\left(2\,x_{20}\,T + 3\,x_{10}\right)$$

Die optimale Steuerung $u^*(t) = \frac{1}{2}p_2(t)$ lautet damit

$$u^*(t) = \frac{6}{T^3}\left(x_{20}\,T + 2\,x_{10}\right)t - \frac{2}{T^2}\left(2\,x_{20}\,T + 3\,x_{10}\right)$$

Die optimalen Trajektorien sind (* weggelassen)

$$x_1(t) = \frac{1}{T^3}\left(x_{20}\,T + 2\,x_{10}\right)t^3 - \frac{1}{T^2}\left(2\,x_{20}\,T + 3\,x_{10}\right)t^2 + x_{20}\,t + x_{10}$$

$$x_2(t) = \frac{3}{T^3}\left(x_{20}\,T + 2\,x_{10}\right)t^2 - \frac{2}{T^2}\left(2\,x_{20}\,T + 3\,x_{10}\right)t + x_{20}$$

Die minimalen Kosten ergeben sich zu

$$J_{\min} = \frac{1}{12}\,p_{10}^2\,T^3 - \frac{1}{4}\,p_{10}\,p_{20}\,T^2 + \frac{1}{4}\,p_{20}^2\,T$$

$$= \frac{4}{T^3}\left(\frac{1}{4}\,x_{20}^2\,T^2 + 3\left(x_{10} + \frac{1}{2}\,x_{20}\,T\right)^2\right)$$

Wichtige Ergänzung zur Herleitung

In sehr vielen Fällen - wie auch bei dem einfachen Beispiel - hängt die HAMILTON Funktion nicht explizit von t ab, d.h.

$H^*(x, p, t)$ geht über in $H^*(x, p)$.

Dies ist von Vorteil für die Auswertung der Beziehungen (3) und (4) für $\frac{\partial J}{\partial t}$ und J .

- Wegen $H^* = H^*(x, p)$ ist $\dfrac{\partial H^*}{\partial t} = 0$ und aus (3) folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right) \overset{(3)}{=} \frac{\partial H^*}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial t} = const$$

Weiter folgt aus der HJB Gleichung $H^* - \dfrac{\partial J}{\partial t} = 0$ sofort

$$H^* = H^*(x, p) = const$$

Diese Beziehung gilt daher für alle **zeitinvarianten** Systeme.

Überprüfung am vorherigen Beispiel:

Es war $H^*(x, p) = \dfrac{1}{4} p_2^2 + p_1 x_2$

Nach Einsetzen der Lösungen für $p_2(t)$, $p_1(t)$ und $x_2(t)$ ergibt sich durch direkte Rechnung

$$H^*(t) = H^*(x(t), p(t)) = \frac{1}{4} p_{20}^2 + p_{10} x_{20} = H^*(0) = const$$

Beachte: Dies ist eine wichtige Beziehung, die bei numerischer Lösung zweckmäßig als Rechenkontrolle herangezogen wird.

- Auswertung der Beziehung (4)

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} - p^T \cdot f\left(x, u^*\right)$$

für das Beispiel ergibt:

$$\frac{dJ}{dt} \overset{HJB}{=} H^*\left(x, p\right) - p_1 f_1\left(x, u^*\right) - p_2 f_2\left(x, u^*\right)$$

$$\text{mit} \quad u^*(t) = \frac{1}{2} p_2(t)$$

$$= \frac{1}{4} p_{20}^2 + p_{10} x_{20} - p_1(t) \cdot x_2(t) - p_2(t) \cdot \frac{1}{2} p_2(t)$$

Nach Einsetzen der Lösungen $p_1(t)$, $x_2(t)$, $p_2(t)$ und anschließender Integration erhält man

$$\underbrace{J(T)}_{=0} - J(0) = \int_0^T \left\{ -\frac{1}{4} p_{10}^2 t^2 + \frac{1}{2} p_{10} p_{20} t - \frac{1}{4} p_{20}^2 \right\} dt$$

$$\Rightarrow \quad J(0) = \frac{1}{12} p_{10}^2 T^3 - \frac{1}{4} p_{10} p_{20} T^2 + \frac{1}{4} p_{20}^2 T$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem früheren Ergebnis überein.

Maximumprinzip für zeitvariante Systeme

(Strenge Formulierung nach PONTRJAGIN)

Für das eingangs formulierte Optimierungsproblem mit fest vorgegebenen Randbedingungen $x(t_0) = x^0$ und $x(t_f) = x^f$ sowie vorgegebenen Anfangs- und Endzeitpunkten t_0 und t_f lautet das Maximumprinzip von PONTRJAGIN:

Voraussetzung:

Es sei $u(t)$, $t_0 \le t \le t_f$, eine zulässige Steuerung, die das System $\dot{x} = f(x, u, t)$ aus dem Anfangszustand x^0 in den Endzustand x^f überführt, und $x(t)$ die zugehörige Trajektorie mit $x(t_f) = x^f$.

Maximumprinzip von PONTRJAGIN

Notwendig dafür, dass $u(t)$ die Lösung des Optimierungsproblems mit festen Zeitpunkten liefert, ist die Existenz einer nicht verschwindenden Lösung

$$p_0(t),\ p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t) \quad ,$$

die zu $x(t)$ und $u(t)$ gehört und dem System

$$\dot{p}_0 = 0 \quad , \quad \dot{p}_j = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \cdot p_k \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

genügt, derart, dass

1. für alle t , $t_0 \le t \le t_f$, die Funktion

   $$H(p, x, u, t) = p_0 f_0 + p_1 f_1 + \ \ldots \ + p_n f_n$$

   bezüglich der Variablen $u \in \Omega$ maximal ist und
2. die Funktion $p_0(t)$ nicht positiv, d.h. $p_0(t) \le 0$ ist.
   Da $p_0 = const$ ist, braucht dies nur für einen einzigen Zeitpunkt des Intervalls $t_0 \le t \le t_f$ nachgeprüft zu werden.

Anmerkungen zum Maximumprinzip

- Das Maximumprinzip liefert nur notwendige Optimalitätsbedingungen.
- Das System $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ heißt **adjungiertes System.**
- Die Forderung $p_0(t) \leq 0$ wurde ohne Herleitung von PONTRJAGIN übernommen.
- Wegen $p_0 = const$ und der Homogenität des adjungierten Systems darf $p_0 = -1$ oder $p_0 = 0$ gesetzt werden.
- Der Fall $p_0 = 0$ ist pathologisch, da in diesem Fall das Optimierungsproblem gar nicht mehr vom Optimierungskriterium abhängt.

- **Schema für die Lösung des formulierten Optimierungsproblems mit Hilfe des Maximumprinzips:**

  (1) Setze $p_0 = -1$

  (2) Bilde die HAMILTON Funktion

  $$H(x, u, p, t) = -f_0(x, u, t) + p_1 f_1(x, u, t) + \ldots + p_n f_n(x, u, t)$$

  (3) Berechne

  $$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = f(x, u, t)$$ Ausgangssystem

  $$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \cdot p$$ adjungiertes System

  Beide Systeme zusammen werden auch als **kanonische Gleichungen** bezeichnet.

(4) Die Maximierung

$$\max_{u \in \Omega} H(x, u, p, t)$$

liefert Kandidaten für optimale Steuerungen

$$u = u^* = u^*(x, p, t)$$

(5) Einsetzen von $u = u^*$ in die kanonischen Gleichungen (3) führt auf einen Satz von 2n gewöhnlichen Differentialgleichungen. Deren Integration unter Beachtung der Randbedingungen liefert Kandidaten für optimale Trajektorien.

(6) Zur Bestimmung des absoluten Minimums $J_{\min}$ muss das Kriterium J für alle Kandidaten u^* ausgewertet werden.

Hinweis: Bei der Optimierung nach der HJB Gleichung werden zuerst die minimalen Kosten $J(x, t)$ und danach die optimalen Trajektorien berechnet. Beim Maximumprinzip von PONTRJAGIN verläuft die Rechnung umgekehrt.

Maximumprinzip und Analogie zu mechanischen Systemen

Mechanische Systeme	Maximumprinzip

- HAMILTON-Funktion

$$H = -L + p^T \cdot \dot{q} \qquad H = -f_0 + p^T \cdot f$$

L LAGRANGE Funktion
q verallg. Koordinaten
p verallg. Impulse

- Kanonische Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{Ausgangssystem}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{adjungiertes System}$$

- Kriterium

$$S = \int_{t_0}^{t} L \, dt \quad \text{Wirkung} \qquad J = \int_{t}^{t_f} f_0 \, dt$$

- HAMILTON-JACOBI Gleichung

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad H^* - \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad \text{HJB Gleichung}$$

Anmerkung:
Die beiden HAMILTON Funktionen haben nur den Namen gemeinsam.
Die adjungierten Variablen sind physikalisch nicht interpretierbar.

Maximumprinzip für zeitinvariante Systeme

Optimierungsproblem

System: $\dot{x} = f(x, u) \quad , \quad x \in \Re^n \quad , \quad u \in \Omega \subset \Re^m$

Kriterium: $J = \int_0^T f_0(x, u)\, dt \overset{!}{=} \min \quad , \quad T \text{ fest}$

Randbedingungen: nicht weiter festgelegt

Damit ergibt sich

HAMILTON Funktion: $H(x, u, p) = -f_0(x, u) + p^{\mathrm{T}} \cdot f(x, u)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H^*}{\partial t} = 0$$

Bei der Herleitung haben wir erhalten:

(3) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right) = \frac{\partial H^*}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial t} = const$$

Die HJB Gleichung liefert somit

$$H^* = H^*(t) = const \quad \text{für alle} \quad t \in [0, T]$$

- Dieses wichtige Ergebnis für zeitinvariante Systeme hatten wir bereits für das einfache Beispiel in diesem Kapitel erhalten.
- Bei numerischen Optimierungsverfahren wird dieses Ergebnis als Rechenkontrolle herangezogen.

Optimierung mit Endkosten

System: $\dot{x} = f(x, u, t) \quad , \quad x \in \Re^n \quad , \quad u \in \Omega \subset \Re^m$

Kriterium: $J = \underbrace{h_0(x, t_f)}_{\text{Endkostenterm,}} + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)\, dt \overset{!}{=} \min$

Funktion von x, deren Wert für $t = t_f$ am Ende, d.h. $x = x(t_f)$, zu nehmen ist.

Randbedingungen: $x(t_0) = x^0$ vorgegeben

$x(t_f)$ frei; nur dies ist hier sinnvoll.

Wäre $x(t_f) = x^f$ vorgegeben, so läge $h_0 = (x^f, t_f)$ fest und könnte bei der Optimierung unberücksichtigt bleiben.

Frage: Wie sehen die fehlenden n Randbedingungen für die Integration von Ausgangssystem und adjungiertem System aus?

Vorgehen:

Nach Definition ist $p := -\dfrac{\partial J}{\partial x}$

Außerdem gilt für die minimalen Kosten

$$J(x, t) = h_0(x, t_f) + \int_{t}^{t_f} f_0(x, u, t)\, dt$$

Damit folgt sofort für $t = t_f$

$$p(t_f) = -\left.\frac{\partial J}{\partial x}\right|_{x = x(t_f)} \quad \text{bzw.} \quad p(t_f) = -\left.\frac{\partial h_0}{\partial x}\right|_{x = x(t_f)}$$

Dies sind die sogenannten **Transversalitätsbedingungen**.

Ergebnis der Optimierung mit Endkosten

Die fehlenden n Randbedingungen $x(t_f)$ werden durch die Transversalitätsbedingungen

$$p(t_f) = -\left.\frac{\partial h_0}{\partial x}\right|_{x = x(t_f)}$$

ersetzt.

Sonderfall bei freien Endbedingungen

Der Endkostenterm ist nicht vorhanden, d.h. $h_0(x(t_f), t_f) = 0$.

Damit folgt aus den Transversalitätsbedingungen $p(t_f) = 0$.

Ergebnis:
Die freien Endbedingungen $x(t_f)$ werden durch $p(t_f) = 0$ ersetzt.

Allgemeine Bemerkung:
Die Transversalitätsbedingungen ersetzen jeweils die fehlenden Randbedingungen.

Optimierungsprobleme mit teilweise vorgegebenen Anfangs- und Endbedingungen

Vorbemerkung:
Betrachtet wird der Fall, dass sowohl der Anfangszustand als auch der Endzustand auf glatten Mannigfaltigkeiten liegen. Zur Lösung des Optimierungsproblems werden die Transversalitätsbedingungen im allgemeinen Fall herangezogen.

Optimierungsproblem

System: $\dot{x} = f(x, u, t) \quad , \quad x \in \Re^n \; , \quad u \in \Omega \subset \Re^m$

Kriterium: $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)\, d\,t \overset{!}{=} \min \quad , \quad t_0 \, , \, t_f$ fest vorgegeben

Randbedingungen:

Anfangszustand $x(t_0)$ bzw. Endzustand $x(t_f)$ liegen auf glatten $(n - n_0)$ - bzw. $(n - n_f)$ - dimensionalen Mannigfaltigkeiten $G_0 \subset \Re^n$ bzw. $G_f \subset \Re^n$ mit $n_0 < n$ bzw. $n_f < n$.

Die beiden Mannigfaltigkeiten G_0 bzw. G_f seien durch n_0 bzw. n_f skalare Gleichungen vorgegeben.

Es sei

$$G_0 = \left\{ x : g_{\rho 0}\left(x, t_0\right) = 0 \;,\; \rho = 1, \ldots, n_0 < n \right\}$$

die Mannigfaltigkeit für den Anfangszustand $x(t_0)$

und

$$G_f = \left\{ x : g_{\rho f}\left(x, t_f\right) = 0 \;,\; \rho = 1, \ldots, n_f < n \right\}$$

die Mannigfaltigkeit für den Endzustand $x\left(t_f\right)$

Bei optimaler Bewegung des Systems müssen die folgenden Transversalitätsbedingungen erfüllt sein:

am Anfang

$$p(t_0) = \sum_{\rho=1}^{n_0} \kappa_{\rho 0} \cdot \left. \frac{\partial g_{\rho 0}(x)}{\partial x} \right|_{x = x(t_0)}$$

$\kappa_{\rho 0}$ skalar ,

für $x(t_0)$ muss gelten

$$g_{\rho 0}\left(x(t_0), t_0\right) = 0$$

$$\rho = 1, \ldots, n_0$$

am Ende

$$p(t_f) = \sum_{\rho=1}^{n_f} \kappa_{\rho f} \cdot \left. \frac{\partial g_{\rho f}(x)}{\partial x} \right|_{x = x\left(t_f\right)}$$

$\kappa_{\rho f}$ skalar ,

für $x(t_f)$ muss gelten

$$g_{\rho f}\left(x(t_f), t_f\right) = 0$$

$$\rho = 1, \ldots, n_f$$

Die Anzahl der Unbekannten ist damit:

2n Integrationskonstanten für x-System und p-System
sowie
$n_0 + n_f$ skalare Größen $\kappa_{\rho 0}$ und $\kappa_{\rho f}$.

Es stehen an Bestimmungsgleichungen zur Verfügung:

2n Gleichungen aus den Transversalitätsbedingungen
sowie
$n_0 + n_f$ Gleichungen wegen $x(t_0) \in G_0$ und $x(t_f) \in G_f$.

Damit kann das Optimierungsproblem gelöst werden.

Wichtiger Sonderfall

Zeitinvariantes System mit konvexem Zielgebiet

System: $\dot{x} = f(x, u)$, $x \in \Re^n$, $u \in \Omega \subset \Re^m$

Kriterium: $J = \int_0^T f_0(x, u)\, dt \overset{!}{=} \min$, T fest vorgegeben

Randbedingungen:

- $x(0) = x^0$ gegeben,
- für $x(T)$ sei ein konvexes Zielgebiet $G_T = \{x : \gamma_T(x) \le 0\}$ vorgegeben. Es sei eine $\gamma_T(x) = 0$ eine $(n-1)$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit (Hyperfläche).

Für diesen Sonderfall ergibt sich aus den Transversalitätsbedingungen

$$p(T) = -\kappa \left. \frac{\partial \gamma_T(x)}{\partial x} \right|_{x = x(T)}, \quad \kappa > 0 \quad \text{skalar}$$

Ergebnis:

Der adjungierte Vektor am Ende $p(T)$ zeigt in das Innere des konvexen Zielgebietes.

Bei Anwendungen ist daher $\kappa > 0$ häufig sehr hilfreich.

Häufig vorkommendes konvexes Zielgebiet

Das Zielgebiet sei das Innere eines Kreises um den Ursprung im $\Re^2$

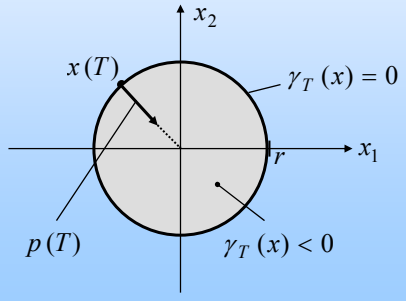
$$\gamma_T(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 - r^2 \le 0$$

Transversalitätsbedingungen

$$p(T) = -\kappa \left. \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \right|_{x = x(T)}, \quad \kappa > 0$$

Mit $k = 2\kappa$ erhält man

$$p_1(T) = -k \cdot x_1(T), \quad k > 0$$
$$p_2(T) = -k \cdot x_2(T)$$



Beispiel:

Zeitinvariantes System mit konvexem Zielgebiet
LQ-Problem für den Doppelintegrator (siehe früher)

Optimierungsproblem

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \xrightarrow[J = \int_0^T u^2(t)\,dt \overset{!}{=} \min \text{ , T fest}]{\dot{x}_1 = x_2 \;,\; \dot{x}_2 = u \;,\; x \in \Re^2 \;,\; u \in \Re^1} \begin{array}{l} x(T) \quad \text{im Zielgebiet} \\ \gamma_T(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0 \end{array}$$

Lösung:

Bis zur Erfüllung der Randbedingungen wie früher

$$x_1(t)\,,\; x_2(t)\,,\; p_1(t)\,,\; p_2(t) \qquad \text{(Kapitel 3, Folie 21)}$$

Transversalitätsbedingungen

Mit $x_{1T} := x_1(T)$, $x_{2T} := x_2(T)$, $p_{1T} := p_1(T)$, $p_{2T} := p_2(T)$

lauten diese

$$p_{1T} = -k \cdot x_{1T} \quad , \quad p_{2T} = -k \cdot x_{2T} \quad , \quad k > 0$$

Nach Einsetzen der obigen Lösungen $x(t)\,, p(t)$ mit $t = T$ folgt aus den Transversalitätsbedingungen

$$p_{10} = -k\left(-\frac{1}{12}p_{10}T^3 + \frac{1}{4}p_{20}T^2 + x_{20}T + x_{10}\right) \qquad (1)$$

$$-p_{10}T + p_{20} = -k\left(-\frac{1}{4}p_{10}T^2 + \frac{1}{2}p_{20}T + x_{20}\right) \qquad (2)$$

Für $x(T) = \left[x_{1T}, x_{2T} \right]^T$ auf dem Rande des Zielgebietes, also $\gamma_T \left(x(T) \right) = 0$, gilt $x_{1T}^2 + x_{2T}^2 - 1 = 0$. Daraus folgt

$$p_{1T}^2 + p_{2T}^2 = k^2$$

bzw. $p_{10}^2 + \left(- p_{10} T + p_{20} \right)^2 = k^2$ (3)

Durch (1), (2), (3) ist ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung von p_{10} , p_{20} , $k > 0$ gegeben.

Zunächst berechnet man die Ausdrücke für p_{10} , p_{20} aus (1), (2) und setzt das Ergebnis in (3) ein. Man erhält

$$\left(\frac{k T}{4} \left(x_{20} T + 2 x_{10} \right) + \left(x_{20} T + x_{10} \right) \right)^2 +$$

$$\left(\frac{k T^2}{12} \left(x_{20} T + 3 x_{10} \right) - x_{20} \right)^2 = \left(\frac{k^2 T^4}{48} + \left(\frac{T^3}{6} + \frac{T}{2} \right) k + 1 \right)^2$$

Dies ist eine algebraische Gleichung 4. Grades für k . Für die Lösung sind nur die Werte $k > 0$ relevant.

Spezielles Zahlenbeispiel:

Für $x_{10} = 0$, $x_{20} = -3$ und $T = 1$ erhält man

$$k^4 + 64\,k^3 - 320\,k^2 - 3840\,k - 39168 = 0$$

bzw. faktorisiert

$$(k - 12)\underbrace{\left(k^3 + 76\,k^2 + 592\,k + 2264\right)}_{\text{keine Lösung } k > 0 \text{ möglich !}} = 0 \quad .$$

Damit lautet das Ergebnis:

$$k = 12 \quad \Rightarrow \quad x_{1T} = -1 \quad , \quad x_{2T} = 0$$

$$J_{\min} = 12$$

Optimierungsprobleme mit nicht vorgegebener Vorgangsdauer

Wichtige Klasse: Alle zeitoptimalen Systeme

System: $\dot{x} = f(x, u, t)$, $x \in \Re^n$, $u \in \Omega \subset \Re^m$

Kriterium: $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)\,dt \overset{!}{=} \min$, t_0 fest , t_f frei

Randbedingungen: Nicht weiter festgelegt.

Vorgehen:

Bei der Herleitung des Maximumprinzips hatten wir $y^{\mathrm{T}} = (x^{\mathrm{T}} \mid t)$ gesetzt. Wir hätten auch t als weitere Zustandsvariable $x_{n+1} := t$ einführen können.

Für die zusätzliche adjungierte Variable p_{n+1} erhält man

$$p_{n+1} := -\frac{\partial J}{\partial x_{n+1}} \quad \Rightarrow \quad p_{n+1} = -\frac{\partial J}{\partial t} \quad .$$

Aus der HJB Gleichung $H^* - \frac{\partial J}{\partial t} = 0$ folgt damit

$$H^* = -\, p_{n+1}$$

Wegen $x_{n+1} = t$ erhält man

$$x_{n+1}(t_0) = t_0 \quad \text{fest} \quad , \quad x_{n+1}(t_f) = t_f \quad \text{frei} \quad ,$$

also ein Problem mit freier Endbedingung $x_{n+1}(t_f)$.

Aus den Transversalitätsbedingungen ergibt sich damit für die zugehörige adjungierte Variable $p_{n+1}(t)$ am Ende

$$p_{n+1}(t_f) = 0$$

und daraus

$$H^*(t_f) = 0 \ .$$

Dies ist eine Bedingung für die unbekannte Endzeit t_f .

Wichtige Sonderfälle

- Zeit**in**variante Systeme: $\dot{x} = f(x, u) \quad , \quad u \in \Omega \subset \Re^m$

  Wegen $H^*(t) = const$ und $H^*(t) = 0$ folgt

  $$H^*(t) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in [0, T]$$

- Speziell: **Zeitoptimal** gesteuerte zeit**in**variante Systeme

  Kriterium: $J = \int_0^T dt = T \overset{!}{=} \min$

  Randbedingungen: Nicht weiter festgelegt.

Mit den Kandidaten für optimale Steuerungen $u = u^*$ lautet die HAMILTON Funktion

$$H^* = p_0 f_0 + p_1 f_1 + \ldots + p_n f_n$$

Mit $f_0 = 1$ und der Abkürzung $H_0^* := p_1 f_1 + \ldots + p_n f_n$ erhält man

$$H^* = p_0 + H_0^* .$$

Wegen $H^*(t) = 0$ folgt

$$H_0^*(t) = -p_0 \qquad (p_0 = const \le 0)$$

und daraus

$$H_0^*(t) \ge 0 \quad \text{für} \quad t \in [0, T] .$$

Ergebnis:

Für zeitoptimal gesteuerte zeitinvariante Systeme ist die HAMILTON Funktion

$$H_0(x, u, p) = p_1 \cdot f_1(x, u) + \ldots + p_n \cdot f_n(x, u)$$

als Funktion von $u \in \Omega$ maximal und es gilt

$$H_0^*(t) = const \geq 0 \quad \text{auf} \quad 0 \leq t \leq T \ .$$

4 Zeitoptimale lineare Systeme

Optimierungsproblem

Lineares System: $\dot{x} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u \quad , \quad x \in \Re^n \quad , \quad u \in \Omega \subset \Re^m$

zunächst: $A(t)$, $B(t)$ zeitvariante Matrizen

später: A, B konstant (zeitinvariant)

Kriterium: $J = \int_{t_0}^{t_f} d\,t = t_f - t_0 = T_f \overset{!}{=} \min$

Randbedingungen: $x(t_0)$ fest

$x(t_f)$ nicht weiter festgelegt

Lösung mit Hilfe des Maximumprinzips

HAMILTON Funktion: $H_0 = H_0(x, u, p, t) = p^T \cdot f(x, u, t)$

$= p^T \cdot (A(t)\,x + B(t)\,u)$

Adjungiertes System: $\dot{p} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \cdot p$

$\Rightarrow \quad \dot{p} = -A^T(t) \cdot p$

Optimale Steuerung:

$$\max_{u \in \Omega} \{H_0\} \quad \Rightarrow \quad \max_{u \in \Omega} \left\{p^T \cdot B(t)\,u\right\} = \max_{u \in \Omega} \left\{u^T \cdot B^T(t)\,p\right\}$$

Mit der Definition $s(t) := B^T(t) \cdot p$ folgen die Kandidaten für optimale Steuerungen $u = u^*$ aus

$$\max_{u \in \Omega} \left\{ u^T s \right\}$$

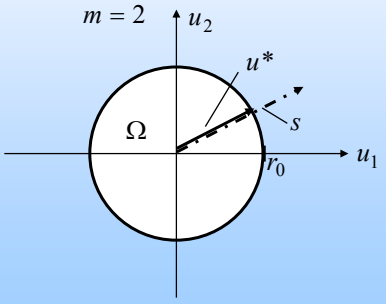
Ergebnis:

- Die optimale Steuerung $u^* \in \Omega$ ist so zu wählen, dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren u und $s = B^T(t) \cdot p$ maximal wird.
- Dabei ist $p = p(t)$ eine nichtverschwindende Lösung des adjungierten Systems $\dot{p} = -A^T(t) \cdot p$.

Spezielle Steuerbereiche

Fall 1: Ω sei eine **Hyperkugel** $|u|^2 \le r_0^2$,

d.h. $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_m^2 \le r_0^2$.



Das Skalarprodukt $u^T \cdot s$ ist maximal für $u \uparrow\uparrow s$ auf dem Rande von Ω.

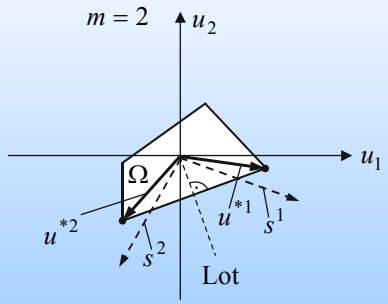
Damit: $u^* = \frac{s}{|s|} \cdot r_0 = \frac{B^T p}{|B^T p|} \cdot r_0$.

In Komponenten:

$$u_k^* = r_0 \cdot \frac{s_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} s_k^2}}, \quad k = 1, \ldots, m$$

Ergebnis: Wir erhalten ein **kontinuierliches** Steuergesetz.

Fall 2: Ω sei ein **konvexes Polyeder** .

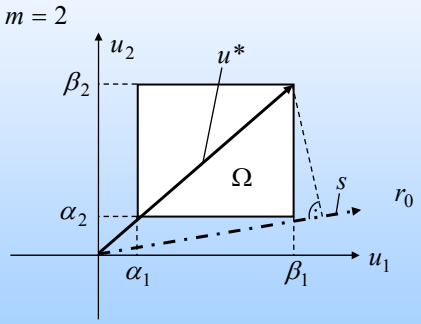


Das Skalarprodukt ist maximal, wenn die Projektion von u auf s maximal ist, d.h. u^* zeigt in eine Ecke des Polyeders.

Wechselt s über eines der Lote, so springt u^* von einer Ecke in eine andere.

Ergebnis: Wir erhalten ein **diskontinuierliches** Steuergesetz.

Fall 3: Ω ist ein **Hyperquader** mit Kanten parallel zu den Achsen des $\Re^m$,
d.h. $\Omega = \{u_k : \alpha_k \le u_k \le \beta_k , k = 1, \ldots, m\}$.



Aus

$$\max_{u \in \Omega} \{u_1 s_1 + \ldots + u_m s_m\}$$

erhält man

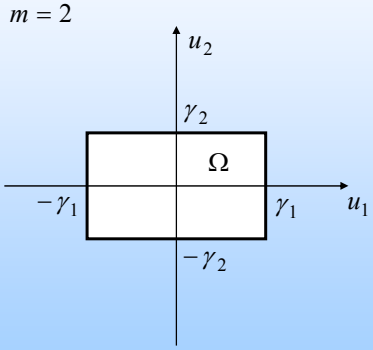
$$u_k^* = \begin{cases} \alpha_k & \text{für} \quad s_k < 0 \\ \beta_k & \text{für} \quad s_k > 0 \end{cases}$$

Ergebnis: Wir erhalten ein **diskontinuierliches** Steuergesetz.
Jede Komponente u_k nimmt nur ihre beiden Randwerte an.

Wichtiger Sonderfall: Symmetrischer Steuerbereich

$$\Omega = \{u_k : \ |u_k| \le \gamma_k \,,\ k = 1, \ldots, m\} \quad .$$

$m = 2$



Als optimale Steuerungen erhält man

$$u_k^* = \begin{cases} -\gamma_k & \text{für} \quad s_k < 0 \\ +\gamma_k & \text{für} \quad s_k > 0 \end{cases}$$

bzw.

$$u_k^* = \gamma_k \cdot \operatorname{sgn} s_k$$

Ergebnis: Wir erhalten eine Relaissteuerung, die sogenannte **Bang-Bang-Steuerung**.

Schaltfunktion und singuläre Steuerung

Definition: Die Funktionen $s_k = s_k(t)$ heißen **Schaltfunktionen**.

- Singuläre Steuerung $u_{ks}^*(t)$: Ist die Schaltfunktion $s_k(t) \equiv 0$ auf einem **endlichen** Zeitintervall, so ist $u_k^*(t)$ auf diesem Zeitintervall nicht definiert. Man spricht daher von einer **singulären Steuerung**.

- Häufig liefern $\dot{s}_k(t) = 0$, $\ddot{s}_k(t) = 0$, ... zusätzliche Bedingungen zur Berechnung dieser singulären Steuerungen $u_{ks}^*(t)$.

  Hinweis: Alle Kandidaten für singuläre Steuerungen sind auf Optimalität zu überprüfen.

Satz von FELDBAUM

- Das Bang-Bang-Prinzip ist ein Kennzeichen zeitoptimaler Steuerungen.
- Gibt es eine Aussage über die Anzahl der Umschaltungen?
- Der Satz von FELDBAUM liefert eine Aussage für zeitinvariante lineare Systeme mit reellen Eigenwerten.

Es sei (i) $\dot{x} = Ax + Bu$, A, B konstant

$x \in \Re^n$, $u \in \Omega \subset \Re^m$

$\Omega = \{u_k : \alpha_k \le u_k \le \beta_k \ , \ k = 1, \ldots, m\}$

$x(0)$ und $x(T)$ fest vorgegeben.

(ii) $Rg\left(B \mid AB \mid \ldots \mid A^{n-1}B\right) = n$

(iii) A besitze nur reelle Eigenwerte λ_i, $i = 1, \ldots, n$

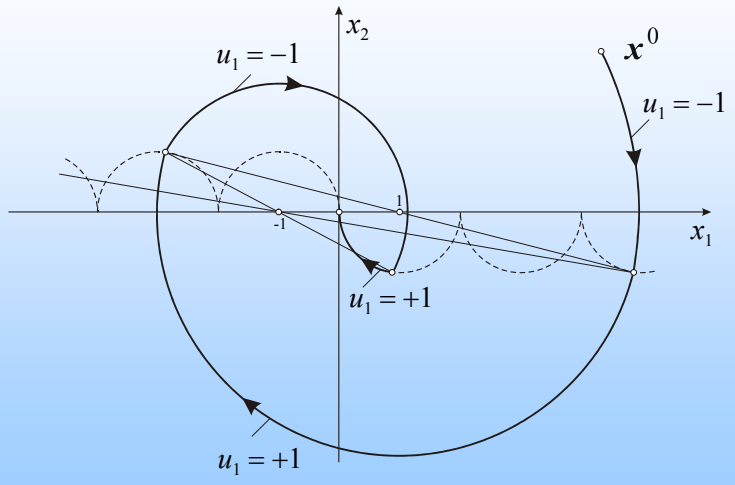
Satz von FELDBAUM:

Bei zeitoptimaler Steuerung des Systems gibt es höchstens $n-1$ Umschaltzeitpunkte, d.h. höchstens n Intervalle mit konstanten extremalen Werten $u_k^* \in \{\alpha_k \ , \ \beta_k\}$.

Beispiele $(n=2,\ m=1)$

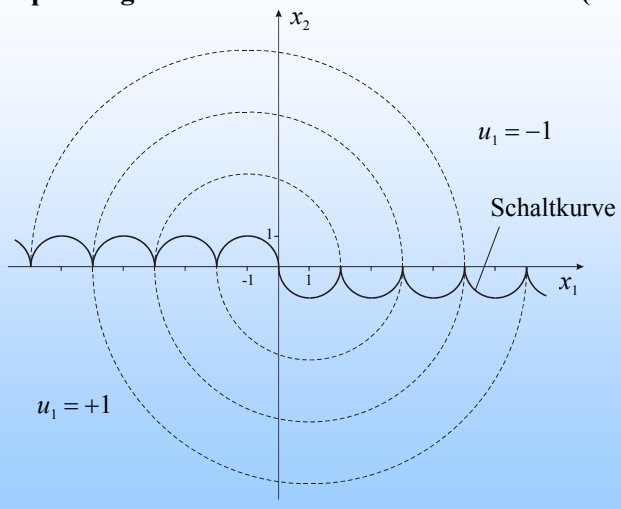
- Doppelintegrator: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u_1$, $|u_1| \le 1$
  Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
  FELDBAUM: Es wird höchstens **einmal** umgeschaltet.
- PT_2 – Glied: $\dot{x}_1 = x_2$, $T_1^2 \cdot \dot{x}_2 = -x_1 - 2DT_1 \cdot x_2 - K \cdot u_1$, $|u_1| \le 1$,
  $T_1 = \dfrac{1}{\omega_0}$ Zeitkonstante , $D \ge 0$ Dämpfung , $K > 0$
  Eigenwerte : Für $0 \le D < 1$ sind λ_1, λ_2 konjugiert komplex
  FELDBAUM : **Nicht** anwendbar.
  Eigenwerte : Für $D \ge 1$ sind λ_1, λ_2 reell
  FELDBAUM : Es wird höchstens **einmal** umgeschaltet.

Zeitoptimal gesteuerter harmonischer Oszillator



Konstruktion der optimalen Trajektorien

Zeitoptimal gesteuerter harmonischer Oszillator (Forts.)



Optimale Synthese

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Dipl.-Ing. Michael Danzer
Institut MRM, Universität Ulm

Regelungstechnik II
SS 2008
Arbeitsblatt 1

Rechenregeln der z-Transformation

Hier bezeichnet $F_z(z)$ die z-Transformierte der abgetasteten Zeitfunktion $f(t)$, der Impulsfolge $f^*(t)$ bzw. der Zahlenfolge f_k. Dabei ist $f^*(t) = f(t) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta(t-\nu T) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \cdot \delta(t-\nu T)$.

Operation	Zeitfunktion	Zahlenfolge	z-Transformierte
Linearität	$c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t)$	$c_1\, f_{1k} + c_2\, f_{2k}$	$c_1\, F_{1z}(z) + c_2\, F_{2z}(z)$
Verschiebung nach rechts	$f(t-mT)$	f_{k-m}	$z^{-m}\left[F_z(z) + \sum_{\nu=1}^{m} f_{-\nu} z^{\nu}\right]$
Verschiebung nach links	$f(t+mT)$	f_{k+m}	$z^{m}\left[F_z(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f_\nu z^{-\nu}\right]$
Differenzbildung	$f(t) - f(t-T)$ $f(t+T) - f(t)$	$f_k - f_{k-1}$ $f_{k+1} - f_k$	$\frac{z-1}{z} F_z(z) - f_{-1}$ $(z-1)F_z(z) - f_0 z$
Summation $f = 0,\ t < 0$	$\sum_{\nu=0}^{\infty} f(t-\nu T)$	$\sum_{\nu=0}^{k} f_\nu$	$\frac{z}{z-1} F_z(z)$
		$\sum_{\nu=0}^{k-1} f_\nu$	$\frac{1}{z-1} F_z(z)$
Dämpfung	$f(t) e^{\alpha t}$ α beliebig komplex	$f_k \beta^k = f_k e^{\alpha k T}$ $\beta = e^{\alpha T}$	$F_z\left(z e^{-\alpha T}\right) = F_z\left(\frac{z}{\beta}\right)$
Differentiation der Bildfunktion	$\frac{t}{T} f(t)$	$k f_k$	$-z F_z'(z)$
Faltung $f, g = 0,\ t < 0$	$f^*(t) * g^*(t)$ $f(t) * g^*(t)$	$\sum_{\nu=0}^{k} f_\nu g_{k-\nu}$	$F_z(z) \cdot G_z(z)$
Anfangswertsatz	$f(0)$	f_0	$\lim_{z\to\infty} F_z(z)$
Endwertsatz	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	f_∞	$\lim_{z\to 1}(z-1)F_z(z)$ wenn Grenzwert ex.

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Dipl.-Ing. Michael Danzer
Institut MRM, Universität Ulm

Korrespondenzen der z-Transformation

Nr.	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$	$F_z(z) = \mathfrak{Z}\{f(kT)\}$ mit $f(kT) = f(t)\,\vert_{t=kT}$
0	1	$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{2!}{s^3}$	t^2	$T^2 z \frac{z+1}{(z-1)^3}$
4	$\frac{3!}{s^4}$	t^3	$T^3 z \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4}$
5	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n, $n = 1, 2, \ldots$	$T^n z \frac{z^{n-1}+\ldots}{(z-1)^{n+1}}$
6	$\frac{1}{s-\alpha}$ α beliebig komplex	$e^{\alpha t}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T}}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$z \frac{\sin(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$z \frac{z-\cos(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
9	$\frac{s\sin(\phi)+\omega\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t + \phi)$	$z \frac{z\sin(\phi)+\sin(\omega T-\phi)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Dipl.-Ing. Michael Danzer
Institut MRM, Universität Ulm

Korrespondenzen der z-Transformation

Nr.	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$	$F_z(z) = \mathfrak{Z}\{f(kT)\}$ mit $f(kT) = f(t)\mid_{t=kT}$
10	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{\alpha t}\sin(\omega t)$	$z\frac{e^{\alpha T}\sin(\omega T)}{z^2-2ze^{\alpha T}\cos(\omega T)+e^{2\alpha T}}$
11	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{\alpha t}\cos(\omega t)$	$z\frac{z-e^{\alpha T}\cos(\omega T)}{z^2-2ze^{\alpha T}\cos(\omega T)+e^{2\alpha T}}$
12	$\frac{(s-\alpha)\sin(\phi)+\omega\cos(\phi)}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{\alpha t}\cos(\omega t+\phi)$	$z\frac{z\sin(\phi)+e^{\alpha T}\sin(\omega T-\phi)}{z^2-2ze^{\alpha T}\cos(\omega T)+e^{2\alpha T}}$
13	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$	$te^{\alpha t}$	$\frac{Tze^{\alpha T}}{(z-e^{\alpha T})^2}$
14	$\frac{1}{(s-\alpha)^3}$	$\frac{1}{2!}t^2e^{\alpha t}$	$\frac{1}{2}T^2e^{\alpha T}z\frac{z+e^{\alpha T}}{(z-e^{\alpha T})^3}$
15	$\frac{1}{(s-\alpha)^4}$	$\frac{1}{3!}t^3e^{\alpha t}$	$\frac{1}{6}T^3e^{\alpha T}z\frac{z^2+4ze^{\alpha T}+e^{2\alpha T}}{(z-e^{\alpha T})^4}$
16	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$t^ne^{\alpha t}$ $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left(\frac{z}{z-e^{\alpha T}}\right) = T^nze^{\alpha T}\frac{z^{n-1}+\ldots}{(z-e^{\alpha T})^{n+1}}$
17	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\sin(\omega t)$	$Tz\frac{\left(z^2-1\right)\sin(\omega T)}{(z^2-2z\cos(\omega T)+1)^2}$
18	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\cos(\omega t)$	$Tz\frac{\left(z^2+1\right)\cos(\omega T)-2z}{(z^2-2z\cos(\omega T)+1)^2}$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Dipl.-Ing. Michael Danzer
Institut MRM, Universität Ulm

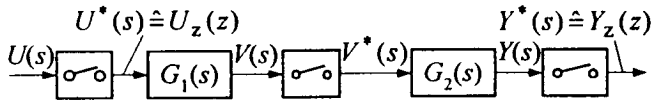
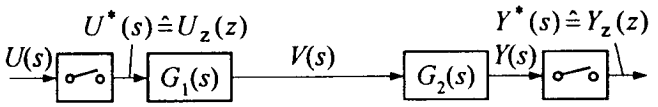
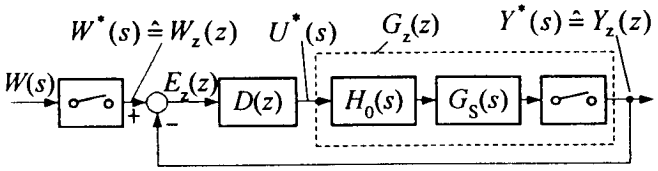
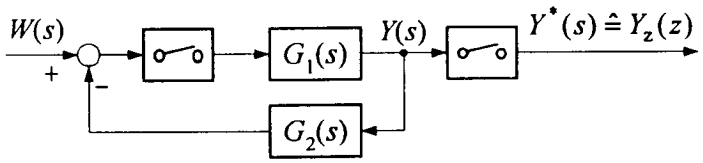
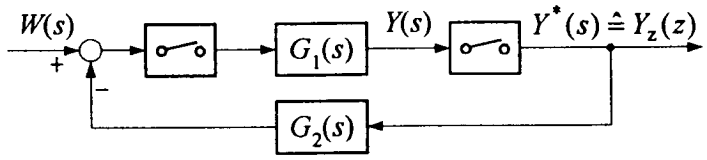
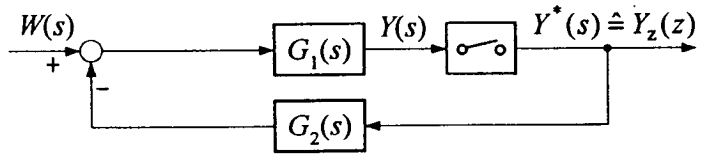
Korrespondenzen der z-Transformation

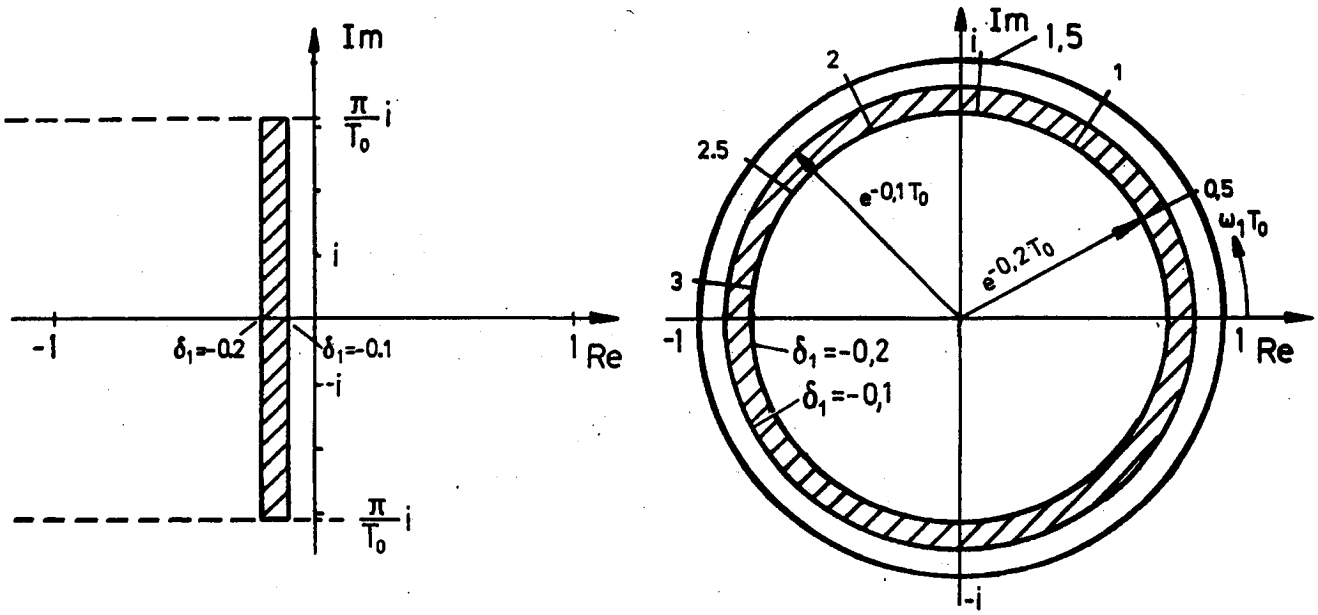
Nr.	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$	$F_z(z) = \mathfrak{Z}\{f(kT)\}$ mit $f(kT) = f(t)\mid_{t=kT}$
19	$\frac{2\omega s\cos(\phi)+\left(s^2-\omega^2\right)\sin(\phi)}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$	$t\sin(\omega t+\phi)$	$Tz\frac{z^2\sin(\omega T+\phi)-2z\sin(\phi)-\sin(\omega T-\phi)}{\left(z^2-2z\cos(\omega T)+1\right)^2}$
20	$\frac{1}{s-\frac{1}{T}\ln(a)}$, $a\neq 0$	$e^{\frac{t}{T}\ln(a)} = a^{\frac{t}{T}}$	$\frac{z}{z-a}$
21		$\binom{t/T}{n-1}$ $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{z}{(z-1)^n}$
22		$\frac{e^{\frac{t}{T}\ln(\beta)}}{\beta^{n-1}}\binom{t/T}{n-1}$	$\frac{z}{(z-\beta)^n}$, $\beta\neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$
23	e^{-mTs}, $m = 0, 1, \ldots$	$\delta(t-mT)$	z^{-m}
24	$\frac{b_0+b_1e^{-Ts}+\cdots+b_me^{-mTs}}{a_0+a_1e^{-Ts}+\cdots+a_ne^{-nTs}}$		$\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$, $a_0\neq 0$
25		$(-1)^{\frac{t}{T}}$	$\frac{z}{z+1}$
26		$\frac{t}{T}\beta^{\frac{t}{T}-1}$	$\frac{z}{(z-\beta)^2}$

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Dipl.-Ing. Michael Danzer
Institut MRM, Universität Ulm

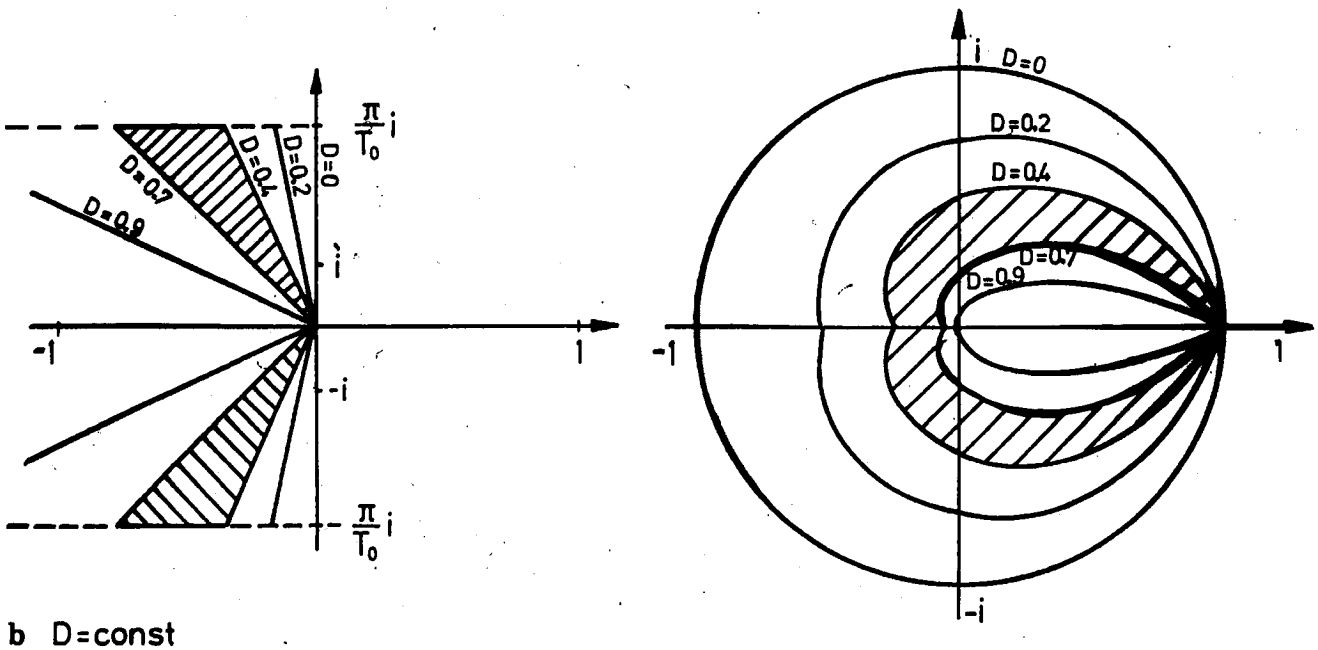
Regelungstechnik II
SS 2008
Arbeitsblatt 5

Strukturen von Abtastsystemen

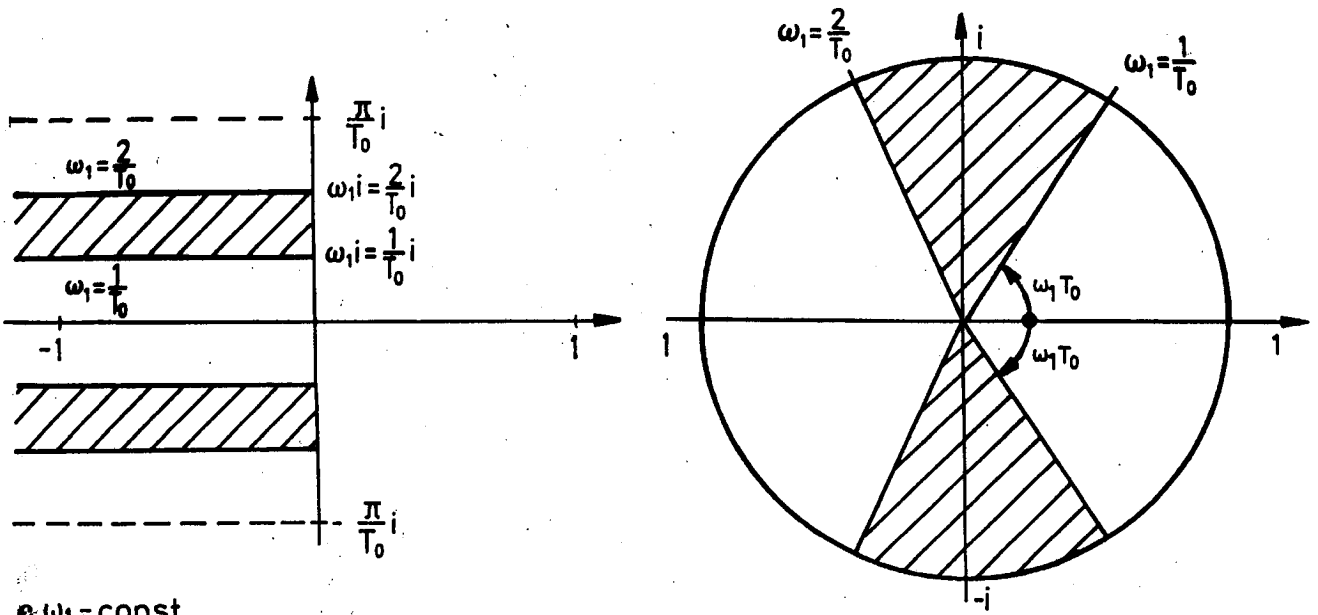
1		$Y_z(z) = G_{1z}(z)G_{2z}(z)U_z(z)$
2		$Y_z(z) = G_1G_{2z}(z)U_z(z)$
3		$Y_z(z) = \dfrac{D(z)G_z(z)}{1+D(z)G_z(z)}W_z(z)$
4		$Y_z(z) = \dfrac{G_{1z}(z)W_z(z)}{1+G_1G_{2z}(z)}$
5		$Y_z(z) = \dfrac{G_{1z}(z)W_z(z)}{1+G_{1z}(z)G_{2z}(z)}$
6		$Y_z(z) = \dfrac{G_1W_z(z)}{1+G_1G_{2z}(z)}$



a δ_1 = const ; T_0 = 1 s



b D = const



c ω_1 = const.

Bild 3.15. Lage von Polen in der s-Ebene und z-Ebene für jeweils konstante Kennwerte, **a** δ_1 = const; T_0 = 1 s; **b** D = const; **c** ω_1 = const

Quelle: Isermann, R.: Digitale Regelsysteme, 2. Auflage, Band I, S. 59, Springer, 1988.

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM, Universität Ulm

Stabilitätssätze von Ljapunow

Stabilität im Kleinen:
Das System $\dot{\underline{x}} = \underline{\mathrm{f}}(\underline{x})$ besitze die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$.
Existiert dann eine Ljapunow–Funktion $V(\underline{x})$, die in einer Umgebung Ω der Ruhelage die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $V(\underline{x})$ und der Gradient $\nabla V(\underline{x})$ sind stetig,
2. $V(\underline{x})$ ist positiv definit,
3. $\dot{V}(\underline{x})$ ist negativ *semi*definit,

dann ist die Ruhelage stabil.

Asymptotische Stabilität im Kleinen:
Ist das System $\dot{\underline{x}} = \underline{\mathrm{f}}(\underline{x})$ stabil und $\dot{V}(\underline{x})$ in Ω negativ definit, so ist die Ruhelage asymptotisch stabil.

Asymptotische Stabilität im Großen mit den schwächsten Voraussetzungen:
Das System $\dot{\underline{x}} = \underline{\mathrm{f}}(\underline{x})$ besitze die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$.
Existiert dann eine Ljapunow–Funktion $V(\underline{x})$, die in einer Umgebung S der Ruhelage die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $V(\underline{x})$ und der Gradient $\nabla V(\underline{x})$ sind stetig,
2. $V(\underline{x})$ ist positiv definit,
3. $\dot{V}(\underline{x})$ ist negativ *semi*definit,
4. die Punktmenge, auf der $\dot{V}(\underline{x}) = 0$ ist, enthält außer $\underline{x} = \underline{0}$ keine Trajektorie
   (Nachweis: Man zeigt, daß $\dot{V}(\underline{x}) = 0$ mit den Zustandsdifferentialgleichungen nur verträglich ist, wenn $\underline{x} = \underline{0}$ gilt. Dies ist sofort erfüllt, falls $\dot{V}(\underline{x})$ negativ definit ist.),
5. die Menge $B = \{\underline{x} | V(\underline{x}) < c\}$ mit einer geeigneten positiven Konstante c liege ganz in S und ist beschränkt,

dann ist die Ruhelage asymptotisch stabil und B gehört zum Einzugsbereich.

Globale Asymptotische Stabilität:
Das System $\dot{\underline{x}} = \underline{\mathrm{f}}(\underline{x})$ besitze die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$.
Existiert dann eine Ljapunow–Funktion $V(\underline{x})$, die im gesamten Zustandsraum die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $V(\underline{x})$ und der Gradient $\nabla V(\underline{x})$ sind stetig,
2. $V(\underline{x})$ ist positiv definit,
3. $\dot{V}(\underline{x})$ ist negativ definit,
4. $\lim\limits_{\|\underline{x}\| \to \infty} V(\underline{x}) \to \infty$ (radial unbeschränkt),

dann ist die Ruhelage global asymptotisch stabil.

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut MRM, Universität Ulm

Struktogramm zur dynamischen Programmierung nach BELLMAN

N Anzahl der Stufen $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$

I Anzahl der quantisierten Zustände $(i = 1, 2, \ldots, I)$

M Anzahl der quantisierten Steuerungen $(m = 1, 2, \ldots, M)$

Dynamische Programmierung nach BELLMAN — numerisches Verfahren für diskrete deterministische Systeme

Berechne $G\left(x^{N,i}\right)$ für $i = 1, 2, \ldots, I$

$k := N$

- $k := k - 1$
- $i := 0$
  - $i := i + 1$
  - $m := 0$
    - $m := m + 1$
    - $x^{k+1,m} := g\left(x^{k,i}, u^{k,m}\right)$
    - **Zustandsbeschränkungen erfüllt?**
      - Ja: $\Gamma\left(x^{k,i}, u^{k,m}\right) := g_0\left(x^{k,i}, u^{k,m}\right) + G\left(x^{k+1,m}\right)$
      - Nein:
  - **Bis** $m = M$
  - $G\left(x^{k,i}\right) := \min\limits_{u^{k,m}} \left\{\Gamma\left(x^{k,i}, u^{k,m}\right)\right\} \;\rightarrow\; m^* \quad (m = 1, 2, \ldots, M)$
  - optimale Steuerung $u^*\left(x^{k,i}\right) := u^{k,m^*}$
  - $u^*\left(x^{k,i}\right)$, $G\left(x^{k,i}\right)$ speichern
- **Bis** $i = I$

Bis $k = 0$

Ausgabe der Ergebnisse

Dipl.-Ing. Andreas Rauh
Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik
Universität Ulm

1 Definitionen

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{d.h.} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Transposition von Vektoren

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Zeitableitung eines Vektors $x = x(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Gradient einer skalaren Funktion $f_0(x) = f_0(x_1, \ldots, x_n);\ x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f_0(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Hessematrix $\mathbf{H}$ einer skalaren Funktion $f_0(x);\ x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 f_0(x)}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^T \tag{5}$$

Jacobimatrix $\mathbf{J}$ einer Vektorfunktion $f(x);\ f \in \mathbb{R}^m;\ x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial f_m}{\partial x}\right)^T \end{bmatrix} \tag{6}$$

2 Differentiationsregeln

Skalarprodukt von zwei Vektorfunktionen: $f \in \mathbb{R}^m;\ g \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial \left(g(x)^T f(x) \right)}{\partial x} = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} \right)^T f(x) + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T g(x) \tag{7}$$

Produkt einer skalaren Funktion $g_0(x)$ mit einer Vektorfunktion $f(x)$

$$\frac{\partial \left(g_0(x) f(x) \right)}{\partial x} = f(x) \left(\frac{\partial g_0(x)}{\partial x} \right)^T + g_0(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} \tag{8}$$

Spezialfälle: Im Folgenden sind die Matrix $\mathbf{A}$ bzw. der Vektor a keine Funktionen der Variablen x

Lineare Terme: $$\frac{\partial (\mathbf{A}x)}{\partial x} = \mathbf{A} \ , \qquad \frac{\partial \left(x^T \mathbf{A}\right)}{\partial x} = \mathbf{A} \ , \qquad \frac{\partial \left(a^T x\right)}{\partial x} = a \ , \qquad \frac{\partial \left(x^T a\right)}{\partial x} = a \tag{9}$$

Quadratische Terme: $$\frac{\partial \left(x^T \mathbf{A} x\right)}{\partial x} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) x \tag{10}$$

Spezialfall: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ $$\frac{\partial \left(x^T \mathbf{A} x\right)}{\partial x} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) x = 2\mathbf{A}x \tag{11}$$

Kettenregel für eine skalare Funktion f_0:

$$\frac{\partial f_0 \left[z \left(w \left(\ldots \left(y \left(x\right)\right)\right)\right)\right]}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^T \cdots \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^T \frac{\partial f_0}{\partial z} \quad \overset{\text{Spezialfall:}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial f_0 \left[y \left(x\right)\right]}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^T \frac{\partial f_0}{\partial y} \tag{12}$$

Kettenregel für eine Vektorfunktion f:

$$\frac{\partial f \left[z \left(w \left(\ldots \left(y \left(x\right)\right)\right)\right)\right]}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right) \cdots \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tag{13}$$

Differentiation zeitabhängiger Vektoren $x\left(t\right)$, $y\left(t\right)$ und Matrizen $\mathbf{A}\left(t\right)$, $\mathbf{B}\left(t\right)$:

$$\begin{aligned} &\frac{d\left(x^T y\right)}{dt} = \dot{x}^T y + x^T \dot{y} \ , \qquad \frac{d\left(\mathbf{A}x\right)}{dt} = \dot{\mathbf{A}}x + \mathbf{A}\dot{x} \ , \qquad \frac{d\left(\mathbf{AB}\right)}{dt} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{B}} \ , \\ &\frac{d\left(x^T \mathbf{A} x\right)}{dt} = \dot{x}^T \mathbf{A} x + x^T \dot{\mathbf{A}} x + x^T \mathbf{A} \dot{x} \end{aligned} \tag{14}$$

3 Quadratische Formen

Beispiel einer reellen quadratischen Form für $x \in \mathbb{R}^2$:
$Q\left(x\right) = \tilde{a}_{11} x_1^2 + \tilde{a}_{12} x_1 x_2 + \tilde{a}_{21} x_2 x_1 + \tilde{a}_{22} x_2^2 = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$ mit den Polynomkoeffizienten $a_{11} = \tilde{a}_{11}$, $a_{12} = 0.5\left(\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21}\right)$, $a_{22} = \tilde{a}_{22}$

Allgemein kann eine reelle quadratische Form durch folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$Q\left(x\right) = \left\|x\right\|_{\mathbf{A}}^2 = x^T \mathbf{A} x \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Definitheit quadratischer Formen:

$Q\left(x\right) > 0$	$\forall x \neq 0$	positiv definit	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{A}$ ist positiv definit: $\mathbf{A} > 0$
$Q\left(x\right) \geq 0$	$\forall x$	positiv semidefinit	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{A}$ ist positiv semidefinit: $\mathbf{A} \geq 0$
$Q\left(x\right) < 0$	$\forall x \neq 0$	negativ definit	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{A}$ ist negativ definit: $\mathbf{A} < 0$
$Q\left(x\right) \leq 0$	$\forall x$	negativ semidefinit	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{A}$ ist negativ semidefinit: $\mathbf{A} \leq 0$

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Definitheit von $\mathbf{A}$

	$\mathbf{A} > 0$	$\mathbf{A} \geq 0$	$\mathbf{A} < 0$	$\mathbf{A} \leq 0$
Sylvester-Kriterium	$D_i > 0$	$D_i \geq 0$	$D_i < 0$	$D_i \leq 0$
Eigenwerte-Kriterium	$\lambda_i\left(\mathbf{A}\right) > 0$, reell	$\lambda_i\left(\mathbf{A}\right) \geq 0$, reell	$\lambda_i\left(\mathbf{A}\right) < 0$, reell	$\lambda_i\left(\mathbf{A}\right) \leq 0$, reell

Liegt keiner dieser Fälle vor, ist $\mathbf{A}$ indefinit.

Nordwestliche Unterdeterminanten D_i einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$

$$D_1 = a_{11} \ , \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ , \qquad \ldots \ , \qquad D_n = \det\left(\mathbf{A}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{16}$$

4 Invertieren und Transponieren von Matrizen

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T; \qquad \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}; \qquad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{17}$$

Definitheit von invertierten Matrizen

$$\mathbf{A} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{A} < 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} < 0 \tag{18}$$

Matrix-Inversionslemma:
$\mathbf{A}$ invertierbar, u und v Spaltenvektoren und $\mathbf{A} + u\,v^T$ invertierbar:

$$\left(\mathbf{A} + u\,v^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\left(\mathbf{A}^{-1}u\right)\left(v^T\mathbf{A}^{-1}\right)}{1 + v^T\mathbf{A}^{-1}u} \tag{19}$$

bzw. allgemein für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1} \tag{20}$$

5 Pseudoinverse rechteckiger Matrizen

Für rechteckige Matrizen $\mathbf{A}$ ist die Berechnung von $\mathbf{A}^{-1}$ nicht möglich. Es gelten jedoch folgende Definitionen für die Berechnung einer Pseudoinversen:
Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$, $\text{Rang}\,(\mathbf{A}) = m$: Moore-Penrose- oder Rechts-Pseudoinverse

$$\mathbf{A}^{\#} = \mathbf{A}^T\left(\mathbf{AA}^T\right)^{-1} \quad \text{es gilt} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\#} = \mathbf{I}_m \tag{21}$$

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, $\text{Rang}\,(\mathbf{A}) = n$: Links-Pseudoinverse

$$\mathbf{A}^{\square} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T \quad \text{es gilt} \quad \mathbf{A}^{\square}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}_n \tag{22}$$

6 Determinante einer Hypermatrix

Die Matrix $\mathbf{A}$ sei in 4 Matrizen partitioniert, so dass $\mathbf{F}$ und $\mathbf{J}$ quadratisch und $\mathbf{F}$ bzw. $\mathbf{J}$ regulär sind

$$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\\ \mathbf{H} & \mathbf{J}\end{bmatrix} = \det(\mathbf{F})\cdot\det\left(\mathbf{J} - \mathbf{HF}^{-1}\mathbf{G}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad = \det(\mathbf{J})\cdot\det\left(\mathbf{F} - \mathbf{GJ}^{-1}\mathbf{H}\right) \tag{23}$$

7 Matrizen-Exponentialfunktion

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{24}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}_n + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^it^i}{i!} \tag{25}$$

$$\left(e^{\mathbf{A}t}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{I}_n \tag{26}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}t} = \mathbf{M}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{M}^{-1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}: \text{Modalmatrix für } \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ wenn } i \neq j,\ \mathbf{\Lambda} = \text{diag}\,(\lambda_i) \tag{27}$$

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \tag{28}$$

$$\int e^{\mathbf{A}t}dt = \mathbf{A}^{-1}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}^{-1} \quad , \quad \text{wenn } \mathbf{A} \text{ regulär} \tag{29}$$